



ANAIS
XI SEMANA DA MATEMÁTICA
IV WORKSHOP DO PROFMAT
UTFPR TOLEDO

Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Página do Evento:

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/XI_semat/

Toledo – PR

Mai - 2024



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

S471 Semana Acadêmica da Matemática UTFPR Toledo (11: 2024:
Toledo, PR)

Anais da XI Semana Acadêmica da Matemática UTFPR,
Toledo (PR), 06 a 10 de maio de 2024. / organizado pelo
Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus
Toledo. - Toledo, PR, 2024.

103 f.

Modo de Acesso: World Wide Web:

< https://www2.td.utfpr.edu.br/semat/XI_semat/>.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo -
Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Carla Rech Ribeiro CRB 9/1685

Biblioteca UTFPR / Toledo



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo**
**Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

Sumário

1.	INTRODUÇÃO	4
2.	OBJETIVOS.....	5
3.	PÚBLICO ALVO	5
4.	PERÍODO DE REALIZAÇÃO	6
5.	PERIODICIDADE DO EVENTO.....	6
6.	REALIZAÇÃO	6
6.1.	Comissão Organizadora.....	6
6.2.	Comissão de Apoio.....	6
6.3.	Comissão Científica	6
6.4.	Comissão de Pareceristas	7
7.	CRONOGRAMA.....	8
8.	OFICINAS	8
9.	TRABALHOS	8



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

1. Introdução

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciou no ano de 2013 e estará, em 2024, na sua XI edição, cujo tema discutirá “*Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino*”. A programação foi desenvolvida de forma presencial e remota.

O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura. O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras e comunicações orais.

Participam do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados do Brasil.

A SEMAT está em sua décima primeira edição, indicando uma consolidação na realização do evento, sendo esperado, principalmente, pelos acadêmicos do curso e docentes da região. A cada ano contamos com a participação de mais alunos e docentes de instituições da região de Toledo, como é o caso de instituições de Assis Chateaubriand, Cascavel, Foz do Iguaçu, Francisco Beltrão, Palotina, Pato Branco, etc.

Vários temas já foram discutidos e abordados nas semanas da matemática anteriores: “A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão” (V SEMAT – 2017), “A Matemática na Harmonia da Natureza” (IV SEMAT – 2016), “A matemática e seus caminhos: vencendo limites” (III SEMAT – 2015), “Matemática em foco: integrando saberes, compartilhando experiências” (II SEMAT – 2014) e “Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática” (I SEMAT – 2013).

Levando em consideração o contexto tecnológico em que vivenciamos e as características de nossa instituição, primeira universidade tecnológica do país, pensamos ser pertinente abordar na XI SEMAT a temática: “Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino”.

A agenda do evento contou com a palestra de abertura ministrada pelo Prof. Fabio Alexandre Borges (UEM – Maringá) que falou sobre Potencialidades do uso de tecnologias digitais para uma educação matemática mais inclusiva.



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

No segundo dia do evento, ocorreram as cinco oficinas.

No terceiro dia do evento, foram realizadas duas Mesas de Discussões: Mesa 1 - Inclusão e Tecnologias (remoto), com a Profa. Dra. Sonia Campello (Colégio FAG – Cascavel), Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira (UNIOESTE/UNESPAR - Cascavel) e Mesa 2 – Diversidade (remoto), com o Profa. Ma. Andrea Geraldini Sasso (Prefeitura Municipal de Boa Esperança) e Profa. Ma. Erikah Pinto Souza (Secretaria de Educação – Itaitinga).

No quarto dia do evento, foi realizada a apresentação de trabalhos por meio de comunicações orais.

Já no quinto e último dia do evento, foi realizado o IV Workshop do PROFMAT onde ocorreram apresentação de dois trabalhos por meio de comunicações orais. Por conta das fortes chuvas e alagamentos no estado do Rio Grande do Sul, a Mesa Redonda: Produtos Educacionais com a Profa. Dra. Carmen Vieira Mathias (UFSM – Santa Maria), Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan (UTFPR – Toledo) e Profa. Ma. Amanda Carolina Previatti (SEED – Toledo) foi cancelada, uma vez que a Profa. Carmen membro da mesa redonda se encontrava sem energia elétrica na cidade de Santa Maria. Esta mesa redonda deverá ser remarcada para outra data. No encerramento da semana acadêmica, foi realizado o VIII SARAU da Matemática com apresentações artísticas e culturais de toda a comunidade acadêmica.

2. Objetivos

- Promover a integração e a capacitação de alunos e professores, bem como da comunidade acadêmica local e regional, a partir da discussão de temáticas atuais e da realização de oficinas com temas matemáticos pertinentes.
- Discutir a formação docente de Matemática à luz da BNCC com suas políticas, práticas e tendências.
- Oportunizar atividades que relacionem conteúdos estudados em sala de aula com experiências profissionais de professores e pesquisadores, visando complementar a formação dos acadêmicos.
- Refletir sobre uso das tecnologias digitais para o ensino/aprendizagem da matemática;
- Promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas;
- Viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.
- Promover a inclusão social para pessoas com deficiência visual por meio do Ensino da Matemática.
- Incentivar a divulgação das pesquisas realizadas por discentes e docentes nos diversos níveis e áreas da Matemática.

3. Público Alvo



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

4. Período de Realização

O evento foi realizado nos dias 06 a 10 de maio de 2024.

5. Periodicidade do Evento

Esta foi a XI Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

6. Realização

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora.

6.1. Comissão Organizadora

Profa. Dra. Marcia Regina Piovesan - **Coordenadora da SEMAT**

Profa. Dra. Araceli Ciotti de Marins

Profa. Dra. Daniela Trentin Nava

Prof. Dra. Dione Ines Christ Milani

Prof. Dr. Renato Francisco Merli

Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade

Prof. Dr. Sérgio Flávio Schmitz

Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

6.2. Comissão de Apoio

Isabela Santana

Mauro André Junges Rech

6.3. Comissão Científica



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo**
**Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo – Coordenador

Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade – Vice-Coordenador

6.4. Comissão de Pareceristas

Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo – **Coordenador (XI SEMAT)**

Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade – **Coordenador (IV WORKSHOP DO PROFMAT)**

Profa. Ms. Aline Keryn Pin

Profa. Dra. Aracéli Ciotti de Marins

Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas

Profa. Dra. Daniela Trentin Nava

Profa. Dra. Dione Inês Christ Milani

Prof. Dr. Emerson Tortola

Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso

Prof. Ms. Heloisa Cristina da Silva

Prof. Ms. Ivan José Coser

Profa. Dra. Jahina Fagundes de Assis Hattori

Profa. Dra. Karen Carrilho da Silva Lira

Prof. Dr. Leandro Antunes

Prof. Ms. Loreci Zanardini

Profa. Dra. Marcia Regina Piovesan

Prof. Dr. Renato Francisco Merli

Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes

Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra

Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

Profa. Dra. Rosângela Aparecida Botinha Assumpção

Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

Profa. Dra. Vanessa Largo

Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo



**XI Semana da Matemática da UTFPR e IV
WORKSHOP do PROFMAT – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino**

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024.

7. Cronograma

Data	Horário	Programação	Local
06/05/2024	19:00 – 22:30	Solenidade e Palestra de Abertura	UTFPR
07/05/2024	19:00 – 22:30	Oficinas	UTFPR
08/05/2024	19:00 – 22:30	Mesas de Discussões	YouTube
09/05/2024	19:00 – 22:30	Comunicações Orais	UTFPR
10/05/2024	19:00 – 22:30	IV Workshop do PROFMAT e VIII SARAU	MEET/YouTube

8. Oficinas

A XI SEMAT contou com a apresentação de seis oficinas das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes e discentes da UTFPR e outras instituições.

OFICINA [01] - Módulos: A generalização dos espaços vetoriais.

Responsável: Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra (UTFPR – Toledo).

OFICINA [02] - Porcentagem na reta numérica: vamos conversar sobre os racionais?

Responsáveis: Profa. Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Prof. Me. Rodrigo Vitorassi e Profa. Dra. Vanessa Largo Andrade (UTFPR – Toledo).

OFICINA [03] - Funções básicas do GEOGEBRA para análise de funções trigonométricas simples.

Responsável: Leandro Charava (UTFPR – Toledo).

OFICINA [04] - O segredo por trás da beleza: Desvendando os segredos da proporção áurea, da matemática à natureza.

Responsável: Mauro André Junges Rech (UTFPR – Toledo).

OFICINA [05] - Cubo Mágico: A Arte da Resolução.

Responsável: Nilson Liberato Neto e Rafael Figura Novato da Luz (UTFPR – Toledo).

9. Trabalhos

Nesta décima e primeira edição da SEMAT e quarta edição do WORKSHOP do PROFMAT, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral.

Na sequência, são apresentados os trabalhos completos apresentados.



MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ESTIMAR A RENDA DE UM VÍDEO DO YOUTUBE A PARTIR DE SUA DURAÇÃO E NÚMERO DE VISUALIZAÇÕES

Leandro Wrzecionek de Brito
 Universidade Tecnológica Federal do
 Paraná - UTFPR
 leandrobrito@alunos.utfpr.edu.br

Luana Caroline Junges
 Universidade Tecnológica Federal do
 Paraná - UTFPR
 luanacarolinejunges@hotmail.com

Rodolfo Eduardo Vertuan
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
 rodolfovertuan@utfpr.edu.br

Resumo

A plataforma de vídeos YouTube não expõe de maneira transparente seu sistema de monetização a qualquer usuário, limitando-se a apresentar informações sobre os requisitos necessários para que um canal possa ser monetizado. No entanto, ao obter dados privilegiados sobre a remuneração de um canal com 20 mil inscritos, foi possível, por meio da Modelagem Matemática, desenvolver um modelo representativo para previsão de ganhos, levando em consideração apenas uma variável: o número de visualizações de um vídeo. Através do software CurveExpert, determinou-se uma função de potência na construção do modelo matemático para representar os dados. Apesar das simplificações inerentes ao processo de modelagem, obteve-se, na validação do modelo, um erro relativo de 17,32% entre o valor real e o estimado.

Palavras-chave: Monetização. Vídeos. Youtube. Modelo matemático.

1 Introdução

O Youtube é uma plataforma de compartilhamento de vídeos online que permite aos usuários carregar, assistir, compartilhar e interagir com uma grande variedade de recursos audiovisuais. O site é organizado através de canais que são criados por indivíduos, empresas, organizações e celebridades e os espectadores têm a possibilidade de se inscreverem nos canais que mais lhe interessam. Ainda, oferece recursos de interação, como curtidas, comentários e compartilhamentos, que permitem aos espectadores expressarem suas opiniões e engajarem com o criador do conteúdo, o que impulsiona o canal.

Além disso, o Youtube possui um sistema de monetização que possibilita aos criadores de conteúdo uma remuneração por meio da exibição de anúncios em seus vídeos. Ainda, há a possibilidade de rendimentos com a criação de vídeos e conquista de um público fiel, em que o canal pode se qualificar para o Programa de Parcerias do Youtube.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Para isso, o site exige ter, no mínimo, 1.000 inscritos e 4.000 horas de tempo de exibição nos últimos 12 meses. Entretanto, a renda por vídeo não é fixa, mas determinada por um conjunto de fatores.

Entre os principais, pode-se citar o número de visualizações, o tempo assistido por visualização, as propagandas que passaram naquele vídeo, dados do público que assistiram os vídeos - a exemplo da idade, gênero e nacionalidade. Essas são só algumas das métricas utilizadas para efetuar esse cálculo. Sendo assim, estimar esse valor pode ser algo bastante tortuoso, principalmente dispondo apenas de dados públicos.

Dessa forma, o intuito desse artigo é construir, por meio da modelagem matemática, uma estimativa da renda de um vídeo para um canal que faça parte do Programa de Parcerias do Youtube.

Para tanto, utilizaremos a modelagem matemática que, conforme Barbosa (2004), está associada à problematização e investigação. O primeiro aspecto está relacionado com a criação de perguntas ou desafios, já o segundo com a busca, escolha, organização e análise de dados, bem como de reflexões acerca dessas informações. Esse processo permite formular questionamentos e conduzir investigações que estimulam o pensamento reflexivo e crítico.

Essa metodologia ativa é abarcada através de um processo minucioso que se dá da seguinte forma: um problema, que constitui a situação inicial, a formulação de hipóteses, realização de simplificações, matematização, obtenção e análise dos resultados, um modelo matemático, que represente uma caracterização e solução do problema inicial (TORTOLA; ALMEIDA, 2013) e, por fim, a comunicação dos resultados e o debate em torno deles.

O intuito da modelagem matemática é que situações sejam expressas por meio de modelos matemáticos, ou seja, que possam se utilizar de conceitos matemáticos para justificar ou aproximar soluções e resoluções de problemas que permeiam o cotidiano (BEAN, 2001).

A modelagem matemática é uma maneira de jogar luz à matemática presente na realidade, constituindo-se uma metodologia que permite, através de investigações, estudar e solucionar situações em que a matemática não está, a priori, tão aparente, assim como no caso da remuneração do dono de um canal monetizado pelo Youtube. Através dela, pode ser criado um modelo que, partindo de informações já existentes, possa determinar o valor aproximado a ser recebido por um vídeo partindo apenas da quantidade de visualizações que ele possui.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Neste trabalho, a hipótese tomada foi a de que a remuneração estava relacionada apenas às visualizações. Assim, as simplificações necessárias foram:

- As horas assistidas foram determinadas de acordo com o tamanho de vídeo;
- Variáveis como localização geográfica da audiência, engajamento e anúncios foram desconsideradas.

2 Materiais e Métodos

Os dados monetários de um canal dificilmente são disponibilizados de forma integral e detalhada por seus criadores, tornando o modelo em questão sinuoso e de difícil construção. Contudo, um dos autores deste artigo trabalha nesse meio e teve acesso a informações que costumam ser custosas.

É crucial determinar o panorama do canal que forneceu as informações, para que se possa compreender o modelo a ser construído, que será delineado de acordo com as seguintes informações:

- Canal com 20 mil inscritos;
- Conteúdo: economia, filosofia política e tecnologia;
- Público: 94% homens;
- Faixa Etária: 31,1% de 35 a 44 anos.

As informações foram coletadas manualmente, contando com dados de visualização, horas assistidas e contabilizadas mensalmente, informações dispostas na tabela 1:

Tabela 1 – informações coletadas no canal

Mês	Pagamento (USD)	Visualizações	Horas Assistidas
jan/22	12,14	10698	1367
fev/22	19,18	15843	1808
mar/22	14,53	15521	1688
abr/22	15,75	14812	1649
mai/22	21,72	21329	2103
jun/22	50,81	48687	4063
jul/22	27,64	30289	2602
ago/22	34,39	31555	2774



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

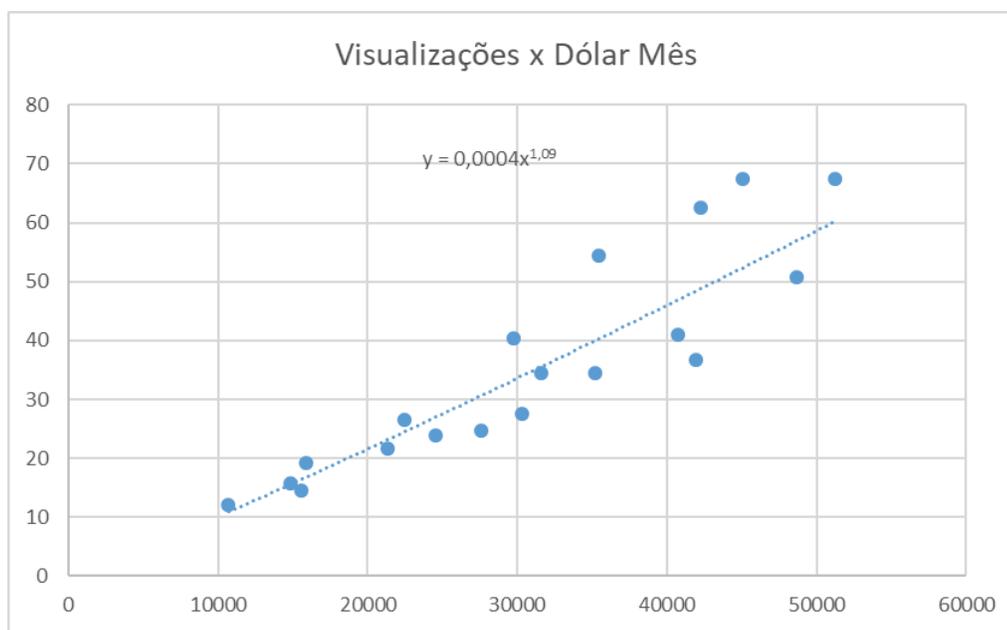
Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

set/22	36,71	41903	3782
out/22	24,67	27589	2602
nov/22	23,84	24570	2330
dez/22	26,44	22489	2454
jan/23	40,93	40727	4166
fev/23	34,51	35219	3685
mar/23	40,47	29724	3805
abr/23	54,5	35457	5187
mai/23	62,59	42237	6149
jun/23	67,39	45067	5529
jul/23	67,46	51272	5584

Fonte: Autores (2023)

Esses dados podem ser interpretados graficamente, de forma separada e combinada, como seguem nas figuras abaixo:

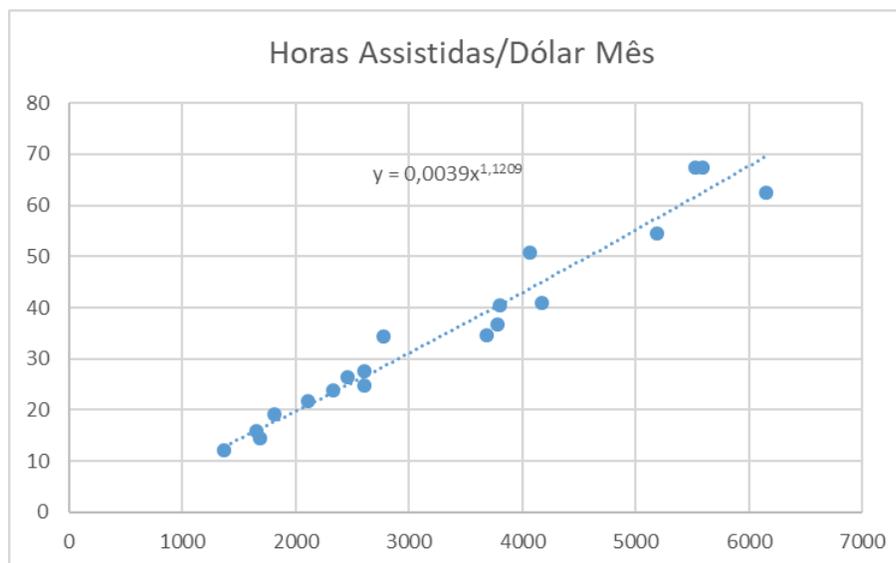
Figura 1 – Combinação do número de visualizações por dólar recebido



Fonte: Autores (2023)



Figura 2 – Combinação do número de horas assistidas por dólar recebido



Fonte: Autores (2023)

Tomou-se a linha de tendência na forma de potência, pois assim ela passa pela origem, o que representa uma perspectiva mais próxima à realidade. Caso contrário, obtinha-se linhas de tendência lineares com coeficiente linear negativo. De forma prática, é o mesmo que dizer que para vídeos com poucas visualizações a renda é negativa.

A função $f(x) = 0,0004x^{1,09}$ descreve a renda de um vídeo dado seu número de visualizações. Não é um modelo muito preciso. Ao observar de forma manual, alguns vídeos chegam a ter um erro relativo¹ de 118%. Ao tomar $x \geq 6$, o erro relativo médio dessa função diminui consideravelmente, para aproximadamente 47,7%. Dessa forma, no restante do trabalho tomamos apenas esse período para x , pois os dados coletados para esse tipo de vídeo em outros intervalos são inconclusivos.

Nota-se, também, que a função que descreve a renda de acordo com as horas assistidas tem pontos menos dispersos, o que poderia ser uma boa métrica para calcular a renda de um vídeo. Mas há um problema: essa métrica não está disponível para o público, apenas para os criadores. Segue disso uma hipótese: é possível descrever de forma mais precisa a renda de um vídeo através de suas visualizações e duração do vídeo? Optou-se

¹ O erro relativo é definido como o erro absoluto em relação ao tamanho da medição.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

aqui pela métrica “duração do vídeo” pois, assumindo que os vídeos terão uma visualização média equivalente, é possível fazer uma estimativa das horas assistidas por meio da duração do vídeo. Além disso, é uma métrica disponível para qualquer usuário da plataforma.

O paradigma que se buscou encontrar é a equação que descreve a renda de um vídeo a partir de suas visualizações e duração do vídeo. O objetivo é criar uma função $g(x, y)$ definida em partes - para cada faixa de duração de vídeos haverá uma equação. Ou seja, por exemplo: para vídeos entre 6 e 8 minutos, há uma equação. Para vídeos entre 8 e 10 minutos, há outra equação.

Para isso, foram criados dois *scripts* em Python, uma linguagem de programação de alto nível, para coletar três informações individuais de cada vídeo do canal: faturamento, visualizações e duração do vídeo. No total, foram 228 vídeos analisados. Então, os dados foram divididos em sete conjuntos, cada um representado por uma cor:

- Vídeos até 6 minutos (vermelho);
- Vídeos entre 6 e 8 minutos (azul);
- Vídeos entre 8 e 10 minutos (verde escuro);
- Vídeos entre 10 e 12 minutos (roxo);
- Vídeos entre 12 e 14 minutos (laranja);
- Vídeos entre 14 e 16 minutos (rosa);
- Vídeos com mais de 16 minutos (marrom);

Não há muitos vídeos menores do que 6 minutos e maiores do que 16 nesse canal, por isso optou-se por deixá-los na mesma classe.

Para o levantamento dos dados, foi utilizada a API do YouTube para coletar a renda, o número de views, a porcentagem assistida e os minutos assistidos de cada vídeo por meio de um script em Python. A API do YouTube não disponibiliza a duração do vídeo, por isso utilizou-se a porcentagem assistida e os minutos assistidos para obter a duração do vídeo, por meio de uma regra de 3. Tendo esses dados, se utilizou o pacote `openpyxl` para exportar esses dados diretamente para uma planilha Excel.

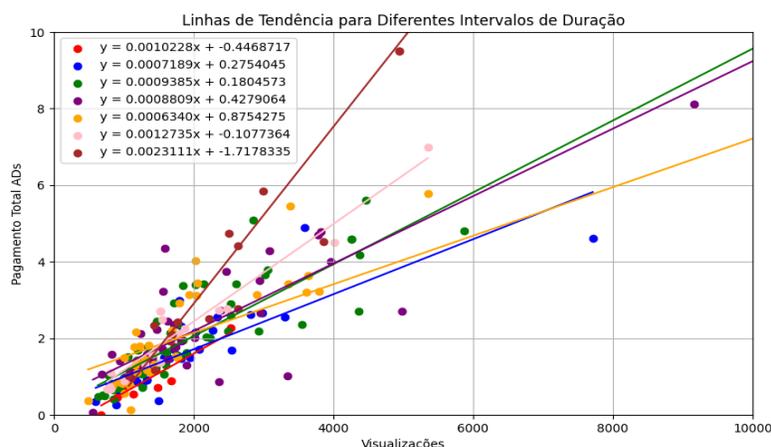
Não serão disponibilizados neste trabalho os scripts utilizados pois eles possuem dados sensíveis.

3 Resultados e Discussão



Ainda utilizando Python, foi realizada uma regressão linear dos pontos, ilustrada na figura abaixo:

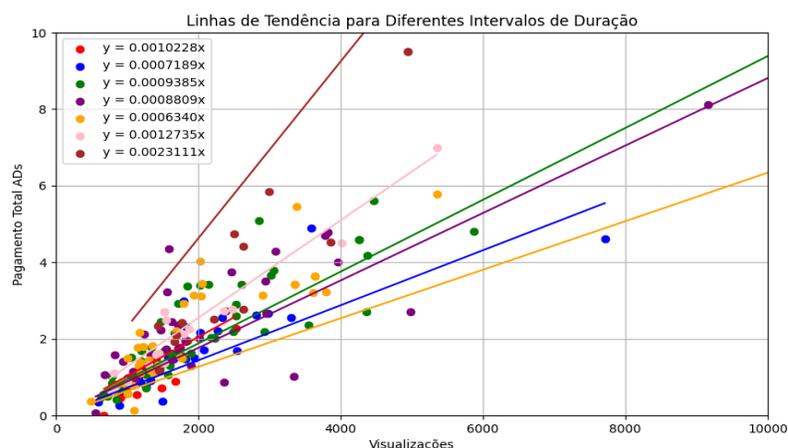
Figura 3 – Linhas de tendência para diferentes intervalos de duração



Fonte: Autores (2023)

Contudo, os pontos não passavam pela origem. Logo, foi necessário ajustar a regressão para que passasse pela origem:

Figura 4 – Linhas de tendência para diferentes intervalos de duração passando pela origem



Fonte: Autores (2023)

Ao analisar os dados, pode-se verificar algumas informações inesperadas, por exemplo, os vídeos entre 12 e 14 minutos possuem o pior desempenho de renda para o



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

canal, mesmo, possivelmente, tendo mais horas assistidas. Ainda, os vídeos entre 10 e 12 minutos também possuem um rendimento abaixo do esperado, ao mesmo tempo em que os vídeos de até seis minutos teriam um dos melhores desempenhos, se fossem considerados.

Após essas conclusões prévias, foi utilizado o *software* CurveExpert para encontrar a melhor curva que se encaixasse com os dados do coeficiente angular encontrado (Figura 4). No caso, o *CurveExpert* indicou a curva de *Modified Hoerl* como curva com maior R^2 .

A partir disso, criou-se o seguinte modelo:

$$f(x, y) = \frac{ab^{\frac{1}{x}}x^c y}{1000}$$

em que $a = 0,00348$, $b = 0,0001046$, $c = 0,98739$, x a duração do vídeo e y o número de visualizações.

Ao calcular o erro relativo médio, obtém-se 32,4%, considerando apenas pontos com $x \geq 6$. O erro é menor se comparado ao modelo apenas com a variável visualizações. Contudo, serão explorados outros modelos com o intuito de reduzi-lo.

A primeira adaptação realizada, foi refazer as regressões lineares utilizando o *software* CurveExpert pois, visualmente, as regressões lineares feitas pela biblioteca Numpy do Python não pareciam se encaixar bem aos dados.

Constatou-se, novamente, que o conjunto de dados até 6 minutos contém poucos pontos e que são discrepantes dos outros dados. Dessa forma, esse novo modelo é limitado a vídeos maiores do que 6 minutos. Novamente, buscando a melhor curva para a tendência dos coeficientes angulares obtidos no *CurveExpert* optou-se por uma curva de potência, dada sua simplicidade.

Dessa forma, o modelo encontrado é $F(x, y) = ax^b y$ com x sendo a duração do vídeo e $x \geq 6$, y sendo as visualizações, $a = 0,000325$ e $b = 0,4785$. Esse modelo tem erro relativo médio de 25,5%, sendo o melhor modelo obtido até o momento. Dada as inúmeras variáveis que influenciam a renda de um vídeo, concluiu-se que este é um bom modelo, considerando apenas métricas públicas, apesar do erro relativo ainda ser 25,5%.

Após a análise do trabalho sobre o lançamento de aviões de papel de Vertuan e Silva (2018), achou-se necessário realizar uma modelagem similar para verificar qual seria o modelo resultante. Ao fazer o cálculo do rendimento médio por 1.000 visualizações, para os mesmos intervalos de duração de vídeo já apresentados anteriormente, obteve-se:

- 0,863 dólar para vídeos com 6 a 8 minutos;
- 1,036 dólar para vídeos com 8 a 10 minutos;



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

- 1,138 dólar para vídeos com 10 a 12 minutos;
- 1,096 dólar para vídeos com 12 a 14 minutos;
- 1,182 dólar para vídeos com 14 a 16 minutos;
- 1,636 dólar para vídeos maiores do que 16 minutos.

Sendo assim, tem-se o seguinte modelo:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ay}{1000}, & 6 \leq x < 8 \\ \frac{by}{1000}, & 8 \leq x < 10 \\ \frac{cy}{1000}, & 10 \leq x < 12 \\ \frac{dy}{1000}, & 12 \leq x < 14 \\ \frac{ey}{1000}, & 14 \leq x < 16 \\ \frac{fy}{1000}, & x \geq 16 \end{cases}$$

Com $a = 0,863$, $b = 1,036$, $c = 1,138$, $d = 1,096$, $e = 1,182$, $f = 1,636$, y o número de visualizações e x a duração do vídeo. Como resultado, obtém-se um erro relativo médio de 24,4%.

No entanto, esse modelo não será adotado pois:

- 1) Pouco elegante – o modelo anterior é mais simples e tem um erro relativo muito próximo a este último modelo.
- 2) Entende-se que ele tem o menor erro relativo porque se encaixa melhor com o conjunto de dados atuais – mas não necessariamente será bom para prever dados futuros e, muito menos, será bom para prever dados de outros canais, devido ao comportamento não linear entre o aumento do tamanho do vídeo e a renda. Pode ser que isso seja um fato que acontece apenas neste canal que temos o conjunto de dados.

Por fim, após definir o modelo matemático determinado para essa situação, é essencial validá-lo. Para isso, ele será aplicado

Para validar, aplicamos o modelo:

$$F(x, y) = ax^b y, \quad x \geq 6, \quad a = 0,000325, \quad b = 0,4785$$

para os vídeos que foram publicados neste canal no mês de agosto – dados que não estavam incluídos nos dados iniciais da modelagem. Calculando o erro relativo entre os valores do modelo e os dados reais, tem-se,



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Tabela 2 - erro relativo proveniente da aplicação do modelo nos vídeos publicados pelo canal em agosto/2023

Agosto	Erro relativo
Vídeo 1	0,30204778
Vídeo 2	0,19494204
Vídeo 3	0,1072407
Vídeo 4	0,0911414
Vídeo 5	0,41049563
Vídeo 6	0,17465753
Vídeo 7	0,33731778
Vídeo 8	0,0004
Vídeo 9	0,08710106
Vídeo 10	0,01415373
Vídeo 11	0,14872798
Vídeo 12	0,0903076
Vídeo 13	0,12065332

Fonte: Autores (2023)

Tendo assim um erro relativo médio de 17,32%, o que consideramos muito bom, dado o caráter dos dados.

4 Considerações Finais

A renda de um canal do Youtube considera diversas variáveis e torna difícil para o dono do canal realizar uma previsão de ganhos a longo prazo. Ainda, a falta de informações públicas referentes a monetização proposta pelo Youtube dificulta aos canais novos uma estimativa de possíveis ganhos. Frente a essa problemática, estruturou-se este trabalho, com o intuito de utilizar a modelagem matemática para fazer uma projeção de ganhos utilizando apenas informações disponíveis a todos os usuários da plataforma.

No decorrer do trabalho, vários modelos foram construídos e aprimorados, sempre visando um erro relativo controlado e uma boa amostra dos dados. O primeiro modelo



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a
Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

encontrado considerava as informações de todos os intervalos e apenas utilizava a quantidade de visualizações, porém apresentava pontos muito dispersos e o erro relativo era muito alto. Neste, pode-se observar que para $x \geq 6$ o erro diminuía consideravelmente, e assim passou-se a adotar esse intervalo no restante do estudo.

Assim, através de plataformas como Python e CurveExpert, os modelos puderam ser aprimorados e reajustados a cada obstáculo encontrado, o que permitiu que fosse encontrado um modelo matemático que descreve a renda do vídeo apenas utilizando a informação da quantidade de visualizações, que é de domínio público.

Ainda, essa atividade de Modelagem Matemática pode ser facilmente aplicada na Educação Básica, mais especificamente no Ensino Médio, sendo uma forma alternativa para o ensino e aprendizagem de funções exponenciais. O tema do problema pode ser atrativo aos estudantes, visto que vários deles sonham em tornar-se youtubers de prestígio, e esse modelo pode fornecer um panorama financeiro dessa carreira, o que é pouco divulgado.

Para o futuro, é possível incluir outras métricas públicas como número de likes e comentários. No entanto, dificilmente haveria uma correlação clara entre comentários/likes e a renda de um vídeo, por mais que essas métricas possam indicar engajamento. Sendo assim, seriam necessários mais estudos nesse sentido.

REFERÊNCIAS

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática?. **Educação matemática em revista**, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/27375/>. Acesso em: 30 de out. de 2023.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.2

TORTOLA, Emerson; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do ensino fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 94, p. 619-642, 2013. Disponível em: scielo.br/j/rbeped/a/F5Y6xyMxwkCYf69smDRRDyG/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 30 de out. de 2023.

VERTUAN, R. E.; SILVA, K. A. P. da. Pensamento estatístico em uma atividade de modelagem Matemática: ressignificando o lançamento de aviões de papel. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 2, p. 320–334, 2018. DOI: 10.26843/rencima.v9i2.1672. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1672>. Acesso em: 28 ago. 2023.

DESENVOLVIMENTO DE UMA PLATAFORMA PARA JOGOS PEDAGÓGICOS: RELATO DE EXPERIÊNCIA NO ÂMBITO DO PIBIC-EM

Augusto Marchioro de Goes
Colégio Ayrton Senna da Silva
eoaugustogoes@gmail.com

Renato Francisco Merli
UTFPR - Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Roberto Milton Scheffel
UTFPR - Toledo
robertoscheffel@utfpr.edu.br

Adriano Aragão dos Santos
Banco do Brasil
adrianosantos.snr@gmail.com

Este trabalho será apresentado:

(X) SEMAT () Workshop

Resumo

A utilização de jogos pedagógicos tem aumentado nas salas de aula e tem se tornado altamente popular. Entretanto, as plataformas que gerenciam esses jogos carecem de ferramentas que auxiliem o professor na escolha de jogos adequados aos seus estudantes. Nesse contexto, esse artigo apresenta a experiência do primeiro autor no desenvolvimento de uma plataforma de gerenciamento de jogos pedagógicos de matemática que propicie ao professor escolhas e adaptações. Para isso, foram apresentadas as ferramentas utilizadas no desenvolvimento de um primeiro *template* dessa plataforma. Na sequência, foi descrito o estado atual dessa plataforma e o seu desenvolvimento. A partir dessa experiência, foi possível identificar desafios envolvidos no desenvolvimento dessa plataforma e o avanço que o primeiro autor conseguiu alcançar ao manipular as diferentes ferramentas utilizadas.

Palavras-chave: *Back-end*. Ensino de Matemática. *Front-end*. *Github*. *Studio Visual*.

1 Introdução

A utilização de jogos digitais no ambiente escolar tem sido um tema de grande debate, com muitos defendendo seu potencial como ferramenta de ensino e aprendizagem. A familiaridade das crianças com os games em seu tempo livre, através de consoles, computadores, tablets e smartphones, é vista como um ponto positivo para a implementação dessa estratégia.

Os defensores do uso de games na educação acreditam que os jogos podem ser eficazes para atrair a atenção dos *estudantes*, aumentando o engajamento e a motivação nas aulas. Além disso, os jogos podem oferecer uma experiência de aprendizado interativa e dinâmica, permitindo que os *estudantes* explorem conceitos e desenvolvam habilidades de forma mais lúdica e envolvente.

Entretanto, como apontam Rosa e Cruz (2019, p. 995), “[...] uma rápida navegada na internet mostra que os sites que oferecem jogos educativos [...] não trazem informação útil para os professores, tais como, [...] que conteúdos são trabalhados, que habilidades ou competências podem desenvolver [...]” ou ainda “[...] para qual nível de ensino ou faixa etária seriam mais adequados ou mesmo para quais objetivos pedagógicos poderiam ser utilizados”. Essas informações são extremamente necessárias aos professores que querem utilizar os jogos como recursos de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, de falta de plataformas de jogos pedagógicos que contemplem esses aspectos essenciais aos professores, este texto objetiva apresentar a experiência do primeiro autor, estudante do Ensino Médio e bolsista de Iniciação Científica do CNPq, no desenvolvimento de uma plataforma que agregue os jogos que vêm sendo desenvolvidos no âmbito de um projeto de pesquisa do campus e que possua elementos acessíveis aos professores, para orientá-los nas escolhas dos jogos.

Para descrever a experiência, inicialmente são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da plataforma (ainda em construção), na sequência são relatadas as ferramentas que estão sendo utilizadas na construção do *front-end*¹ e *back-end*², bem como em que estado está a plataforma. Por fim, as conclusões são apresentadas bem como os caminhos que ainda estão sendo trilhados.

2 Procedimentos Metodológicos

O processo de desenvolvimento da plataforma tem envolvido várias etapas, desde a concepção da ideia até a implementação final. O primeiro autor, motivado pela necessidade de criar um recurso educacional inovador, enfrentou diversos desafios técnicos e pedagógicos ao longo do caminho.

¹ *Front-end* é a parte do sistema com a qual o usuário interage diretamente, também conhecido como “lado do cliente”.

² *Back-end* é o lado do servidor de uma aplicação web. Ele armazena e organiza os dados que são repassados pelo *front-end*.

Inicialmente, foi necessário definir a arquitetura do projeto e estabelecer os objetivos de aprendizagem que a plataforma visa atingir. Em seguida, o autor concentrou-se na seleção das tecnologias de *front-end* e *back-end* mais adequadas para a implementação do projeto. A usabilidade e o design da página web também foram considerações importantes, com o objetivo de criar uma experiência de usuário intuitiva e atraente (Santos, 2019).

Assim, inicialmente foi criada uma conta no *GitHub*³ e configurado um espaço para o desenvolvimento do projeto. Na sequência, foi instalado o *Node.js LTS*⁴, que, conforme Melo (2022, s. p.), é “[...] um ambiente de execução *JavaScript* que permite executar aplicações desenvolvidas com a linguagem de forma autônoma, sem depender de um navegador”. Ainda de acordo com o autor, “[...] com ele, é possível criar praticamente qualquer tipo de aplicação web, desde servidores para sites estáticos e dinâmicos, até *APIs* e sistemas baseados em micro serviços” (Melo, 2022, s.p.).

Em seguida, o *Angular CLI* foi configurado. Conforme Noletto (2023, s. p.) explica, ela é uma

[...] ferramenta de interface de linha de comando que auxilia na adição de novos componentes e serviços fazendo então que o desenvolvimento fique mais simples sem a necessidade de ter que realizar altas configurações para a sua utilização além de fazer o uso do módulo de *node.js* (Noletto, 2023, s. p.).

Essa ferramenta possibilita a criação eficiente de projetos web interativos, sob medida para o contexto educacional da plataforma.

Com o ambiente de desenvolvimento estabelecido, os esforços voltaram-se para aprimorar o projeto, adicionando recursos essenciais para enriquecer a experiência do usuário. Assim, foi incorporado ao projeto o *PrimeNG*⁵, uma biblioteca de componentes de interface de usuário robusta.

O *PrimeNG* é uma biblioteca de componentes rica e altamente personalizável que pode ser facilmente integrada em projetos Angular existentes. É uma excelente escolha para desenvolvedores que procuram uma solução confiável e comprovada para criar interfaces de usuário elegantes e altamente interativas. Com sua ampla variedade de componentes, suporte de plataforma cruzada e grande comunidade de usuários e desenvolvedores, o *PrimeNG* é uma das melhores opções disponíveis para projetos Angular (Junior, 2024, s. p.).

³ O Github é um serviço baseado em nuvem que hospeda um sistema de controle de versão (VCS) chamado Git. Ele permite que os desenvolvedores colaborem e façam mudanças em projetos compartilhados enquanto mantêm um registro detalhado do seu progresso. Ele está disponível em: <https://github.com/>.

⁴ O *Node.js* está disponível em: <https://nodejs.org/en/>.

⁵ O *PrimeNG* está disponível em: <https://primeng.org/>.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Outra ferramenta também incorporada ao desenvolvimento da plataforma foi o framework Bootstrap⁶, que, de acordo com Guedes (2021, s. p.) é “[...] gratuito e de código-fonte aberto, que disponibiliza componentes prontos para você utilizar em seu projeto. Com ele, você consegue criar e personalizar sites responsivos para dispositivos móveis, *desktops* e *notebooks*, com componentes pré-construídos e com plugins *Javascript* poderosos”.

Essas adições não apenas diversificaram as opções de design e funcionalidade da plataforma, mas também simplificam o processo de desenvolvimento, oferecendo componentes prontos para uso e estilos responsivos para uma experiência de usuário mais agradável e intuitiva.

Em seguida, com todas as ferramentas instaladas, a próxima etapa está sendo a implementação e aprimoramento da plataforma. Trabalhando em equipe com os demais desenvolvedores, um professor orientador e um egresso do curso de Engenharia da Computação, o *GitHub* tem ajudado a gerenciar o controle de versão do código-fonte. Essa abordagem permitiu uma colaboração fluida e transparente, garantindo que cada contribuição fosse integrada de forma harmoniosa ao projeto.

Outro software importante no desenvolvimento da plataforma é o *Visual Studio Code*, amplamente reconhecido como um dos principais *softwares* de programação disponíveis. Na Figura 1, é possível identificar a variedade de ferramentas e recursos que ele disponibiliza.

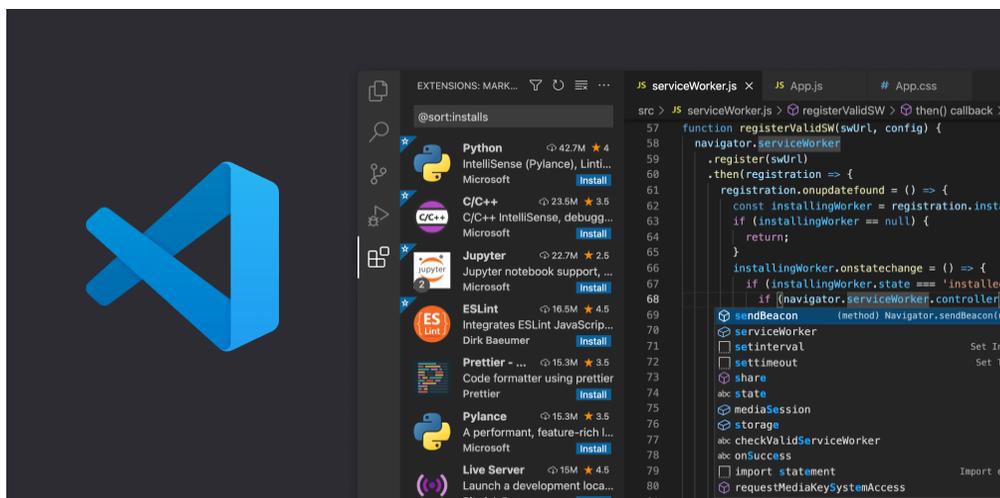


Figura 1 - Interface do *Visual Studio Code*
Fonte: *Site do Visual Studio Code* (2024)⁷

⁶ O *Bootstrap* está disponível em: <https://getbootstrap.com/>.

⁷ *Visual Studio Code* está disponível em: <https://code.visualstudio.com/>

A versatilidade do *Visual Studio Code* está em sua capacidade de suportar uma ampla gama de linguagens de programação, como C#, *Visual Basic .NET*, C++, *JavaScript*, *TypeScript* e *Python*, permitindo que desenvolvedores de diferentes áreas encontrem soluções para suas necessidades específicas (Microsoft, 2024).

Além disso, o *Visual Studio Code* se destaca por sua interface intuitiva e amigável, facilitando o desenvolvimento e a colaboração entre equipes de desenvolvimento. Com recursos avançados de depuração, integração com sistemas de controle de versão e uma vasta biblioteca de extensões, o *Visual Studio Code* se tornou uma escolha popular para desenvolvedores em todo o mundo, consolidando sua posição como uma ferramenta indispensável no cenário da programação moderna (Microsoft, 2024).

O *Visual Studio Code* possui uma ampla biblioteca de extensões (Figura 2) que oferecem funcionalidades adicionais e personalizações para atender às necessidades específicas dos desenvolvedores. Essas extensões podem ser encontradas no *Visual Studio Marketplace*, onde desenvolvedores de todo o mundo contribuem com ferramentas para melhorar a experiência de desenvolvimento (Microsoft, 2024).

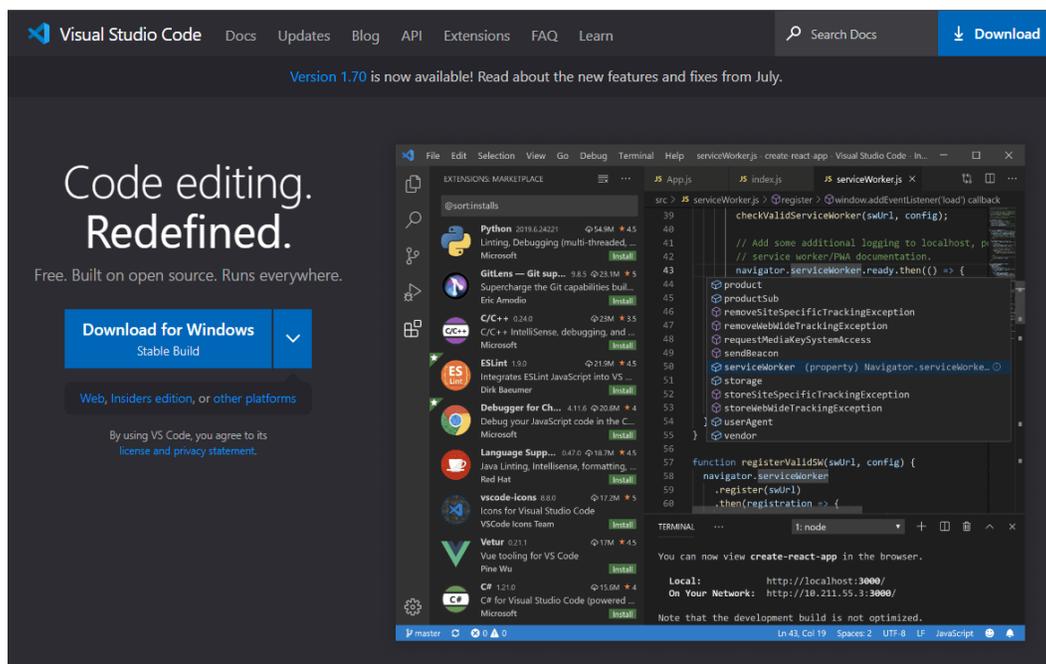


Figura 2 – Biblioteca de extensões do *Visual Studio Code*

Fonte: Site do *Visual Studio Code* (2024)⁸

⁸ *Visual Studio Code* está disponível em: <https://code.visualstudio.com/>.

Essas extensões abrangem uma variedade de áreas, desde ferramentas de produtividade até integração com serviços de terceiros, passando por suporte para novas linguagens de programação e *frameworks*. Por exemplo, existem extensões para aprimorar a formatação de código, facilitar a depuração, integrar o *Visual Studio Code* com sistemas de controle de versão como *Git*, oferecer suporte para desenvolvimento de aplicativos móveis, *web*, jogos e muito mais (Walakys, 2023).

Através da instalação dessas extensões, os desenvolvedores podem personalizar o ambiente de desenvolvimento de acordo com suas preferências e necessidades específicas de projeto, tornando o *Visual Studio Code* uma ferramenta ainda mais poderosa e flexível (Microsoft, 2024).

Uma vez apresentadas as ferramentas utilizadas no desenvolvimento da plataforma, na próxima seção é apresentado o desenvolvimento da plataforma propriamente dita, bem como seu estado atual.

3 O processo de desenvolvimento com o *Visual Studio Code*

Como já mencionado, a combinação do *Node.js*, *PrimeNG*, *Angular CLI* e *Bootstrap* oferece uma base sólida para o desenvolvimento de uma plataforma interativa e envolvente, no seu *front-end*. Para além disso, o *Node.js* pode ser empregado no *back-end* para gerenciar a lógica de negócios e a interação com o banco de dados, enquanto o *PrimeNG* fornece componentes *UI*. O *Angular CLI* fornece comandos para facilitar a estruturação de projetos *Angular*.

Com o *Bootstrap*, é possível garantir um *design* responsivo e consistente em toda a aplicação, facilitando o acesso ao conteúdo educativo em dispositivos diversos. Além disso, funcionalidades específicas, como módulos de ensino interativos, exercícios personalizados, gamificação e acompanhamento do progresso, podem ser integradas para tornar o aprendizado de matemática mais eficaz e cativante para os *estudantes*.

Na Figura 3 é possível visualizar um frame inicial da plataforma, no qual ainda não estão presentes os elementos narrativos e integrativos, mas apenas o layout e design dela.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

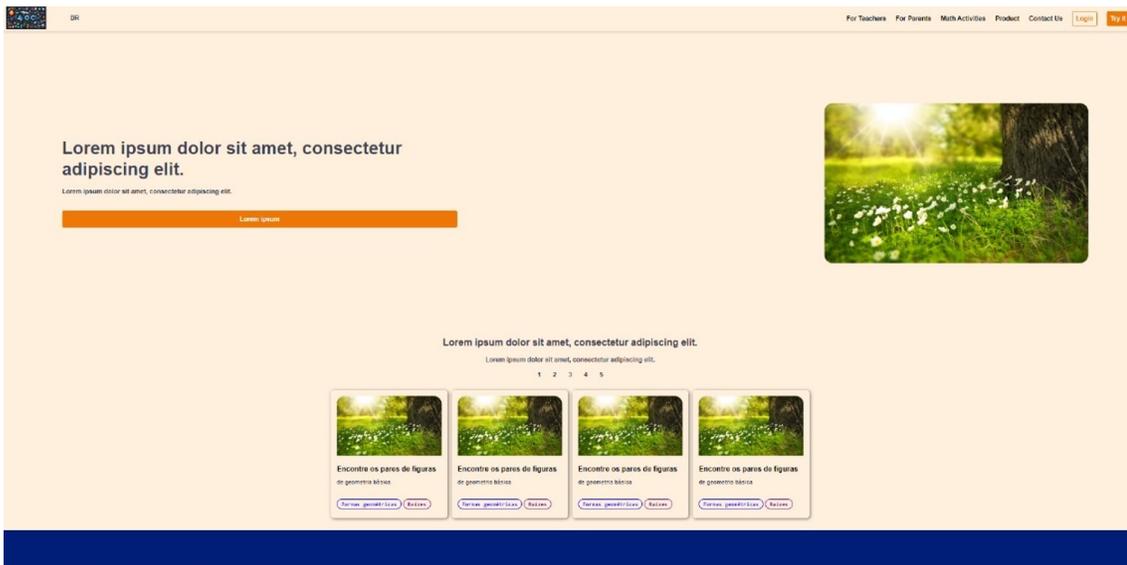


Figura 3 - Template Home

Fonte: Da pesquisa (2024)

Para a apresentação desse primeiro *template*, foi elaborado um *script*, conforme pode ser visto na Figura 4.

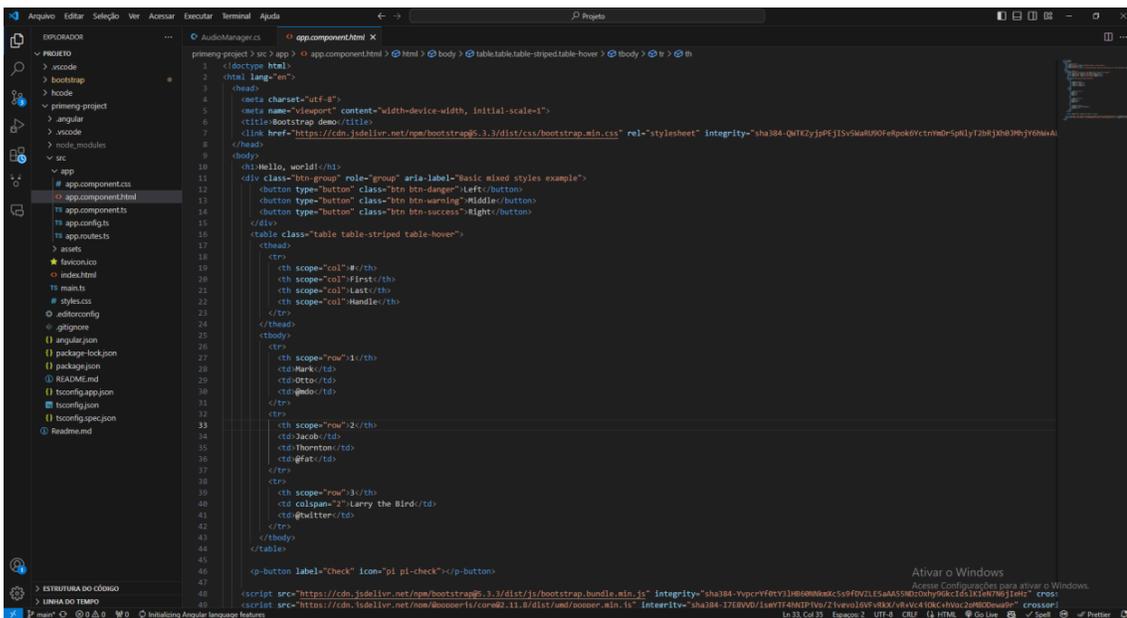


Figura 4 - Scripts

Fonte: Da pesquisa (2024)

Esses *scripts* combinados permitem o desenvolvimento de uma plataforma na qual o professor terá elementos suficientes para realizar escolhas de jogos que oferecerão uma experiência de aprendizado envolvente, permitindo aos estudantes explorar conceitos matemáticos de forma interativa e personalizada.

4 Conclusões

Levando em consideração o contexto da falta de plataformas de jogos pedagógicos que permitam aos professores realizar escolhas de jogos e análises do aprendizado dos seus estudantes, este texto objetivou apresentar a experiência no desenvolvimento de uma plataforma que agregue jogos pedagógicos matemáticos.

Para isso, inicialmente foram apresentados os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da plataforma (ainda em construção) e as ferramentas que estão sendo utilizadas, a saber: *Github*, *Node.js*, *PrimeNG*, *Angular CLI*, *Bootstrap* e o *Visual Studio Code*.

Evidencia-se que, durante o desenvolvimento da plataforma, foram identificados diversos obstáculos, incluindo questões técnicas relacionadas à integração de recursos interativos e à otimização de desempenho da plataforma. Além disso, considerações pedagógicas foram levadas em conta para garantir que o conteúdo fosse apresentado de forma clara e compreensível para o público-alvo.

Em suma, o desenvolvimento de uma plataforma para jogos pedagógicos de Matemática representa um esforço significativo na busca por abordagens inovadoras para o ensino e o aprendizado *online*. Embora o projeto ainda esteja em andamento, os desafios enfrentados até o momento destacam a importância da criatividade, determinação e colaboração na criação de recursos educacionais de qualidade.

Assim, ao longo desse processo, é possível afirmar que o primeiro autor deste trabalho não apenas aprimorou suas habilidades técnicas, mas também desenvolveu uma compreensão mais profunda sobre práticas de desenvolvimento colaborativo e gerenciamento de projetos. A interação com colegas da equipe no *GitHub* proporcionou oportunidades valiosas de aprendizado e crescimento, contribuindo para um ambiente de trabalho dinâmico e colaborativo.

REFERÊNCIAS

- GUEDES, Marylene. **O que é Bootstrap?** 2021. Disponível em: <https://www.treinaweb.com.br/blog/o-que-e-bootstrap>. Acesso em: 4 abr. 2024.
- JUNIOR, Gaspar Barancelli. **PrimeNG: uma biblioteca de componentes Angular para interfaces elegantes e interativas.** 2024. Disponível em: <https://www.gasparbarancelli.com/post/primeng-uma-biblioteca-de-componentes-angular-para-interfaces-elegantes-e-interativas>. Acesso em: 11 abr. 2024.
- MELO, Diego. **O que é Node.js? [Guia para iniciantes].** [S. l.], 2023. Disponível em: <https://tecnoblog.net/responde/o-que-e-node-js-guia-para-iniciantes>. Acesso em: 4 abr. 2024.
- MICROSOFT. **GitHub Copilot e Visual Studio 2022.** Fazer mais com seu programador de pares de IA. 2024. Disponível em: <https://visualstudio.microsoft.com/pt-br/vs/>. Acesso em: 11 abr. 2024.
- NOLETO, Cairo. **Angular CLI: como usar essa interface de linha de comando?** 8 mar. 2023. Disponível em: <https://blog.betrybe.com/desenvolvimento-web/angular-cli>. Acesso em: 3 abr. 2024.
- ROSA, Jefferson da; CRUZ, Dulce. Análise de Jogos em sites Educativos. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE), 25. 2019, Brasília. **Anais [...].** Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2019, p. 994-1003. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wie/article/view/13249>. Acesso em: 11 abr. 2024.
- SANTOS, Diego Viana dos. **Plataforma online para criação de jogos personalizados com labirintos para introdução à lógica de programação.** 2019. 32 p. Monografia (Trabalho de Conclusão e Curso). Bacharelado em Sistemas da Informação. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria: RS. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/26174>. Acesso em: 11 abr. 2024.
- WALAKYS. **Visual Studio Code: A Importância de uma Poderosa Ferramenta de Desenvolvimento.** 2023. Disponível em: <https://www.dio.me/articles/visual-studio-code-a-importancia-de-uma-poderosa-ferramenta-de-desenvolvimento>. Acesso em: 11 abr. 2024.



GEOMETRIA DIFERENCIAL E CARTOGRAFIA

Luana Caroline Junges
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
luanacarolinejunges@hotmail.com

Leandro Wrzecieonek de Brito
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
leandro.wrzecieonek@gmail.com

Wiliam Francisco De Araujo
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
waraujo@utfpr.edu.br

Resumo

A Matemática possui aplicação em todas as ciências, sejam exatas, humanas ou naturais, uma delas é a Geografia. Este estudo explora a intersecção entre a Matemática e a Geografia utilizando a Geometria Diferencial para compreender as deformações em projeções cartográficas. Mercator introduziu uma projeção baseada na esfericidade da Terra, mas que distorcia as áreas, especialmente em latitudes elevadas. Wright propôs ajustes para mitigar essas distorções através da expansão proporcional dos espaços entre os paralelos à medida que se afasta do Equador. As contribuições desses e de outros matemáticos foi essencial para que os mapas que utilizamos hoje fossem mais fidedignos. Assim, é possível perceber a relação direta da Matemática na elaboração e construção de mapas cartográficos durante toda a história da humanidade.

Palavras-chave: Resumo. Representação cartográfica. Deformação. Navegação. Geometria Diferencial.

1 Introdução

A matemática possui aplicações em todas as áreas das ciências exatas, humanas e da natureza - e em particular - à Geografia. Desse modo, a interdisciplinaridade é essencial para que novas possibilidades sejam exploradas em seu ensino e que os alunos possam entender o conhecimento em sua totalidade.

A palavra “geografia” tem origem grega e é formada pelos radicais “geo”, que significa Terra, e “grafia”, que significa descrição. Assim, parte de seus estudos se direcionam a mapas, projeções e representações da superfície terrestre, o que requer cálculos e explicações numéricas evidenciadas pela matemática.



O intuito deste trabalho é estabelecer uma relação entre a matemática e a geografia, de modo que conceitos da Geometria Diferencial sejam utilizados para a compreensão e justificativa das deformações existentes em uma projeção cartográfica da superfície terrestre.

A relação entre a Geometria Diferencial e a Cartografia é estabelecida desde os primórdios da humanidade, em que cartas de navegação eram utilizadas para traçar rotas mais eficientes entre pontos. Os conceitos de Geometria Diferencial aprimoram a cartografia existente na época, promovendo a construção de projeções mais fieis à realidade e, conseqüentemente, uma visão mais clara e fidedigna da superfície terrestre.

2 As contribuições de Mercator e Wright na projeção de mapas de navegação

Para Libault (1975), uma projeção cartográfica é uma correspondência matemática entre coordenadas plano-retangulares e as coordenadas esféricas da terra.

Em 1569, foi apresentada a comunidade científica a Projeção de Mercator, em que seu criador, Gerard Kremer, desenvolveu um mapa mundi que se baseava na matematização real do planeta, na qual ele concebe a terra como uma esfera, o que permitiu traçar o sistema de coordenadas com nível de distorção controlado. O que não acontecia em mapas anteriores, pois a terra era considerada bidimensional.

Segundo Noel Filho (2012), a projeção de Mercator é uma aplicação da esfera terrestre em um plano, satisfazendo as seguintes condições:

- Os meridianos da esfera são aplicados em uma família de retas paralelas;
- Os paralelos da esfera são aplicados em retas perpendiculares às retas que representam os meridianos;
- Os ângulos são preservados na projeção, ou seja, se duas curvas na esfera se interceptam sob certo ângulo, suas imagens no plano são retas que se interceptam sobre o mesmo ângulo.

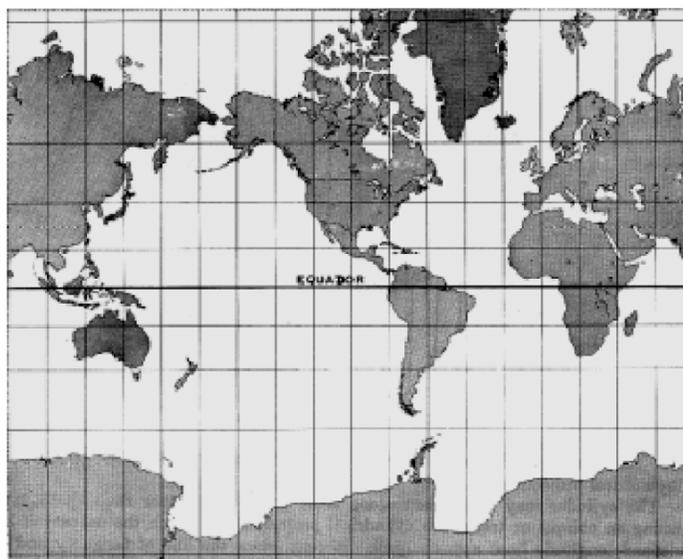
Uma transformação que preserva ângulos, como a de Mercator, é denominada, na Geometria Diferencial, como transformação conforme. Para garantir essa propriedade, os meridianos são direcionados a uma rede de retas paralelas equidistantes e os paralelos em uma rede de retas paralelas cuja distância aumenta significativamente nas altas latitudes.

Ainda, essas três condições provêm da utilização prática dessa projeção, em que com o uso da bússola, é possível que um navegante sobre a superfície da terra mantenha uma trajetória que faça um ângulo constante com os meridianos atravessados.

O fato das linhas de rumo¹, também chamadas de “curvas loxodrómicas”, se transformarem em retas no plano torna seus mapas próprios ao traçado de linhas/de rumo. Assim, a um navegador estando no mar, para planejar uma viagem entre dois lugares quaisquer, basta localizar na carta os pontos que representam esses lugares e traçar uma linha reta passando por eles (NOEL FILHO, 2012, p. 106).

Contudo, a projeção de Mercator possuía grande deformação, causada pelo cilindro tangente ao equador, que estendia demasiadamente os territórios pertencentes às altas latitudes, isto é, os países próximos à linha do equador eram representados de forma condizente a sua verdadeira grandeza, enquanto os países mais afastados eram distorcidos (Figura 1).

Figura 1: Mapa-Múndi na Projeção de Mercator



Fonte: Miguens (2003, p.24) apud Noel Filho (2012)

Esse fato induziu os países que não pertenciam às grandes potências da Europa a acreditarem que a projeção de Mercator tinha o intuito de desvalorizá-los no cenário econômico internacional. Essa distorção seria facilmente minimizada se os mapas não fossem construídos a partir da linha do equador (latitude 0°).

Apesar de Mercator ter estudado matemática para aplicar à geografia, ele não resolveu o problema matemático de sua projeção, que foi solucionado em 1599 por Edward Wright.

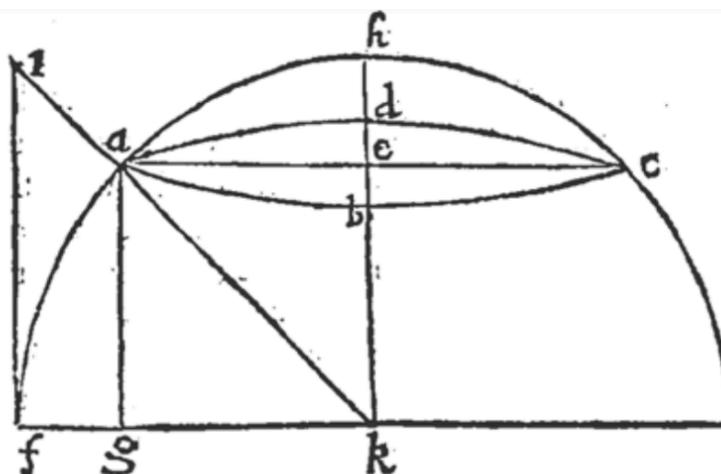
¹É uma curva sobre a esfera: supondo traçados sobre a esfera meridianos como no globo terrestre (isto é, círculos máximos passando por dois pólos), trata-se de uma curva que corta todos os meridianos segundo um mesmo ângulo” (QUEIRÓ, p. 42, 2002).

Wright, em uma expedição para Açores em 1589, observou diversos erros cometidos pelos pilotos e capitães das embarcações na interpretação dos dados contidos nas cartas de navegação. Além disso, notou os erros contidos nas cartas ao descrever geometricamente os meridianos, paralelos e linhas de rumo como retas, ignorando o pequeno desvio causado pela agulha magnética, que leva os pilotos a cometerem erros grosseiros em relação a verdadeira posição dos territórios.

Para corrigir esses equívocos, Wright sugere que os espaços entre os paralelos aumentem proporcionalmente conforme você vai do Equinocial em direção a qualquer um dos polos.

Suponhamos uma superfície esférica com meridianos, paralelos, rumos e a descrição hidrográfica inteira desenhada para ser inscrita dentro de um cilindro côncavo. Deixe esta superfície esférica inflar como um balão, sempre em partes iguais em todas as direções, tanto em longitude como em latitude, até que a esfera encontre a superfície côncava do cilindro em todas as direções. Desta forma, cada paralelo da superfície esférica seguirá aumentando sucessivamente do Equinocial em direção a qualquer um dos seus pólos, até que o diâmetro da esfera coincida com o diâmetro do cilindro, e assim, conseqüentemente os meridianos irão se alargando até que venham a ser tão distantes um do outro como estão do Equinocial, ou seja, cada paralelo vai crescendo proporcionalmente ao equinocial, como pode ser observado na Figura 2 (Noel Filho, 2012, p.118).

Figura 2: Projeção de Wright



Fonte: Wright (1610, p.10).



Edward salienta que a proporcionalidade da projeção de Mercator considera a carta do diâmetro de um paralelo de latitude qualquer do globo na mesma proporcionalidade do diâmetro do círculo equinocial.

3 A projeção de Mercator na Teoria Geral de Superfícies de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss (1777) dedicou muitos anos de sua vida ao estudo da astronomia, mais especificamente da geodésia², em que propôs que a superfície da Terra não é a de uma esfera perfeita e, nem de um elipsóide de revolução, como normalmente era designada. Mas sim, uma forma própria, a "figura física da Terra", única.

Gauss definiu a superfície terrestre como equipotencial, ou seja, de potencial constante. Ainda, afirmou que o geóide possui uma superfície irregular, mas essas irregularidades não são percebidas pelos marinheiros pois em cada ponto o vetor gravidade é perpendicular à direção horizontal tangente à superfície. Contudo, para efeitos de cálculo, pode-se considerar a superfície da Terra como uma curva regular, em que os oceanos se estendem ao longo de toda essa superfície, equilibrando os efeitos da atração gravitacional e a força centrífuga de rotação.

Essas observações instigaram Gauss a realizar mais estudos acerca deste tema. Estes que resultaram em seu trabalho mais expressivo *Disquisitiones Generales Circa Superfícies Curvas*, em que ele propõe um método geral para o estudo de superfícies curvas, que depende apenas de suas propriedades características e desconsidera suas coordenadas externas. Gauss mostra que, apenas conhecendo a natureza da superfície, é possível determinar as equações de suas geodésicas³.

Para isso, ele utiliza uma esfera auxiliar de raio unitário, cada direção no espaço é determinada por uma linha reta e associada à esfera unitária auxiliar, a um raio paralelo à reta ou ao ponto de superfície da esfera onde esse raio termina (NOEL FILHO, 2012). Esse mapeamento permitiu que teoremas da trigonometria esférica pudessem ser utilizados no estudo das propriedades de curvas quaisquer.

De acordo com Gauss (seção 3), considerando uma superfície curva suave, é possível traçar um plano tangente em cada ponto desta superfície e, passando por cada um

² Geodésia é a ciência que estuda o conjunto de métodos e procedimentos adotados para definir a forma e as dimensões da Terra buscando determinar, também, o seu campo externo de gravidade. Em suas aplicações considera a curvatura da Terra na busca do melhor referencial de pontos de coordenadas conhecidas, permitindo a melhor definição da superfície terrestre e do seu campo de gravidade.

³ Curva de menor comprimento que une dois pontos.



destes pontos, uma reta normal ao plano. Como a direção do plano tangente no espaço é dada pela direção de sua normal, Gauss associa esta direção a um raio paralelo a ela na esfera auxiliar. Assim, por meio de um raio paralelo ao normal ao plano tangente, cada ponto da superfície curva pode ser associado a um ponto na superfície esférica auxiliar. Na verdade, para cada normal considerada sobre a superfície curva, existem dois raios opostos, paralelos sobre a esfera auxiliar, mas para que não haja dúvidas sobre a correspondência entre os pontos, Gauss considera retas orientadas (NOEL FILHO, 2012, p.130).

Como o cálculo da curvatura e, conseqüentemente, o da curvatura íntegra⁴ depende da natureza da superfície curva, Gauss propôs dois métodos gerais para descrever a natureza de uma superfície curva.

No primeiro deles, ele utiliza uma equação em coordenadas cartesianas e define uma função f que descreve a superfície,

$$w = f(x, y, z) = 0$$

No segundo método, este que será utilizado no estudo da construção de mapas planos, ele assume um sistema de coordenadas na forma de funções de duas variáveis p e q sobre a superfície curva e descreve-a como,

$$z = x(p, q); y = y(p, q); z = z(p, q).$$

A esses métodos, Gauss acrescenta um terceiro, em que assume um coordenada em função das outras duas. Partindo do segundo método, ele introduz uma forma quadrática, que depende apenas das funções p e q , para descrever o elemento de linha na superfície.

Gauss notou que a igualdade,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2.$$

é sempre verdadeira, logo,

$$\sqrt{E dp^2 + 2F dpdq + G dq^2}.$$

é a expressão geral do elemento linear sobre a superfície curva, em que os coeficientes E , F e G são funções que dependem apenas das coordenadas curvilíneas p e q . Considerando a parametrização dada por,

$$X(p, q) = (x(p, q), y(p, q), z(p, q)).$$

⁴ Considerando que uma superfície curva pode ser mapeada sobre a superfície esférica auxiliar, ou seja, cada parte da superfície curva possui uma área correspondente na esfera auxiliar, esta área foi chamada por Gauss de curvatura íntegra e pode assumir um sinal positivo ou negativo, dependendo da posição em que a área é representada na esfera auxiliar (NOEL FILHO, 2012).



é a carta que mapeia o aberto U contido em R^2 , no qual (p, q) pertence, na superfície. Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são determinados por

$$E = dX_p \cdot dX_p; F = dX_p \cdot dX_q; G = dX_q \cdot dX_q.$$

Em termos das funções E, F e G de p e q , determinando as distâncias ao longo de uma superfície e definindo sua natureza essencial, isto é, a Primeira Forma Fundamental diz respeito à métrica de uma superfície. Assim, os coeficientes podem ser determinados como,

$$E = \langle dX_p, dX_p \rangle, F = \langle dX_p, dX_q \rangle, G = \langle dX_q, dX_q \rangle.$$

Gauss também demonstrou que, ao conhecer os coeficientes e suas derivadas em relação a p e q , é viável determinar a curvatura em cada ponto da superfície, sem recorrer a coordenadas espaciais externas x, y e z . Em outras palavras, a medida da curvatura depende exclusivamente das propriedades intrínsecas da superfície, independente das características do espaço tridimensional em que está imersa. Isso é possível considerando a aplicação normal de Gauss, definida por,

$$N = \frac{X_p \wedge X_q}{|X_p \wedge X_q|}$$

em que obtém-se os coeficientes da Segunda Forma Fundamental,

$$e = \langle N, X_{pp} \rangle, f = \langle N, X_{pq} \rangle, g = \langle N, X_{qq} \rangle$$

Dessa forma, a curvatura de Gauss ou Gaussiana num ponto qualquer da superfície é dada por,

$$k = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

É deste resultado que surge um dos mais importantes teoremas da Teoria Geral de Superfícies Curvas, o Teorema *Egregium* de Gauss.

Para ele, uma superfície curva pode ser aplicada sobre outra superfície, seja curva ou plana, de modo que cada ponto da primeira superfície seja determinado pelas coordenadas x, y, z irá corresponder um ponto x', y', z' determinado sobre outra superfície, estes que podem ser reescritos como funções das coordenadas p e q , assim para cada elemento de linha na segunda superfície tem-se uma expressão da forma,

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2}$$

em que,

$$E = E'; F = F'; G = G'$$

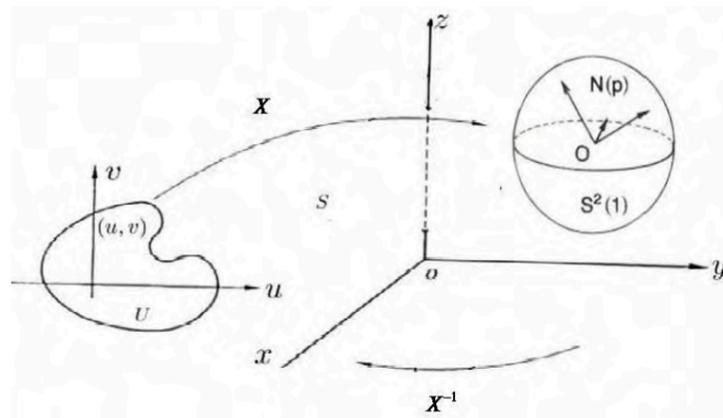
No processo de construção de mapas planos, o problema encontrado era mapear a superfície esférica sabendo que ela não pode ser totalmente descrita sobre um plano sem alguma deformação, já que sua curvatura não é nula.

Uma possível solução seria utilizar o segundo método de Gauss, o processo natural seria considerar a superfície esférica da Terra como superfície auxiliar, obter uma parametrização X tal que para qualquer (u, v) em um aberto U do plano, haveria a associação $X(u, v)$ na superfície esférica e considerar o problema inverso.

Contudo, para resolver o problema do mapeamento da projeção de Mercator desta forma, é necessário determinar uma parametrização que possui como inversa uma aplicação que satisfaz as propriedades da projeção de Mercator, o que seria um trabalho árduo.

Assim, uma saída seria considerar uma parametrização X como descrita acima e buscar uma aplicação Y da esfera unitária no plano tal que a composta de Y com X que satisfaça as propriedades da projeção de Mercator (Figura 3).

Figura 3: Parametrização da superfície terrestre pelo segundo método de Gauss



Fonte: Noel Filho, 2012, p. 134

Assim, para encontrar Y é necessária uma aplicação que, para cada $X(p)$ na esfera terrestre, haja a associação no plano o ponto,

$$(Y \circ X)(p) = Y(X(p))$$

além de satisfazer as propriedades:

- Os meridianos e paralelos são levados numa rede de retas perpendiculares;

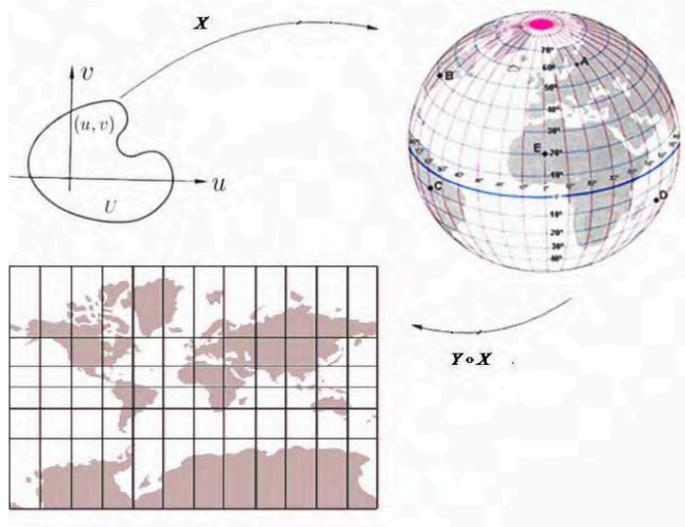
- As loxodromias são levadas em linhas retas.

Considere θ e ϕ como latitude e longitude, respectivamente. Dada a parametrização em coordenadas geográficas esféricas $X(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$ consideremos a aplicação composta,

$$Y \circ X: (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow S^2$$

satisfazendo a propriedade $Y \circ X: (\theta, \phi) = (\theta, v(\theta, \phi), 0)$ (Figura 4).

Figura 4: Mapa da superfície terrestre obtido pela aplicação composta



Fonte: Noel Filho (2012), p. 135

Para que a primeira propriedade seja garantida, a condição $v(\theta, \phi) = v(\phi)$ será assumida. Também, para a garantia da propriedade das loxodromias, serão considerados os cálculos de Wright e a igualdade,

$$\sum_0^{\phi} \sec\phi = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

tomando,

$$v(\phi) = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Assim, teremos que o mapa de projeção de Mercator é obtido pela aplicação,

$$Y(\theta, \phi) = \left(\theta, \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right), 0\right)$$



Através desse método aplicado na superfície esférica é possível abordar e solucionar o problema da projeção de Mercator com elementos da Teoria Geral de Superfícies de Gauss.

4 Conclusões / Considerações Finais

Desse modo, o trabalho com mapas e projeções, tão empregado na Geografia, requer o uso da matemática. A justificativa do porquê há deformações na representação plana da superfície terrestre é uma das questões mais debatidas pelos alunos da Educação Básica, esta que pode ser esclarecida pelo professor através da transposição didática do método apresentado neste artigo. O estudo da relação existente entre a Geometria Diferencial e a Cartografia é essencial para que a projeção de mapas seja compreendida.

REFERÊNCIAS

LIBAULT, C. O. A. **Geocartografia**, Ed. Nacional - EDUSP, São Paulo, 389p.

NOEL FILHO, Antonio. **A relação cartográfica e geometria diferencial de Mercator a Gauss**. 2012. 165 f. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

QUEIRÓ, João Filipe. Pedro Nunes e as linhas de rumo. **Gazeta de Matemática**, v. 143, p. 42-47, 2002.

WRIGHT, Edward. Certain errors in Navigation. **Detected and Corrected By Edward Wright with Many Additions that were not in the Former Edition**. London, 1610.

CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS APLICADO NO RECEBIMENTO DE MILHO EM COOPERATIVA DA REGIÃO OESTE DO PARANÁ

Eduardo Jandrey de Almeida Krielow
UTFPR - Campus Toledo
eduardojandrey@alunos.utfpr.edu.br

Daniela Trentin Nava
UTFPR - Campus Toledo

Resumo

O Brasil possui muitas regiões favoráveis para o plantio de cultivares, e está entre os maiores países produtores de grãos do mundo. Altas produções resulta em um aumento de caminhões e carretas nas descargas, sendo necessário um acompanhamento rígido em postos de atendimento a fim de otimizar o tempo de descarga e armazenagem com qualidade. Com esta pesquisa buscou-se avaliar as características do milho, como porcentual de umidade e impureza, em entregas em uma unidade de uma cooperativa agroindustrial da região oeste do estado do Paraná. Foram utilizadas cartas de controle de qualidade das médias e da amplitude para auxiliar na separação dos lotes e otimização das descargas. Os dados coletados são referentes a safra do mês de julho de 2023, em que possui maior volume de atendimento aos produtores. As classificações de grãos avariados não apresentaram resultados fora do padrão, sendo desnecessário a separação dos lotes. Já o porcentual de umidade das cargas apresentou discrepância em alguns períodos, sendo necessário a separação para auxiliar no processo de secagem e armazenamento, consequentemente diminuindo o tempo de descargas dos caminhões.

Palavras-chave: Cartas de controle. Produtividade de milho. Aplicação da Estatística.

1 Introdução

A produção de grãos no Brasil é uma peça fundamental não apenas para a economia do país, mas também para o fornecimento global de alimentos. Com vastas extensões de terras férteis, um clima diversificado e tecnologia agrícola avançada, o Brasil se estabeleceu como um dos principais produtores e exportadores mundiais de grãos (Soliani, 2022). O país é conhecido por sua capacidade de produzir uma ampla variedade de grãos, incluindo soja, milho, arroz, trigo, feijão e muitos outros.

Com o avanço das tecnologias, condições climáticas favoráveis e o manejo adequado do solo, o Brasil se tornou grande protagonista na produção e exportação de grãos no mundo. Segundo dados apresentados pela Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB, 2023) os grãos de soja e milho se destacam na produção total no Brasil, e está entre os primeiros colocados no ranking mundial.

A tecnologia desempenha um papel crucial na produção de grãos no Brasil. Os agricultores adotaram rapidamente práticas modernas, como o plantio direto, o uso de sementes geneticamente modificadas e a aplicação de técnicas de manejo integrado de pragas e doenças. Isso não apenas aumentou a produtividade, mas também promoveu a sustentabilidade ambiental, reduzindo a necessidade de desmatamento e conservando os recursos naturais (Lisbinski, et. al. 2020).

No entanto, desafios ainda persistem. Questões como infraestrutura precária, falta de acesso a crédito para pequenos produtores, pressões ambientais e questões relacionadas à distribuição de terras continuam a ser obstáculos para o desenvolvimento pleno do setor agrícola (Lisbinski, et. al. 2020).

Além disso, a volatilidade dos preços das commodities no mercado internacional e os impactos das mudanças climáticas representam desafios adicionais que os produtores brasileiros precisam enfrentar constantemente (Soliani, 2022).

Apesar dos desafios, a produção de grãos no Brasil continua a desempenhar um papel vital na segurança alimentar global e na economia nacional. Com investimentos contínuos em pesquisa, tecnologia e infraestrutura, o país está bem posicionado para continuar sendo um líder global na produção de grãos e contribuir para alimentar uma população mundial em crescimento (Soliani, 2022).

A produção de milho no Brasil é uma peça central no panorama agrícola global. Com vastas áreas de cultivo espalhadas por diferentes regiões do país, o Brasil emergiu como um dos principais produtores e exportadores mundiais de milho. A combinação de condições climáticas favoráveis, avanços tecnológicos e práticas agrícolas modernas impulsionou a produção nacional a níveis impressionantes. Comparado com a produção mundial, o Brasil se destaca como um dos líderes, rivalizando com países como os Estados Unidos e a China. Além disso, a qualidade do milho brasileiro, juntamente com a eficiência logística e a capacidade de resposta do mercado, tem contribuído para solidificar a posição do país como um fornecedor confiável no mercado global de grãos (Soliani, 2022; Yu e Moon, 2022).

Além de ser um alimento básico na dieta brasileira, como o milho verde e as espigas cozidas até os produtos derivados, como a farinha de milho, o fubá e o óleo de milho, além disso, o milho é um componente essencial na produção de biocombustíveis, como o etanol, ajudando a diversificar a matriz energética e reduzir a dependência de combustíveis fósseis. Na indústria, o milho é utilizado na fabricação de uma ampla gama de produtos, incluindo plásticos biodegradáveis, amidos modificados, xaropes de glicose e até mesmo materiais de embalagem. Ainda, o milho desempenha um papel fundamental na produção de ração animal, fornecendo nutrientes essenciais para o gado, suínos e aves. Sua versatilidade e utilidade fazem do milho uma cultura de importância vital em diversas áreas, desde a segurança alimentar até a sustentabilidade ambiental e o desenvolvimento industrial (Barros e Calado, 2014; Yu e Moon, 2022).

Os grãos passam por várias etapas de processamento antes da industrialização, iniciando na colheita, posteriormente a entrega em um posto de atendimento, secagem e limpeza do produto, armazenamento, controle de temperatura, aplicação de defensivos contra insetos, entre outros. Todas as etapas são igualmente importantes, sendo necessário um acompanhamento rígido para a industrialização do alimento com qualidade. Sendo assim, o objetivo deste trabalho, através do CEP (Controle Estatístico de Processos), é acompanhar a entrada de produtos em um posto de atendimento de uma cooperativa agroindustrial da região noroeste do estado do Paraná, a fim de separar os grãos de milho com maior qualidade nutricional, e otimizar o tempo de descargas.

O controle estatístico de processos desempenha um papel crucial na garantia da qualidade do armazenamento dos grãos de milho. Ao longo do processo de armazenamento, é essencial monitorar e analisar sistematicamente variáveis como temperatura, umidade, infestação por pragas e condições de armazenamento para garantir a preservação da qualidade do milho. O uso de técnicas estatísticas permite identificar desvios significativos em relação aos padrões estabelecidos, possibilitando a tomada de medidas corretivas de forma proativa.

Isso inclui a implementação de controles de temperatura e umidade adequados, a inspeção regular para detectar sinais de deterioração ou infestação e a aplicação de práticas de manejo preventivo. Além disso, o CEP permite uma análise mais precisa dos dados históricos de armazenamento, facilitando a identificação de tendências e padrões que possam indicar a necessidade de ajustes ou melhorias no sistema de armazenamento. Ao adotar uma abordagem baseada em dados e análises estatísticas, os gestores de armazenamento de milho podem otimizar a eficiência operacional, reduzir o desperdício e garantir a qualidade do produto final, atendendo às demandas dos mercados interno e externo.

2 Material e Métodos

A coleta de dados se deu em uma unidade da maior cooperativa agroindustrial da América Latina, que funciona desde a década de 70. Esta possui 114 unidades recebimento, localizadas em pontos estratégicos nos estados do Paraná, Mato Grosso do Sul e Santa Catarina. Desde o ano de 2023 totalizou um recebimento de aproximadamente 7,470 milhões de toneladas de grãos, destinado para industrialização, comercialização ou exportação (COAMO, 2023).

Existem diversas linhas de produção em indústrias próprias da cooperativa, como óleo de cozinha, margarina, farinha de trigo, café entre outros. Recentemente foi concluída a indústria de ração, onde é produzido ração para aves, suínos, peixes, bovinos de leite, bezerras, bovinos de corte e equinos. Muitos destes produtos industrializados são feitos com grãos recebidos em unidades de atendimento.

Com o intuito de acompanhar os recebimentos destes produtos, foi feita uma pesquisa em um posto de atendimento da cooperativa na região noroeste do estado do Paraná. O objetivo foi coletar dados das cargas entregues por produtores, e acompanhar a qualidade do produto.

De acordo com servidores da unidade, na safra de milho 2022/2023, foi recebido cerca de 60 mil toneladas de milho, em um período de 90 dias. Os dados coletados foram referentes ao recebimento do mês de julho, período com maior volume de colheitas e atendimento aos produtores por dia. Neste mês foram recebidos cerca de 27 mil toneladas de milho, representando 45% da safra total.

Nesta pesquisa, foram avaliados a classificação de umidade e avariados dos grãos recebidos. A determinação do teor de umidade é de extrema importância para o controle de qualidade, pois umidade elevada (acima de 14%) favorece o crescimento de fungos potencialmente produtores de micotoxinas (BUTOLO, 2002). E os grãos avariados, são grãos que apresentam algum tipo de defeito, como grãos mofados, ardidos, fermentados, germinados, carunchados, chochos ou imaturos e gessados. Com base nesses grãos defeituosos, determina-se a classe do lote, como tipo 1, tipo 2, tipo 3, e fora do tipo. Todas elas possuem um limite máximo de grãos avariados. O tipo 1, por exemplo, é composto por lotes com no máximo 1% de grãos ardidos, e 6% total dos demais grãos avariados (SENAR, 2017).

A porcentagem de avariados é calculada manualmente, através de uma amostra homogênea de aproximadamente 800g, onde é feita a limpeza, e posteriormente a separação de 100g dessa amostra. Em cima disso, é separado os grãos defeituosos e pesado para obter a porcentagem de avariados em relação a amostra de 100g.

A umidade é calculada de forma automática por uma máquina aferida e certificada pelo INMETRO (Instituto Nacional de Metrologia), e considera-se o grão seco com porcentagem igual ou inferior a 14%. Os grãos avariados não apresentaram discrepância nos dados. Diver-

Os agricultores e técnicos comentaram que a região apresentou ótima qualidade nos grãos, com porcentagens dentro do limite aceitável para o tipo 1. Com isso, separamos os dados apenas da porcentagem de umidade do grão, pois nas descargas dos caminhões não foi separado os lotes por avariados, e sim por umidade.

Abaixo na Tabela 1 temos informações dos dados coletados. Na primeira coluna temos a identificação do dia, na segunda coluna temos as médias das porcentagens de umidade, e por último a amplitude dos dados, ou seja, a diferença entre a maior e menor porcentagem de umidade entre as cargas entregues.

Tabela 1: Conjunto de dados

Dia	% Umidade	R (Amplitude)
01/jul	22,518	2,7
03/jul	23,165	8
04/jul	22,74	8,9
05/jul	22,401	11
06/jul	22,019	7,6
07/jul	21,573	7,9
08/jul	22,127	8,8
10/jul	21,744	0,6
11/jul	23,875	2,8
12/jul	21,953	5
13/jul	22,369	4,6
14/jul	22,054	6,4
15/jul	22,418	7,6
16/jul	22,129	5,5
17/jul	21,725	6,5
18/jul	22,581	0,5
19/jul	23,1	0
20/jul	22,114	10,9
21/jul	21,942	6,4
22/jul	20,938	6,5
24/jul	20,208	9,7
25/jul	20,093	6,8
26/jul	20,105	8,9
27/jul	19,135	9,2
28/jul	18,585	10,3

Fonte: Autores (2024).

O tempo de secagem do produto varia entre 3 a 4 horas dependendo da porcentagem de umidade do produto. É indispensável a secagem ou armazenamento dos grãos neste estado, para evitar proliferação de fungos, fermentação e até mesmo perder a qualidade nutricional do grão. A fim de minimizar esses problemas, utilizaremos da estatística para otimizar este tempo de secagem ou até mesmo as descargas dos caminhões.

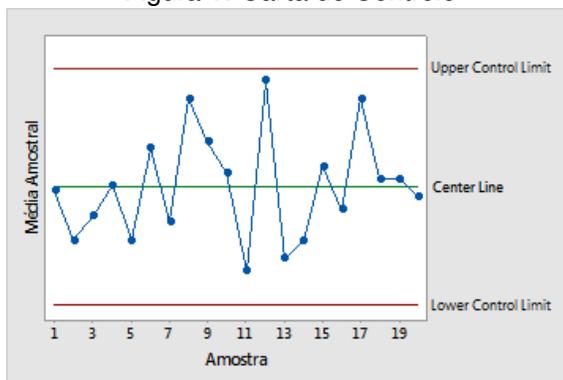
A estatística oferece diversas ferramentas para gerenciamento em setores produtivos. O controle estatístico de produtos, é um método com aplicações estatísticas que busca a prevenção de defeitos, melhoria de qualidade de produtos e redução nos custos.

Existem diversas ferramentas para controle de qualidade, como histogramas, diagramas, curvas de distribuição normal, cartas de controle, capacidade do processo, gráfico de Pareto e diagrama de causas-efeito/ Ishikawa. Nesta pesquisa foi utilizado apenas a carta de controle,

com o objetivo de analisar o comportamento das classificações do milho.

A carta de controle é uma apresentação gráfica (Figura 1) para monitorar o desempenho de um processo de medição. Estes gráficos determinam estatisticamente uma faixa denominada limite de controle, onde é limitada por uma linha superior (Limite superior de controle – LSC) e uma linha inferior (limite inferior de controle – LIC), e uma linha central (Limite central – LC) (OLIVEIRA, 2013).

Figura 1: Carta de Controle



Fonte:

<https://support.minitab.com/pt-br/minitab/21/help-and-how-to/quality-and-process-improvement/control-charts/supporting-topics/basics/understanding-control-charts/>.

Uma carta de controle varia de acordo com o conjunto de dados analisados em certo período. Se os dados são contínuos, ela pode ser desenvolvida através da média amostral com amplitude amostral R ou desvio padrão s.

Se os dados são discretos ele deverá ser construído com as estatísticas amostrais: número de defeituosos ou com a fração de defeituosos, ou ainda com o número de defeitos por unidade do produto.

Como estamos trabalhando com uma variável contínua, utilizaremos a carta de controle por variáveis. A carta de controle \bar{x} é calculado por meio do valor médio dos dados, ou seja,

$$\begin{aligned}
 LC &= \bar{x} \\
 LIC &= \bar{x} - A_2R \\
 LSC &= \bar{x} + A_2R
 \end{aligned}$$

Onde A_2 é uma constante que depende apenas da amostra n . Como estamos trabalhando com $n = 25$, de acordo com a tabela, $A_2 = 0,153$. Com esses dados, podemos analisar o processo em um determinado período, orientação a administração no processo de produção, e reduzir custos da empresa.

3 Resultados e Discussão

Inicialmente fez um estudo descritivo dos dados, com o intuito de se ter *feeling* do conjunto de dados. Um resumo descrito está apresentado na Tabela 2.

Observa-se que para a variável percentual de umidade dos grãos de milho, o mínimo dista cerca de 5 unidades do máximo, e que a média e a mediana tem cerca uma unidade de

Tabela 2: Resumo estatísticas descritivas

Estatísticas	% Umidade	R (Amplitude)
n.obs	25	25
Mínimo	18.585	0
Máximo	23.875	11
1. Quartil	21.573	5
3. Quartil	22.418	8.9
Média	21.744	6.52
Mediana	22.054	6.8
Variância	1.579	10.13
Desv.pad.	1.256	3.183
Assimetria	-0.892	-0.618
Kurtose	0.164	-0.657

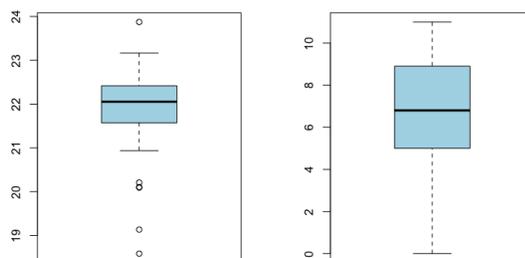
Fonte: Autores (2024).

diferença, ainda a variância (e desvio padrão) pode ser considerada baixa. Pelos coeficiente de assimetria, o percentual de umidade é dito ser assimétrico negativo moderado, com uma leve tendência de curva leptocúrtica conforme observado pelo coeficiente de curtose.

As estatísticas descritivas da variável amplitude, indicam um maior intervalo de amplitude, ou seja, de 11 unidades. A média e a mediana são próximas, o que justifica um menor coeficiente de assimetria, embora este seja classificado como coeficiente de assimetria negativo moderado. A curva é dita ser leptocúrtica de acordo com o valor da curtose. Esse conjunto de dados apresenta um desvio padrão de 3.183 unidades.

Ainda com o intuito de descrever o conjunto de dados, obteve-se os gráficos boxplot, conforme disposto na Figura 2. Nota-se que a variável percentual de umidade, Figura 2(a) possui 4 valores inferiores que destoam da nuvem dados e um valor superior destoante. A parte dos valores discrepantes, quando consideramos o boxplot dos dados observamos que este é simétrico para as quatro partes dos conjunto de dados. Na Figura 2(b) está disposto o boxplot da variável amplitude, em que se observa que os 50% centrais são bastante parecidos, indicando simetria dos dados, conforme já comentado anteriormente pela proximidade entre as medidas de tendência central média e mediana. Os 25% inferiores dos dados são mais dispersos do que os 25% superiores. Esse conjunto de dados não apresenta pontos destoantes.

Figura 2: Boxplot dos dados, (a) % umidade, (b) amplitude



Fonte: Autores (2024).

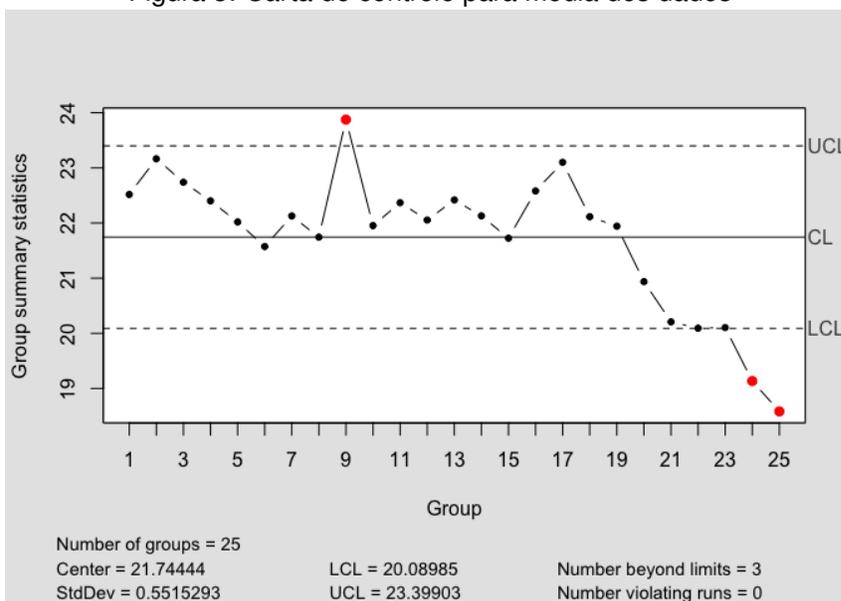
Após essas análises iniciais, procedeu-se com o estudo de controle de qualidade dos dados. Para a construção da carta de controle, calculamos inicialmente a média dos dados, obtendo o resultado $\bar{x} = 21,74444$. Sabemos que a constante para $n = 25$ dados é $A_2 = 0,153$. Assim, basta encontrar a amplitude dos dados, calculando a média entre todos os 25 dias pesquisado. Dessa forma, temos $R = 6,524$. Assim, encontramos o limite inferior e superior de controle, dada por:

$$LIC = 21,74444 - 0,153 * 6,524 = 20,746268$$

$$LSC = 21,74444 + 0,153 * 6,524 = 22,742612$$

Com o auxílio do *software* R (R Core Team, 2023) e do pacote qcc (Scrucca, 2004) criado especialmente para gerar gráficos de controle de qualidade e controle estatístico de processos, esboçamos o conjunto de dados por meio das cartas de controle de média e amplitude, como representado nas Figura 3 e 4 a seguir.

Figura 3: Carta de controle para média dos dados

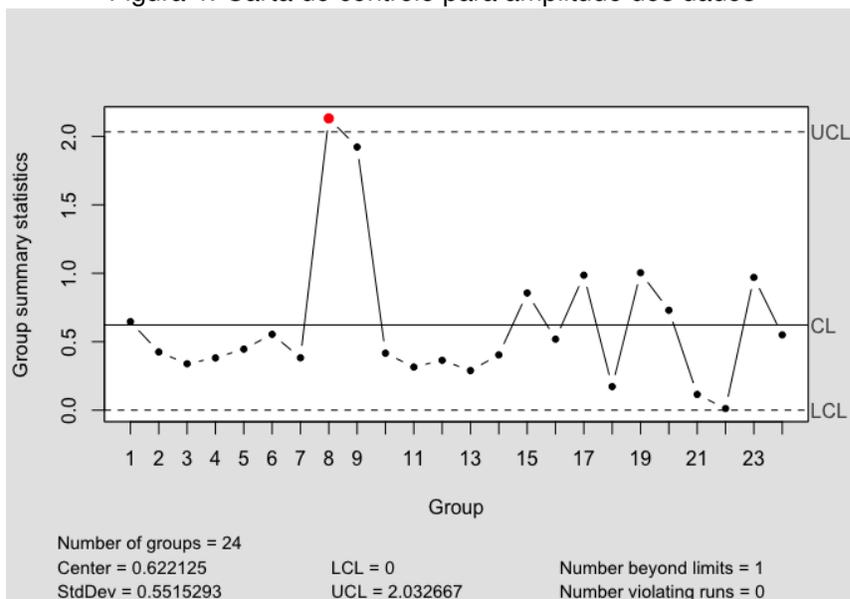


Fonte: Autores (2024).

No eixo horizontal temos os dias pesquisado, e na vertical a porcentagem de umidade do milho. O gráfico da média dos dados consiste na linha de tendência situada entre os limites inferior e superior. Podemos perceber que no dia 9 o percentual de umidade extrapola os limites de controle de qualidade, esse fato pode ser explicado por ter sido um dia de chuva, em que o produto fica exposto em tempo muito úmido, aumentando a porcentagem de umidade dos grãos. A partir do dia 20, percebemos que os dados apresentam tendência decrescente do percentual de umidade, chegando a ultrapassar o limite inferior para os dias 24 e 25, observa-se que nesses dias as lavouras receberam altas temperaturas e exposição de luz solar o que facilitou a secagem do produto.

A carta de controle da variável amplitude apresenta um único valor que extrapola o limite superior de controle para o dia 8. Ademais comenta-se que houveram duas sequências de 5 pontos consecutivos abaixo da linha central de limite o que indicia uma falta de controle de qualidade. Mas, devido a especificidade da agricultura que é diretamente afetada pelas intempéries climáticas esse fato é natural.

Figura 4: Carta de controle para amplitude dos dados



Fonte: Autores (2024).

4 Conclusão

A utilização da carta de controle é essencial na produção industrial, e oferece diversos benefícios. Nesta pesquisa, a utilização da carta de controle pode proporcionar informação que irão auxiliar na secagem e armazenamento do produto, pois conseguimos analisar o comportamento das classificações anteriores, e separar as cargas com porcentagens maiores ou menor que os limites de controle e justificar possíveis resultados atípicos. Dessa forma, facilitaria o armazenamento de produtos, pois os de menor percentual de umidade necessitam de menor tempo de secagem, ademais, esse estudo permite uma "separação" de grãos mais úmidos dos mais secos, otimizando assim o tempo de secagem, consumo de energia elétrica e tempo de utilização das unidades de secagem de produto.

Concluimos que a carta de controle pode ser uma boa alternativa para auxiliar nos processos de descargas dos caminhões, minimizando o tempo de estadia no pátio da empresa e facilitando a administração da empresa, organizações operacionais bem como maior satisfação para o produtor que fica menor tempo em filas aguardando para descarregar o produto de suas colheitas.

Referências

- [1] BARROS, J. F.; CALADO, J. G. A cultura do milho. 2014
- [2] BUTOLO, José Eduardo. Qualidade de ingredientes na alimentação animal. JE Butolo, 2002.
- [3] COAMO EM NÚMEROS. COAMO, 2024. Disponível em: <https://www.coamo.com.br/pt-br/institucional/quem-somos/coamo-em-numeros>. Acesso em: 12 de abril de 2024.

- [4] SAFRA BRASILEIRA DE GRÃOS. CONAB - Companhia Nacional de Abastecimento, 2024. Disponível em: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/graos>. Acesso em: 12 de abril de 2024.
- [5] Grãos: Classificação de Soja e Milho. Serviço Nacional de Aprendizagem Rural – Brasília: SENAR, 2017. Disponível em: <https://www.cnabrazil.org.br/assets/arquivos/178-GR%C3%83OS.pdf> Acesso em: 24 de nov. de 2023.
- [6] LISBINSKI, F. C.; MUHL, D.D.; OLIVEIRA, L. DE; CORONEL, D. A. Perspectivas e desafios da agricultura 4.0 para o setor agrícola. VIII Simpósio da Ciência do Agronegócio 2020. Porto Alegre, Rs.
- [7] OLIVEIRA, Camila Cardoso de et al. Manual para elaboração de cartas de controle para monitoramento de processos de medição quantitativos em laboratórios de ensaio. Instituto Adolfo Lutz. São Paulo, p. 18, 2013.
- [8] R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- [9] SCRUCCA, L. (2004). qcc: an R package for quality control charting and statistical process control. In R News (Vol. 4/1, pp. 11–17). <https://cran.r-project.org/doc/Rnews/>
- [10] SOLIANI, R. D. Logistics and transportation in brazilian Agribusiness: the flow of grain production. Journal of Economics, Business and Management. vol.10, n. 3. jun, 2022.
- [11] YU, J-K; MOON, Y-S. Corn Starch: Quality and quantity improvement for industrial uses. Plants, vol. 11, n.1. 2022.

A IMERSÃO VISUAL E SONORA NOS JOGOS ELETRÔNICOS: O CASO MATHVANIA

Amós Cardoso da Silva
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre
amosc216@gmail.com

Nathan Victor Barbosa dos Santos
Colégio Estadual Jardim Porto Alegre
absassim@gmail.com

Renato Francisco Merli
UTFPR – Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Heloisa Cristina da Silva
UTFPR - Toledo
heloisasilva@utfpr.edu.br

Este trabalho será apresentado:

SEMAT Workshop

Resumo

Este artigo explora o uso de jogos eletrônicos na educação, destacando algumas características como interatividade, flexibilidade e imersão. Essa última, foco deste trabalho, trata das imersões visuais e sonoras. No trabalho são identificados desafios na implementação de jogos na educação, incluindo a falta de preparo das escolas e a dificuldade em manter o interesse dos alunos. São apresentados exemplos de jogos educativos, como o *Surviving Mars* e o *Minecraft*. Além disso, discute-se o desenvolvimento do *MathVania*, um jogo pedagógico 2D que potencializa o ensino do reconhecimento de figuras geométricas planas, principalmente nos aspectos visuais e sonoros. Conclui-se que, embora existam desafios, os jogos eletrônicos têm um grande potencial como ferramentas de ensino e aprendizado, e que é crucial que educadores e desenvolvedores de jogos continuem a explorar novas abordagens e estratégias, pensando, inclusive nos aspectos visuais e sonoros.

Palavras-chave: Geometria. Jogos Pedagógicos. Matemática.

1 Introdução

Os jogos eletrônicos (ou *games* eletrônicos) são uma fonte de entretenimento extremamente popular e de potencial quase ilimitado. Como apontam, Alves, Rios e Calbo (2014, p. 17), “[...] os *games* se constituem em um fenômeno cultural que mobiliza diferentes gerações na sociedade contemporânea. Estas mídias seduzem os sujeitos por suas características interativas, imersivas e de interconectividade, tornando-se uma das maiores indústrias de entretenimento do mundo”.

Eles são utilizados não apenas para o entretenimento, os *games* possuem características favoráveis para os mais diversos fins, como arte, esporte, treinamento e, para a educação.

Autores como Gee (2004), Johnson (2005) e Schaffer (2006), apontam as possibilidades que os *games* eletrônicos podem trazer para a aprendizagem dos jogadores.

Algumas das características que favorecem a aprendizagem são a interatividade com o mundo e a narrativa apresentados, a flexibilidade que permite criar cenários e atividades diferentes, o fomento à colaboração ou mesmo o sentimento de competitividade em jogos *Multiplayer* e claro, uma das principais características é a imersão. Os jogos possuem uma capacidade gigantesca de manter o jogador imerso dentro de seu mundo e com isso não apenas o manter interessado, mas também o tornando mais propício ao aprendizado o integrando ao mundo apresentado (Mill, Ribeiro e Veloso; 2023).

Conforme apontam Teixeira e Apresentação (2014), não vemos tantos jogos sendo utilizados para o ensino por vários motivos, sendo eles a falta de infraestrutura das escolas e a falta de preparado dos professores ao utilizarem os jogos, e principalmente os próprios jogos pedagógicos, uma vez que muitos deles possuem falhas como a principal delas ser em manter os alunos interessados, pois boa parte destes jogos são feitos por professores que, apesar de terem grande conhecimento da matéria que se busca ensinar, muitas vezes não estão inseridos no “Mundo dos *Games*”, e podem ter dificuldade em entender exatamente o que faz dos jogos tão populares e interessantes.

Assim, assumindo essas dificuldades enfrentadas pelos professores e alunos, o foco deste estudo é buscar uma resposta à pergunta: *Como manter o interesse dos alunos em um jogo pedagógico?* Para isso, é feita uma breve revisão de literatura sobre a educação por meio de jogos, na sequência é apresentado o jogo *MathVania* e como ele tem sido elaborado para manter o interesse pedagógico dos alunos no aprendizado de formas geométricas. Por fim, as considerações são realizadas.

2 A Educação com Jogos

A utilização de jogos para o ensino envolve alguns fatores chave como uma boa integração do conteúdo com o jogo em si e um bom *Looping* de *Gameplay* (De, 2021), ou seja, uma jogabilidade interessante que mantenha o jogador interessado no jogo, um aspecto visual interessante e que faça sentido com o estilo de jogo e o público-alvo, a sonorização é essencial pois é um aspecto muito importante de *feedback* do jogo, dentre outros aspectos.

Um exemplo de utilização de um jogo em sala de aula ocorreu na Escola Estadual Deniz Vale, em Nova Lima, Minas Gerais, onde o jogo *Surviving Mars*¹ foi utilizado para

¹ *Surviving Mars* é um jogo de simulação para construção de cidades no Planeta Marte.

simular a colonização de Marte, de modo que os alunos puderam passar por conteúdos que já tiveram acesso anteriormente de forma visual e interativa (Agência Minas, 2024).

Outro jogo muito popular e diversas vezes utilizado para o ensino é o *Minecraft*², conforme apontam Yumi e Akemi (2020), esse jogo já foi utilizado em diferentes países e para diferentes propósitos. Por exemplo, foi utilizado na escola *Stackpole VC School*, na Inglaterra, onde os alunos reconstruíram a escola dentro do jogo utilizando os conceitos que aprenderam nas aulas de matemática; na escola *Richard J. Lee Elementary*, nos Estados Unidos, os alunos da escola pesquisaram diferentes biomas e os reproduziram no ambiente virtual e, no Brasil, no estado de Mato Grosso, alunos da UFMT fizeram a formatura dentro do jogo.

Embora os jogos *Surviving Mars* e *Minecraft* não tenham sido originalmente concebidos para fins pedagógicos, características intrínsecas os tornam ferramentas valiosas para o ensino-aprendizagem. A flexibilidade do *Minecraft* e o conteúdo temático de *Surviving Mars* atraem e mantêm o interesse dos alunos, promovendo a assimilação de conhecimentos e habilidades de forma natural e envolvente.

Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) classificam esses jogos como educativos, definindo-os como aqueles que proporcionam ao jogador aprendizado espontâneo, sem a necessidade de seguir uma sistematização rígida. Ou seja, o ato de jogar se torna um meio para a assimilação informal de conteúdos, habilidades ou até mesmo de outros idiomas. Essa característica inclui os jogos comerciais na categoria de jogos educativos.

Cleophas, Cavalcanti e Soares (2018) avançam na classificação, distinguindo os jogos didáticos dos jogos educativos. Os jogos didáticos caracterizam-se pela sistematização direcionada a um objetivo educacional específico. Para tanto, conteúdos didáticos são inseridos em jogos já existentes (comerciais). Já os jogos pedagógicos são desenvolvidos com o objetivo exclusivo de ensinar um determinado conteúdo. Seu planejamento é cuidadosamente elaborado dentro do contexto educacional, de modo que a aprendizagem possa ocorrer não somente de maneira informal, mas também formal.

Nesse contexto, o jogo pedagógico *MathVanía* vem sendo desenvolvido e pensado para o ensino de matemática. Na próxima seção, são trazidos mais detalhes sobre o jogo.

3 O *MathVanía*

Conforme já relatado em trabalhos anteriores de Silva, Merli e Francisco (2023), Silva, Francisco e Merli (2023) e Silva, Santos e Merli (2023), o *MathVanía* é um projeto de jogo 2D desenvolvido em *Unity*, sendo de caráter pedagógico, cujo conteúdo abordado é o

² *Minecraft* é um jogo eletrônico *sandbox* de sobrevivência.

reconhecimento de figuras geométricas planas. O jogo é pensado para estudantes do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, mais precisamente, para aqueles do segundo ano, cuja habilidade EF02MA15 da BNCC é “Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos” (Brasil, 2018, p. 283).

Atualmente o *MathVania* está na fase de reestruturação visual e implementação dos recursos sonoros. Até o momento já foram desenvolvidas três fases. Essa reestruturação se mostrou necessária para adequar melhor o jogo ao seu público-alvo e, principalmente, para aumentar sua atratividade, uma vez que os aspectos visuais e sonoros são fundamentais para a manutenção da atenção ao jogo e ao interesse inicial em jogá-lo.

O projeto se pauta justamente em uma abordagem mais próxima aos jogos voltados ao entretenimento, buscando uma arte mais agradável, uma *Gameplay* mais fluida e com uma introdução menos expositiva ao conteúdo trabalhado, buscando integrá-lo à *Gameplay* do jogo.

Nesse contexto, nas Figuras 1a e Figura 1b, é possível identificar a mudança visual, principalmente em relação às cores, partindo de cores mais neutras para cores mais fortes e atrativas.

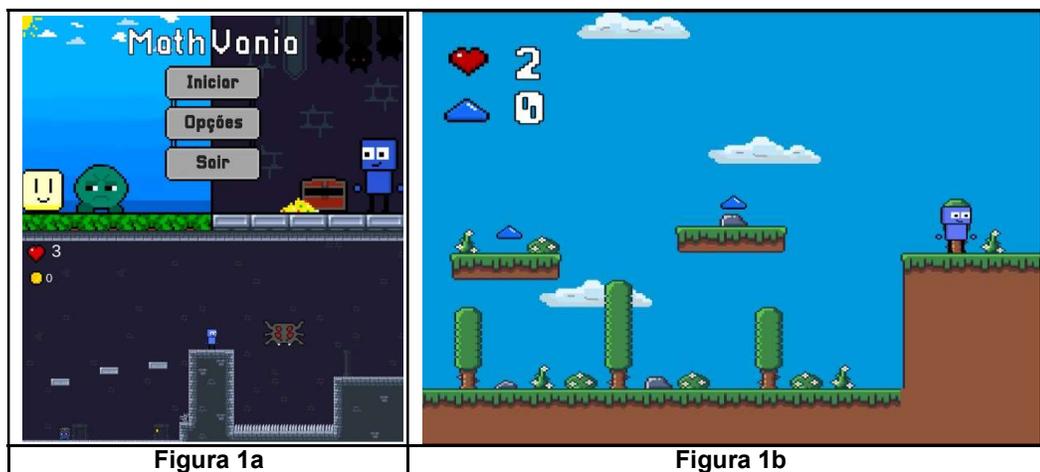


Figura 1 – Mudança no Visual

Fonte: Projeto de Jogo *MathVania*

Para Vaz (2023), as cores vão muito além da estética, pois desempenham papéis cruciais na narrativa, na conexão emocional, na atmosfera e na jogabilidade. Quando todas essas peças se encaixam, o resultado é uma experiência de jogo que fica gravada na memória do jogador por muito tempo após o término.

Outro aspecto importante é o som, que pode ser pensado sob três principais elementos: música de fundo (*Background Music*), efeitos sonoros e dublagem (Boury, Mustaro, 2013). Os autores apontam que, o som, como elemento imersivo de um jogo, deve seguir um padrão condizente com a sensação que se quer transmitir. Caso esse padrão seja interrompido, “[...] pode ocasionar uma perda de interesse no jogo por parte do jogador, que tem o infortúnio de prestar mais atenção em detalhes que atrapalham a sua interação e, portanto, sua imersão no jogo em questão” (Boury, Mustaro, 2013, p. 346).

No caso do *MathVania*, a música de fundo e os efeitos sonoros têm sido pensados para fazer parte da imersão completa do jogador no jogo. Contudo, por falta de experiência e *know-how* dos desenvolvedores participantes do projeto, esses elementos não têm sido produzidos por conta própria, mas estão sendo utilizados sons de sites que permitem a utilização gratuita. É o caso da música de fundo, baixada do site *OpenGameArt*³ e, baixados do site *FreeSound*⁴, temos os efeitos sonoros de pulo⁵ (Figura 2), a coleta de itens⁶ e o recebimento de dano⁷.

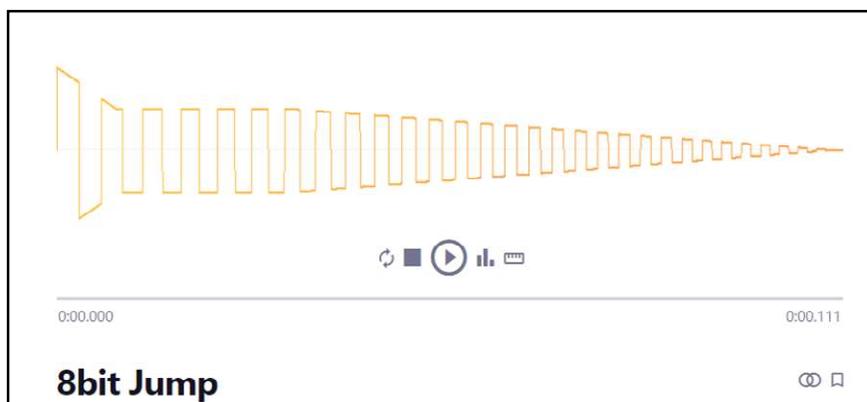


Figura 2 – Efeito Sonoro de Pulo

Fonte: FREE SOUND (2017)

Vale destacar que, por mais que esses sons tenham sido utilizados de sites, a escolha deles se deu de forma criteriosa e pensando na conexão direta com o jogo do *MathVania*.

³ OPEN GAME ART. Disponível em: <https://opengameart.org/>. Acesso em: 9 abr. 2024.

⁴ FREE SOUND. Disponível em: <https://freesound.org/>. Acesso em: 9 abr. 2024.

⁵ FREE SOUND. **8bit Jump**. 2017. Disponível em: <https://freesound.org/people/plasterbrain/sounds/399095/>. Acesso em: 08 abr. 2024.

⁶ FREE SOUND. **Plingy Coin**. 2020. Disponível em: <https://freesound.org/people/Fupicat/sounds/538146/>. Acesso em: 08 abr. 2024.

⁷ FREE SOUND. **Retro taking damage sfx2**. 2022. Disponível em: <https://freesound.org/people/stumpbutt/sounds/629664/>. Acesso em: 08 abr. 2024.

4 Conclusões

Diante dos desafios relacionados ao ensino em geral, os jogos eletrônicos podem ser uma ferramenta muito útil para a melhoria deste processo, sejam eles jogos desenvolvidos desde o início com este objetivo, como é o caso do projeto *MathVania*, ou mesmo jogos comerciais utilizados em sala (agora jogos educativos) para ensinar algo aos alunos, como o *Surviving Mars* e o *Minecraft*.

Assim, buscou-se responder à pergunta: Como *manter o interesse dos alunos em um jogo pedagógico*? Para isso foram destacados, principalmente, os fatores que mantêm esse interesse, como integrar o conteúdo ao *Gameplay* de modo que seja apresentado jogando, de forma não intrusiva, mantendo o jogar e o aprender como uma experiência conjunta e não como duas atividades separadas. Além disso, os aspectos visuais e sonoros são muito importantes, pois podem ser feedbacks agradáveis ao jogador.

No entanto é importante reconhecer que não existe uma abordagem universal para todos os casos e contextos educacionais, e o que pode funcionar para uma situação pode não funcionar para outra. Portanto é crucial que educadores e desenvolvedores de jogos continuem buscando novas abordagens e estratégias, avaliando continuamente sua eficácia e fazendo os ajustes necessários para maximizar o potencial dos jogos eletrônicos como ferramenta de ensino e aprendizado.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA MINAS. **Escola estadual em Nova Lima incentiva aprendizagem com ajuda de jogos eletrônicos**, 2024. Disponível em:

<https://www.agenciaminas.mg.gov.br/noticia/escola-estadual-em-nova-lima-incentiva-aprendizagem-com-ajuda-de-jogos-eletronicos>. Acesso em: 8 abr. 2024.

ALVES, L.; RIOS, V.; CALBO, T. Games e aprendizagem: trajetórias de interação. In: LUCENA, S. (org.). **Cultura digital, jogos eletrônicos e educação**. Salvador: EDUFBA, 2014. 242 p.

BOURY, E. S.; MUSTARO, P. N. Um estudo sobre áudio como elemento imersivo em jogos eletrônicos. In: SBC – Proceedings of SBGames, 2013, p. 345-352. **Anais [...]**. Disponível em: <https://sbgames.org/sbgames2013/proceedings/artedesign/41-dt-paper.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 27 mar. 2024.

CLEOPHAS, M.G.; CAVALCANTI, E.L.D.; SOARES, M.H.F.B. Afinal de contas, é jogo educativo, didático ou pedagógico no ensino de química/ciências? Colocando os pingos nos “is”. In: CLEOPHAS, M.G.; SOARES, M.H.F.B. (Org.). **Didatização lúdica no Ensino de**

Química/Ciências-Teorias de Aprendizagem e outras interfaces. 1ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018, p. 33-43.

DE, S. **What Is a Gameplay Loop in Gaming?** Make use of, 2021. Disponível em: <https://www.makeuseof.com/gameplay-loop-gaming/>. Acesso em: 8 abr. 2024.

FREE SOUND. **8bit Jump.** 2017. Disponível em: <https://freesound.org/people/plasterbrain/sounds/399095/>. Acesso em: 08 abr. 2024.

GEE, J. P. **Lo que nos enseñan los videojuegos sobre el aprendizaje y el alfabetismo.** Aljibe: Málaga, 2004.

JOHNSON, S. **Surpreendente!** a televisão e o videogame nos tornam mais inteligentes. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

MILL, D.; RIBEIRO, P. A.; VELOSO, B. Escrevendo jogos educacionais: uma revisão bibliográfica com abordagem instrucional alternativa. **Conhecimento & Diversidade**, v. 15, n. 36, 2023, p. 244-270. Disponível em: https://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/conhecimento_diversidade/article/view/9753/0. Acesso em: 8 abr. 2024.

SHAFFER, D. W. **How computer games help children learn.** New York: Macmillan, 2006.

SILVA, A. C.; FRANCISCO, P. S. L.; MERLI, R. F. Engajando Alunos e Promovendo o Aprendizado Matemático com um jogo digital: o caso do Mathvania. In: Seminário de Extensão e Inovação & XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR, 2023, Ponta Grossa, 13. **Anais [...]**. Ponta Grossa: UTFPR, 2023. p. 1-6. Disponível em: <https://seisicite.com.br/trabalhos-finais/>. Acesso em: 8 abr. 2024.

SILVA, A. C.; MERLI, R. F.; FRANCISCO, P. S. L. O desenvolvimento de um jogo pedagógico: relato de experiência no âmbito do Pibic-EM. In: Semana Acadêmica da Matemática UTFPR - Toledo, 10, 2023, Toledo. **Anais [...]**. Toledo: COMAT, 2023, p. 92-102. Disponível em: https://www2.td.utfpr.edu.br/semat/X_semat/Anais_X_Semat.pdf. Acesso em: 8 abr. 2024.

SILVA, A. C.; SANTOS, N. V. B.; MERLI, R. F. Games Digitais no ensino da Matemática: relato de uma experiência. In: Encontro de Iniciação Científica do Câmpus Toledo, 1, 2023, Toledo. **Anais [...]**. Toledo: UTFPR, 2023. Disponível em: <https://endict.td.utfpr.edu.br/ANAIS%20IX%20ENDICT.pdf>. Acesso em: 8 abr. 2024.

TEIXEIRA, R. R. P.; APRESENTAÇÃO, K. R. Dos S. da. Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática. **Revista Linhas**, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302-323, jan./jun. 2014. Disponível em: <https://revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/download/1984723815282014302/3103/12415>. Acesso em: 8 abr. 2024.

VAZ, J. **Game artist:** o que é, o que faz esse profissional, o salário e como começar nessa área. Site da Escola Britânica de artes criativas & tecnologia. 2023. Disponível em: <https://ebaonline.com.br/blog/game-artist-o-que-faz-quanto-ganha>. Acesso em: 8 abr. 2024.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e
a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

RELATO DE EXPERIÊNCIA: XII JORNADA DE ÁLGEBRA

Angela de Cesaro
 Universidade Tecnológica Federal do
 Paraná
angelacesaro@alunos.utfpr.edu.br

Leandro Werzeczionek de Brito
 Universidade Tecnológica Federal do
 Paraná
leandrobrito@alunos.utfpr.edu.br

Este trabalho será apresentado:

SEMAT Workshop

Resumo

Este trabalho tem como objetivo narrar as experiências vivenciadas ao longo da escrita e desenvolvimento do trabalho intitulado Grafos: um estudo introdutório, apresentado durante a XII Jornada de Álgebra na cidade de Porto Alegre no Rio Grande do Sul. Durante a Jornada também prestigiamos outras apresentações, incluindo o que mais novo tem sido estudado referente a Álgebra, e que serão comentadas ao longo do texto com o intuito de incentivar outros acadêmicos do curso a prestigiar o evento.

Palavras-chave: Resumo. Teoria dos Grafos. Álgebra. Evento internacional.

1 O processo de escrita e desenvolvimento do trabalho

Durante o 6º período do curso de Licenciatura em Matemática, ao longo da disciplina de Álgebra ministrada pelo Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra, surgiu a curiosidade de estudarmos sobre como a Álgebra está relacionada com a Teoria dos Grafos. Foi então que decidimos escrever um trabalho, seguindo essa temática, para ser apresentado na XII Jornada de Álgebra.

A Jornada de Álgebra é um evento que ocorre anualmente, e tem como objetivo promover entre alunos de pós-graduação e de graduação o que de mais novo tem sido estudado no campo da Álgebra.

Para dar início ao nosso projeto, começamos nossos estudos buscando compreender o que são os Grafos, sendo eles um conjunto de pontos e arestas. Posteriormente, seguimos estudando as demais nomenclaturas e definições correlatas.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Então construímos o conjunto de automorfismos dos grafos, provando que o conjunto é fechado para a operação de composição e possui as propriedades: associativa, elemento neutro e elemento simétrico.

Pelo exposto, concluímos então que o conjunto de automorfismos é grupo.

2 O evento

O evento ocorreu entre os dias 19 e 21 de outubro na capital do Rio Grande do Sul, na cidade de Porto Alegre, na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

O evento contou com a participação de acadêmicos e professores de diversas universidades da região sul, incluindo a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Universidade Estadual de Maringá (UEM), Universidade Federal do Paraná (UFPR), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Universidade Federal de Pelotas (UFPeL) e até mesmo de outros países, como Argentina e Uruguai.

Nossa partida na cidade de Toledo se deu no dia 18 pela madrugada, o que nos permitiu prestigiar o evento desde sua abertura até o seu encerramento.

Ao longo do evento pudemos prestigiar um minicurso que se estendeu ao longo dos três dias de evento, sobre a Teoria Espectral de Grafos, apresentado pelo Dr. Carlos Hoppen, no qual foi abordado a temática dos caminhos mínimos em redes de internet. Entre os pontos principais do minicurso destacam-se os Grafos isomorfos, pois apresentavam matrizes similares. Vimos também os Grafos fortemente regulares e os Grafos de Cayley. Além disso, alguns importantes Teoremas foram apresentados, como o Teorema de Perron.

Quando optamos por realizar o estudo, ainda que introdutório, sobre a Teoria dos Grafos, não tínhamos conhecimento de que a mesma temática seria abordada ao longo do minicurso. Saber disso foi muito satisfatório e, conseqüentemente, importante para que tivéssemos um conhecimento mínimo, mas suficiente, para compreender alguns dos aspectos abordados ao longo da apresentação.

Dando seqüência ao primeiro dia de evento, que se estendeu das 8 às 18 horas, foram apresentados os resultados recentes obtidos por pesquisadores em PI-teoria. A apresentação realizada era referente as Álgebras associativas, a Álgebra de Grassmann, incluindo estruturas adicionais como: superálgebra, álgebra com involução e φ -álgebra.

Em seguida foi realizada uma apresentação sobre os Grupos Quânticos Multiparamétricos, que abordou a Álgebra de Lie e a Álgebra de Hopf. E assim, se sucederam as demais apresentações, incluindo uma que abordava Quadrados Mágicos.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

De modo geral, as apresentações foram excelentes e envolviam assuntos pouco abordados na universidade em nosso curso de graduação, o que dificultava nossa compreensão. Ademais, algumas apresentações feitas por acadêmicos e professores estrangeiros eram com base em slides na língua inglesa e verbalizadas na língua espanhola, o que demandava muita atenção.

Ao término do primeiro dia fomos recepcionados com um jantar em uma tradicional churrascaria de Porto Alegre. Durante o jantar pudemos prestigiar apresentações gaúchas típicas da região, envolvendo danças como a chula.

Esse contato foi bastante interessante, pois além de conhecermos a cultura local, pudemos dialogar com colegas de modo que as distâncias, e aqui não nos referimos apenas a territorial, parecessem quase que inexistentes. Foi uma troca de experiências que agregou bastante com a nossa formação e realização pessoal.

Já no segundo dia de evento as apresentações continuaram e, à tarde, pudemos apresentar no formato de banner nosso trabalho durante o coffee break. Este momento foi dedicado para que os alunos pudessem apresentar o que estavam estudando.

Algo que nos chamou bastante atenção foi o fato de que somente nós, acadêmicos da UTFPR éramos alunos de graduação, os demais alunos já estavam na pós-graduação e mestrado em sua maioria. Além disso, outro fato que nos chamou a atenção foi a diferença entre os trabalhos produzidos e apresentados por nós, alunos do curso de licenciatura e os trabalhos produzidos e apresentados pelos alunos do bacharelado.

Buscando, posteriormente, uma justificativa capaz de explicar essa discrepância, observamos que há uma diferença significativa na grade curricular dos cursos de licenciatura e bacharelado, quando comparadas. A título de curiosidade, trazemos a seguir (Quadro 1) o comparativo entre as grades curriculares da licenciatura¹ e do bacharelado do curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

Quadro 1 - Comparativo entre as grades curriculares do curso de Matemática - UFPR

5° período de licenciatura	5° período de bacharelado
<ul style="list-style-type: none"> • Didática; • Comunicação em Língua Brasileira de Sinais - Libras/Fundamentos da educação bilíngue para surdos; • Equações Diferenciais, de Diferença e Aplicações; • Cálculo de Probabilidades A; 	<ul style="list-style-type: none"> • Análise II; • Variáveis Complexas; • Equações Diferenciais, de Diferença e Aplicações; • Anéis e Corpos; • Cálculo de Probabilidades A.

¹ Disponível em: <https://cmat.ufpr.br/grade-curricular/>. Acesso em: 16 mar. 2024.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e
a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

<ul style="list-style-type: none"> • Geometria Euclidiana. 	
6° período de licenciatura	6° período de bacharelado
<ul style="list-style-type: none"> • Geometrias não Euclidianas; • Fundamentos de Análise; • Prática de Docência em Matemática; • Diversidade Étnica-Racial, Gênero e Sexualidade; • Política e Planejamento da Educação Brasileira. 	<ul style="list-style-type: none"> • Geometria diferencial; • Teoria de Galois e Grupos; • Equações Diferenciais Parciais: Teoria e Aplicações; • Análise III.
7° período de licenciatura	7° período de bacharelado
<ul style="list-style-type: none"> • Organização do Trabalho Pedagógico na escola; • Anéis e Corpos; • Educação Algébrica I. 	<ul style="list-style-type: none"> • Teoria de Grupos; • Álgebra Linear II; • Espaços Métricos; • Educação Matemática na Contemporaneidade.

Fonte: adaptado de UFPR

Voltando ao evento, foi no momento das apresentações que pudemos interagir com egressas do nosso curso que hoje encontram-se fazendo o mestrado na UFPR. Foi muito especial e importante essa conexão pois trocamos experiências e discutimos possibilidades de estudos na área.

Durante o terceiro e último dia de evento, participamos de toda a programação e do encerramento do evento, no qual nos foi apresentado no formato de linha do tempo, imagens com os registros das edições anteriores do evento.

Sem mais, concluímos que a participação no evento agregou positivamente em nossa formação. Ao longo dos dias de evento percebemos o quão vasto o estudo da Álgebra pode ser, com inúmeras possibilidades a serem exploradas.

3 Agradecimentos

Agradecemos ao professor Robson pela sabedoria com que nos guiou durante os nossos estudos. Agradecemos também aos professores Wilian e Adriano por nos conduzirem com segurança e nos acompanharem durante o evento.

De igual maneira, agradecemos a comissão organizadora do evento, pois isso tudo não seria possível sem a contribuição de vocês.

REFERÊNCIAS



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do Paraná (UFPR).
Grade Curricular. Disponível em: <https://cmat.ufpr.br/grade-curricular/> . Acesso em: 16 mar. 2024.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

O DESENVOLVIMENTO DE UM JOGO MATEMÁTICO PEDAGÓGICO PARA MÚLTIPLOS JOGADORES: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

Felipe Da Silva Fadel
UTFPR – Toledo
felipefadel@alunos.utfpr.edu.br

Valdecir Neumann
UTFPR – Toledo
valdecirneumann@alunos.utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
UTFPR – Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Heloisa Cristina da Silva
UTFPR - Toledo
heloisasilva@utfpr.edu.br

Este trabalho será apresentado:

SEMAT Workshop

Resumo

Este artigo relata a experiência no desenvolvimento de um jogo pedagógico para múltiplos jogadores, cujo *GDD* já havia sido criado por Silva (2022). O enfoque do jogo está no ensino de diferentes conteúdos de Matemática voltados para o sétimo ano do Ensino Fundamental e associados aos descritores da Prova Paraná. Ao longo do desenvolvimento, algumas mudanças no *GDD* foram realizadas e, ferramentas como *Asprite*, *Blender*, *Netcode* e *Unity 3D* foram utilizadas. Destaca-se, que o jogo integra funcionalidades de multiplayer com diferentes mecânicas de jogo aplicadas num tabuleiro 3D, cuja temática envolve uma invasão alienígena. Em relação aos resultados alcançados até o momento, destaca-se a produção de uma fase inicial com breves telas de interação e outras funcionalidades como *Minigames*, adição de mais questões e aumento dos diferentes tipos de casas do tabuleiro, estes que ainda estão em fase de desenvolvimento.

Palavras-chave: *Game Design*. *NetCode*. *Unity 3D*.

1 Introdução

O mercado de games digitais vem crescendo em um ritmo exponencial e estes jogos podem revolucionar diversas áreas por conta da criação de um ambiente virtual controlável e novo, assim como possibilitar uma nova atividade em grupo, visto que podem integrar diversos jogadores em uma mesma aplicação (Neto, Del Vechio, 2021).

Alves, Rios e Calbo (2014, p. 17) apontam que, “[...] os games se constituem em um fenômeno cultural que mobiliza diferentes gerações na sociedade contemporânea”, e que

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

estas “[...] mídias seduzem os sujeitos por suas características interativas, imersivas e de interconectividade, tornando-se uma das maiores indústrias de entretenimento do mundo”.

Eles são utilizados não apenas para o entretenimento, os games possuem características favoráveis para os mais diversos fins, como arte, esporte, treinamento e, para a educação. Autores como Gee (2004), Johnson (2005) e Schaffer (2006), apontam as possibilidades que os games eletrônicos podem trazer para a aprendizagem dos jogadores. Assim, os jogos podem se tornar ferramentas poderosas no âmbito pedagógico.

Para o desenvolvimento de jogos digitais, diversas ferramentas são utilizadas, tanto para o planejamento quanto para a construção, ou seja, um planejamento prévio deve existir, o chamado *Game Design Document* – *GDD*. O papel do *Game Designer*, desenvolvedor do *GDD*, é “[...] criar as ideias e regras que compreendem o jogo” (Rogers, 2013, p. 38), ou seja, ele é o responsável por definir como o jogo será, desde sua concepção até as regras que definem os objetivos do jogo e delimitam a *gameplay*, sendo assim, uma das primeiras e mais fundamentais partes do processo de criação de jogos.

Uma vez definido o *GDD*, softwares e plataformas como o *Unity 3D*¹, o *Blender*², o *Aseprite*³ e *Netcode* são necessários para o desenvolvimento do jogo. Enquanto a *engine Unity 3D* é amplamente reconhecida na criação de jogos e *renderização*, o *Blender* é um software versátil para modelagem 3D, animação e criação de gráficos por computador. O *Aseprite* é usado para arte pixelada e animação e o *Netcode* é um conjunto de técnicas e protocolos utilizados para facilitar a comunicação entre os dispositivos conectados em uma rede, possibilitando a criação de experiências *multiplayer* online.

A *Unity 3D* é uma das principais *engines* para criação de um jogo. O desenvolvedor inicia um projeto, programando scripts em *C#* e utiliza a interface para organizar objetos. Essa interface inclui várias abas, como “Hierarquia”, que lista os objetos; “Projeto”, para visualizar os arquivos utilizados; “Console”, para visualizar as saídas e fazer a depuração de possíveis eventos em momento de execução do jogo; “Inspetor”, para ver informações e configurações dos objetos, e “Jogo”, para visualizar a execução do projeto em tempo real (*UNITY 3D*, 2024).

A criação de jogos com conexão online de jogadores não é algo proposto pelas ferramentas básicas da *Unity 3D*, sendo, portanto, necessário utilizar o *Netcode*. Com o *Netcode*, os desenvolvedores podem implementar funcionalidades como *matchmaking*⁴, sincronização de estado do jogo entre os jogadores e gerenciamento de conexões de rede de

¹ Unity 3D. Disponível em: <https://unity.com/pt>. Acesso em: 9 abr. 2024.

² Blender. Disponível em: <https://www.blender.org>. Acesso em 25 mar. 2024.

³ Aseprite. Disponível em: <https://www.aseprite.org>. Acesso em 25 mar. 2024.

⁴ Matchmaking é o processo utilizado em jogos online para encontrar e conectar automaticamente jogadores que desejam participar de uma partida *multiplayer*.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

forma eficiente e confiável. Isso permite a criação de jogos multiplayer online envolventes e escaláveis⁵.

Com base nessa caracterização e no contexto de que um dos autores é bolsista de iniciação científica e tecnológica, o presente texto objetiva mostrar como está sendo a experiência de desenvolver um jogo pedagógico, cujo *GDD* já foi desenvolvido anteriormente por Silva (2022) em sua iniciação científica e, posteriormente em seu Trabalho de Conclusão de Curso. Assim, para alcançar tal objetivo, será apresentada uma discussão teórica sobre Design de Games e os softwares utilizados para o desenvolvimento do jogo. Na sequência será descrito o desenvolvimento propriamente do jogo, associados com os passos vindouros. Por fim, são apresentadas as conclusões do artigo.

2 Game Design

Antes de embarcar na produção efetiva de um jogo, é crucial passar pela fase de *Game Design*, onde são estabelecidos diversos aspectos fundamentais. Isso inclui a definição da ideia central do jogo, seu estilo visual e de jogabilidade, o público-alvo, a construção da narrativa, as mecânicas de jogo, a criação de personagens, cenários, objetos, fases e níveis de dificuldade, além da escolha da trilha sonora e outros elementos que contribuam para a experiência do jogador. Segundo Zimmerman e Salen (2004), o *Game Design* é a atividade na qual um designer estabelece um ambiente para o jogador explorar, no qual o significado se manifesta. Essa definição implica em proporcionar uma experiência lúdica de valor para o jogador.

Os jogos têm como objetivo final entreter e, sua existência, não é dada apenas por jogos virtuais, eles também podem ser brincadeiras como esconde-esconde ou pega-pega e, compartilham uma característica, as regras e modos de jogar, sabendo que “[...] jogo, no senso comum, é isto mesmo: brincar, divertimento, passatempo [...]” (Sousa, 2017, p. 17), já nos dicionários, jogo é “[...] uma atividade física ou mental, todo jogo é regido por um sistema de regras definidoras do ganho ou da perda” (Sousa, 2017, p. 17).

O *Game Design* de um jogo, especificamente em um cenário de jogo virtual, tem como objetivo principal criar e padronizar os caminhos para que um jogo seja divertido e relaxante, ou seja, é o processo que permite a visualização de todo o conjunto do trabalho a ser desenvolvido pela equipe de produção.

⁵ O termo escalável refere-se à capacidade do sistema de lidar com um aumento no número de jogadores e atividade na rede sem comprometer significativamente o desempenho ou a qualidade da experiência de jogo.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Além disso, entendemos que,

[...] o jogo torna-se importante aliado aos processos de ensino e de aprendizagem pois, ao jogar, o estudante, pelo desejo que tem em ganhar, é incentivado a ficar atento, a corrigir e comparar estratégias apresentando capacidade de abstrações de forma rápida fazendo relações o tempo todo (Elias; Zoppo; Kalinke, 2019, p. 5).

Fernandes, Lucena e Aranha (2018) afirmam que, levar o processo de produção do *Game Design* de um jogo pedagógico para sala de aula é imaginar diferentes possibilidades de aprendizagem, já que envolve diversos conhecimentos que podem estar relacionados a diferentes conteúdos curriculares.

No contexto dos jogos pedagógicos, espera-se que os conteúdos sejam apresentados de uma maneira divertida e imersiva (Prensky, 2012). Ademais, como sugere Mattar (2010), para promover o aprendizado:

[...] um jogo precisa ser centrado no jogador, construído, autêntico, distribuído, lúdico e com feedback constante. Ou seja, deve permitir que o jogador tome decisões, a forma com que o jogador irá completar os objetivos deve depender das decisões tomadas, devem ser estimulantes e dinâmicos e o conteúdo deve ser inserido sutilmente na maior parte do jogo (Mattar, 2010, p. 121).

Outro aspecto importante no desenvolvimento de jogos pedagógicos é que estes devem atender o que preceitua a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Neste documento, que norteia o ensino e a aprendizagem de todo país, há competências e habilidades distribuídas ao longo de toda Educação Básica que devem ser trabalhadas. Nesse sentido, os jogos pedagógicos possuem um desafio a mais, pois além de entreter, devem ensinar conteúdos específicos.

Uma vez superada a etapa de desenvolvimento do *Game Design*, o próximo passo é o desenvolvimento propriamente dito do jogo. Na próxima seção é feita uma discussão sobre a utilização do *UNITY 3D* e do *Netcode* nessa etapa de produção de um jogo.

3 *Unity 3D* e o *Netcode*

A *Unity 3D* é reconhecida como uma das principais plataformas para o desenvolvimento de jogos digitais, oferecendo uma variedade de ferramentas e recursos que permitem aos desenvolvedores criar diversos tipos de aplicações diferentes, tendo seu enfoque na produção de jogos (UNITY 3D, 2024). A sua interface é intuitiva e existem diversos conteúdos e módulos para uso do software de forma gratuita; os desenvolvedores podem

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

programar scripts em C#, uma linguagem orientada a objetos e há componentes que se fazem muito necessários no contexto da *Unity 3D*.

A Figura 1 mostra o ambiente básico da *Unity 3D*, sendo as funcionalidades mais relevantes a “**Janela de Hierarquia**” onde se dispõem os objetos do jogo, colocados em uma ordem de importância e podendo existir mais de um objeto dentro de outro. A aba “**Inspeccionar**” é usada para atribuir e controlar informações de um objeto, é nela onde se colocam scripts que controlam a dinâmica da aplicação.

Outra janela que é de extrema importância é a da “**Cena**”, onde há um espaço 3D ou 2D em que o usuário pode movimentar, escalonar e rotacionar objetos de forma a construir o necessário para expressar suas ideias e trabalhar em disposições mais específicas. Essas funcionalidades são descritas no site da *Unity 3D Technologies* (2024).



Figura 1 - Interface da *Unity 3D*

Fonte: *Unity 3D* (2024)

No entanto, quando se trata de criar jogos com funcionalidades *online* e *multiplayer*, a *Unity 3D* por si só não fornece as ferramentas necessárias. Nesse ponto, o *Netcode* se torna indispensável. O *Netcode* é essencialmente um conjunto de técnicas e protocolos projetados para facilitar a comunicação entre dispositivos conectados em rede. Ele permite que os desenvolvedores implementem recursos como *matchmaking*, ou seja, a sincronização do estado do jogo entre os jogadores e o gerenciamento de conexões de rede, de forma eficiente e confiável. A sua distribuição e conteúdo são feitos pela própria *Unity 3D*, existindo uma documentação chamada *Netcode for GameObjects*⁶.

⁶ **NETCODE FOR GAMEOBJECTS**. Disponível em: <https://docs-multiplayer.unity3d.com/netcode/current/about/>. Acesso em: 9 abr. 2024.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Dentro do ambiente da *Unity 3D*, o *NetworkManager* é um componente essencial do *Netcode*. Conforme pode ser visto na Figura 2, ele abrange todas as funcionalidades relacionadas à rede no seu projeto. Ele funciona como o gerente responsável por gerenciar várias configurações e ajustes pertinentes à implementação do *Netcode* do seu projeto. Ele pode ser o centro nervoso que orquestra os aspectos de rede de um projeto, desde o *Matchmaking* até a sincronização do estado do jogo entre os jogadores.

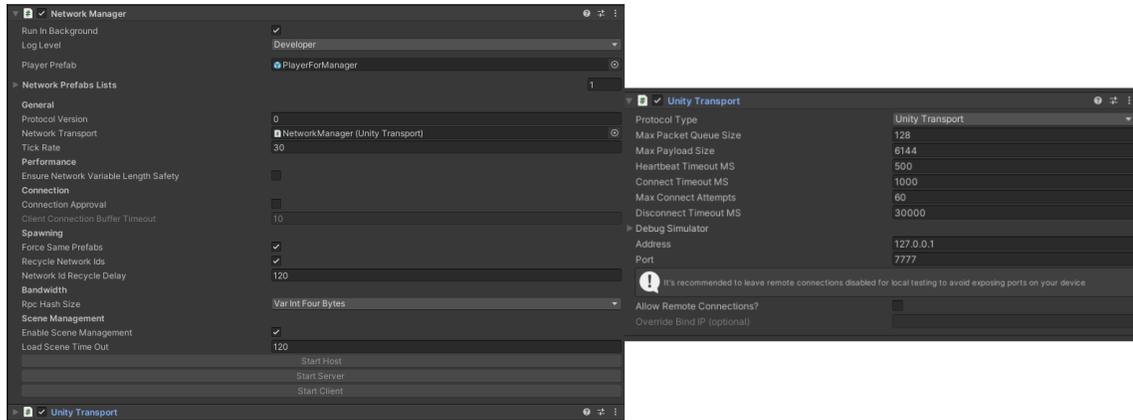


Figura 2 - Requisitos Netcode
Fonte: *Unity 3D* (2024)

Para realizar qualquer ação relacionada ao *Netcode* que envolva o envio de mensagens, é necessário primeiro iniciar um servidor e aguardar conexões com pelo menos um cliente (um servidor pode enviar funções de chamada remota para si mesmo ao ser executado como *host*, chamadas de funções RPC) que esteja conectado. Para realizar isso, é preciso primeiro iniciar o *NetworkManager* como servidor, *host* ou cliente.

O *Netcode* utiliza principalmente o *Unity 3D Transport* como seu mecanismo de transporte padrão, a camada de transporte desempenha um papel crucial na comunicação entre sua aplicação e diferentes *hosts* em um ambiente de rede. Essa camada oferece uma série de funcionalidades essenciais, incluindo comunicação orientada à conexão para garantir uma comunicação robusta, manutenção da entrega ordenada de pacotes para preservar a integridade do estado do jogo e garantia de integridade dos dados.

Além disso, o controle de fluxo e o gerenciamento de congestionamento otimizam o desempenho da rede, enquanto o gerenciamento de fluxo de dados proporciona flexibilidade na transmissão de dados de acordo com os requisitos específicos da aplicação. Essas funcionalidades combinadas tornam a camada de transporte fundamental para uma comunicação eficiente e confiável em ambientes de rede.

Assim, uma vez descritas as principais ferramentas e suas funcionalidades, na próxima seção é apresentado o desenvolvimento do jogo.

4 O desenvolvimento do jogo

Como já citado, o *Game Design* abrange desde a concepção da ideia central até aspectos pedagógicos, como no caso de um jogo pedagógico. Define elementos como narrativa, mecânica e personagens para proporcionar uma experiência significativa ao jogador, envolvendo também a definição de objetivos e regras motivadoras.

Nessa perspectiva, o jogo proposto baseia-se no trabalho de conclusão de Silva (2022), o qual propôs o *GDD* de um jogo pedagógico adequado à sala de aula e articulado ao livro didático utilizado pelo professor para o 7º ano do Ensino Fundamental.

Ao longo do desenvolvimento, algumas mudanças no *GDD* foram necessárias para a sua implementação na *Unity 3D*. No jogo, chamado por Silva (2022) de *Interstellar Math*, os jogadores podem escolher entre oito personagens com características distintas. Tais personagens são colocados em equipes de quatro jogadores e se enfrentam em desafios uns contra os outros.

A narrativa envolve uma invasão alienígena que perturbou as leis da natureza e os jogadores foram selecionados para enfrentar uma trilha com desafios, perguntas, minijogos e pegadinhas estipuladas pelos alienígenas. O jogo será em 3D, com partes do cenário e personagens em 2D. As fases são delimitadas em diferentes tabuleiros flutuantes que mudam suas características a cada fase, tendo cada uma um tema diferente, seguindo os capítulos do livro didático de Matemática base⁷. A jogabilidade é realizada por turnos, com os jogadores lançando um dado para avançar nas casas do tabuleiro e enfrentar diferentes ações, como perguntas ou desafios.

Para Rabin (2011), os jogos possuem atributos como: gerar uma voluntariedade do jogador em jogar, mudar a forma séria de se realizar uma atividade pedagógica e a associar com aspectos relacionados à alegria e ao passatempo. Assim, utilizando essas ideias de Rabin (2011) e de Rogers (2013), o desenvolvimento do jogo está sendo pensado para uma ambientação descontraída, com cores vibrantes e lúdicas, com personagens que possuem animações constantes e artefatos. Como por exemplo, o dado que regra a quantidade de casas que o jogador anda, que combinam com a história e o contexto do ambiente, conforme pode ser visto na Figura 3.

⁷ O livro base é o *Matemática*, do Projeto Teláris, da Editora Ática. O livro pode ser acessado em: <https://aticascipione.com.br/obras-e-solucoes/colecao/projeto-telaris/>.



Figura 3 - Visão principal do tabuleiro

Fonte: Da pesquisa

Ao pensar no desenvolvimento, os 4 jogadores jogam em conjunto (simultaneamente, mas cada um seu turno), se faz necessário utilizar as funções RPC. Na Figura 4, há um script mostrando a usabilidade da função chamada “*respostaServerRpc*”, cuja incumbência é mostrar para todos os jogadores conectados que determinado jogador respondeu uma questão e qual foi sua resposta a ela.

```
[ServerRpc]
1 reference
private void testServerRpc(){
    int serverRole = Random.Range(1, 5);
    testClientRpc(serverRole);
}

[ServerRpc]
4 references
private void respostasServerRpc(int respPlayer, bool pergResp){
    respostasClientRpc(respPlayer, pergResp);
}

[ClientRpc]
1 reference
private void respostasClientRpc(int respPlayer, bool pergResp){
    controllerScript.respostaDoPlayer = respPlayer;
    controllerScript.perguntaRespondida = pergResp;
}

[ClientRpc]
1 reference
private void testClientRpc(int role){
    controllerScript.ClientId = (int)OwnerClientId;
    if(controllerScript.idPlayerCurrent == controllerScript.ClientId)
        controllerScript.spacePressionado(role);
}
```

Figura 4 - Funções RCP

Fonte: Da pesquisa

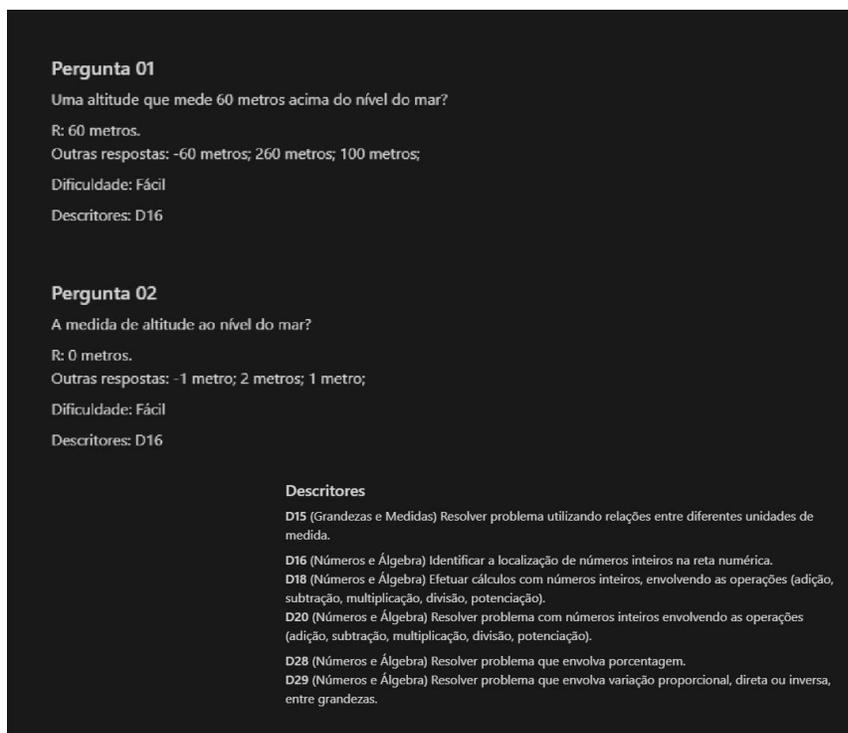
Imaginando um cenário onde um computador responde uma questão, para informar para os outros, a aplicação deve registrar a resposta e chamar uma outra função que passa

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

essas informações ao servidor e este deve enviar essa informação para todos os outros três computadores conectados através de funções estabelecidas anteriormente.

Tais funções permitem que cada jogador tenha o seu próprio programa rodando em sua própria máquina, sabendo o que está acontecendo na tela dos demais jogadores. Assim, a conexão multijogador é feita e todos os dados e informações que são relevantes aos outros jogadores conectados devem ser executados e mantidos no servidor, o servidor será o responsável por manter e gerir a disseminação desses dados.

A fim de avaliar o aprendizado dos estudantes, o servidor armazena os acertos e erros de cada estudante em cada questão. Na Figura 5, é possível identificar as perguntas de número um e dois, com as possíveis respostas, a resposta correta e os descritores da Prova Paraná que estão associados.



Pergunta 01
Uma altitude que mede 60 metros acima do nível do mar?
R: 60 metros.
Outras respostas: -60 metros; 260 metros; 100 metros;
Dificuldade: Fácil
Descritores: D16

Pergunta 02
A medida de altitude ao nível do mar?
R: 0 metros.
Outras respostas: -1 metro; 2 metros; 1 metro;
Dificuldade: Fácil
Descritores: D16

Descritores
D15 (Grandezas e Medidas) Resolver problema utilizando relações entre diferentes unidades de medida.
D16 (Números e Álgebra) Identificar a localização de números inteiros na reta numérica.
D18 (Números e Álgebra) Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D20 (Números e Álgebra) Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
D28 (Números e Álgebra) Resolver problema que envolva porcentagem.
D29 (Números e Álgebra) Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.

Figura 5 – Parte do banco de perguntas
Fonte: Da pesquisa

A associação dos descritores da Prova Paraná, contidos na Matriz de Referências de Matemática (Paraná, 2023), com as questões, permite ao professor estabelecer quais as habilidades e competências que os seus estudantes já dominaram ou precisam dominar.

Assim, até o momento, foram desenvolvidas questões que abordam a identificação e localização de números inteiros na reta numérica, assim como a comparação deles e a execução de adição, subtração, multiplicação e divisão nesse conjunto numérico. Bem como a aplicação destes conceitos de maneira prática em pequenos desafios durante o tabuleiro.

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Esses conteúdos são englobados nos dois primeiros capítulos do livro base de Matemática (Dante, 2018) e estão contidos entre os descritores iniciais propostos pela Prova Paraná.

5 Considerações finais

Assumindo a importância dos jogos pedagógicos no cenário atual da educação brasileira e levando em consideração que o objetivo do trabalho era mostrar como está sendo a experiência de desenvolver um jogo pedagógico, cujo *GDD* já foi desenvolvido anteriormente por Silva (2022) em sua iniciação científica e, posteriormente em seu Trabalho de Conclusão de Curso. Este trabalho apresentou uma discussão teórica sobre Design de Games e os softwares utilizados para o desenvolvimento do jogo. Além disso, descreveu o estado atual do desenvolvimento do jogo.

Assim, é possível identificar, a partir de todo o processo de desenvolvimento que vem sendo realizado, que, além do desafio de equilibrar o prazer em se jogar com a seriedade em se aprender, a criação de jogos multiplayer é um desafio, pois precisa associar, além dos recursos da *engine Unity 3D*, os protocolos do *Netcode*. Essa associação, possibilita a criação de um jogo envolvente e desafiador, habilitando a experiência multijogador online e a possibilidade de que os estudantes possam interagir em tempo real, característica pouco usual nos jogos pedagógicos atuais.

Para garantir a evolução contínua e o aprimoramento do jogo, alguns aspectos ainda precisam ser desenvolvidos. Por exemplo, se faz necessário estudos futuros sobre sua jogabilidade, bem como do seu potencial educativo. Outro ponto a ser estendido é tornar o banco de perguntas acessível e editável para os professores.

Ainda a respeito do banco de perguntas, o modo e ordem de dificuldade em que as questões aparecem, também são temas a serem discutidos, de forma que uma questão considerada mais difícil deve ser utilizada em um momento em que o jogador esteja acostumado com a jogabilidade e o fluxo do jogo.

Outro aspecto a ser feito é a possibilidade de que o jogo disponha de um rol atualizado de perguntas tendo como base o desempenho em tempo real do aluno. O programa analisa os erros e acertos do jogador, armazenando esses dados e os analisa para fornecer perguntas adequadas aos jogadores, de modo sanar as dúvidas e fazer com que o jogador/estudante avance tanto no jogo quanto no aprendizado do conteúdo programático.

Por fim, destaca-se que, no contexto do jogo para um sétimo ano do Ensino Fundamental, existem conteúdos os quais poderão ser abordados em outros anos. Assim, a expansão do jogo para outros anos se torna possível, visto que o desenvolvimento de

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

questões e minijogos está associado ao livro didático correspondente ao ano. Adaptar jogo para outras séries é viável e atrativo à medida que o projeto cresce.

Referências

- ALVES, L.; RIOS, V.; CALBO, T. Games e aprendizagem: trajetórias de interação. In: LUCENA, S. (org.). **Cultura digital, jogos eletrônicos e educação**. Salvador: EDUFBA, 2014. 242 p.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 4 abr. 2024.
- DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática**, 7º ano: ensino fundamental anos finais.3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. Disponível em: <https://encurtador.com.br/krwFV>. Acesso em: 10 abr. 2024.
- ELIAS, Ana Paula de Andrade Janz; ZOPPO, Beatriz Maria; KALINKE, Marco Aurélio. Práticas Pedagógicas Alternativas no Currículo dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Cadernos do Aplicação**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 13-25, ago. dez. 2019. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/CadernosdoAplicacao/article/view/97608>. Acesso em: 9 abr. 2024.
- FERNANDES, K. T.; LUCENA, M. J. N. R.; ARANHA, E. H. da S. Uma Experiência na Criação de Game Design de Jogos Digitais Educativos a partir do Design Thinking. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2018. DOI: 10.22456/1679-1916.85928. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/85928>. Acesso em: 9 abr. 2024.
- GEE, J. P. **Lo que nos enseñan los videojuegos sobre el aprendizaje y el alfabetismo**. Aljibe: Málaga, 2004.
- JOHNSON, S. **Surpreendente!** a televisão e o videogame nos tornam mais inteligentes. Rio de Janeiro: Campus, 2005.
- MATTAR, João. **Games em educação: como os nativos digitais aprendem**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 181 p.
- NETO, Wilson Alegrete; DEL VECHIO, Gustavo Henrique. JOGOS DIGITAIS E A INDÚSTRIA BRASILEIRA: o caso da Wildlife Studios e seu popular jogo Sniper 3D para dispositivos móveis. **Interface Tecnológica**, v. 18, n. 2, 2021, p. 28-39. Disponível em: <https://revista.fatectq.edu.br/interfacetecnologica/article/download/1176/667>. Acesso em: 8 abr. 2024.
- PARANÁ. Secretaria de Educação. **Matriz de referência da Prova Paraná**. 2023. Disponível em: https://www.provaparana.pr.gov.br/sites/prova/arquivos_restritos/files/documento/2023-03/matriz_referencia_1trimestre2023_ef_em_matematica.pdf. Acesso em: 3 abr. 2024.
- PRENSKY, Marc. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Editora Senac São Paulo. 2012. Tradução de Eric Yamagute. 575 p

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

RABIN, Steve. **Introdução ao desenvolvimento de games**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ROGERS, Scott. **Level Up!** um guia para o design de grandes jogos. São Paulo: Blucher, 2013. 575 p.

SHAFFER, D. W. **How computer games help children learn**. New York: Macmillan, 2006.

SILVA, Larissa Arianna Mekelburg da. **Interstellar math**: design de um game pedagógico. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2022. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31515>. Acesso em: 26 mar. 2024.

SOUSA, Diego Barreto Nóbrega. **Utilização de Jogos Educativos Digitais no Processo Ensino-Aprendizagem**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Computação à Distância) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/15753/1/DBNS27022018.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2024.

UNITY 3D. Plataforma de desenvolvimento em tempo real do Unity 3D. [S. l.]: Unity 3D Technologies, 2024. Disponível em: <https://Unity3D.com/pt>. Acesso em: 3 abr. 2024.

ZIMMERMAN, Eric; SALEN, Katie. **Regras do jogo**. São Paulo: Editora Blucher, 2004.



EXPLORANDO AS RELAÇÕES ALGÉBRICAS: UMA ANÁLISE DE GRUPOS E ESPAÇOS VETORIAIS

Júlia Bertuzzo Chesca
 UTFPR - TD
 juliachesca@alunos.utfpr.edu.br

Wiliam Francisco de Araujo
 UTFPR - TD
 Orientador

Este trabalho será apresentado:

(X) SEMAT () Workshop

Resumo

A Álgebra é um ramo essencial da Matemática que estuda as estruturas e operações em conjuntos numéricos, buscando identificar propriedades comuns entre eles. A partir de estudos realizados no PIVIC (Programa Institucional de Voluntariado na Iniciação Científica) direcionados a essa área, foram identificados padrões e semelhanças entre conceitos fundamentais de Grupos e Espaços Vetoriais, como a estrutura, os elementos, as propriedades e as operações. Por conta disso, este trabalho visa apresentar algumas relações e comparações entre esses conceitos, que desempenham papéis primordiais dentro da Álgebra, fornecendo estruturas matemáticas fundamentais para entender e resolver uma variedade de problemas, além de estarem profundamente interligados. As relações entre Grupos e Espaços Vetoriais são profundas e entrelaçadas, com muitos conceitos e técnicas compartilhados entre eles, proporcionando uma base sólida para explorar uma ampla variedade de fenômenos matemáticos e práticos.

Palavras-chave: Álgebra. Grupos. Espaços Vetoriais. Comparações. Relações.

1 Introdução

Durante a era moderna, figuras notáveis como René Descartes (1596 – 1650), Évariste Galois (1811 – 1832) e Emmy Noether (1882 – 1935), demonstraram como a Álgebra poderia ser aplicada em uma variedade de conceitos, desde cálculos simples até problemas complexos de engenharia e física. No entanto, à medida que avançava a era contemporânea, a Álgebra expandiu significativamente seu escopo, abrangendo conceitos como Álgebra Linear, Álgebra Abstrata, Teoria dos Números, Geometria Algébrica, entre outros.

A Álgebra vai além de apenas resolver equações ou manipular expressões; ela também estuda as estruturas algébricas em si, como Grupos, Anéis e Corpos, fornecendo um



quadro teórico fundamental para compreender as propriedades e os comportamentos de sistemas matemáticos mais complexos.

Com base em pesquisas embasadas em obras de autores renomados como Hygino Domingues (2003), Arnaldo Garcia (2001) e José Luiz Boldrini (1986), o presente artigo tem como propósito apresentar algumas comparações entre os conceitos encontrados nos grupos e espaços vetoriais, buscando fornecer uma visão mais abrangente e integrada da álgebra moderna, ressaltando sua importância e relevância em contextos acadêmicos e aplicados.

2 Estudo de Caso

Ao iniciar o estudo sobre Grupos, percebe-se que os conceitos são comparáveis aos encontrados em Espaços Vetoriais. Tanto na parte dos axiomas que definem essas estruturas, quanto nos teoremas mais avançados, é possível traçar paralelos entre as definições. Essa percepção de semelhança facilita a compreensão sobre como os grupos são estruturados, visto que já havia familiaridade com a estrutura dos espaços vetoriais.

Dessa forma, na seção seguinte serão apresentadas as analogias desses paralelos, para proporcionar uma compreensão mais completa dos conceitos.

2.1 Elementos e Operações

Um Grupo é uma estrutura algébrica composta por um conjunto não vazio de elementos, combinado com uma operação binária que satisfaz as propriedades:

(Considerando a, b, c elementos pertencentes a um grupo G , e e também um elemento de G , sendo o neutro ou identidade)

- Associativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existência do elemento neutro: $a \cdot e = e \cdot a = a$
- Existência do inverso para cada elemento: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Um exemplo clássico de grupo seria o conjunto dos números inteiros com a operação de adição usual ($\mathbb{Z}, +$). Esse conjunto cumpre todas as propriedades:

- Associatividade:

Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a adição é associativa, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$. De acordo com a associatividade da adição em \mathbb{Z} :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

- **Elemento Neutro:**

Existe um elemento e nos inteiros tal que $a + e = e + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$. O elemento neutro para a adição é o 0, já que $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in \mathbb{Z}$.

- **Inverso:**

Para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe um inverso $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a + b = b + a = e$, onde e é o elemento neutro. O inverso de um número inteiro a é $-a$, pois

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

- **Fechamento:**

Para quaisquer números inteiros a, b , a soma de $a + b$ resulta em outro número inteiro. Isso é verdade porque a soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

Outro exemplo de grupo é o grupo das rotações do plano em torno da origem, denotado por $SO(2)$. Este grupo consiste em todas as rotações possíveis do plano euclidiano em torno da origem por um ângulo θ (ângulo de rotação). Cada um de seus elementos é uma matriz de rotação 2×2 que descreve uma rotação do plano; a forma geral de uma matriz de $SO(2)$ é:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Verificando se satisfaz as propriedades de grupo, temos:

- **Associatividade:**

Sejam $R(\theta_1), R(\theta_2)$ e $R(\theta_3)$ três rotações em $SO(2)$, então podemos verificar que:

$$(R(\theta_1) \cdot R(\theta_2)) \cdot R(\theta_3) = R(\theta_1 + \theta_2) \cdot R(\theta_3) = R((\theta_1 + \theta_2) + \theta_3)$$

$$R(\theta_1) \cdot (R(\theta_2) \cdot R(\theta_3)) = R(\theta_1) \cdot R(\theta_2 + \theta_3) = R(\theta_1 + (\theta_2 + \theta_3))$$

- **Elemento neutro:**

A matriz identidade I_2 representa uma rotação de 0 graus, que é o elemento neutro de $SO(2)$.

- **Inverso:**

Para cada rotação $R(\theta)$ em $SO(2)$, a rotação $R(-\theta)$ representa a rotação pelo ângulo negativo $-\theta$, que é o inverso de θ . Assim, $R(\theta) \cdot R(-\theta) = R(-\theta) \cdot R(\theta) = I_2$

- **Fechamento:**

Sejam $R(\theta_1)$ e $R(\theta_2)$ duas rotações em $SO(2)$, então suas composições são dadas

$$\text{por: } R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\text{sen}(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\text{sen}(\theta_2) \\ \text{sen}(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix}$$



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Aplicando a multiplicação de matrizes, obtemos uma matriz que representa uma rotação, garantindo o fechamento.

Já um Espaço Vetorial, é definido como um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados vetores, munidos de duas operações: adição de vetores e produto por escalar; tais operações devem satisfazer as seguintes propriedades:

(Considerando u, v, w vetores pertencentes a um conjunto V , e θ, α escalares pertencentes ao conjunto dos números Reais)

- Adição de vetores:
 - a) Comutativa da adição de vetores: $u + v = v + u$
 - b) Associativa da adição de vetores: $(u + v) + w = u + (v + w)$
 - c) Elemento neutro da adição: $u + 0 = u$
 - d) Vetor simétrico: $u + (-u) = 0$
- Multiplicação por escalar:
 - a) Associativa da multiplicação por escalares: $\theta. (\alpha. u) = (\theta. \alpha). u$
 - b) Distributiva da adição de vetores: $\theta. (u + v) = \theta. u + \theta. v$
 - c) Distributiva da adição de escalares: $(\theta + \alpha). u = \theta. u + \alpha. u$
 - d) Elemento neutro da multiplicação: $1. u = u$

Algumas diferenças podem ser pontuadas, por exemplo: para que um conjunto seja considerado um Grupo, é necessário que haja uma operação definida entre os elementos desse conjunto. Essa operação, que chamamos de operação binária, combina dois elementos do conjunto e produz outro elemento do conjunto. Por outro lado, para que um conjunto seja um Espaço Vetorial, além de uma operação entre os elementos do conjunto, é preciso ter uma segunda operação, que envolve um elemento de um corpo (como os números reais ou complexos) e um elemento do conjunto. Essa segunda operação, a multiplicação por escalar, permite multiplicar cada elemento do conjunto por um elemento do corpo, resultando em um novo elemento do conjunto. Além disso, Espaços Vetoriais são comutativos, propriedade não obrigatória para ser um grupo (exceção aos Grupos Abelianos).

Um exemplo comum de Espaço Vetorial seria o conjunto de polinômios de grau n , denotado por P_n , sobre o conjunto dos números reais. Pode ser representado como $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ onde $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ são coeficientes constantes e n é o grau máximo do polinômio. As operações de adição e multiplicação por escalar em P_n são definidas da seguinte forma: A adição de dois polinômios é realizada somando termo a termo os coeficientes correspondentes; a multiplicação de um polinômio por um escalar é realizada multiplicando cada coeficiente do polinômio pelo escalar.



Outro exemplo de Espaço Vetorial é o conjunto dos vetores tridimensionais no espaço euclidiano tridimensional R^3 . Os vetores são representados como triplas ordenadas de números reais (x, y, z) , onde x, y e z representam as coordenadas nos eixos x, y e z respectivamente. A operação de adição de dois vetores (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) é realizada somando componente a componente: $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. Já a multiplicação de um vetor (x, y, z) por um escalar k é realizada multiplicando cada componente do vetor pelo escalar: $k \cdot (x, y, z) = (kx, ky, kz)$.

Agora, se considerarmos um espaço vetorial apenas com a operação de adição de vetores e suas propriedades, temos um Grupo. A operação de soma de vetores satisfaz todas as propriedades necessárias para formar um grupo: associatividade, existência de elemento neutro, existência do inverso e o fechamento. Além disso, esse grupo é Abelian, porque a adição de vetores satisfaz a propriedade comutativa, tornando-o comutativo.

Porém, cabe ressaltar que ambos são estruturas algébricas com a presença de operações, elemento neutro e elemento inverso, sendo esse o vetor oposto no caso dos espaços vetoriais. Também podemos destacar o fato de serem fechados: a operação entre elementos do conjunto resulta em outro elemento do mesmo conjunto.

2.2 Subespaços e Subgrupos

Esses subconjuntos seguem a mesma ideia entre si: herdam as propriedades da estrutura original. Um subespaço é um subconjunto de um espaço vetorial que deve conter o vetor nulo, ser fechado para a adição de vetores e fechado para a multiplicação por escalar, formando, por si só, um espaço vetorial. Já o subgrupo, que é um subconjunto de um grupo, deve manter a mesma operação binária do grupo ao qual pertence, satisfazendo as mesmas propriedades necessárias para os grupos, sendo também, por si só, um grupo.

Exemplificando, um subespaço vetorial pode ser encontrado dentro do espaço vetorial R^3 . Considerando o subconjunto V de R^3 definido como o plano que passa pela origem e é perpendicular ao vetor $v = (1, 1, 1)$. Esse subconjunto contém o vetor nulo, é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar, portanto, é um subespaço vetorial de R^3 .

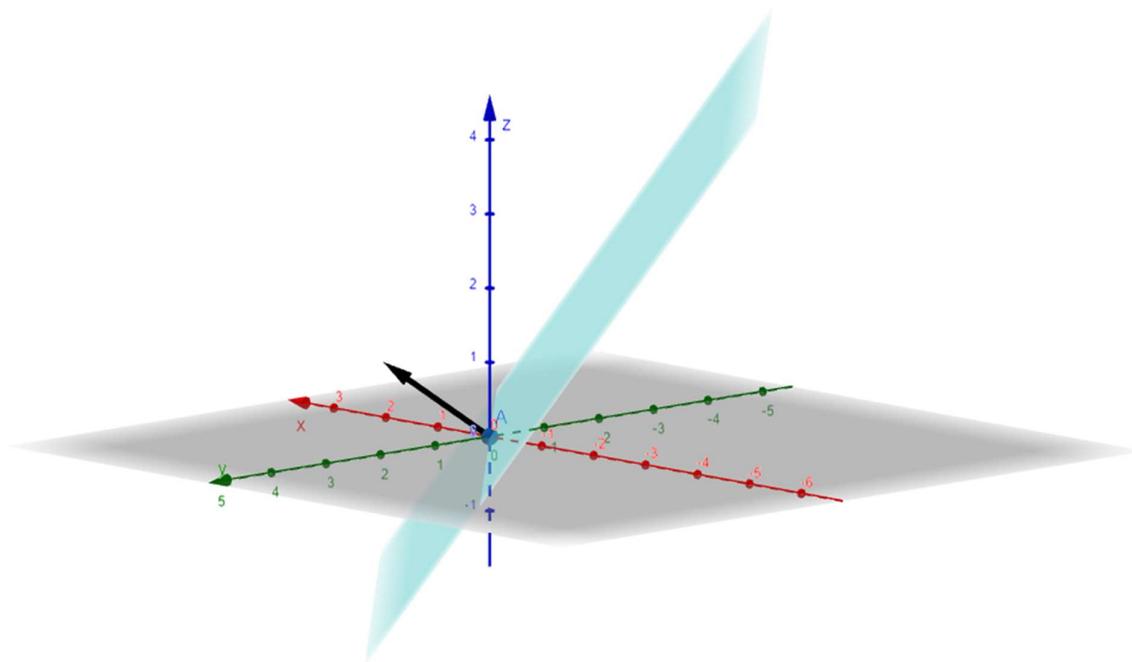


Figura 1 – Plano perpendicular ao vetor

Fonte: Autores, 2024

Outro exemplo de subespaço vetorial pode ser visto no espaço vetorial das matrizes 2×2 , denotado por $M_{2 \times 2}$, sobre os números reais. Considerando o subconjunto W de $M_{2 \times 2}$, definido como o conjunto das matrizes simétricas onde $A = A^t$ (A^t é a transposta de A). Este subconjunto contém a matriz nula e é fechado para a adição e multiplicação por escalar, podendo ser representado por $w = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ com $a, b, c \in R$.

Um exemplo clássico de subgrupo é o subgrupo aditivo dos inteiros pares, denotado por $2Z$, dentro do grupo aditivo dos inteiros Z . O subgrupo $2Z$ consiste de todos os inteiros que são múltiplos de 2. Formalmente, $2Z = \{2k \mid k \in Z\}$. Este subgrupo possui elemento neutro e inverso e é fechado para a adição; portanto, satisfaz todas as propriedades de um subgrupo de Z .

Outro exemplo de subgrupo seria um subconjunto H de R^+ . O grupo multiplicativo dos números reais positivos é denotado por (R^+, \cdot) , com a operação de multiplicação usual. Já o subconjunto H é definido como o conjunto de todos os números reais positivos que são menores ou iguais a 1, ou seja, $H = \{x \in R^+ \mid x \leq 1\}$. Este subconjunto possui elemento neutro e inverso e é fechado para a multiplicação, sendo um subgrupo de R^+ .

A principal ideia por trás desses subconjuntos é possibilitar a generalização das estruturas de cada conteúdo, tornando mais fácil o estudo desses conceitos. Essas



características análogas entre subgrupos e subespaços apontam como ambas as estruturas possuem propriedades fundamentais que refletem sua natureza algébrica e geométrica, respectivamente. Embora as definições e as operações possam ser diferentes, os princípios básicos de fechamento, existência de elementos neutros e inversos são comuns, destacando a universalidade desses conceitos em ambas as áreas.

2.3 Transformação Linear e Homomorfismo

Um Homomorfismo é uma função entre dois grupos que preserva a estrutura das operações de um grupo ao outro, mapeando os elementos de forma que as propriedades sejam consistentes. Da mesma forma, uma Transformação Linear é uma função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição entre vetores e multiplicação por um escalar de um espaço ao outro, mapeando os elementos de forma que as propriedades também sejam consistentes.

Um exemplo comum de Transformação Linear pode ser encontrado na transformação que realiza uma rotação bidimensional no plano euclidiano. Sendo a transformação definida por $T : R^2 \rightarrow R^2$, ela preserva as propriedades de linearidade, ou seja:

(v, w são elementos de R^2 e α um escalar pertencente aos números reais)

- $T(v + w) = T(v) + T(w)$
- $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Um segundo exemplo de Transformação Linear é a projeção ortogonal em um plano no espaço tridimensional. Considerando o espaço tridimensional R^3 e um plano P que passa pela origem, a transformação $T: R^3 \rightarrow R^3$ projeta todos os vetores em R^3 ortogonalmente para o plano P . Sendo $v = (x, y, z)$ um vetor em R^3 , então $T(v) = (x', y', z')$ é o vetor obtido projetando v ortogonalmente no plano P . Essa transformação preserva a estrutura de espaço vetorial, pois satisfaz as propriedades de aditividade e homogeneidade.

Um exemplo de Homomorfismo seria o homomorfismo entre o grupo aditivo dos inteiros $(Z, +)$ e o grupo multiplicativo dos números reais não nulos (R^*, \cdot) . Considerando a função $\phi : Z \rightarrow R^*$ definida por $\phi(n) = e^n$, onde e é a base dos logaritmos naturais. Esta função é um homomorfismo de grupos porque para quaisquer inteiros m, n , temos: $\phi(m + n) = e^{m+n} = e^m \cdot e^n = \phi(m) \cdot \phi(n)$. Portanto, a função ϕ preserva a estrutura de grupo, e é um exemplo de homomorfismo.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Outro exemplo de Homomorfismo pode ser dado considerando os grupos multiplicativos (R^+, \cdot) e (R^*, \cdot) , onde R^+ representa o conjunto dos números reais positivos e R^* representa o conjunto dos números reais não nulos. Podemos definir a função $\phi: R^+ \rightarrow R^*$ como a função que mapeia cada número real positivo x para seu inverso multiplicativo $\frac{1}{x}$. Essa função é um homomorfismo porque preserva a estrutura de grupo entre (R^+, \cdot) e (R^*, \cdot) . Em outras palavras, para quaisquer números reais positivos a e b , temos $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$.

A partir dessas definições, podemos destacar que ambos os conceitos preservam a estrutura das operações fundamentais em seus respectivos conjuntos. Sendo assim, a composição de duas transformações lineares também é uma transformação linear; da mesma forma, a composição de dois homomorfismos entre grupos é também um homomorfismo.

2.4 Núcleos

O núcleo de um homomorfismo de grupo e o núcleo de uma transformação linear também são conceitos análogos em teoria dos grupos e álgebra linear, que compartilham algumas semelhanças fundamentais. O núcleo de um homomorfismo é o conjunto de todos os elementos do grupo de origem que são mapeados no elemento identidade do grupo de destino pela aplicação homomorfa. Da mesma forma, o núcleo de uma transformação linear é o conjunto de todos os vetores no espaço de origem que são mapeados no vetor nulo do espaço de destino pela transformação linear.

Além disso, o núcleo e a imagem são subconjuntos de grupos e espaços vetoriais. No contexto de grupos, o núcleo e a imagem de um homomorfismo são subgrupos do grupo de origem. Já em espaços vetoriais, o núcleo e a imagem de uma transformação linear são subespaços vetoriais do espaço de origem.

A percepção de semelhanças entre os núcleos facilita a compreensão dos teoremas associados a cada conceito. Ao dominar o funcionamento de uma estrutura, seja espaço vetorial ou grupo, torna-se mais simples compreender analogamente a outra estrutura; isso se deve à capacidade de aplicar os princípios e padrões identificados em uma estrutura para compreender e explorar a outra, o que promove uma compreensão mais profunda e interconexão entre os conceitos.

Ao calcular o núcleo de uma transformação linear, buscamos os vetores do espaço vetorial de origem que são enviados para o vetor nulo do espaço vetorial de destino. Em outras palavras, estamos procurando os vetores que são “anulados” pela transformação linear. Essa ideia pode ser relacionada ao conceito de homomorfismo de grupos. Se considerarmos



apenas as operações de adição nos espaços vetoriais (sem levar em conta a multiplicação por escalar), estamos tratando-os como grupos. Analisando por esse contexto, calcular o núcleo de uma transformação linear é calcular o núcleo de um homomorfismo de grupos, onde estamos identificando os elementos do grupo de origem que são mapeados para a identidade do grupo de destino.

3 Discussões e Considerações Finais

Ao reconhecer as analogias entre grupos e espaços vetoriais, podemos estender técnicas, propriedades, resultados e teoremas de um campo para o outro, ampliando o conjunto de ferramentas disponíveis para resolver problemas em ambos os domínios e permitindo uma compreensão mais abrangente desses conceitos. Ao examinar suas semelhanças e diferenças, conseguimos identificar padrões, regularidades e relações entre os conceitos, enriquecendo nossa compreensão e oferecendo novas perspectivas para abordar problemas interdisciplinares.

Além disso, cabe ressaltar que ao considerar um espaço vetorial apenas com a adição de vetores, temos um grupo. Essa relação destaca a profunda conexão e a importância de comparar esses conceitos. Neste contexto, a adição de vetores satisfaz as propriedades de um grupo: fechamento, associatividade, existência de elemento neutro e existência de inverso para cada vetor. Esse grupo também será Abelian, porque a adição de vetores é comutativa para todo espaço vetorial.

Na matemática, os conceitos e estruturas não existem isoladamente; eles estão interconectados e muitas vezes se sobrepõem. A beleza está em sua capacidade de unificar diferentes áreas e revelar padrões e relações entre elas, onde a compreensão de uma área frequentemente leva à compreensão de outras.

Apesar de tornar o aprendizado mais versátil, essas comparações muitas vezes não são abordadas de forma convencional no ensino. No entanto, incorporar essa prática poderia ser extremamente benéfico, pois ao apresentar analogias entre grupos e espaços vetoriais, os alunos poderiam aproveitar seus conhecimentos prévios em um desses campos para facilitar e aprofundar a compreensão do outro. O ato de encorajar os alunos a estabelecer conexões entre os conceitos e refletir sobre o que já foi aprendido são habilidades fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático e para uma compreensão mais profunda do conteúdo.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a
Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Ambas as áreas possuem muita abertura para novos estudos e pesquisas, portanto, a generalização de conceitos possibilita que novas perspectivas e abordagens sejam criadas para resolver problemas e desenvolver teorias.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. 10. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012. 768 p. ISBN 978-85-407-0169-4.

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli Irene Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry. Álgebra linear. 3. ed. ampl. e rev. São Paulo, SP: Harbra, c1986. 411 p. ISBN 8529402022.

DOMINGUES, Hygino Hugueros; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. p. 368 v. Único. ISBN 85-357-0401-9.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. p. 363. ISBN 978-85-244-0190-9.

GOLÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. 6. ed. [S. l.]: IMPA, 2017. p. 192. ISBN 978-85-244-0430-6.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra linear. 2. ed. São Paulo, SP: Pearson Makron Books, c1987. x, 583 p. ISBN 9780074504123.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e
a Era Digital no Ensino

82

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

INTRODUÇÃO A ANÉIS LOCAIS

Tuila Caroline Frantz
UTFPR-TD
tuila_fcaroline@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
UTFPR-TD
robsonw@utfpr.edu.br

Este trabalho será apresentado:

(X) SEMAT

() Workshop

Resumo

Este trabalho representa um recorte do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que será apresentado futuramente. Nele, abordaremos os principais conceitos e teoremas relacionados à teoria de anéis comutativos, com um enfoque em anéis locais, exemplificado pelo anel das séries de potências formais sobre um corpo. Nosso objetivo é estabelecer uma base sólida para o entendimento desses conceitos, fornecendo uma introdução concisa e acessível à teoria dos anéis.

Palavras-chave: Anéis Comutativos. Anéis Locais. Anel das Séries de Potências Formais.

1 Introdução

A Álgebra, um dos pilares da Matemática, é um campo de estudo vasto, cujas aplicações e resultados se mostram úteis para diversos outros campos, como a análise e a teoria dos números. Dentro deste pilar, os anéis se mostram como uma estrutura fundamental de estudo, uma vez que são uma das estruturas algébricas mais importantes.

Os anéis são estruturas algébricas que apresentam duas operações binárias, adição e multiplicação, associadas pela propriedade distributiva, desempenhando um papel crucial dentro da álgebra. Pensando nisso, neste trabalho nos dedicaremos a explorar esse tema, começando com definições e proposições fundamentais de anéis, visando um aprofundamento sobre anéis locais.

Os anéis locais, por sua vez, são aqueles que apresentam uma característica singular de possuírem somente um ideal maximal, destacando-se por possibilitar uma importante relação entre esse tipo de anel com o conjunto das suas unidades, resultado este que buscamos obter ao fim deste trabalho, mostrando sua aplicação nos anéis de séries de potência formais.

Assim, abordamos o desafio de apresentar de forma clara e abrangente os conceitos e propriedades relacionados a esses temas, fornecendo uma introdução sólida e detalhada a esses tópicos específicos, ao mesmo tempo em que buscamos simplificar os conteúdos sem comprometer a precisão e a profundidade necessárias.

2 Metodologia

A metodologia utilizada neste artigo foi o método dedutivo, que é uma abordagem fundamental na lógica e na construção do conhecimento em diversas áreas, incluindo a matemática. Ele se baseia na elaboração de argumentos que partem de premissas assumidas como verdadeiras (os axiomas) e aplicam regras de inferência lógica para chegar a conclusões também verdadeiras. Gêronimo e Franco [3] explicam que este método consiste nos seguintes passos:

1. aceitar algumas afirmações denominadas axiomas;
2. aceitar alguns conceitos denominados conceitos primitivos;
3. demonstrar as seguintes afirmações usando os axiomas respeitando as regras da lógica clássica;
4. apresentar definições a partir de axiomas, conceitos primitivos e afirmações já demonstradas;
5. basear as demonstrações em afirmações anteriormente demonstradas ou em axiomas.

Buscamos apresentar os conceitos e resultados de forma detalhada e ilustrada com exemplos, seguindo a estrutura do livro [1], que trata especificamente sobre a álgebra comutativa.

3 Resultados e Discussão

Começaremos esta seção abordando os conceitos necessários para a posterior abordagem das principais propriedades e teoremas relacionados a anéis locais.

Definição 3.1. *Sejam A um conjunto não vazio munido de duas operações as quais denominaremos adição $+$: $A \times A \rightarrow A$ e multiplicação \cdot : $A \times A \rightarrow A$. Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um anel se*

$$(i) \ a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$(ii) \ \exists 0 \in A \text{ tal que } a + 0 = 0 + a = a;$$

$$(iii) \ \forall a \in A, \ \exists -a \in A \text{ tal que } a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

$$(iv) \ a + b = b + a;$$

$$(v) \ a(bc) = (ab)c;$$

$$(vi) \ a(b + c) = ab + ac \quad \text{e} \quad (a + b)c = ac + bc;$$

para todo $a, b, c \in A$.

Dizemos que um $(A, +, \cdot)$, satisfazendo os axiomas acima, é um:

- anel com identidade se existir $1 \in A$ tal que para todo $a \in A$, $1a = a1 = a$;
- anel comutativo se para todo $a, b \in A$ tem-se que $ab = ba$.

Na maioria dos exemplos aqui apresentados as operações $+$ e \cdot serão bem conhecidas, desta forma representaremos o anel $(A, +, \cdot)$ simplesmente por A .

Exemplo 3.1. 1. *Sejam $A = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} ou \mathbb{R} ou \mathbb{C} com soma e produto usuais, então $(A, +, \cdot)$ são anéis comutativos com identidade.*

2. *O conjunto $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ dos inteiros módulo n , onde $\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\}$, é um anel comutativo com unidade $\overline{1}$ com as operações:*

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} \quad \text{e} \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab},$$

para todo $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$.

3. *Os conjuntos $\mathcal{M}_n(A)$, das matrizes de ordem n , onde $A = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} ou \mathbb{R} ou \mathbb{C} , com as operações de adição e multiplicação usuais de matrizes é um anel com identidade.*

Observação: *Se $n \neq 1$, $\mathcal{M}_n(A)$ não é comutativo.*

4. *Seja A um anel comutativo e considere $A[[x]]$ o conjunto de todas as séries de potências formais, ou seja,*

$$A[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in A, x \text{ é uma indeterminada} \right\}$$

com a soma e multiplicação usuais é um anel comutativo com identidade, considerando as operações usuais de séries.

A partir de agora, consideraremos somente os anéis comutativos com identidade.

Definição 3.2. *Sejam A um anel comutativo com identidade e I um subconjunto não vazio de A . Dizemos que I é um ideal de A se*

- i) $0 \in I$;
- ii) $\forall x, y \in I \Rightarrow x - y \in I$;
- iii) $\forall a \in A \text{ e } \forall x \in I \Rightarrow ax \in I$.

Exemplo 3.2. *Todo ideal de \mathbb{Z} é da forma $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $n\mathbb{Z}$ é um ideal de \mathbb{Z} . De fato, temos que:

- (i) $0 = n0 \in n\mathbb{Z}$, pois $0 \in \mathbb{Z}$;
- Dados $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x = nk$ e $y = nk'$ para algum $k, k' \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{Z}$ temos que:
- (ii) $x - y = nk - nk' = n(k - k') \in n\mathbb{Z}$, pois $k - k' \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $ax = a(nk) = n(ak) \in n\mathbb{Z}$, pois $ak \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $n\mathbb{Z}$ é um ideal de \mathbb{Z} .

Agora, considere I um ideal qualquer de \mathbb{Z} , vamos mostrar que $I = n\mathbb{Z}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Com efeito, se $I = \{0\}$, então $I = 0\mathbb{Z}$.

Se $I \neq \{0\}$, então existe $n \in I$ tal que $n \neq 0$. Como $n, -n \in I$, podemos assumir que $n > 0$. Pela Propriedade da Boa Ordem [4, Teorema 2.3.1], podemos tomar n sendo o menor inteiro positivo tal que $n \in I$. Vamos mostrar que $I = n\mathbb{Z}$.

(D) Dado $x \in n\mathbb{Z}$, temos que $x = nk$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, como I é um ideal e $n \in I$, temos que $nk \in I$.

(C) Dado $a \in I$, pelo Algoritmo Euclidiano [2, Seção 3.2], existem inteiros $q, r \in \mathbb{Z}$ satisfazendo

$$a = nq + r \quad \text{com } 0 \leq r < n.$$

Então $r = a - nq \in I$, visto que $a \in I$ e $n \in I$. Como n é o menor inteiro positivo tal que $n \in I$ e $0 \leq r < n$, devemos ter $r = 0$. Portanto, $a = nq + 0 = nq \in n\mathbb{Z}$. ■

O próximo exemplo propicia um modo de construir ideais sobre um anel A .

Exemplo 3.3. *Sejam A um anel e $x_1, \dots, x_n \in A$. Então*

$$Ax_1 + \dots + Ax_n = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a_i \in A\}$$

é um ideal de A , chamado ideal gerado por $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Demonstração:

i) $0 = 0x_1 + \dots + 0x_n \in Ax_1 + \dots + Ax_n$.

Dados $a_1x_1 + \dots + a_nx_n, b_1x_1 + \dots + b_nx_n \in Ax_1 + \dots + Ax_n$ e $a \in A$, temos

ii) $(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) - (b_1x_1 + \dots + b_nx_n) = \underbrace{(a_1 - b_1)}_{\in A}x_1 + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{\in A}x_n$
 $\in Ax_1 + \dots + Ax_n$.

iii) $a(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = (aa_1)x_1 + \dots + (aa_n)x_n \in Ax_1 + \dots + Ax_n$.

Portanto, $Ax_1 + \dots + Ax_n$ é um ideal de A . ■

No caso em que $I = Ax$, para algum $x \in A$, então I é dito ideal principal de A e denotamos $I = \langle x \rangle$.

Definição 3.3. *Seja A um anel. Dizemos que $a \in A$ é uma unidade de A se existir $b \in A$ tal que $ab = 1$. Denotamos $b = a^{-1}$ e $U(A)$ o conjunto das unidades de A .*

Note que no anel dos números reais \mathbb{R} , todo elemento não nulo a é uma unidade, pois existe $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Já no caso do anel dos números inteiros \mathbb{Z} , as únicas unidades deste anel são 1 e -1 .

O resultado a seguir nos mostra como são as unidades no anel das séries de potências formais $A[[x]]$.

Proposição 3.1. *Sejam A um anel comutativo com identidade e $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in A[[x]]$. Então,*

$$f \text{ é uma unidade de } A[[x]] \iff a_0 \text{ é uma unidade de } A.$$

Demonstração: Vale lembrar que, dados $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, temos que

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde $c_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i$.

(\Rightarrow) Suponha que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma unidade em $K[[x]]$, então existe $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in K[[x]]$ tal que $fg = 1$. Em particular, $a_0 b_0 = 1$, o que implica que a_0 é uma unidade em A .

(\Leftarrow) Reciprocamente, assumamos que a_0 é uma unidade em A e vamos mostrar que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é uma unidade em $K[[x]]$, ou seja, vamos exibir $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in K[[x]]$ de forma que $fg = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \dots$. Para que a última igualdade ocorra, devemos ter $a_0 b_0 = 1$ e $c_n = 0, \forall n \geq 1$. Então, definimos b_n , para todo $n \geq 0$ de forma recursiva do seguinte modo:

- Para $n = 0$, defina $b_0 = a_0^{-1}$.
- Para $n \geq 1$, temos que

$$0 = c_n = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i = a_0 b_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}b_i,$$

neste caso, basta definir

$$b_n = -a_0^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}b_i.$$

Dessa maneira, $a_0 b_0 = 1$ e $c_n = 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow fg = 1 \Rightarrow f$ é uma unidade de $K[[x]]$. ■

O próximo resultado mostra que todo ideal que possua unidade é o próprio anel.

Proposição 3.2. *Sejam A um anel e I um ideal de A . Se I contém uma unidade, então $I = A$.*

Demonstração: Suponha que existe uma unidade $u \in I$ e vamos provar que $I = A$.

É óbvio que $I \subset A$. Para mostrar que $A \subset I$, tome $a \in A$. Podemos escrever

$$a = 1a = (uu^{-1})a = u(u^{-1}a) \in I,$$

pois $u \in I$ e I é ideal.

Portanto, $I = A$. ■

Definição 3.4. *Um ideal M de um anel A é dito maximal se $M \neq A$ e para todo ideal J tal que*

$$M \subset J \subset A \Rightarrow J = M \text{ ou } J = A.$$

Exemplo 3.4. *Se $p \in \mathbb{Z}$ é primo, então $p\mathbb{Z}$ é um ideal maximal de \mathbb{Z} .*

Com efeito, já vimos que todo ideal de \mathbb{Z} é da forma $n\mathbb{Z}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Seja $J = n\mathbb{Z}$ um ideal tal que $p\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \subset A$. Vamos mostrar que $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ ou $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Como $p \in p\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, temos que $p = nk$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $n \mid p$. Como p é primo, obtemos $n = 1$ ou $n = p$. Se $n = 1$ então $n\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $n = p$ então $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.

Definição 3.5. *Sejam $(K, +, \cdot)$ um anel comutativo com identidade. Dizemos que K é um corpo se todo elemento $a \in K^* = \{a \in K \mid a \neq 0\}$ é uma unidade, ou seja, $K^* = U(K)$.*

Exemplo 3.5. 1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são exemplos de corpos.

2. \mathbb{Z} não é um corpo, pois $2 \in \mathbb{Z}$ não é unidade em \mathbb{Z} .

O próximo resultado fornece uma caracterização para corpo envolvendo ideal maximal.

Proposição 3.3. *Seja K um anel comutativo com identidade. São equivalentes:*

- (1) K é um corpo;
- (2) $\{0\}$ é um ideal maximal de K ;
- (3) Os únicos ideais de K são K e $\{0\}$.

Demonstração: (1) \Rightarrow (2) Seja J um ideal de K tal que $\{0\} \subset J \subset K$. Suponhamos que $\{0\} \subsetneq J$ e mostraremos que $J = K$. De fato, como $\{0\} \subsetneq J$, existe $a \in J$ tal que $a \neq 0$. O fato que K é um corpo e $a \neq 0$, implica que a é uma unidade. Uma vez que a é uma unidade e $a \in J$, pela Proposição 3.2, obtemos que $J = K$.

(2) \Rightarrow (3) Seja I um ideal de K . Vamos mostrar que $I = \{0\}$ ou $I = K$. De fato, se $I \neq \{0\}$, então

$$\{0\} \subsetneq I \subset K$$

e, sendo $\{0\}$ é um ideal maximal de K , devemos ter $I = K$.

(3) \Rightarrow (1) Dado $a \in K^*$, como $a \neq 0$, o ideal principal Ka é não nulo, pois $0 \neq a = 1a \in Ka$. Como os únicos ideais de K são K e 0 , segue que $Ka = K$. Como $1 \in K = Ka$, temos que $1 = ba$, para algum $b \in K$. Sendo K comutativo, segue que $1 = ba = ab$. Isto mostra que a é uma unidade em K . Portanto, K é um corpo. ■

Definição 3.6. *Chamamos de anel local um anel que possui somente um único ideal maximal.*

Um exemplo trivial de anel local é um corpo K . Neste caso, como os únicos ideais de K são $\{0\}$ e K , temos que $\{0\}$ é seu único ideal maximal.

Proposição 3.4. *Sejam A um anel e $M \neq A$ um ideal de A tal que $A - M = U(A)$. Então, A é um anel local e M é seu ideal maximal.*

Demonstração: Pela Proposição 3.2, todo ideal $J \neq A$ é composto de não-unidades, pois, se houvesse algum elemento que é unidade em J , teríamos $J = A$. Como $A - M = U(A)$, temos que M é o conjunto de todas as não-unidades. Dessa maneira, todo ideal $J \neq A$ está contido em M . Logo, se $N \subset J \subsetneq A$, como $J \subset M$, então $J = M$. Assim, M é o único ideal maximal de A , o que faz com que A seja um anel local. ■

Proposição 3.5. *Sejam A um anel comutativo e M um ideal maximal de A tal que*

$$1 + M = U(A).$$

, onde $1 + M = \{1 + m | m \in M\}$ Então, A é um anel local.

Demonstração: Sejam A um anel e M um ideal maximal de A tal que $1 + M = U(A)$. Vamos mostrar que A é um anel local e que M é seu único ideal maximal, para isso, pela Proposição 3.4, basta mostrar que $A - M = U(A)$.

(\subset) Que $U(A) \subset A - M$ é óbvio, pois, se houvesse $x \in U(A)$ tal que $x \notin A - M$, então x deveria pertencer a M . Como $x \in M$ é uma unidade, $M = A$, o que contradiz a hipótese de que M é maximal.

(D) Vamos mostrar que $A - M \subset U(A)$. Para isso, seja $x \in A - M$, assim $x \in A$ e $x \notin M$. Uma vez que $x \in M + \langle x \rangle$ obtemos $M \subsetneq M + \langle x \rangle \subset A$. Agora, o fato que M é maximal, implica que $M + \langle x \rangle = A$. Disso, podemos afirmar que $1 \in A = M + \langle x \rangle \Rightarrow 1 = m + ax$, onde $m \in M$ e $a \in A$, ou seja $ax = 1 - m \in 1 + M = U(A) \Rightarrow ax$ é uma unidade. Como ax é unidade, $\exists y \in A$ tal que $(ax)y = 1 \Rightarrow x(ay) = 1 \Rightarrow x \in U(A)$.

Portanto, $A - M = U(A)$, como queríamos provar. ■

Finalizaremos este trabalho mostrando que o anel das séries de potências formais sobre um corpo é um anel local.

Exemplo 3.6. *Seja K um corpo, então $K[[x]]$ é um anel local.*

Demonstração: Considere o ideal $\langle x \rangle$. Vamos mostrar que $K[[x]] - \langle x \rangle = U(K[[x]])$. Então, da Proposição 3.4 decorrerá que $K[[x]]$ é um anel local e seu único ideal maximal será $\langle x \rangle$. Para isso, precisamos primeiro observar que, sendo K um corpo, a Proposição 3.1 pode ser reescrita como:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ é uma unidade de } K[[x]] \Leftrightarrow a_0 \neq 0$$

(C) Dado $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]] - \langle x \rangle$, devemos ter $a_0 \neq 0$, caso contrário,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \right) x \in \langle x \rangle.$$

Portanto, $a_0 \neq 0$ e, pela observação acima obtemos que f é uma unidade de $K[[x]]$.

(D) Por outro lado, dado $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in U(K[[x]])$, novamente pela observação acima, obtemos que $a_0 \neq 0$. Mas isto implica que $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \notin \langle x \rangle$, ou seja, $f \in K[[x]] - \langle x \rangle$.

Portanto, $K[[x]] - \langle x \rangle = U(K[[x]])$, como desejávamos. ■

4 Conclusão

Em conclusão, este artigo explorou de forma sucinta alguns aspectos fundamentais da teoria dos anéis, com foco nos anéis locais e no anel das séries de potências formais sobre um corpo. Ao longo do texto, discutimos definições, exemplos e propriedades desses objetos matemáticos de forma objetiva e com todos os detalhes necessários. Embora este trabalho represente apenas uma introdução a um vasto campo de pesquisa, esperamos que ele desperte o interesse dos leitores e incentive investigações mais profundas nessa área da matemática.

Referências

- [1] Atiyah, M. F.; MacDonald, I. G. Introduction to Commutative Álgebra. MA: Addison-Wesley, 1994.
- [2] Domingues, H. H.; Iezzi, G. Álgebra Moderna. Saraiva Educação, 1970.
- [3] Gerônimo, J. R.; Franco, V. S. Fundamentos de Matemática, Maringá: Eduem, 2006.
- [4] Hefez, A. Elementos de Aritmética. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

O princípio da indução finita e sua aplicação na Educação Básica

Viviane Vanessa Dohl Feiten
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
viviane_dohl@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
robsonw@utfpr.edu.br

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do
Paraná
waraujo@utfpr.edu.br

Este trabalho será apresentado:

() SEMAT

(X) Workshop

Resumo

Neste trabalho, utilizaremos o conhecimento a respeito da demonstração por indução matemática, dentro dos números naturais, como ferramenta para ser utilizada em sala de aula, a fim de auxiliar o professor na explicação de algumas fórmulas e conjecturas, proporcionando ao aluno uma experiência matemática rebuscada, que fará com que o aluno repense suas generalizações, tornando-se crítico em relação as afirmações lidas e, principalmente, em relação as afirmações feitas durante o desenvolvimento dos exercícios. Muitos erros matemáticos são cometidos por falsas generalizações, não só dentro do conjunto dos naturais, mas também dos reais e, inclusive, em relação as operações simples de aritmética. O princípio da indução finita é uma ferramenta formal que pode trazer para o aluno uma noção fiel e robusta sobre os conceitos e afirmações matemáticas envolvendo os números naturais. Neste trabalho iremos mostrar uma aplicação da indução matemática na Educação Básica, dentro da geometria, na soma dos ângulos internos de um polígono.

Palavras-chave: Princípio da Indução Finita; Demonstração; Educação Básica.

1 Introdução

A matemática está presente na vida das pessoas desde os tempos antigos, e, conforme o mundo vem se modernizando, técnicas de ensino, metodologias de ensino diferenciadas e outras modalidades de ensino vem sendo introduzidas em sala de aula. A modernização no ensino de matemática é essencial e importante para o aprendizado dos alunos, no entanto, algumas técnicas precisam ser cautelosamente revisadas a fim de que o aluno possa ter acesso ao conteúdo completo, lógico, com explicações rebuscadas e também com o rigor matemático que determinados conteúdos exigem (e merecem) sem simplificações indevidas.

Um exemplo disso, cujo nome é o assunto deste trabalho, é o princípio da indução finita. Muitas vezes alguns exemplos são dados e mencionados em sala de aula, porém, é testado somente para os números 1, 2, 3 e, logo após, já é aceito para todos os demais. Como é o caso da afirmação: A expressão $P(n) : x^2 - x + 41$ fornece um número primo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se fizermos uma tabela com os primeiros 40 valores para n , obtemos:

n	$P(n)$	n	$P(n)$	n	$P(n)$	n	$P(n)$	n	$P(n)$	n	$P(n)$
1	41	8	97	15	251	22	503	29	853	36	1301
2	43	9	113	16	281	23	547	30	911	37	1373
3	47	10	131	17	313	24	593	31	971	38	1447
4	53	11	151	18	347	25	641	32	1033	39	1523
5	61	12	173	19	383	26	691	33	1097	40	1601
6	71	13	197	20	421	27	743	34	1163		
7	83	14	223	21	461	28	797	35	1231		

Mas para $n = 41$, temos $P(41) : 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que não é primo. Logo, a função deixa de gerar obrigatoriamente números primos. Caso essa função fosse testada apenas substituindo alguns valores, seria bem provável que se concluísse que a referida função gera números primos para todo n natural, quando na verdade isso não acontece.

Os alunos, normalmente, acreditam que a validade para poucos números já é suficiente para acreditar que uma fórmula irá valer para todos os números naturais, o que é um erro evitável quando utilizamos o método da indução para demonstrar sua validade.

Esses erros de generalização infelizmente são comuns, e, uma maneira de extinguí-los é realizar as demonstrações corretamente a fim de evitar que os alunos aceitem ou conjecturem erroneamente, além de instigar o senso crítico dos alunos quando deparados com expressões e fórmulas que lhes causem dúvidas.

Neste trabalho, explicaremos e definiremos o que é a indução matemática e como ela pode estar inserida dentro da educação básica, através de uma aplicação dentro do conteúdo de soma dos ângulos internos de um polígono.

2 Material e Métodos

O princípio da indução finita constitui, sobretudo, um método para verificar a validade de afirmações matemáticas relacionadas aos números naturais. A construção desse conjunto é realizada a partir dos axiomas de Peano, listados abaixo:

- (i) Todo Número Natural tem um único sucessor, que também é um Número Natural;
- (ii) Números Naturais diferentes tem sucessores diferentes;
- (iii) Existe um único Número Natural, designado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- (iv) Seja X um conjunto de Números Naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

O princípio da indução finita é uma consequência imediata do axioma iv) e, será apresentada no teorema a seguir:

Teorema 2.1 (Princípio da Indução Finita). *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que:*

- (i) $P(1)$ é válida;
- (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$;

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Considere $X = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ é verdadeira}\} \subset \mathbb{N}$. Por hipótese, pelo item (i) $P(1)$ é verdadeira, então $1 \in X$. Também por hipótese, pelo item (ii), $P(n+1)$ é verdadeira, uma vez que $P(n)$ verdadeira implica sua validade. $P(n+1)$ sendo verdadeira, temos que $(n+1) \in X$ pela forma como X foi considerado. Assim, pelo axioma de indução, podemos então concluir que $X = \mathbb{N}$. Logo, $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos mostrar.

O princípio, analogicamente falando, nos remete a uma brincadeira feita com dominó conhecida como "efeito dominó", Figura 1. A brincadeira consiste em construir uma fileira de dominós formando um desenho de modo que a distância entre dois dominós seja sempre menor que a altura do dominó para que sempre que um dominó cair, este derrube o seguinte e assim por diante.

Figura 1: Efeito Dominó



Fonte: Canva

Ao derrubar a primeira peça da fileira construída, todas as demais peças vão caindo na sequência que foram colocadas, formando um fenômeno interessante que atrai muitas pessoas a repetir o processo com diferentes formas. Na brincadeira, desejamos que todas as peças sejam derrubadas, no caso do princípio da indução finita, queremos que uma fórmula valha para todos números naturais. Agora para que todos os dominós caiam, duas coisas precisam ocorrer, primeiro precisamos garantir que sempre que uma peça cair, a seguinte cairá e depois, precisamos derrubar a primeira peça.

No princípio da indução finita, é possível observar que a hipótese (ii) garante que se a fórmula valer para um n qualquer, também valerá para o seu sucessor $n+1$ (um derruba o outro). Agora, a hipótese (i), em que exige que a fórmula valha para $n=1$ significa que a fórmula vale para algum natural, e este é o primeiro (derrubar o primeiro). O resultado que observamos na brincadeira é que todas as peças caem sequencialmente, a primeira derruba a segunda, a segunda derruba a terceira, e assim por diante. O mesmo ocorre com o princípio de indução finita, se tivermos o item (i) da hipótese ocorrendo, ou seja, que a fórmula valha para $n=1$, a hipótese (ii) ocorrendo também, faz com que valha a fórmula para $n=2$, e novamente a hipótese (ii) mostra que vale para $n=3$, e assim por diante até obtermos a validade da fórmula para todos números naturais.

3 Resultados e Discussão

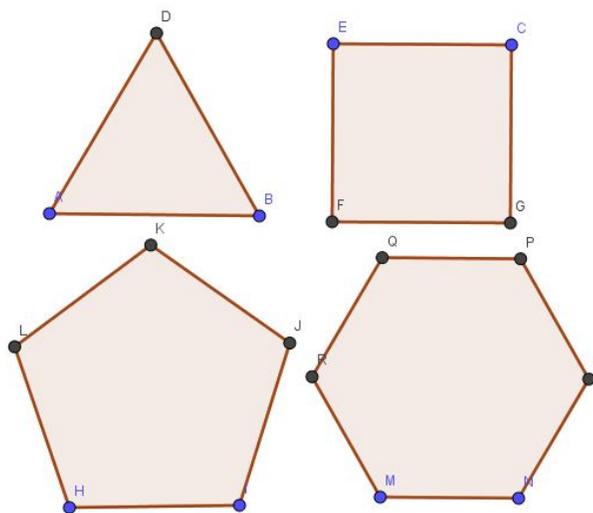
Uma aplicação do método da indução matemática na educação básica pode ser vista ao demonstrar a fórmula que indica a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer. Sabemos que polígonos são figuras geométricas planas constituídas por uma sequência finita de segmentos de reta chamados de "lados". Cada lado está conectado a dois outros lados em seus

extremos, formando um ângulo em cada interseção. Os polígonos possuem vértices, que são os pontos de encontro dos lados.

Os polígonos podem variar em número de lados, começando com o triângulo (3 lados), continuando com o quadrilátero (4 lados), pentágono (5 lados), hexágono (6 lados) e assim por diante. Um polígono regular é aquele em que todos os lados e ângulos são iguais.

Na figura 2, seguem alguns exemplos de polígonos. O polígono com o menor número de lados possível, como já evidenciado na figura 2, é o triângulo, que possui exatamente 3 lados e a soma dos ângulos internos de um triângulo, de acordo com a Lei Ângular de Tales, é 180° .

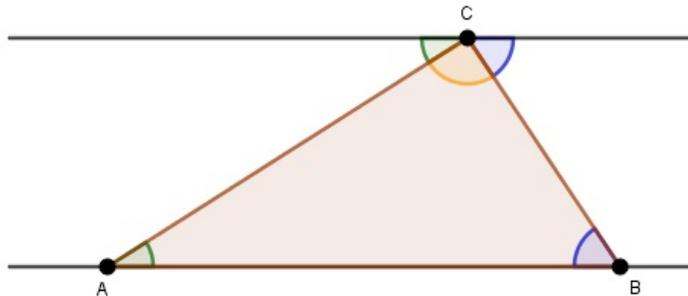
Figura 2: Polígonos



Fonte: Do autor

A demonstração da Lei Ângular de Tales pode ser facilmente verificada na Figura 3, onde, através do conceito de ângulos alternos e internos, em retas paralelas cortadas por transversais, é possível considerar ângulos congruentes aos ângulos internos do triângulo, concluindo que os três juntos formam uma semicircunferência e, portanto, podemos afirmar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é de fato 180° , dentro da geometria euclidiana.

Figura 3: Demonstração Lei Angular de Tales

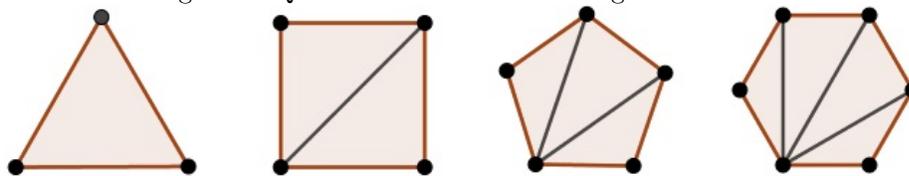


Fonte: Do autor

Com base nessa constatação, é possível dividir um polígono qualquer em triângulos, o que sempre será possível escolhendo e fixando aleatoriamente algum de seus vértices e ligá-lo aos

demais por meio de diagonais e, a partir da quantidade mínima de triângulos obtidos, calcular a soma total dos ângulos internos desse polígono, conforme a Figura 4.

Figura 4: Quantidade mínima de triângulos internos



Fonte: Do autor

Para obter a quantidade mínima de triângulos internos de um polígono de n lados, como já dito, basta tomar um vértice qualquer, fixá-lo e, a partir dele, ligá-lo com cada um dos demais, formando $n - 3$ diagonais internas.

A partir da figura é possível ainda, construir um quadro que relaciona a quantidade de lados com a quantidade mínima de triângulos possíveis:

Números de Lados	Quantidade de Triângulos
3	1
4	2
5	3
6	4
7	5
8	6
...	...
n	$n - 2$

Dessa forma, poderíamos ajustar o quadro incluindo a soma dos ângulos internos S_n de cada polígono de n lados, dado que a cada novo triângulo obtido implica no acréscimo dos 180° referentes a ele:

Números de Lados	Quantidade de Triângulos	Soma dos Ângulos Internos
3	1	$180 = (3 - 2) \cdot 180$
4	2	$360 = (4 - 2) \cdot 180$
5	3	$540 = (5 - 2) \cdot 180$
6	4	$720 = (6 - 2) \cdot 180$
7	5	$900 = (7 - 2) \cdot 180$
8	6	$1080 = (8 - 2) \cdot 180$
...
n	$n - 2$	$S_n = (n - 2) \cdot 180$

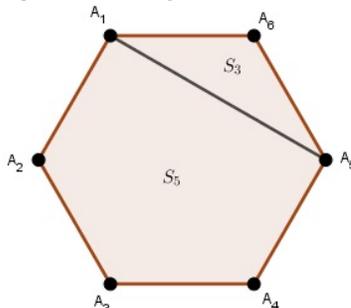
Analisando o padrão do quadro, podemos conjecturar que a fórmula para determinar a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados, é dada por:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

No entanto, deveríamos nos perguntar: Será mesmo que essa fórmula é válida para todo $n \geq 3$? Para responder essa pergunta devemos utilizar o princípio da indução finita e garantir que $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ seja realmente válida para todo n natural, com $n \geq 3$.

No passo de indução, assumimos que a fórmula vale para n e, utilizamos para mostrar que vale para $n + 1$. Para isso, devemos encontrar a relação entre S_n e S_{n+1} . Se analisarmos, por exemplo, o hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ da Figura 5, ao traçarmos a diagonal A_1A_5 obtemos o triângulo $A_1A_5A_6$ e o pentágono $A_1A_2A_3A_4A_5$. Então, podemos inferir que $S_6 = S_5 + S_3$, ou seja, existe uma relação entre S_6 e S_5 .

Figura 5: Relação entre S_6 e S_5



Fonte: Do autor

De um modo geral, se $A_1A_2 \cdots A_{n+1}$ é um polígono de $n + 1$ lados, ao traçarmos a diagonal A_1A_n obtemos o triângulo $A_1A_nA_{n+1}$ e o polígono de n lados $A_1A_2 \cdots A_n$. Disso, obtemos a seguinte recorrência

$$S_{n+1} = S_n + S_3.$$

Agora estamos aptos a realizar a demonstração por indução da fórmula

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \quad \text{para todo } n \geq 3$$

De fato, para $n = 3$, temos que S_3 é a soma dos ângulos internos do triângulo e, portanto, $S_3 = 180^\circ$. Por outro lado,

$$S_3 = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 1 \cdot 180^\circ = 180^\circ.$$

Portanto, para $n = 3$ a fórmula vale.

Suponha, agora, que $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$ para algum $n > 3$. Vamos mostrar que

$$S_{n+1} = [(n + 1) - 2] \cdot 180^\circ.$$

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + S_3 \\ &= (n - 2) \cdot 180 + 180 \quad (\text{hipótese de indução e caso } n = 3) \\ &= [(n - 2) + 1] \cdot 180 \\ &= [(n + 1) - 2] \cdot 180. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

4 Conclusão

Concluimos que a aplicação do método indutivo é de grande importância no ensino da Matemática na Educação Básica, pois permite construir um raciocínio lógico diante de problemas

matemáticos. A prática e estudo desse método estimula o domínio total do conteúdo e amplia as habilidades de generalização, possibilitando uma análise mais crítica e robusta acerca das fórmulas e conjecturas aprendidas.

Com planejamento e estratégias adequadas, é possível abordar conteúdos desafiadores, como por exemplo, a demonstração da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, promovendo uma abordagem investigativa e interativa que facilita o entendimento e o interesse por parte dos alunos pela matéria.

Além da aplicação em sala de aula, é importante ressaltar que trabalhar com demonstrações aplicadas a Educação Básica possibilita uma formação continuada ao professor e um contato cotidiano, uma vez que é difícil encontrar essas demonstrações nos livros didáticos usuais e o professor, que utiliza o livro didático como referência única, pode estar distante desses conceitos e, inclusive, cair no esquecimento.

Por fim, sugerimos que as fórmulas utilizadas em sala de aula sejam sempre que possíveis demonstradas e não apenas observada em um número finito de termos, já que dessa forma poderá levar o aluno a cometer generalizações errôneas.

Referências

- [1] HEFEZ, Abramo. *Elementos de aritmética*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [2] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. *Matemática discreta*. Coleção PROFMAT. Rio, v. 216, 2015.
- [3] SILVA, Ednardo Lino da. *Aplicação do método de indução matemática no ensino médio*. 2015.



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

UTILIZAÇÃO DO DIAGRAMA DE PARETO PARA AVALIAÇÃO DOS DADOS DO PROTOCOLO INSTITUCIONAL DE SEPSE

Fernanda Ines Oldoni

UTFPR-TD

fernanda_oldoni@hotmail.com

Daniela Trentin Nava

UTFPR-TD

dnav@utfpr.edu.br

Regiane Slongo Fagundes

UTFPR-TD

regianefagundes@utfpr.edu.br

Resumo

O artigo destaca a importância das ferramentas da qualidade na melhoria de processos, tendo como ponto de partida o conceito introduzido por Walter Shewhart, que implementou o Controle Estatístico da Qualidade (CEP) por meio dos gráficos de controle. O objetivo do trabalho é avaliar a eficácia da utilização do diagrama de Pareto no controle estatístico do processo. A abordagem metodológica incluiu a estratificação dos principais problemas por meio do Diagrama de Pareto, uma ferramenta eficaz na identificação das principais fontes de falhas e no mau desempenho dos processos (Santos et al., 2020). A aplicação do Diagrama de Pareto, resultou em maior taxa e assertividade do protocolo de sepsis nos últimos três meses, indicando uma eficácia notável dessa abordagem na melhoria contínua de processos.

Palavras-chave: Diagrama de Pareto, ferramentas da qualidade, controle estatístico

1 Introdução



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

A Sepsé, comumente referida como infecção generalizada, é uma das principais causas de morbidade e mortalidade em pacientes hospitalizados em todo o mundo. Trata-se de uma condição médica grave que exige tratamento imediato e adequado. A complexidade do manejo da Sepsé e a necessidade de tomar decisões clínicas precisas e rápidas destacam a importância de adotar abordagens baseadas em evidências para melhorar a qualidade do atendimento (Instituto Latino Americanos de Sepsé – ILAS).

A preocupação com a qualidade é inerente ao ser humano e evoluiu com ele, gerando com o passar dos tempos, variadas formas de esforços contra a imperfeição, segundo as circunstâncias do momento (RAUTER,2002).

Os conceitos de gerência da qualidade foram desenvolvidos no contexto industrial, inicialmente a partir de pensadores norte-americanos. Seu apogeu se deu na indústria japonesa do pós-guerra. Neste cenário, Deming que é considerado um teórico nesta área, propôs um método por meio do qual a qualidade é alcançada (MALIK,1998 e RAUTER,2002)

Desde que teve início o atendimento médico-hospitalar, pôde-se identificar uma preocupação com a qualidade, uma vez que parece pouco provável o fato de alguém atuar sobre a vida de seu semelhante sem manifestar a intenção de fazê-lo com a melhor qualidade possível, Berwick 1995 afirma que é possível adaptar os conceitos de qualidade utilizados na indústria, para o setor saúde, até com certa facilidade, dando exemplos concretos da utilização das tradicionais ferramentas da qualidade (ADAMI,2000).

Segundo Montgomery (2013, p.95) “O controle estatístico do processo (CEP) é uma poderosa coleção de ferramentas de resolução de problemas útil na obtenção da estabilidade do processo e na melhoria da capacidade através da redução da variabilidade”. Pode ser descrito também como uma ferramenta de monitoramento real da qualidade, pois através da inspeção por amostragem de características pré-determinadas do produto em estudo, o CEP possibilita a detecção de causas especiais, anômalas ao processo, que possam vir a interferir negativamente na qualidade final do produto.

A aplicação de ferramentas estatísticas da qualidade no protocolo clínico de Sepsé em ambiente hospitalar representa uma estratégia inovadora e altamente eficaz para aprimorar a prestação de cuidados de saúde. O uso dessas ferramentas permite aos profissionais da saúde analisarem dados clínicos, identificar áreas de melhoria, otimizar processos de atendimento e, em última instância, melhorar os resultados dos pacientes (MOHAMMED MA, 2008).



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

Esta abordagem promissora combina a expertise clínica com a análise quantitativa, oferecendo uma visão mais abrangente da gestão da Sepse. Neste contexto, a introdução de ferramentas estatísticas da qualidade permite identificar precocemente a sepse, fundamental para iniciar o tratamento adequado; monitorar a qualidade dos cuidados através da administração dos antibióticos de forma e no tempo adequado bem como coleta dos exames; reduzir a variabilidade na prática clínica; estabelecer metas de melhoria e avaliar o progresso e por fim aprimorar a tomada de decisão (SEYMOUR CW, 2017).

2 Metodologia

Este estudo foi realizado em um hospital particular do oeste do Paraná, no período de Janeiro de 2023 a Outubro de 2023, a partir de aplicação de ferramentas estatísticas de qualidade para avaliação do protocolo de Sepse.

Inicialmente foi definido o protocolo clínico baseado nas diretrizes do ILAS que norteia os cuidados e processos mínimos para garantir a identificação e tratamento precoce de pacientes com possível diagnóstico de Sepse. Como norteador foi definido a meta de 75% de assertividade no protocolo cujo mesmo possui quatro marcadores essenciais para a análise da assertividade. Dentre os marcadores estão: Administração do antibiótico em até 1 hora da abertura do protocolo, adesão ao pacote de 1 hora, adesão a coleta do 2º lactato e letalidade.

Para a coleta das informações foi implantado lista de verificação com os dados do paciente para posterior análise, dentre eles os sinais vitais ou disfunção orgânica apresentada, setor onde paciente está, horário de atendimento médico para avaliação dos sinais e sintomas, caso o médico suspeite de sepse é realizada a solicitação de coleta de hemocultura e registrado o horário da solicitação bem como o horário da coleta realizada pelo enfermeiro. Nesta ficha ainda, são anotados o horário de administração do antibiótico. Dados esses necessários para a posterior análise da efetividade do protocolo. E em caso de não alteração do exame de lactato uma segunda coleta se faz necessária para a definição final do diagnóstico de Sepse.

A análise dos desvios da meta definida foi realizada através do Diagrama de Pareto que é estratificada detalhadamente de acordo com o pareto geral além do detalhamento de todas as alterações para definição do plano de ação que se dá através do 5W2H. A análise é realizada mensalmente e reportada em programa interno da instituição para

acompanhamento da alta direção referente aos desfechos do protocolo e a efetividade das análises e dos planos de ação sugeridos

3 Resultados e Discussão

A figura 1 nos mostra o diagrama de pareto utilizado para a estratificação dos setores que apresentaram falhas no cumprimento do protocolo de sepse.

Figura 1 Diagrama de Pareto.

Estratificação (Setores onde ocorreram os atrasos)			
Pareto do Problema:			
Adesão Global do Protocolo de SEPSE			
Descrição	Quantidade / Valor	% Acumulado	Percentual
Pronto Atendimento	8,00	89%	89%
Uti-geral	1,00	100%	11%
Total	9		100%

Fonte dados do autor

A figura 2 apresenta da metodologia utilizada para definir as ações a serem realizadas visando a melhoria do processo.

Figura 2 Plano de ação

META: 75,00%								
PREVISTO:	900,0	>>>IMPORTANTE: RETROALIMENTE O PLANO DE AÇÃO ANUAL DA META COM AS AÇÕES DESTE FCA (ABA FCA DO ARQUIVO ORIGINAL DO PLANO DE AÇÃO)<<<						
REAL:	232,2							
LACUNA:	367,8							
FATO	CAUSA	AÇÕES	VALOR DE RECUPERAÇÃO DA LACUNA	INÍCIO (P)	TÉRMINO (P)	INÍCIO (R)	TÉRMINO (R)	FAROL
Falta de critério de abertura de protocolo em UTI-G		Reconstrução de protocolo	0,25	01/08/23	10/08/23	10/08/23	05/09/23	🟢
		Revisão de fichas de abertura de protocolo	0,25	01/08/23	10/08/23	10/08/23	05/09/23	🟢
		Revisão de fichas técnicas	0,25	01/08/23	30/09/23	01/08/23	30/09/23	🟢
		Treinamento realizado com colaboradores	0,25	10/9/2023	15/10/2023	10/9/2023	15/10/2023	🟢
		Elaborar cartá com os sinais de Sepsis para todos os colaboradores	0,25	2/9/2023	15/10/2023	2/9/2023	15/10/2023	🟢
Médico e equipe multi. (UTI-G) não compreender a importância da abertura do protocolo	Falha no processo de implantação do Protocolo Cooperativo	Treinamento com equipe médica de UTI-G/PA e Hospitalistas sobre o novo fluxo de protocolo	0,25	5/9/2023	20/9/2023	5/9/2023	15/9/2023	🟢
		Inserir o item "avaliações" no sistema	0,25	14/9/2023	30/9/2023	14/9/2023	30/9/2023	🟢
		Confeccionar o "jálico" para facilitar a retirada da medicação na farmácia	0,25	2/9/2023	15/10/2023	2/9/2023	15/10/2023	🟢
Ausência de controle de acordos de tempo com laboratório (existe o acordo porém não existe o controle)	Dificuldade em recolher assinatura do responsável pelo laboratório	Formalizar junto ao laboratório as regras estabelecidas para o SLA dos exames de urgência, emergência e protocolos	1	06/09/23	30/09/23	06/09/23	30/09/23	🟢
Demora do coletador para recolher a amostra após ser coletada	Acionamento do coletador apenas após a coleta da amostra	Acionar coletador do laboratório após verbalização do médico sobre a abertura do protocolo de sepse antes do momento da coleta	0,5	06/09/23	13/09/23	06/09/23	13/09/23	🟢
		Retomada de Kit's SEPSE para todos os setores.	0,5	06/09/23	20/09/23	06/09/23	20/09/23	🟢
Padronização de análise de amostra na máquina localizada no laboratório	Exames de lactato pelo protocolo faz parte do pacote de exames geral, sem janela de tempo para cumprimento	Alterar no sistema Tmy a solicitação para análise da amostra no gaulmetro do Centro Cirúrgico	1	13/09/23	20/09/23	13/09/23	20/09/23	🟢

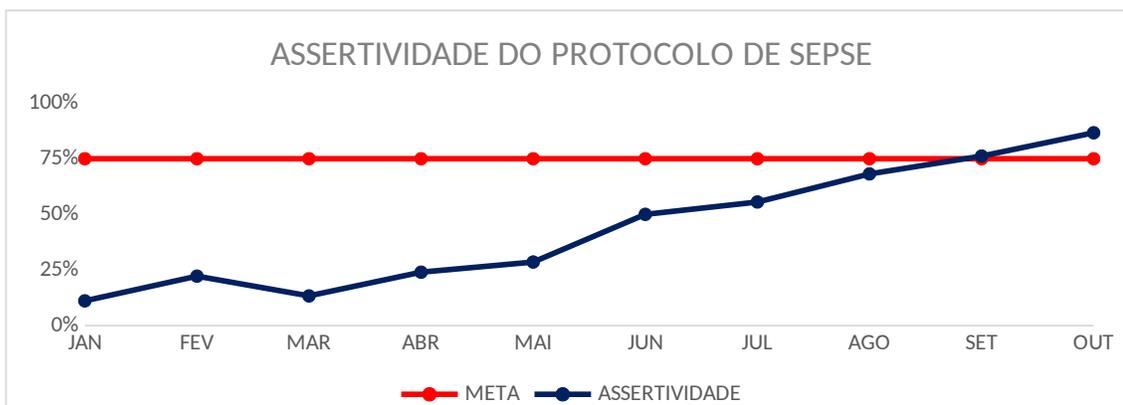
Fonte: Dados do autor

Diante dos dados levantados, a ferramenta 5W2H neste caso definido como FCA (Fato, Causa e Ação) cujo plano de ação objetiva executar ações para tornar preciso o resultado foi utilizado com o intuito de definir as ações a fim de mitigar falhas futuras que possam interferir no resultado positivo do protocolo e no desfecho favorável ao paciente.

Essa ferramenta é muito utilizada no mapeamento e padronização de processos e no estabelecimento de procedimentos associados a indicadores (MARSHALL JUNIOR et al, 2010).

A Figura 3 mostra o resultado da análise realizada com o diagrama de Pareto para a estratificação das falhas relacionadas ao protocolo de Sepse bem como o resultado positivo das ações implementadas pós identificação das falhas

Figura 3 Assertividade do Protocolo de Sepse



Fonte: Dados do autor

O estudioso Walter Shewhart, introduziu o conceito de controle estatístico da qualidade através do uso dos gráficos de controle, possibilitando as organizações exercerem funções (MONTGOMERY, 2013), ferramenta essa que possibilitou o levantamento das necessidades de investigação dos dados coletados.

Mediante a estratificação dos principais problemas com a ferramenta diagrama de Pareto que é utilizada com o intuito de identificar os principais problemas que resultam nas falhas e no mau desempenho dos processos e que após essa identificação é possível propor soluções para resolver esses problemas (SANTOS, A.P et all., 2020) levantou-se os principais problemas a serem atacados que trouxe a melhora notada.

Com a aplicação do diagrama de pareto e do FCA nota-se que os resultados obtiveram uma melhora significativa nos últimos três meses, data a qual as ferramentas foram aplicadas.

4 Conclusões / Considerações Finais

Através da aplicação das ferramentas estatísticas da qualidade foi possível observar a melhora na assertividade do protocolo de Sepse o que impacta de forma positiva o dia a



XI Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino

Toledo, 06 a 10 de maio de 2024

dia no hospital relacionado ao melhor e mais adequado tratamento aos pacientes que apresentam sinais e sintomas de sepse diminuindo inclusive a taxa de mortalidade uma vez que a doença é tratada precocemente. Em suma, a assertividade do processo é um elemento vital para o sucesso organizacional. Medir, analisar e aprimorar continuamente essa assertividade é uma prática fundamental para garantir operações eficientes e eficazes ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

- Instituto Latino Americano de Sepse – ILAS disponível em:
<https://ilas.org.br/assets/arquivos/ferramentas/roteiro-de-implementacao.pdf>
- Rauter R. Os novos caminhos da qualidade - sua importância para o alcance da competitividade - Temas em Debate 1992; 4: 20-9.
- Adami NP. Melhoria da qualidade nos serviços de enfermagem. Acta Paul Enferm 2000; 13(esp-pt I): 190-6. Montgomery, Douglas C. Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- Montgomery, Douglas C. Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- Mohammed MA, Worthington P, Woodall WH. Plotting basic control charts: tutorial notes for healthcare practitioners. Quality and Safety in Health Care. 2008;17(2):137-145
- Seymour CW, Gesten F, Prescott HC, et al. Time to Treatment and Mortality during Mandated Emergency Care for Sepsis. The New England Journal of Medicine. 2017;376(23):2235-2244
- Santos AP, Pozzetti JVT, Moraes PAV, Avelino CH; Utilização da ferramenta Diagrama de Pareto para auxiliar na identificação dos principais problemas nas empresas, 2020
- Marshall Junior, Isnard et.al. Gestão da Qualidade.10.ed.Rio de Janeiro. Editora FGV,2010.



Toledo, 02 a 05 de maio de 2023
