



# ANAIS

## XII SEMANA DA MATEMÁTICA

### UTFPR TOLEDO

**Explorando horizontes da matemática: caminhos  
profissionais após a licenciatura**

Página do Evento:

[https://semat.td.utfpr.edu.br/XII\\_semat/](https://semat.td.utfpr.edu.br/XII_semat/)

Toledo – PR

Outubro - 2025

S471 Semana Acadêmica da Matemática UTFPR Toledo (12: 2025: Toledo, PR)

Anais da XII Semana Acadêmica da Matemática UTFPR, Toledo (PR), 15 a 17 de outubro de 2025. / organizado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. - Toledo, PR, 2025.

215 f.

Modo de Acesso: World Wide Web:

< [https://semat.td.utfpr.edu.br/XII\\_semat/](https://semat.td.utfpr.edu.br/XII_semat/) >.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo - Educação.  
I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Carla Rech Ribeiro CRB 9/1685

---

## Sumário

|                                        |          |
|----------------------------------------|----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>             | <b>4</b> |
| <b>2. OBJETIVOS.....</b>               | <b>6</b> |
| <b>3. PÚBLICO ALVO .....</b>           | <b>6</b> |
| <b>4. PERÍODO DE REALIZAÇÃO .....</b>  | <b>6</b> |
| <b>5. PERIODICIDADE DO EVENTO.....</b> | <b>6</b> |
| <b>6. REALIZAÇÃO .....</b>             | <b>6</b> |
| 6.1. Comissão Organizadora.....        | 7        |
| 6.2. Comissão Científica .....         | 7        |
| 6.3. Comissão de Pareceristas .....    | 7        |
| <b>7. CRONOGRAMA.....</b>              | <b>8</b> |
| <b>8. OFICINAS .....</b>               | <b>9</b> |
| <b>9. TRABALHOS.....</b>               | <b>9</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciou no ano de 2013 e em 2025, completou sua XII edição, cujo tema discutido foi “*Explorando horizontes da matemática: caminhos profissionais após a licenciatura*”. A programação foi desenvolvida de forma presencial.

O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura. O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras e comunicações orais e nesse ano, buscou mostrar alguns dos caminhos da pós-graduação.

Participam do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Campus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados do Brasil.

Assim, a SEMAT visa aproximar alunos de graduação e de pós-graduação, professores da rede pública de ensino da região e das universidades e pesquisadores, oportunizando o diálogo e o compartilhamento de ideias, conhecimentos e experiências, fortalecendo a articulação entre a formação inicial, a formação continuada e a prática docente, bem como estimulando a reflexão sobre as múltiplas possibilidades profissionais após a licenciatura. Ela está agora em sua décima segunda edição, indicando uma consolidação cada vez maior na realização do evento. Tal trajetória, iniciada em 2013, reflete o empenho e o reconhecimento dos acadêmicos do curso e dos docentes da região, de modo que a cada nova edição cresce o interesse e a participação não apenas de nossa comunidade interna, como também de professores e estudantes externos.

Segue o histórico dos temas abordados nas Semanas acadêmicas anteriores:

- ✓ I SEMAT – 2013: “*Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática*”.
- ✓ II SEMAT – 2014: “*Matemática em foco: integrando saberes, compartilhando experiências*”.
- ✓ III SEMAT – 2015: “*A Matemática e seus caminhos: vencendo limites*”.
- ✓ IV SEMAT – 2016: “*A Matemática na Harmonia da Natureza*”.
- ✓ V SEMAT – 2017: “*A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão*”.
- ✓ VI SEMAT – 2018: “*Ser professor que ensina Matemática em uma era tecnológica*”.
- ✓ VII SEMAT – 2019: “*Perspectivas e desafios para o licenciado em Matemática*”.

- ✓ VIII SEMAT – 2021: *“A Matemática presente nas tecnologias: abordagens para o ensino”*.
- ✓ IX SEMAT – 2022: *“Formação Docente em Matemática: políticas, práticas e tendências”*.
- ✓ X SEMAT – 2023: *“O Ensino da Matemática e as mudanças curriculares na Educação Básica”*.
- ✓ XI SEMAT – 2024: *“Inclusão e Matemática: Construindo Pontes para a Diversidade e a Era Digital no Ensino”*.

Para este ano de 2025, a XII SEMAT – 2025 abordou o tema *“Explorando horizontes da matemática: caminhos profissionais após a licenciatura”* e contou com palestras, oficinas, apresentações de trabalhos e momentos de confraternização, reafirmando o caráter formativo e integrador do evento.

No dia 15 de outubro, a programação teve início com o credenciamento e a solenidade de abertura, com abertura cultural realizada pelo egresso do Curso de Matemática Nilson Liberato Neto e uma breve homenagem ao dia dos professores, seguida da palestra de abertura, intitulada *“Dinâmica no Toro Bidimensional: A Interação entre Propriedades Numéricas e Comportamento Geométrico de Campos Vetoriais”*, ministrada pelo Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (UFPR). A noite foi encerrada com o coquetel de lançamento do livro comemorativo aos dez anos do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Toledo, marcando um momento simbólico de celebração e memória da trajetória do curso.

No dia 16 de outubro, o evento prosseguiu com oficinas simultâneas que abordaram temas diversificados, como o ensino de vocabulário matemático em língua inglesa, o uso do software GAP, a resolução do Cubo Mágico e suas implicações matemáticas, além de discussões sobre saúde mental no contexto acadêmico e práticas inclusivas no ensino da Matemática. As atividades proporcionaram aos participantes um espaço de vivência prática e de reflexão sobre metodologias inovadoras e experiências pedagógicas significativas.

Encerrando a programação, no dia 17 de outubro, ocorreram as apresentações de trabalhos acadêmicos, englobando pesquisas, propostas didáticas e relatos de experiências, seguidas da palestra de encerramento, intitulada *“Geometria em Sala de Aula”*, ministrada pelo Prof. Dr. René Carlos Cardoso Baltazar Jr. (FURG).

A XII SEMAT reafirmou, assim, sua relevância como um evento que ultrapassa os limites da formação inicial, promovendo a integração entre diferentes níveis de ensino e áreas de pesquisa. Mais do que um espaço de difusão de conhecimento, consolidou-se como um ambiente de diálogo, aprendizado mútuo e fortalecimento da comunidade acadêmica e profissional da Matemática.

Os Anais da XII SEMAT registram, portanto, as contribuições científicas, formativas e humanas que marcaram esta edição, reafirmando o compromisso do evento com a qualidade da formação docente e com a valorização da Matemática enquanto campo de conhecimento e prática transformadora.

## **2. OBJETIVOS**

- Promover a integração e a capacitação de alunos e professores, bem como da comunidade acadêmica local e regional, a partir da discussão de temáticas atuais e da realização de oficinas com temas matemáticos pertinentes.
- Discutir a formação docente de Matemática à luz da BNCC com suas políticas, práticas e tendências.
- Oportunizar atividades que relacionem conteúdos estudados em sala de aula com experiências profissional de professores e pesquisadores, visando complementar a formação dos acadêmicos.
- Refletir sobre uso das tecnologias digitais para o ensino/aprendizagem da matemática;
- Promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas;
- Viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.
- Promover a inclusão social para pessoas com deficiência visual por meio do Ensino da Matemática.
- Incentivar a divulgação das pesquisas realizadas por discentes e docentes nos diversos níveis e áreas da Matemática.

## **3. PÚBLICO ALVO**

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

## **4. PERÍODO DE REALIZAÇÃO**

O evento foi realizado nos dias 15 a 17 de outubro de 2025.

## **5. PERIODICIDADE DO EVENTO**

Esta foi a XII Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

## **6. REALIZAÇÃO**

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pela portaria nº 82, de 24 de abril de 2025.

### 6.1. Comissão Organizadora

Prof. Dr. Sérgio Flávio Schmitz - Coordenador da SEMAT

Prof. Dr. Leandro Antunes - Vice-coordenador da SEMAT

Prof.<sup>a</sup> Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

Prof.<sup>a</sup> Ma. Dione Inês Christ Milani

Prof.<sup>a</sup> Dra. Jahina Fagundes de Assis Hattori

Prof. Dr. Loreci Zanardini

Prof.<sup>a</sup> Dra. Márcia Regina Piovesan

Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira

### 6.2. Comissão Científica

Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira – Coordenador

Prof.<sup>a</sup> Ma. Dione Inês Christ Milani – Coordenadora

### 6.3. Comissão de Pareceristas

Prof. Dr. Adriano Gomes de Santana

Prof.<sup>a</sup> Dra. Aline Keryn Pin

Prof.<sup>a</sup> Dra. Aracéli Ciotti de Marins

Prof.<sup>a</sup> Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes

Prof. Dr. Cezar Ricardo de Freitas

Prof.<sup>a</sup> Dra. Daniela Trentin Nava

Prof.<sup>a</sup> Ma. Dione Inês Christ Milani

Prof. Dr. Emerson Tortola

Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso

Prof. Me. Ivan José Coser

Prof.<sup>a</sup> Dra. Jahina Fagundes de Assis Hattori

Prof.<sup>a</sup> Dra. Karen Carrilho da Silva Lira

Prof. Dr. Leandro Antunes

Prof. Dr. Loreci Zanardini

Prof.<sup>a</sup> Dra. Márcia Regina Piovesan

Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira  
Prof.<sup>a</sup> Dra. Regiane Slongo Fagundes  
Prof. Dr. Renato Francisco Merli  
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra  
Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan  
Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosângela Aparecida Botinha Assumpção  
Prof. Dr. Sérgio Flávio Schmitz  
Prof.<sup>a</sup> Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia  
Prof.<sup>a</sup> Dra. Tatiany Mottin Dartora  
Prof. Dr. Vanderlei Galina  
Prof.<sup>a</sup> Dra. Vanessa Largo

## **7. CRONOGRAMA**

### **15 de outubro (Quarta-feira)**

Local: Auditório 1 - Bloco E - UTFPR - Campus Toledo  
19:00 - 19:30 - Credenciamento  
19:30 - 20:00 - Solenidade de Abertura  
20:00 - 21:30 - Palestra de Abertura  
Título: Dinâmica no Toro Bidimensional: A Interação entre Propriedades Numéricas e Comportamento Geométrico de Campos Vetoriais  
Palestrante: Prof. Dr. Wagner Augusto Almeida de Moraes (UFPR)  
21:30 - 22:30 - Coquetel de Lançamento do Livro de Comemoração aos 10 anos do Curso

### **16 de outubro (Quinta-feira)**

Local: Bloco C - UTFPR - Campus Toledo  
19:00 - 20:30 - Oficinas  
20:30 - 21:00 - Intervalo  
21:00 - 22:30 - Oficinas (continuação)

### **17 de outubro (Sexta-feira)**

19:00 - 20:30 - Apresentação de trabalhos  
Local: Bloco C - UTFPR - Campus Toledo - Salas C-204, C-205, C-206 e C-309  
20:30 - 20:50 - Intervalo  
20:50 - 22:30 - Palestra de Encerramento  
Título: Geometria em Sala de Aula  
Palestrante: Prof. Dr. Rene Carlos Cardoso Baltazar Junior (FURG)  
Local: Auditório 1 - Bloco E - UTFPR - Campus Toledo

## 8. OFICINAS

A XII SEMAT contou com a apresentação de doze oficinas das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes da UTFPR e outras instituições.

### OFICINA [01] - **Mathematical English Essentials**

Responsável: João Eduardo de Moura (UTFPR - Toledo)

### OFICINA [02] - **Introdução ao GAP: um sistema para a álgebra discreta computacional**

Responsável: Adriano Gomes de Santana (UTFPR - Toledo)

### OFICINA [03] - **A Matemática da Resolução do Cubo Mágico**

Responsáveis: Adriano Gomes de Santana, Robson Wilians Vinciguerra, Isabelly Birck, Raynanda Maria da Costa Justino, Patrick de Azevedo Laismann, Nicolas Alexandre Toledo Debus, Izabella Fiori dos Santos, Flávia Alexandra Basgal, Gustavo Walker Gomes da Silva, Ana Júlia Cardoso do Nascimento, Maria Eduarda dos Santos Pacheco, Letícia Mariany da Silveira, Lucas André Petry, Gusthavo Henrique da Silva Taborda e Leonardo Augusto Grazilio da Silva (UTFPR - Toledo)

### OFICINA [04] - **A influência da comunicação e da saúde mental no meio acadêmico**

Responsável: Kellen Campos e Lídia Guimarães (Florescer Clínica Multidisciplinar)

### OFICINA [05] - **Desvendando a Natureza, os Mistérios da Proporção Áurea e da Sequência de Fibonacci**

Responsável: Mauro André Junges Rech

### OFICINA [06] - **Jogando de Forma Inclusiva: Matemática Acessível e o DUA**

Responsáveis: Aline Keryn Pin, Vanessa Largo Andrade, Mariana Furlan Tissiane, Phelip Terres Zimmermann, Suzane Bubna Lara, Leandro Charava dos Santos e Maria Fernanda Bronel

## 9. TRABALHOS

Nesta décima segunda edição da SEMAT, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral. Na sequência, são apresentados os trabalhos.

## CURRÍCULO DE MATEMÁTICA E PERSPECTIVAS: OS ANAIS DO EPREM DE 2011 A 2024

Ana Paula Della Betta

UTFPR – Campus Toledo

anapauladellabetta@gmail.com

UTFPR – Campus Toledo

Alice Serschön

UTFPR – Campus Toledo

Vanessa Largo Andrade

### Resumo

O currículo normalmente é apresentado no formato de um documento estático, porém é dinâmico, resultado de toda a construção histórica e social da Educação. Deste modo, este trabalho apresenta uma análise de cinco artigos dos anais de edições do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM) disponibilizados de forma *online*, e que abordam o tema “currículo” no Ensino Fundamental. O objetivo é apresentar e discutir o que esses trabalhos abordam sobre o tema currículo na Educação Matemática. Os trabalhos demonstram que o currículo não é apenas uma lista de matérias, mas um espaço vivo, moldado por escolhas, situações e objetivos. Destaca-se também a relevância da Base Nacional Comum Curricular e das tecnologias digitais no ensino, bem como o tema inclusão e a importância do desenvolvimento do raciocínio matemático no aluno. Além disso, o destaque para a urgência em romper com a rigidez dos currículos lineares.

**Palavras-chave:** Pensamento Lógico. Educação Básica. Formação de Professores.

### 1 Introdução

A formação de professores e a organização curricular na Educação Básica são temas centrais na pesquisa em Educação Matemática. Sacristán (2017) explicita o currículo como construção social, que preenche a escolaridade de conteúdos e orientações. Esta ação leva a analisar contextos concretos que vão dando forma e conteúdo, antes de passar a ter alguma realidade como experiência de aprendizagem para os alunos.

O currículo da Educação Matemática resume-se na forma em que é apresentado os conteúdos e sua organização, definindo como será realizada a aprendizagem e quais os objetivos que se pretende alcançar. Diante disso, existem documentos norteadores para a área da educação que estabelecem uma estrutura sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) e as Diretrizes Curriculares Nacionais (2013) são exemplos.

Com o intuito de compreender de que forma o currículo aparece nos trabalhos apresentados no Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), este estudo se propõe a responder: *como o tema currículo é abordado nas edições do EPREM, de 2011 a 2024?* O objetivo é apresentar e discutir os trabalhos apresentados nos eventos realizados entre 2011 e 2024 nos anais disponíveis para acesso de forma *online*.

O EPREM é um evento promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná (SBEM-PR), que constitui um importante espaço de divulgação científica, troca de experiências pedagógicas e reflexão sobre práticas educativas. A pesquisa envolveu a identificação e seleção de trabalhos que mencionaram, de forma direta ou indireta, a temática do currículo em seus títulos ou resumos. Para isso, utilizou-se um ensaio com algumas fases da metodologia de Análise de Conteúdo (Bardin, 1977), como a pré-análise e a exploração dos cinco trabalhos selecionados dos eventos.

Neste estudo, serão abordadas algumas ideias sobre currículo, os encaminhamentos metodológicos realizados e as considerações finais.

## **2 O Currículo**

O currículo na Educação é basicamente tudo aquilo que a sociedade compreende como sendo algo importante para se estudar e aprender ao longo dos anos escolares. Tem-se várias abordagens sobre currículos que são o currículo tradicional, o currículo crítico e inclusivo e concepções histórico-culturais.

Para Silva (1999), de certo modo, todas as teorias pedagógicas e educacionais são também teorias do currículo, mas destaca que nem toda teoria educacional está relacionada com currículo.

O currículo tradicional é tido como sendo de uma forma neutra, que procura identificar os objetivos educacionais na escola, a fim de formar pessoas especializadas, e proporcionar uma educação geral a todos. Um dos principais representantes desta teoria foi John Franklin Bobbitt, citado por Silva (1999) em seu livro sobre as Teorias de Currículo.

Já o currículo crítico é basicamente tido como um instrumento político e cultural, além de ter como principal objetivo formar cidadãos capazes de compreender e transformar a realidade. Alguns dos principais autores conhecidos sobre a teoria crítica são Paulo Freire, Michael Apple, Henry Giroux, entre outros. O currículo inclusivo defende que todos os estudantes tenham acesso ao conhecimento, respeitando suas diferenças.

E as concepções histórico-culturais são inspiradas em autores como Lev Vygotsky e Dermeval Saviani, onde o currículo não é visto apenas como um conjunto de conteúdos, mas como sendo um processo social e histórico, construindo uma relação entre sociedade, cultura e escola (KATZ, 2009).

Neste sentido, ao se pensar em currículo, destaca-se a relevância de se considerar o desenvolvimento do pensamento lógico no aluno. O pensamento lógico está intrinsecamente ligado ao cotidiano, na forma de se pensar e de se resolver problemas. Mas o que vem a ser esse pensamento lógico? De acordo com a perspectiva de Piaget (1976, apud David, 2022, p. 14), o raciocínio lógico se desenvolve a partir da construção contínua de

esquemas, formados por meio dos processos de assimilação, acomodação e organização. No estágio do pensamento lógico-formal, a lógica passa a considerar não apenas os objetos, mas também as hipóteses. Assim, torna-se possível o raciocínio hipotético-dedutivo, permitindo ao indivíduo elaborar uma lógica formal aplicável a diferentes tipos de conteúdo.

Deste modo, o pensamento lógico vai se formando aos poucos, conforme o desenvolvimento do indivíduo, em que cada nova aprendizagem é armazenada e/ou ajustada ao que já se sabia. Com o tempo o indivíduo passa a se desprender dos pensamentos concretos e começa a ter pensamentos próprios utilizando-se da imaginação.

Pode-se trazer esse conceito para o ensino e a aprendizagem de matemática. O raciocínio lógico, sob a perspectiva matemática, consiste em um processo que organiza o pensamento segundo princípios lógicos, possibilitando a resolução de problemas. Para aplicá-lo corretamente, é necessário que a pessoa desenvolva consciência e habilidade para estruturar suas ideias. Esse tipo de raciocínio é amplamente utilizado na realização de inferências, iniciando-se com uma proposição inicial, passando por etapas intermediárias e culminando em uma conclusão que deve ser consistente e livre de contradições (Saraiva et al., 2018). Dessa forma, pode-se perceber que o ensino de matemática vai muito além de números e cálculos, ele contribui para que o indivíduo desenvolva estratégias de resolução de problemas por meio da lógica e do raciocínio.

Ao se considerar o desenvolvimento do pensamento lógico atrelado ao currículo, destaca-se também uma outra forma de abordagem do currículo, que é envolver o ensino e aprendizagem de modo que a matemática seja observada, como ela está presente em nosso cotidiano. Uma proposta de aproximação surge com a Modelagem Matemática. Em Matemática, os modelos matemáticos são construídos para representar, explicar e prever fenômenos ou situações, funcionam como sistemas conceituais expressos por meio de estruturas matemáticas, com o objetivo de descrever ou interpretar o comportamento de sistemas que nem sempre são matemáticos (Almeida et al, 2014, apud Menezes, 2022, p.2).

Dessa forma, ao pensar a matemática por meio da modelagem, é possível entender de maneira prática como essa disciplina se conecta com outras áreas do conhecimento, sendo possível transformar situações reais em representações matemáticas, como gráficos, tabelas ou equações, tornando mais acessível à análise e a busca por soluções.

Outro ponto relevante e não menos importante, é a abordagem do currículo com relação à inclusão. Desde o início da história, a matemática passou por muitas mudanças e aprimoramentos, e um passo importante foi se pensar a Educação Matemática Inclusiva, um viés da educação que volta o olhar para o ensino de matemática para pessoas com algum tipo de dificuldade ou deficiência, inserindo discussões sobre as tecnologias assistivas, que auxiliam os alunos com necessidades educacionais específicas a realizarem suas atividades.

### 3 Encaminhamentos Metodológicos

Para realizar esta pesquisa de cunho qualitativa, utilizou-se um ensaio de duas fases da metodologia da Análise de Conteúdo de Bardin (1977), a pré-análise e a exploração do *corpus* (conjunto de documentos desta pesquisa). A pré-análise resultou da leitura e seleção dos trabalhos que fariam parte do *corpus*. A exploração surge das várias leituras dos trabalhos e da organização inicial dos dados, com as descrições e análises iniciais.

Foram utilizados os anais dos eventos do EPREM disponíveis no site da SBEM Paraná. Inicialmente, foi digitado o termo “SBEM Paraná” na barra de pesquisa do Google e acessado o site *sbemparana.com*. Em seguida, onde estavam listados todos os eventos da SBEM-PR, foi clicado na aba “Encontro Paranaense de Educação Matemática”. No site do EPREM há várias edições, mas optou-se por selecionar apenas os trabalhos de eventos que possuíam anais de acesso *online*.

Na sequência, na caixa de busca foi digitado, segundo Bardin (1977), o *descriptor* “currículo”. Em cada evento com anais disponíveis, retornaram alguns artigos resultantes. As primeiras leituras foram dos títulos, e depois dos resumos, e o foco foi em trabalhos que tratavam, de alguma forma, do currículo no Ensino Fundamental. Para facilitar, foi atribuído um código para cada trabalho (T) selecionado, como T1, T2, e assim sucessivamente.

O levantamento resultou, do XI EPREM (2013), dois trabalhos T4 e T5. Do XV EPREM (2019), tem-se três trabalhos T1, T2 e T3. Nos eventos do VII EPREM (2011), XIII EPREM (2015), XIV EPREM (2017), XVI EPREM (2022), XVII EPREM (2024), não foram encontrados trabalhos que abordaram o tema “currículo”. Ao entrar na aba do XII EPREM (2014), constatou-se que a página do evento estava indisponível para pesquisa.

Para apresentar essas informações, tem-se o Quadro 1 com os títulos de cada trabalho, autores, ano, evento e o código atribuído.

**Quadro 1: Fontes selecionadas para estudo**

| ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM                                                                                   |                                                                            |      |          |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------|----------|--------|
| TÍTULO                                                                                                                               | AUTOR                                                                      | ANO  | EVENTO   | CÓDIGO |
| Competências E Habilidades A Partir Da Nova Base Nacional Comum Curricular: Uma Análise Do Google Classroom No Ensino De Matemática. | Emilly Gonzales Jolandek, Ana Lúcia Pereira E Luiz Otavio Rodrigues Mendes | 2019 | XV EPREM | T1     |
| Ilustrações Em Margarita Philosophica: um olhar para o currículo educacional e para a Geometria na Idade Média.                      | Igor Cardoso Tonhato, Matheus Vieira do N. Cardoso e Lucieli M. Trivizoli  | 2019 | XV EPREM | T2     |

|                                                                                          |                                                                                               |      |           |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|----|
| Uma Análise Do Tratamento Dado Ao Raciocínio Matemático Em Currículos Nacionais.         | Luís Felipe Gonçalves Carneiro e Eliane Maria de Oliveira Araman                              | 2019 | XV EPREM  | T3 |
| Formação De Professores De Matemática E Inclusão: Um Estudo Das Diretrizes Curriculares. | Joyce Jaqueline Caetano, Leoni Malinoski Fillos, Izabel Passos Bonete e Gilmar Carvalho Cruz. | 2011 | VII EPREM | T4 |
| Modelagem Matemática Na Sala De Aula: A Questão Do Currículo                             | Carlos Roberto Ferreira e Dionísio Burak                                                      | 2011 | VII EPREM | T5 |

**Fonte: Autoras.**

Na sequência, será feita uma descrição de cada trabalho contido no Quadro 1 e algumas considerações que se nomeou de iniciais.

#### **4 Descrições dos Artigos**

A seguir será apresentada uma análise sobre cada um dos artigos, com o intuito de responder à pergunta central da nossa análise e assim, por dizer, retratar o tema estudado fazendo uma possível conexão ao final, sobre os pontos de convergência e divergência de cada perspectiva de abordagem.

O primeiro trabalho (T1) tem como finalidade discutir o currículo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a partir da utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC).

Além disso, o texto traz a definição de currículo como sendo um conjunto de competências e habilidades da BNCC, na qual orientam as práticas educacionais no Brasil, além de também ser uma referência obrigatória para a elaboração de materiais didáticos para ensino e formação de professores. Logo, vale ressaltar que durante a abordagem o texto traz que a BNCC deve estar sempre em reformulação, pois engloba aspectos sociais, políticos e educacionais que se deve levar em consideração.

A partir da abordagem das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, o aluno se tornar protagonista da sua história utilizando as tecnologias digitais como uma ferramenta para sua aprendizagem.

O trabalho apresenta formas de utilização das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) nos anos finais do Ensino Fundamental, em concordância com a BNCC. Destaca-se o uso do Google Classroom para a realização de atividades e como espaço de

interação entre professores e alunos, possibilitando a comunicação e o esclarecimento de dúvidas.

O segundo trabalho analisado (T2), apresenta uma perspectiva e uma abordagem sobre o currículo em um sentido histórico, na qual mostra como o currículo medieval estava sob o controle da Igreja, portanto, voltado à formação moral e religiosa.

O currículo naquela época estava vinculado sob o poder do estado e da Igreja, na qual servia para impor suas formas de aprendizagem, condizentes com a época em que viviam. O autor, por assim dizer, busca revelar que o currículo foi historicamente construído e juntamente a sociedade participava nesta construção.

Logo, o autor compreende que o currículo não é neutro e nem universal, que ele foi construído a partir de interesses políticos, religiosos e culturais de uma sociedade, para sanar as demandas relacionadas à educação.

A análise do terceiro trabalho (T3), não traz uma definição exata sobre currículos, o mesmo traz vários documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a BNCC. Levando isso em consideração, podemos dizer que o trabalho entende subjetivamente que currículo é compreendido através de documentos oficiais do estado. Além disso, é dito que currículo é um referencial normativo que orienta a prática dos docentes em sala de aula, um guia de competências e habilidades na qual olha-se principalmente para as noções de raciocínio matemático ao passar dos anos.

O quarto trabalho (T4), aborda sobre inclusão e Educação Matemática Inclusiva, menciona que inclusão não é fazer apenas com que todos os alunos estudem em uma classe regular de ensino, mas dar aos professores à escola o suporte necessário para ensinar esses alunos. A inclusão deve estar embrenhada na escola, atingindo o currículo e o Projeto Político Pedagógico (PPP). O artigo ainda aponta que os cursos de licenciatura em matemática não possuem disciplinas especializadas para a inclusão, exceto libras. Essa falta de especialização na área da inclusão é preocupante, visto que cada vez mais vemos alunos “inclusos” em nossas salas de aula.

No texto, o currículo aparece ligado às Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), tanto da Educação Básica, quanto da Formação de Professores. Logo, o currículo é subentendido como sendo um instrumento normativo e político, o qual garante o direito à educação de qualidade, respeitando as diferenças dos sujeitos, como sendo um espaço de organização pedagógica, que possui uma metodologia, avaliações e práticas docentes vinculados a uma forma de inclusão e também, como um campo de transformação social, pois visa fazer a inserção dos alunos de uma forma acolhedora. Tendo uma visão geral, T4 não traz que currículo é uma listagem de conteúdo, mas uma forma de envolver os princípios, valores, práticas e políticas para a inclusão de alunos e a formação de professores.

E por fim, o trabalho analisado foi T5, que traz o relato de um curso realizado com professores da Educação Básica sobre modelagem matemática. A intenção era apresentar duas atividades de modelagem matemática para que os professores pudessem ter idealizações para usar em sala. O autor destaca que os professores apresentaram uma forte preocupação com o currículo, pois ele segue uma sequência linear de conteúdos, dificultando a inserção de atividades “extras” que não seguem essa linearidade.

## **5 Considerações Finais**

Depois de realizar a leitura dos cinco artigos, observa-se de modo geral que estes trabalhos manifestam que o currículo vai muito além de um repertório de conteúdo a serem adquiridos, ele representa um ambiente vivo, que passa por decisões, situações e pretensões.

No T5 destaca-se que, o engessamento de um currículo linear é capaz de limitar a criatividade de professores ao planejar suas aulas, e como um possível encaminhamento, sugere-se a utilização da Modelagem Matemática. Em T4 é ressaltado que a inclusão só ocorre de forma real, no momento em que o currículo permite a diversidade e compreende que há distintas formas de aprender.

Já os autores do T2 chamam a atenção para o passado, revelando que lá na Era Medieval, o currículo já manifestava lutas pelo poder, desejos do clero e do governo. Em T3 mostra-se a relevância de que o currículo, além dos conteúdos, precisa destinar a devida importância ao raciocínio matemático. Em T1 tem-se que há a necessidade urgente de implementar as tecnologias digitais no processo de aprendizagem dos estudantes da atualidade.

A relevância da BNCC e das tecnologias digitais no ensino, a inclusão, a importância de considerar diferentes maneiras de possibilitar ao aluno o desenvolvimento do raciocínio matemático, e a urgência em romper a rigidez dos currículos lineares, se mostram destacadas nos trabalhos analisados neste estudo.

A leitura atenta dos cinco artigos selecionados, possibilitou ter um maior entendimento sobre o currículo, buscando respostas para a questão *como o tema currículo é abordado nas edições do EPREM, de 2011 a 2024?* Assim, destaca-se do estudo que o currículo não se restringe apenas a uma lista de conteúdos, mas também se mostra como um ambiente dinâmico, que é transpassado por aspectos sociais, pedagógicos, históricos e políticos. Destaca-se que os estudos históricos demonstram que o currículo esteve sempre vinculado aos interesses culturais e sociais.

Desta forma, o currículo em Educação Matemática necessita ser entendido como uma construção coletiva dos indivíduos presentes na sociedade, que deve abordar a diversidade dos contextos sociais e proporcionar a geração de situações nas quais os alunos

tenham experiências e consigam aprender. Convém aos docentes, pesquisadores e gestores de políticas educacionais, encarar o currículo não somente como um roteiro prescritivo, mas sim como um instrumento de reflexão, inovação e inclusão, que seja capaz de permitir aos alunos desenvolver competências e o pensamento crítico que, ao enfrentar adversidades sociais possam agir com autonomia.

## REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: [https://www.gov.br/mec/pt-br/acesso-a-informacao/media/seb/pdf/d\\_c\\_n\\_educacao\\_basica\\_nova.pdf](https://www.gov.br/mec/pt-br/acesso-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf). Acesso em: 11/09/2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Governo Federal. Base Nacional Curricular Comum (BNCC)**. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 11/09/2025.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAETANO, Joyce Jaqueline; FILLOS, Leoni Malinoski; Bonete, Izabel Passos; Cruz, Gilmar Carvalho. **Formação de professores de Matemática e inclusão: um estudo das diretrizes curriculares. Anais do XI Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM**. Apucarana – PR, 2011.

CARNEIRO, Luís Felipe Gonçalves; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. **Uma análise do tratamento dado ao raciocínio matemático em currículos nacionais. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM**. Ponta Grossa: UTFPR, 2019.

DAVID, Edilson Anacleto. **O raciocínio lógico e suas implicações na resolução de problemas da vida cotidiana**. 2022. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) – Instituto Federal da Paraíba, Campus Cajazeiras, Cajazeiras, 2022.

FERREIRA, Carlos Roberto; BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática na sala de aula: a questão do currículo. In: Encontro Paranaense De Modelagem Em Educação Matemática**, 1., 2004, Londrina. Anais [...]. Londrina: UEL, 2004. p. 1-12.

JOLANDEK, Emily Gonzales; PEREIRA, Ana Lúcia; MENDES, Luiz Otavio Rodrigues. **Competências e habilidades a partir da nova Base Nacional Comum Curricular: uma análise do Google Classroom no ensino de Matemática. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM**. Ponta Grossa: UEPG, 2019.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics: an introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.

MENEZES, Rhomulo Oliveira. **Concepções sobre modelagem matemática: primeiro a prática, depois a teoria. CONEDU - Educação Matemática**. Campina Grande: Realize Editora, 2022. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/91542>. Acesso em: 11/09/2025.

SACRISTÁN, José G. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. 3.ed. Porto Alegre: Penso, 2017. E-book. pág.vii. ISBN 9788584291922. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788584291922/>. Acesso em: 03/08/2025.

SARAIVA, Wemerson Pimentel; SOUSA, Cleiton Veras de; MONTELO, Ana Letícia Barbosa; LEITE, Lusitonia da Silva. **Raciocínio lógico e seu desenvolvimento a partir da lógica matemática**. [S.l.: s.n.], 2018.

SILVA, Tomaz Tadeu da. **Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo**. Belo Horizonte: Autêntica, 1999.

TONHATO, Igor Cardoso; CARDOSO, Matheus Vieira do N.; TRIVIZOLI, Lucieli M. **Ilustrações em Margarita Philosophica: um olhar para o currículo educacional e para a Geometria na Idade Média. Anais do XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM**. Ponta Grossa: UEPG, 2019.

## **TENDÊNCIAS AVALIATIVAS EM MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO COM OS ARTIGOS DO EPREM DE 2011 A 2024**

Bianca Vitoria de Souza Rufino  
Universidade Federal do Paraná -  
UTFPR  
biancavitoriarufino2@gmail.com

Mariana Furlan Tissiani  
Universidade Federal do Paraná -  
UTFPR

Vanessa Largo Andrade  
Universidade Federal do Paraná -  
UTFPR

### **Resumo**

A avaliação é um tema central na Educação Matemática. Neste processo, o professor tem um papel de destaque, atuando na identificação de problemas, no direcionamento de ações e na proposição de soluções para a aprendizagem do aluno. Deste modo este trabalho visa analisar o que os estudos sobre avaliação no Ensino Fundamental abordam sobre o assunto, no evento intitulado Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). Para isso, dez trabalhos do evento foram selecionados, com base em um ensaio com a Metodologia da Análise de Conteúdo. Destas análises, destacam-se que a avaliação não é vista como algo mecânico, mas sim como uma prática dinâmica, que requer do professor envolvimento ativo, reflexão constante para a tomada de decisões embasadas pedagogicamente. Além disso, o professor é visto como pesquisador de sua própria prática, que reflete e busca alternativas para sanar as dificuldades dos alunos.

**Palavras-chave:** Reflexão da Própria Prática. Avaliação em Educação Matemática. Professor como Mediador.

### **1 Introdução**

Um dos temas de pesquisa nos campos da Educação e Educação Matemática é a avaliação da aprendizagem, especialmente no que diz respeito ao ensino de Matemática. A avaliação, muito além de ser um simples mecanismo de atribuição de notas, tem se estabelecido como um processo, que não só revela os resultados alcançados pelos estudantes, mas, acima de tudo, os trajetos que eles percorreram durante a construção do conhecimento. Nesse cenário (Luckesi, 2011) afirma que o docente desempenha um papel fundamental, é ele quem converte a avaliação em um instrumento pedagógico e está apto a identificar problemas, direcionar intervenções e fomentar progressos significativos no processo de aprendizagem.

Nos últimos anos, diversas ideias sobre avaliação têm sido debatidas e reinterpretadas por autores como (Luckesi, 2011) e (Perrenoud, 1999), que argumentam que ela deve ser vista como um processo constante, regulador e formativo, em vez de apenas um veredito final. Essa visão é refletida em várias pesquisas atuais, que destacam a importância de repensar

as práticas de avaliação além da lógica classificatória e somativa, levando em conta também os aspectos éticos, sociais e pedagógicos.

Este estudo contribui para essa discussão tendo como objetivo responder a seguinte questão: *como os trabalhos do EPREM abordam o papel do professor no processo avaliativo?*

O artigo tem como foco examinar artigos selecionados sobre avaliação em Educação Matemática, nos anos finais do Ensino Fundamental, publicados nos Anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). Deste modo, procura-se entender como cada estudo apresenta e debate o papel do professor na condução da avaliação, seja atuando como mediador, pesquisador, crítico de sua própria prática ou articulador de políticas educacionais.

Para a organização deste estudo realizou-se um ensaio da metodologia da Análise de Conteúdo (Bardin, 2004). O *corpus* foi composto por dez artigos que continham o descritor 'Avaliação' em seus títulos e que abordavam o papel do professor no processo avaliativo nos anos finais do Ensino Fundamental.

Portanto, antes de aprofundar na análise do papel do professor em cada pesquisa, apresenta-se as contribuições sobre o tema avaliação de dois estudiosos, Luckesi (2011) e Perrenoud (1999).

## **2 A Avaliação da Aprendizagem**

A avaliação da aprendizagem, como um elemento fundamental na prática educacional, tem ganhado relevância nas discussões atuais na Educação Matemática. Ao contrário de ser vista como um simples ato de medição, a avaliação é entendida como um processo intencional, associado a diferentes concepções de ensino e aprendizado que direcionam tanto as ações do professor quanto a trajetória dos alunos. Essa visão distancia a avaliação de um mero procedimento técnico para posicioná-la como um ato pedagógico (Luckesi, 2011).

Historicamente, a avaliação sempre esteve relacionada ao conceito de mensuração, atuando como um meio de confirmação que visa classificar alunos por meio de notas e rankings de desempenho. Essa visão é contestada por Luckesi (2011), que defende que a avaliação não deve ser vista apenas como um momento de decisão final. Para ele, ela é um recurso auxiliar da prática educativa, um instrumento que busca investigar a qualidade do processo de ensino. Dessa maneira, a avaliação se configura como um diagnóstico, com a finalidade de identificar tanto deficiências quanto progressos, permitindo ao educador intervir para que os objetivos de aprendizagem sejam efetivamente atingidos.

Perrenoud (1999) faz uma distinção importante entre duas lógicas de avaliação: a da excelência e a da regulação das aprendizagens. A primeira atua no sentido da seleção e triagem, legitimando as hierarquias entre os alunos, a segunda, por outro lado, se dedica à

construção do conhecimento. Nesse contexto, a avaliação funciona como uma regulação constante, possibilitando que o docente ajuste sua metodologia de ensino e que o estudante reestruture suas técnicas de estudo em um ciclo contínuo de *feedback* e melhoria contínua. Em outras palavras, a avaliação não deve ser encarada como um veredito, mas como uma chance para compreensão e intervenção.

A reestruturação da avaliação, conforme sugerido pelos autores, requer uma reconsideração de suas formas. Luckesi defende que a avaliação diagnóstica deve ser vista como um ponto de partida. Seu propósito é identificar necessidades e levantar conhecimentos prévios, oferecendo ao docente os subsídios necessários para planejar suas intervenções pedagógicas com mais precisão.

A análise dos instrumentos de avaliação também muda o foco da forma para a intencionalidade. Luckesi e Perrenoud não apresentam listas de técnicas ou ferramentas específicas, mas enfatizam a forma como cada instrumento é empregado. A prova escrita, geralmente ligada à lógica de verificação, pode ser reinterpretada como uma ferramenta de diagnóstico e *feedback*, desde que seja utilizada para entender processos, e não somente resultados.

A fundamentação teórica deste trabalho adota a perspectiva da avaliação como um ato intrinsecamente pedagógico, conforme postulado por autores como Luckesi (2011) e Perrenoud (1999). Nessa abordagem, a avaliação transcende a mera atribuição de notas, sendo ressignificada em diferentes modalidades com propósitos específicos. A avaliação diagnóstica, por exemplo, é concebida por Luckesi (2011) como um ponto de partida crucial para a ação pedagógica, buscando identificar o que o aluno já sabe e suas lacunas iniciais, antes de qualquer intervenção. A partir desse diagnóstico, o professor pode conduzir o processo de ensino de forma mais intencional e direcionada.

Complementarmente, a avaliação formativa, fortemente defendida por Perrenoud (1999) como a regulação das aprendizagens, acontece ao longo de todo o percurso educacional. Seu foco não é o resultado final, mas o processo contínuo de aprendizagem, oferecendo *feedback* constante ao aluno e ao professor para que possam ajustar suas estratégias. Essa modalidade é essencialmente processual, pois acompanha a evolução do estudante de maneira holística e ininterrupta, reconhecendo a construção do conhecimento em cada etapa. Em contraste, a avaliação somativa, tradicionalmente associada ao final de um período letivo para classificar e julgar o desempenho, é vista por ambos os autores de forma crítica, já que sua ênfase na hierarquização e na mensuração pode comprometer o verdadeiro objetivo de uma avaliação a serviço da aprendizagem (Perrenoud, 1999).

Segundo (Perrenoud, 1999), a avaliação regulatória requer ferramentas que possam acompanhar o trajeto de aprendizagem do aluno. Produções escritas, portfólios, participação

em seminários, registros reflexivos e auto avaliações são exemplos de instrumentos que, quando empregados para observar, entender e intervir, estão totalmente alinhados a uma avaliação voltada para o aprendizado.

Assim, a avaliação não pode ser simplificada a uma prática puramente técnica. Ela abrange uma dimensão social e ética, uma vez que suas repercussões vão além da sala de aula, impactando a autoestima dos alunos e exercendo uma influência direta em sua trajetória escolar. Nesse contexto, é essencial entender que avaliar também é um ato de inclusão ou exclusão, de reconhecimento ou de invisibilização das aprendizagens. Ao adotar uma abordagem diagnóstica e formativa, o educador utiliza a avaliação como ferramenta para a aprendizagem, promovendo práticas mais justas e equitativas (Luckesi, 2011).

É importante ressaltar que o aluno não é apenas objeto da avaliação, mas também agente ativo dela. Processos como a autoavaliação e a coavaliação<sup>1</sup> incentivam a reflexão crítica e a autonomia, possibilitando que o estudante desenvolva consciência acerca de suas conquistas e desafios.

### **3 Encaminhamentos Metodológicos**

Para este estudo, realizou um ensaio da metodologia da Análise de Conteúdo (AC), de Laurence Bardin (2004). Esta metodologia de análise de dados qualitativos, perpassa por algumas fases, tais como a pré-análise e a exploração dos dados.

A seleção dos trabalhos que compõem esta pesquisa teve como ponto de partida a busca por artigos científicos no site oficial do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). Utilizando a palavra-chave "avali" abrangendo termos como "avaliação" e "avaliativo", identificamos um total de 24 artigos publicados em diversas edições do evento nas quais os anais estão disponíveis para acesso (VII, XI, XII, XIV, XV, XVI e XVII), com exceção do EPREM de 2012, cujos arquivos não puderam ser acessados por erro do sistema.

Após a coleta inicial, o material passou por um processo de seleção ou pré-análise. Primeiramente, realizou-se uma leitura dos títulos para excluir os trabalhos que abordavam o Ensino Médio, restringindo o foco nos anos finais do Ensino Fundamental. Em seguida, procedeu-se a leitura dos resumos, o que permitiu refinar a seleção e eliminar os artigos que não se alinhavam diretamente ao tema. Neste estudo apresentam-se relatos de experiências (RE) e comunicações científicas (CC), os minicursos não foram considerados por não apresentarem as mesmas características das RE e das CC.

Para organizar melhor essas informações, foi organizada uma planilha que reúne os principais dados de cada trabalho, tais como título, ano, instrumentos de avaliação, entre

---

<sup>1</sup> processo no qual os alunos avaliam o trabalho e o desempenho uns dos outros.

outros, apresentada no formato do Quadro 1, onde se tem incluído um código que contém a letra T de trabalho e o número 01, por exemplo, para indicar o trabalho de número um. O código auxiliará nas análises futuras do *corpus* – conjunto dos documentos a serem analisados ou explorados (Bardin, 2004).

Deste modo, no Quadro 1, apresenta-se apenas aqueles trabalhos cujo foco principal está na avaliação com ênfase no professor, destaca-se que na fase de exploração dos dados, observou-se que, embora tragam olhares distintos sobre a avaliação, apresentam o ponto em comum, todos destacam o professor como figura central nesse processo. Sendo assim, se chegou a um *corpus* composto por dez artigos.

**Quadro 1** – Informações sobre os trabalhos escolhidos

| <b>Código</b> | <b>Título</b>                                                                                               | <b>Ano</b> | <b>Foco Principal</b>                                     | <b>Modalidade s de Avaliação</b> | <b>Instrumentos de Avaliação</b>                    |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| T01           | A Autoavaliação Escolar: Um Estudo                                                                          | 2024       | O estudante, o conceito de autoavaliação e seu uso.       | Formativa                        | Autoavaliação e instrumentos do professor.          |
| T02           | Uma Análise de Trabalhos Publicados em Anais do XIV e XV EPREM Que Abordam Avaliação no Âmbito Escolar      | 2022       | Análise de trabalhos científicos sobre avaliação.         | Não específica modalidades.      | Análise de finalidades e instrumentos de avaliação. |
| T03           | A Avaliação da Aprendizagem Matemática a partir de Pareceres Descritivos em uma Escola Itinerante do Paraná | 2022       | O estudante e a avaliação em um contexto específico.      | Processual                       | Pareceres Descritivos, Caderno de Acompanhamento.   |
| T04           | A Análise da Produção Escrita: Um Recurso para uma Prática de Avaliação da Aprendizagem                     | 2017       | A relação professor-instrumento e a análise de produções. | Não específica modalidades.      | Análise da produção escrita, Prova em Fases.        |
| T05           | Análise sobre o Uso dos Resultados de Avaliações Externas por Professores de Matemática                     | 2019       | O professor e o uso de avaliações em sua prática.         | Diagnóstica                      | Avaliações externas, questionários.                 |

|     |                                                                                                           |      |                                                                  |                                     |                                                              |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| T06 | Prova em Fases e a Intervenções Escritas: Recursos para uma Prática Avaliativa para Além da Valoração     | 2019 | A relação entre professor e aluno no processo de avaliação.      | Formativa                           | Prova escrita em fases, intervenções escritas e orais.       |
| T07 | Avaliação Diagnóstica no 6º Ano: O que Ela Mostra em Relação aos Conteúdos Matemáticos                    | 2019 | O estudante, com foco nas defasagens de aprendizagem.            | Diagnóstica                         | Avaliação diagnóstica.                                       |
| T08 | Um Estudo Sobre a Confiabilidade da Avaliação em Matemática                                               | 2019 | A confiabilidade da avaliação, com foco nos vieses do professor. | Somativa                            | Testes, provas, exames individuais, escritos e sem consulta. |
| T09 | Avaliação em Modelagem Matemática: Uma Revisão no Portal de Periódicos da Capes no Período de 2012 a 2021 | 2022 | O campo de pesquisa da avaliação em Modelagem Matemática.        | Não específica modalidades.         | Revisão da literatura sobre instrumentos de avaliação.       |
| T10 | Avaliação em Matemática: Uma Análise de Como é Conduzida no Município de Canoas – RS                      | 2022 | O processo de avaliação nos anos finais do Ensino Fundamental.   | Processual, Diagnóstica e Formativa | Análise de documentos escolares.                             |

Fonte: Os autores (2025)

Apresentam-se na sequência, as descrições dos dez trabalhos, e algumas considerações a respeito.

#### 4 Descrições dos Trabalhos

O primeiro estudo T01 explorou a autoavaliação como uma tática essencial para a avaliação formativa. Com uma abordagem qualitativa, o estudo busca examinar o conceito de autoavaliação através da literatura existente e entender como ela pode ser aplicada no ambiente escolar. A pesquisa descreve a autoavaliação como um procedimento cognitivo, reflexivo e pessoal, onde o aluno se auto avalia, oportunizando a autorregulação da aprendizagem, junto com a intervenção do professor, para com que se torne mais eficiente.

O T02 tem com objetivo de pesquisa organizar e analisar os trabalhos sobre avaliação já divulgados em edições passadas do EPREM. Através da análise de conteúdo, a autora identificou duas áreas temáticas centrais: os objetivos da avaliação e os instrumentos utilizados. O artigo reforça a ideia de que a avaliação deve servir de base para o desenvolvimento de uma ação visando um resultado almejado. Resumidamente, o trabalho oferece um panorama atualizado das pesquisas sobre o tema, sinalizando a necessidade de aprofundar as discussões e investigações sobre os diversos aspectos relacionados à avaliação.

O trabalho T03 traz a avaliação em um contexto educacional bastante singular: as escolas móveis do Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra (MST). A pesquisa busca entender como é feito o processo de avaliação da aprendizagem de Matemática através dos Pareceres Descritivos junto com um Caderno de Acompanhamento, um instrumento que se distancia do modelo tradicional de notas. O artigo conclui que os registros feitos pelos professores nos cadernos de acompanhamento e nos pareceres indicam uma avaliação mais voltada para a aprendizagem, ao invés de um caráter somativo e classificatório. Contudo, a pesquisa também aponta uma fragilidade em alguns registros que foram realizados de forma superficial ou pouco individualizada.

O estudo T04 concentra-se nas potencialidades de uma prova escrita quando utilizada como ferramenta de investigação. O foco não está na nota, mas em como a análise da produção escrita dos alunos pode auxiliar o professor a identificar dificuldades e, a partir daí, planejar intervenções pedagógicas. O estudo propõe a Prova em Fases, que atribui um novo significado ao instrumento tradicional de prova, transformando-o em um recurso que oferece informações valiosas para as escolhas didáticas do professor. O artigo critica a prática comum de restringir a avaliação à verificação de acertos e erros, que ignora a "oportunidade de compreender as habilidades já desenvolvidas pelos alunos ou a aprendizagem em cada etapa do processo". O texto finaliza falando sobre a importância do professor como agente ativo no processo avaliativo, utilizando as informações coletadas para redirecionar sua prática e para auxiliar o aluno a regular seu próprio aprendizado.

Já no artigo T05 é examinado de que forma os docentes empregam os dados das avaliações externas para organizar suas aulas. A pesquisa, com foco qualitativo e utilizando estudo de caso, demonstra que os professores veem as avaliações externas como uma ferramenta de diagnóstico valiosa. A pesquisa, contudo, expõe uma dificuldade: mesmo estando cientes dos resultados, os professores enfrentam obstáculos na administração do tempo e na seleção de métodos para revisar os temas que os alunos ainda não assimilaram. O estudo é fundamental, pois oferece uma perspectiva sobre a avaliação em grande escala, evidenciando que sua finalidade pode ser transformada em um recurso para o planejamento pedagógico na sala de aula, mesmo que sua execução prática apresente percalços.

O artigo T06 apresenta uma perspectiva bem original sobre a avaliação. A pesquisa, questiona a visão normal da prova como apenas uma ferramenta de medição de desempenho. A principal ênfase está no uso da avaliação formativa, que é concretizada por meio de uma

prova escrita dividida em fases, transformando o ato de avaliar em uma conversa individualizada entre professor e aluno, o que torna o estudo interessante é a maneira como a professora usa essa ferramenta. Em vez de só marcar erros e dar notas, ela anota e comenta nas provas dos alunos criando um diálogo individual, essa técnica ajuda a professora a entender a lógica do aluno e o aluno, por sua vez, pensa sobre seus erros e ajusta seu aprendizado. O artigo mostra que a prova pode ser uma ferramenta de ensino e avaliação, combinando com a ideia de Perrenoud sobre a "regulação das aprendizagens" onde cada informação leva a uma decisão pedagógica que ajuda o aluno.

No T07 há sugestão de se ver a avaliação não só como uma medição de desempenho, mas como um guia pro trabalho do professor. O foco foi analisar a adaptação dos alunos do 5º para a 6ª ano do Ensino Fundamental, uma etapa que muitas vezes, traz atrasos no aprendizado, por meio de uma avaliação diagnóstica. Deste modo, verificaram o que os alunos já sabiam e onde tinham as defasagens. A análise mostrou que estudantes do 6º ano tinham dificuldades em matérias como Geometria Plana e Grandezas e Medidas. O artigo mostrou como a avaliação diagnóstica ajuda o professor. Com ela, o professor observa onde os alunos precisam de mais ajuda, criando aulas focadas nos pontos críticos.

O T08 analisa a avaliação de maneira investigativa, do ponto de vista da epistemologia. Eles colocam em dúvida se a avaliação é só para medir as coisas, de maneira totalmente objetiva. Os autores sugerem que a avaliação é parecida com uma "leitura" ou interpretação do progresso do aluno, em contraste com a visão normal de buscar quantificações precisas, e sem influências individuais. A pesquisa foca nos erros dos professores ao corrigirem as avaliações abertas. Através de descobertas de estudos anteriores, o trabalho revela que a mesma avaliação pode ganhar notas muito diferentes de avaliadores diferentes. Essa "mudança nas notas" é culpa dos vieses na correção, que prejudicam a precisão e a credibilidade da ferramenta de avaliação. Ou seja, a perspectiva do avaliador pode afetar diretamente o resultado, prejudicando a equidade do processo e intensificando as críticas à filosofia da avaliação somativa, utilizando testes individuais e escritos. Para lidar com essa falta de confiança, os autores sugerem a "dupla diversificação dos instrumentos de avaliação, tanto em quantidade quanto no formato". Isso quer dizer que os professores devem utilizar vários métodos de avaliação (além das provas) para conseguir uma visão maior do aprendizado do aluno, garantindo um resultado mais justo e significativo.

No estudo T09 os autores focaram numa metodologia que, no lugar de um estudo prático, o trabalho é uma revisão literária que junta o saber da avaliação em Modelagem Matemática. O objetivo maior era dar um retrato do que foi publicado em português sobre isso, naquele período e na base de dados. A relevância do T9 está em olhar a avaliação por um jeito de ensinar que usa a matemática na vida real. O que o estudo indica que faltam pesquisas

em como avaliar a Modelagem Matemática no Brasil, mostrando uma falha na literatura e um ótimo campo para futuras pesquisas. Ao pontuar essa falha, o artigo impulsiona a investigação, mostrando a urgência de desenvolver métodos avaliativos adequados às peculiaridades dessa abordagem, incluindo criatividade, colaboração, e o manejo da matemática em cenários inéditos.

E finalmente, o T10 propõe uma visão completa da avaliação. O estudo explora os pilares teóricos e diretrizes formais que moldam o processo avaliativo a nível municipal. A análise baseou-se em documentos oficiais tipo Plano Político Pedagógico (PPP) e o Regimento Escolar, assim como referenciais curriculares municipais e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

#### **4.1 Algumas Considerações**

Em cada um dos estudos analisados, o professor se destaca como figura essencial e principal responsável pela ação educativa. A avaliação, sob a perspectiva contemporânea demonstrada nos artigos, não é vista como algo puramente mecânico ou burocrático, mas sim como uma prática dinâmica, que requer do professor envolvimento ativo, reflexão constante e decisões pedagógicas bem embasadas.

Nos estudos T04, T05 e T07, o professor é apresentado como alguém que pesquisa sua própria prática e planeja as abordagens de ensino. A avaliação surge como um meio para entender as dificuldades dos alunos e, a partir disso, criar intervenções pedagógicas mais eficazes e personalizadas. Já nos artigos T01, T03 e T06, o professor age como mediador e facilitador do aprendizado: ele não apenas avalia, mas também interage com os alunos, incentivando-os a refletir sobre o que fazem e a se envolver em processos de autoavaliação, tornando-se protagonistas de sua trajetória. Nos trabalhos T08 e T09, o professor é visto como alguém que reflete criticamente, capaz de questionar as ferramentas e métodos de avaliação que utiliza, reconhecendo suas limitações e buscando melhorias contínuas. Nessas pesquisas, a subjetividade e a necessidade de instrumentos mais adequados às características do ensino, como na Modelagem Matemática, são preocupações centrais.

Ao analisar as formas de avaliação discutidas, percebe-se que a processual se sobressai à somativa, sendo valorizada por sua capacidade de acompanhar o aprendizado de maneira contínua. A avaliação diagnóstica, enfatizada nos trabalhos T07 e T05, é considerada fundamental para identificar dificuldades, principalmente nas transições entre etapas escolares, permitindo ao professor planejar de forma mais direcionada. A avaliação formativa, presente em T01, T03 e T06, é vista como essencial na maioria dos estudos, pois ajuda o aluno a regular seu próprio aprendizado, indo além da simples atribuição de notas. A somativa, por sua vez, é criticada, principalmente no artigo T08, que questiona sua

confiabilidade devido a possíveis erros na correção. No entanto, o debate não sugere que ela seja abandonada, mas sim que seu uso seja diversificado, integrando-a a outras práticas.

Quanto aos instrumentos, observa-se tanto a reinvenção de modelos tradicionais quanto a proposta de novas ferramentas. A prova escrita, por exemplo, nos artigos T04 e T06, é utilizada de forma inovadora, como um espaço para analisar as produções dos alunos e promover o diálogo pedagógico, por meio de intervenções escritas e orais. As avaliações externas, discutidas em T05, são consideradas importantes para o professor ter um panorama geral, mesmo com o desafio de transformá-las em ações efetivas. Já os pareceres descritivos e a autoavaliação, abordados em T03 e T01, surgem como alternativas valiosas ao modelo baseado apenas em notas, permitindo uma compreensão mais ampla e detalhada do processo de aprendizado.

O estudo T09 destaca que ainda se necessitam de pesquisas sobre avaliação em Modelagem Matemática, evidenciando a urgência de ferramentas que englobam aspectos como originalidade e trabalho em equipe, que escapam aos métodos usuais. Já o texto T08 levanta a questão da pessoalidade (ou subjetividade) na avaliação, principalmente na somativa, mostrando que mesmo na Matemática, a atuação do professor envolve interpretações que demandam cuidado para assegurar imparcialidade e igualdade.

Em resumo, o papel do docente se destaca como central: ele é quem conduz o diagnóstico das dificuldades (T07, T05), atua como mediador no processo de aprender (T06, T01, T03), reflete criticamente sobre suas próprias práticas (T08, T09, T02) e garante que sua atuação esteja em sintonia com as orientações institucionais (T10). Em outras palavras, a avaliação só ganha sentido quando articulada à ação pedagógica do professor.

Tem-se ainda que os artigos demonstram um distanciamento dos métodos tradicionais, juntamente com iniciativas para adaptar ferramentas e desenvolver novas estratégias. Nesse contexto, o professor se firma como um propulsor de mudanças, incumbido não só de dar notas, mas de estimular avaliações que impulsionam o aprendizado, o pensamento crítico e a independência dos alunos.

## **5 Considerações Finais**

A avaliação da aprendizagem, quando considerada um processo investigativo, permite ao professor tomar decisões pedagógicas mais eficazes para sua atuação em sala de aula, e também se mostra como um recurso para o professor investigar, intervir e apoiar o desenvolvimento de seus alunos.

Nesse contexto, se propôs a seguinte questão para este estudo: *como os trabalhos do EPREM abordam o papel do professor no processo avaliativo?* Os estudos de algumas edições do EPREM voltados ao Ensino Fundamental, demonstram que a avaliação

diagnóstica pode ser uma ferramenta interessante para identificar defasagens e planejar estratégias de apoio em sala de aula. Há o destaque para as práticas que estimulam a autonomia do estudante, como a prova em fases e a autoavaliação, transformando o aluno em participante ativo de sua própria aprendizagem

A avaliação é uma prática complexa, que exige do professor um olhar investigativo, crítico e reflexivo. Na Educação Matemática, essa complexidade pode ser ainda maior, pois avaliar envolve não somente a verificação da correção dos resultados, mas também a compreensão dos modos de pensar, das estratégias de resolução, dos erros como parte do processo de aprendizagem e da habilidade de argumentar matematicamente.

Destaca-se a importância de práticas avaliativas que valorizem tanto o processo quanto o produto, e do professor se apresentar como pesquisador da própria prática, mediador e agente de transformação, tornando o processo de educar mais justo e inclusivo.

## REFERÊNCIAS

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Lisboa; Edições 70, 2004.

GARDIN, Francielle Silva. Uma análise de trabalhos publicados em anais do XIV e XV EPREM que abordam avaliação no âmbito escolar. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2023, Campo Mourão. *Anais eletrônicos* [...]. Campo Mourão: SBEM-PR, 2023. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/anais/547986.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

LEONARDO, Maria Eliza Sitolino. Análise sobre o uso dos resultados de avaliações externas por professores de matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2021, Curitiba. *Anais eletrônicos* [...]. Curitiba: SBEM-PR, 2021. p. 709. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxv/anais/p709.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem na escola*. Salvador: IRSAS, 2013. Disponível em: [https://irsas.cascavel.pr.gov.br/arquivos/23122013\\_cipriano\\_carlos\\_luckesi\\_-\\_avaliacao\\_da\\_aprendizagem\\_na\\_escola.pdf](https://irsas.cascavel.pr.gov.br/arquivos/23122013_cipriano_carlos_luckesi_-_avaliacao_da_aprendizagem_na_escola.pdf). Acesso em: 7 set. 2025.

NASSER, Lilian. Um estudo sobre a confiabilidade da avaliação em matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2021, Curitiba. *Anais eletrônicos* [...]. Curitiba: SBEM-PR, 2021. p. 780. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxv/anais/p780.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

OLIVEIRA, Miguel Dancini. A autoavaliação escolar: um estudo. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2024, Cascavel. *Anais eletrônicos* [...]. Cascavel: SBEM-PR, 2024. p. 371. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvii/anais/p371.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

PEREIRA, Celia Alves. Prova em fases e as intervenções escritas: recursos para uma prática avaliativa para além da valoração. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2021, Curitiba. *Anais eletrônicos* [...]. Curitiba: SBEM-PR, 2021. p. 703. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxv/anais/p703.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

PERRENOUD, Philippe. *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens – entre duas lógicas*. Porto Alegre: Artmed, 1999. Disponível em: <https://share.google/k8DVbSJtbyzDtJkKX>. Acesso em: 7 set. 2025.

PONCIANO, Tiago Antunes. A análise da produção escrita: um recurso para uma prática de avaliação da aprendizagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2019, Francisco Beltrão. *Anais eletrônicos* [...]. Francisco Beltrão: SBEM-PR, 2019. p. 876. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxiv/anais/p876.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

SANTOS, Jader Gustavo de Campos. A avaliação da aprendizagem matemática a partir de pareceres descritivos em uma escola itinerante do Paraná. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2023, Campo Mourão. *Anais eletrônicos* [...]. Campo Mourão: SBEM-PR, 2023. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/anais/542245.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

SILVA, Joice Conceição da. Avaliação em matemática: uma análise de como é conduzida no município de Canoas - RS. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2023, Campo Mourão. *Anais eletrônicos* [...]. Campo Mourão: SBEM-PR, 2023. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/anais/545539.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

SILVEIRA, Bianca Nóra da. Avaliação em modelagem matemática: uma revisão no portal de periódicos da CAPES no período de 2012 a 2021. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2023, Campo Mourão. *Anais eletrônicos* [...]. Campo Mourão: SBEM-PR, 2023. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/anais/547120.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

SOUZA HUF, Viviane Barbosa de. Avaliação diagnóstica no 6º Ano: o que ela mostra em relação aos conteúdos matemáticos. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2021, Curitiba. *Anais eletrônicos* [...]. Curitiba: SBEM-PR, 2021. p. 683. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxv/anais/p683.pdf>. Acesso em: 7 set. 2025.

---

## PROVA-ESCRITA-EM-FASES: ESTUDO E APRENDIZAGEM SUBSIDIADOS PELA AVALIAÇÃO

Deize Regina Poloni

Instituição: Unioeste/Cascavel

e-mail: de-poloni@hotmail.com

Andréia Büttner Ciani

Instituição: Unioeste/Cascavel

e-mail: andreia.ciani@unioeste.br

### Resumo

Este artigo aborda parte de uma pesquisa sobre a utilização de um instrumento de avaliação de matemática desenvolvida no mestrado, de abordagem qualitativa. O objetivo é identificar indícios de estudo a partir da aplicação da Prova-Escrita-em-Fases em aulas de Matemática. A Prova-Escrita-em-Fases se constitui em um instrumento avaliativo que permite ao aluno revisitar sua produção escrita em diferentes etapas, considerando intervenções realizadas pela professora. O estudo foi desenvolvido com uma turma de 8º ano de uma escola pública estadual do Paraná, composta por 30 alunos, e envolveu seis fases de uma prova com dez questões. Este artigo aborda a resolução de um aluno, na qual foram observadas mudanças nas estratégias e nas formas de resolução, em consonância com os enunciados e as intervenções realizadas, caracterizando indícios de estudo. As intervenções, conduzidas de modo individualizado, tiveram como propósito incentivar a reflexão, o engajamento com os conteúdos matemáticos e a compreensão das questões. Os resultados trouxeram indícios de que a Prova-Escrita-em-Fases pode configurar-se como um instrumento que incentiva e favorece tanto os estudos do aluno quanto um olhar mais atento do professor sobre os processos de aprendizagem desse aluno.

**Palavras-chave:** Avaliação Formativa; Intervenções; *Feedback*; Estudar; Estudo de Matemática.

### 1 Introdução

Na educação escolar, a avaliação costuma ser associada à atribuição de notas, funcionando como instrumento de julgamento, categorização e certificação. Esta pesquisa, porém, a entende como oportunidade de aprendizagem, tornando-a um processo enriquecedor para alunos e professores. Nessa perspectiva, a avaliação não apenas evidencia dificuldades, mas também revela conhecimentos, oferece *feedback* e subsidia o desenvolvimento do ensino da aprendizagem e do estudo.

A problemática surgiu quando a pesquisadora, adotando a perspectiva da avaliação como oportunidade de aprendizagem, buscava instrumentos avaliativos que a concretizassem e que fizessem com que os alunos estudassem. A autora quis estudar e trabalhar com o instrumento Prova-Escrita-em-Fases. Mas como identificar a aprendizagem ou garanti-la? Em discussões com o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPEMA), vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, atua no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Suas principais atividades envolvem a investigação no campo da Educação Matemática e da Avaliação, além da formação de pesquisadores na área, nos níveis de Mestrado e Doutorado. A líder do grupo questionou a autora da dissertação sobre o motivo de querer utilizar o instrumento Prova-Escrita-em-Fases e a resposta da autora foi que ela queria algo que colocasse os alunos para estudar. Tal instrumento se constitui em uma prova escrita na qual o aluno recebe a prova escrita mais de uma vez, sendo que cada vez se constitui em uma fase. O GEPEMA validou a ideia de se investigar e trazer à tona indícios de estudo dos alunos, uma vez que essa era a vontade da professora e pesquisadora. E de que forma tais indícios de estudo podem ser manifestados? Tomou-se a decisão de que seria por meio da produção escrita dos estudantes.

A Prova-Escrita-em-Fases pode proporcionar aos alunos a oportunidade de revisitar o conteúdo e estudar, em um momento de maior tranquilidade, em suas casas, na biblioteca ou no laboratório de informática, após terem contato com a primeira fase da prova. Cada fase possui características próprias, que podem se assemelhar ou não às de uma prova escrita tradicional.

Acredita-se que, por meio das intervenções da pesquisadora, ao longo das fases subsequentes, os estudantes apresentarão indícios de seus estudos em suas produções escritas.

Dessa forma, esta investigação tem como objetivo geral identificar indícios de estudo que emergem do desenvolvimento de uma Prova-Escrita-em-Fases em aulas de matemática no 8º ano. Mais especificamente o que se quer é:

- Analisar a produção escrita dos estudantes em cada fase a fim de identificar indícios de estudo.
- Identificar e analisar mudanças nas produções escritas dos estudantes entre fases.

Consideramos como indícios de estudo dos alunos as reações, expressas por meio de suas produções escritas e as modificações nestas, coerentes com os enunciados das questões e com as intervenções feitas pela pesquisadora, em cada fase.

A aprendizagem pode decorrer a partir de diversas atitudes e ações sendo que uma delas é a ação de estudar. O ato de estudar desempenha um papel essencial no

desenvolvimento cognitivo e na formação do indivíduo. Como ressalta Freire (1997), em uma de suas cartas aos professores, esse processo é essencial para a construção do sujeito enquanto.

[...] preparação do sujeito para aprender, estudar é, em primeiro lugar, um que - fazer crítico, criador, recriador, não importa que eu nele me engaje através da leitura de um texto que trata ou discute um certo conteúdo que me foi proposto pela escola ou se o realizo partindo de uma reflexão crítica sobre um certo acontecimento social ou natural e que, como necessidade da própria reflexão, me conduz à leitura de textos que minha curiosidade e minha experiência intelectual me sugerem ou que me são sugeridos por outros (Freire, 1997, p. 20).

A Prova-Escrita-em-Fases permite aliar a ideia de avaliação como oportunidade de aprendizagem a um instrumento de avaliação e estudo. Constitui-se, assim, a perspectiva de que as ações avaliativas revelam alguns conhecimentos e, principalmente, indicam formas para o professor introduzir o que ainda precisa ser estudado.

De acordo com Hadji (2001, p. 15), em seu livro “A avaliação desmistificada”, o processo avaliativo é tido como uma prática de investigação na qual se defende a avaliação formativa como uma “Utopia Promissora”. Para este autor, a avaliação se situa no centro da ação de formação e seu principal papel é uma sistematização da atividade de ensino,

[...] na escola, deve-se pôr a avaliação a serviço das aprendizagens o máximo possível. Na verdade, aqueles que acreditam na necessidade de uma avaliação formativa afirmam a pertinência do princípio segundo o qual uma prática – avaliar - deve tornar-se a auxiliar da outra - aprender. (Hadji, 2001, p. 15).

Sendo assim, a avaliação necessita ir além da mera atribuição de notas, buscando compreender o progresso e o desenvolvimento individual de cada aluno.

## **2 Metodologia**

Esta pesquisa tem caráter qualitativo e de acordo com Bodgan e Biklen (1982), citados por Lüdke e André (2018), cinco características básicas desse tipo de pesquisa são:

- 1º A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
- 2º Os dados coletados são predominantemente descritivos.
- 3º A preocupação com o processo é muito maior do que o produto.
- 4º O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador.
- 5º A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo (Lüdke; André, 2018, p. 12-14).

Tendo em vista que a pesquisa qualitativa é um tipo de pesquisa que se preocupa em ampliar a compreensão dos fenômenos estudados por meio da análise de dados descritivos,

ela visa aprofundar percepções e oferecer uma compreensão contextualizada dos fenômenos em estudo.

A pesquisa foi realizada em uma turma de 8º ano de uma escola da rede estadual do Paraná, com início em 14 de agosto de 2024, na fase final do segundo trimestre letivo. A turma era composta por 30 alunos do período vespertino. Para este trabalho, será apresentada a resolução de uma aluna específica como forma de exemplificar a análise realizada.

A pesquisa foi aprovada pelo comitê de ética da Unioeste e contou com autorização da equipe diretiva da escola estadual do Paraná. O TCLE foi encaminhado e assinado por todos os responsáveis, permitindo a participação dos 30 alunos. A Prova-Escrita-em-Fases continha 10 questões de matemática, resolvidas inicialmente sem consulta, e, nas fases seguintes, foram realizadas intervenções individualizadas.

### **3 Referencial Teórico**

A Prova-Escrita-em-Fases é uma versão inspirada na Prova em Duas Fases, que foi concebida por Jan de Lange em 1987. A Prova-Escrita-em-Fases é um instrumento de avaliação, conduzida em etapas individuais na sala de aula, sem consulta a materiais. O professor fornece um conjunto de questões na primeira fase, analisa as resoluções e respostas e faz intervenções escritas, evitando fazer juízo de valor e sem focar nos erros e acertos, mas sim em compreender e questionar o caminho de resolução até a chegada na resposta.

Jan de Lange (1987), sobre o desenvolvimento de tarefas ou provas, ressalta que os

[...] testes devem melhorar a aprendizagem. Os testes devem permitir aos candidatos demonstrarem o que sabem (testes positivos). Os testes devem operacionalizar os objetivos do currículo de Matemática. A qualidade dos testes não é medida em primeiro lugar pela acessibilidade à pontuação dos objetivos. Os testes devem enquadrar-se na prática escolar habitual (De Lange, 1987, p. 183).

Diante dessa perspectiva, as provas devem se configurar em instrumentos que têm o potencial de auxiliar a aprendizagem dos alunos e permitir ao professor identificar aspectos que possam ser reconfigurados,

[...] visto que a Prova-escrita-em-fases é um instrumento aplicável de acordo com as adaptações no planejamento inicial e no replanejamento entre as fases da prova, sendo assim, completamente adaptável. Tal ação, a de replanejar o instrumento ou adotar diferentes práticas (tanto do professor quanto do aluno), torna-se possível durante a realização das diferentes fases da prova, visto que entre elas, existe um tempo em que os envolvidos podem repensar as ações anteriores. Observou-se nesta pesquisa que, o replanejamento do processo avaliativo durante a utilização de uma Prova-escrita-em-fases é um fator recorrente. A ação de planejar e replanejar, assim como as fases do instrumento que permitem a dinamização do processo avaliativo (Trombini, 2024, p. 51).

Uma maneira, por exemplo, de lidar com possíveis dificuldades está relacionada aos instrumentos utilizados para isso. Segundo Hadji (1994), é importante que o professor conheça diversos instrumentos e saiba utilizá-los.

[...] Assim, a construção de um dispositivo pertinente é um trabalho que ultrapassa largamente a simples preparação “técnica” de procedimentos. É preciso não somente dispor de uma panóplia de instrumentos e de utensílios suficientemente ricos, mas ainda possuir o saber-fazer que permita utilizar o instrumento certo, no momento certo, para realizar a intenção da melhor forma, quer dizer, produzir informações úteis para conhecer, julgar ou interpretar, para regular a ação ou preparar as decisões: para nos podermos pronunciar sobre a realidade “julgada” é fazer o ponto da situação de forma eficaz. É por isso que este saber-fazer é mais que um estrito saber-fazer que põe em jogo um saber-analisar (projetos) ou saber-explicitar (intenções) (Hadji, 1994, p. 159).

Dessa forma, o “saber-fazer” alinha-se às discussões conduzidas pelo GEPEMA, que vão além da mera execução de tarefas técnicas; exigem análise e explicitação das ações realizadas para uma avaliação eficaz da situação.

Um dos instrumentos de avaliação que possa atender o escopo de uma avaliação como oportunidade de aprendizagem também a partir da análise da produção escrita, possa contribuir na identificação de indícios de estudo é a Prova-Escrita-em-Fases.

Jan de Lange destaca que esta prova sintetiza as vantagens de uma prova escrita que contempla os cinco princípios que ele delineou para a elaboração de avaliações. Esses princípios são:

**1º Princípio.** Os testes devem melhorar a aprendizagem **2º Princípio.** Os testes devem permitir aos candidatos demonstrarem o que sabem (testes positivos) **3º Princípio.** Os testes devem operacionalizar os objetivos do currículo de Matemática **4º Princípio.** A qualidade dos testes não é medida em primeiro lugar pela acessibilidade à pontuação dos objetivos **5º Princípio.** Os testes devem enquadrar-se na prática escolar habitual (De Lange, 1987, p. 183).

Em conjunto, esses princípios destacam a importância de que a Prova-Escrita-em-Fases ser mais do que simples instrumento de avaliação, mas sim ferramenta que promova a aprendizagem, alinhada com os objetivos educacionais e contextos de ensino, para Pires e Buriasco (2017, p. 478) esse formato de avaliação pode oportunizar ao aluno

[...] estabelecer um processo de comunicação por escrito: ao explicar o que fez, pode, ao mesmo tempo, mostrar o que compreendeu das considerações feitas pelo formador; refletir sobre sua resposta inicial procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio, podendo descrever e explicar o que fez; desenvolver a resolução feita inicialmente.

De Lange (1987) e Buriasco (2000) destacam a avaliação como oportunidade de aprendizagem. Assim, a Prova-Escrita-em-Fases é entendida não como um fim, mas como

ferramenta para orientar o processo, permitindo ao aluno revisitar e aprimorar suas produções. O quadro 01 reúne considerações do GEPEMA sobre essa prática.

**Quadro 01** - Considerações do GEPEMA acerca da Prova-Escrita-em-Fases

|                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Trevisan (2013, p. 137) | Na tentativa de encontrar um “equilíbrio” entre a avaliação considerada “ideal” e a avaliação que ocorre na prática, percebo que cada aplicação da prova em fases representa uma oportunidade de aprendizado. A cada experiência, surgem novos elementos que contribuem tanto para o aperfeiçoamento do instrumento quanto para a melhoria das minhas práticas pedagógicas. Além disso, fica evidente que não existe uma forma única de avaliar, tampouco um modelo “perfeito” para esse processo.                                              |
| Mendes (2014, p. 202)   | No que se refere ao seu potencial como instrumento avaliativo, a Prova em Fases, em conjunto com a análise da produção escrita, revelou-se uma alternativa ao modelo tradicional de caráter classificatório, pautado na simples transmissão e checagem de conteúdos e na busca por resultados homogêneos. Esse recurso possibilitou à professora repensar sua prática e suas decisões pedagógicas, ao mesmo tempo em que ofereceu aos alunos a oportunidade de refletirem sobre suas estratégias de estudo e ajustarem suas produções escritas. |
| Prestes (2015, p. 110)  | A prova em fases pode ser entendida como um recurso eficaz de avaliação para o professor que concebe esse processo como uma prática investigativa. Isso porque, ao examinar as produções escritas dos alunos para elaborar os itens de cada fase, o professor, de certa forma, se coloca em seu lugar. Essa análise gera informações sobre a aprendizagem que podem orientar ajustes em sua atuação em sala de aula. Paralelamente, os alunos têm a chance de refletir sobre seus métodos de estudo e até reformulá-los.                        |
| Paixão (2016, p. 70)    | A prova em fases possibilitou que os professores repensassem, em determinados momentos, tanto a maneira de elaborar as provas quanto a busca por diferentes formas de resolução, promovendo reflexões ao longo de toda a oficina. Dessa forma, a avaliação passou a integrar os processos de ensino e aprendizagem, em vez de assumir um caráter excludente.                                                                                                                                                                                    |
| Silva (2018, p. 64)     | Na Prova em Fases, esse tipo de atividade possibilita que os alunos busquem estratégias de resolução nos intervalos entre as etapas. Assim, o professor pode propor questões que estimulem a pesquisa autônoma de técnicas que nem sempre foram abordadas em sala de aula. Essa prática evidencia o caráter de oportunidade de aprendizagem que o instrumento oferece.                                                                                                                                                                          |
| Souza (2018, p. 34)     | A prova-escrita-em-fases permite, por um lado, que o professor identifique se suas perguntas foram compreendidas pelos alunos, fortalecendo o processo de comunicação entre ambos. O estudante é avaliado a partir de suas produções em cada etapa, que vão se transformando ao longo do processo em função das intervenções do professor e das retomadas feitas pelo                                                                                                                                                                           |

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                        | próprio aluno. Por outro lado, esse formato também abre espaço para o uso da cola já que, entre uma fase e outra, o aluno pode construí-la, para discussões externas à sala de aula e para o diálogo com o professor durante a avaliação, mantendo-se sempre orientado para a aprendizagem. |
| Cardoso (2023, p. 36)  | A prova-escrita-em-fases é um instrumento em que os alunos podem ser avaliados durante todo o processo, como consta nas características da avaliação formativa.                                                                                                                             |
| Trombini (2024, p. 51) | A Prova-escrita-em-fases mostrou-se, de acordo com a ótica desta pesquisa, como um instrumento que pode favorecer a avaliação formativa a depender de sua implementação e das intencionalidades a ela ligadas.                                                                              |

**Fonte:** Elaborado pelas autoras, 2025

A prova em duas fases, proposta por De Lange (1987), ocorre da seguinte maneira. Na primeira etapa, os alunos resolvem uma prova escrita em um período predeterminado. O objetivo é que eles respondam ao maior número possível de perguntas dentro desse limite de tempo estabelecido. A segunda etapa acontece em casa após as intervenções feitas pelo professor.

O aluno repete o trabalho em casa sem restrições e com total liberdade para responder às questões que quiser, seja uma após a outra, por meio de uma redação ou por qualquer combinação destas. Depois de um certo tempo, digamos três semanas, os alunos entregam seus trabalhos e ocorre uma segunda pontuação (De Lange, 1987, p. 186).

A Prova-Escrita-em Fases, na perspectiva de De Lange (1987), caracteriza-se por um processo, em que cada fase representa um movimento de reflexão e reelaboração por parte do aluno. Inicialmente, o aluno apresenta sua resposta de forma autônoma, revelando seus conhecimentos prévios e estratégias de resolução. Em seguida, o professor intervém por meio de comentários, questionamentos ou pistas, sem fornecer a solução, mas estimulando o estudante a repensar sua produção. Na fase seguinte, o aluno revisita sua resposta, podendo corrigir, ampliar ou justificar melhor suas ideias.

Com esse instrumento de avaliação espera-se que o aluno tenha liberdade para decidir como lidar com as questões, o que pode ajudar a promover a criatividade e a autonomia. Para a análise dos dados desta pesquisa, faz-se necessário delimitar previamente o que se compreende por "estudo" e "estudar", uma vez que esses termos ocupam o objetivo geral dessa pesquisa. A definição desses conceitos orienta o olhar teórico da pesquisa, como também sustenta as análises dos dados produzidos durante a aplicação da Prova-Escrita-em-Fases, por meio da produção escrita dos alunos envolvidos nessa pesquisa.

De acordo com o Dicionário Bechara da Língua Portuguesa (2011, p. 613), o termo "estudo" é um substantivo masculino que designa, em primeiro lugar, o "ato ou processo de estudar; aplicação da inteligência para compreender algo que se desconhece ou de que se

tem pouco conhecimento”. Também pode referir-se ao “conhecimento adquirido à custa de se aplicar a inteligência sobre determinado assunto ou matéria” ou ainda à própria matéria ou conteúdo que se busca compreender. Assim, estudar se configura como uma ação intencional, voltada ao conhecimento e à compreensão de determinado assunto que se desconhece ou do qual se deseja saber ou compreender mais. O verbo “estudar”, também segundo o Bechara (2011, p. 613), apresenta múltiplos sentidos. Entre eles, destacam-se: “adquirir habilidade e/ou conhecimento”; “frequentar cursos ou aulas”; “procurar compreender por meio da reflexão”; “examinar ou observar minuciosamente”; e ainda, por extensão de sentido, “ensaiar ou simular atitudes”. Esses significados revelam que estudar extrapola o ato de memorizar informações, mas envolve processos mais complexos como reflexão crítica, observação, investigação e preparação.

Para a análise dos dados produzidos durante a aplicação da Prova-Escrita-em-Fases, considera-se como indícios de estudo as reações, expressas por meio de suas produções escritas e suas modificações nessas, dos alunos ao longo das diferentes fases da prova.

Podemos dizer que estudar, em sua essência, é uma prática viva, que se constrói no diálogo entre pensamento, linguagem e realidade, e que forma sujeitos críticos e conscientes do processo de aprender, Freire (1997) destaca que

[...] é preciso não esquecer que há um movimento dinâmico entre pensamento, linguagem e realidade do qual, se bem assumido, resulta uma crescente capacidade criadora de tal modo que, quanto mais vivemos integralmente esse movimento tanto mais nos tornamos sujeitos críticos do processo de conhecer, de ensinar, de aprender, de ler, de escrever, de estudar. No fundo, estudar, na sua significação mais profunda, envolve todas estas operações solidárias entre elas (Freire, 1997, p. 7).

Serão considerados indícios de estudo as mudanças no entendimento do conteúdo ao longo das fases da Prova-Escrita-em-Fases, observadas por meio de acréscimos de ideias, correções de informações ou reescritas. A participação ativa do aluno em qualquer etapa, evidenciada por anotações ou ajustes que indiquem esforço de aprimoramento, também será reconhecida.

#### **4 Resultados e Discussão**

A resolução apresentada pelo aluno Vitor para a questão 2 da prova chamou a atenção devido à forma como ele conduziu sua resposta, revelando um aspecto importante a ser considerado no processo de aprendizagem: o desconhecimento de determinados elementos que não fazem parte de sua realidade cotidiana. Ao interpretar a questão, ficou evidente que o aluno não conhecia o funcionamento ou a aparência de um termômetro de mercúrio, o que sugere que esse instrumento está fora do seu contexto. Ainda assim, mesmo diante dessa limitação, Vitor demonstrou esforço e criatividade ao tentar resolver a tarefa, representando

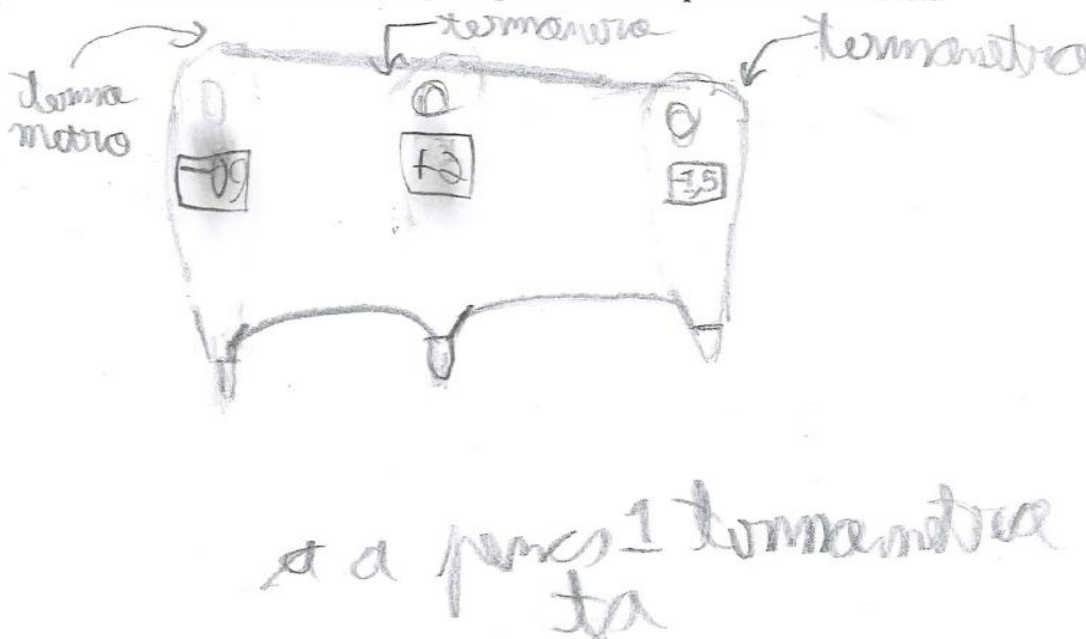
em seu desenho um termômetro digital, o qual, provavelmente, tem familiaridade, como mostra a figura 01. Esse episódio evidencia a importância de se considerar o repertório dos alunos na elaboração dos enunciados e na análise das produções escritas dos alunos.

**Figura 01 - 1º fase - Resolução de Vitor - questão 2**

- 2) No mês de julho de 2023, foram registradas as temperaturas mais baixas do ano nas cidades Palmas-PR, Guarapuava-PR e General Carneiro-PR.

| Cidades          | Temperaturas (°C) |
|------------------|-------------------|
| Palmas           | -0,9              |
| Guarapuava       | +2                |
| General Carneiro | -1,5              |

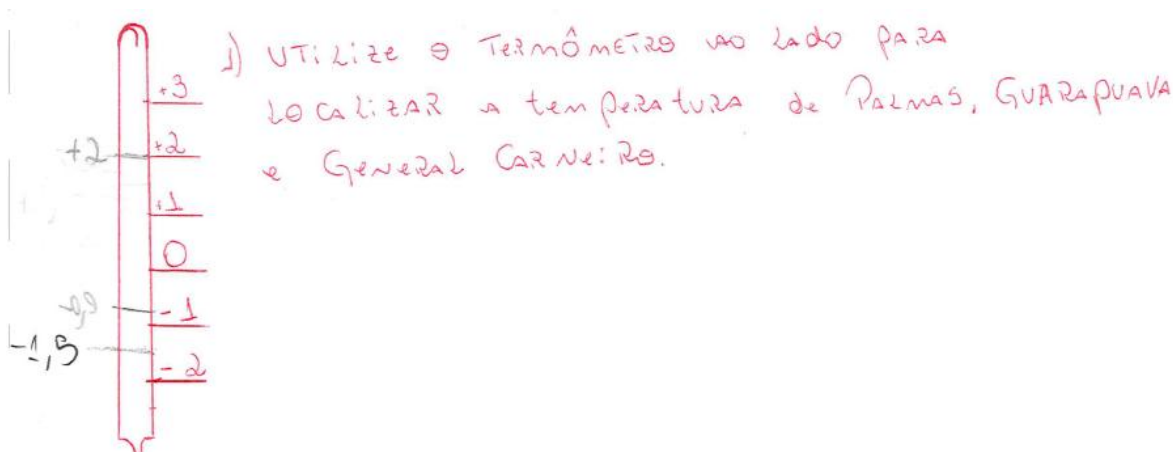
Desenhe um termômetro, a seguir, representando a temperatura das três cidades.



**Fonte:** Produção do aluno Vitor.

Após a intervenção realizada pela pesquisadora, foi possível observar mudanças na maneira como o aluno passou a lidar com o enunciado da tarefa, figura.02. O aluno demonstrou compreensão e autonomia na leitura e interpretação do problema, uma vez adaptado ao seu contexto, mobilizando conhecimentos matemáticos de forma coerente para a resolução da tarefa.

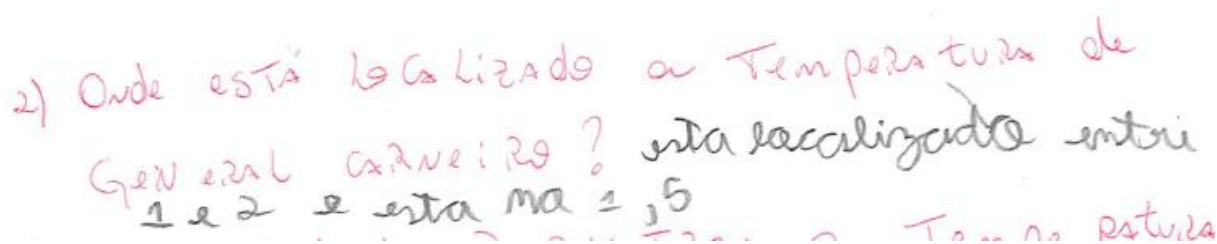
**Figura 02** - 2º fase - Resolução de Vitor - questão 2



**Fonte:** Produção do aluno Vitor.

Na primeira fase da avaliação, o aluno Vitor representou um termômetro digital como forma de resolver à questão. No entanto, mesmo utilizando esse recurso familiar, a disposição das temperaturas em sua representação não correspondia, adequadamente, ao que se esperava em termos de ordenação numérica, especialmente, no que diz respeito a uma reta numérica. Após a intervenção feita pela pesquisadora e o contato visual com um termômetro de mercúrio, observamos indícios de mudanças no estabelecimento de uma relação entre a disposição das temperaturas em um termômetro e à posição dos números na reta numérica. Então, uma nova intervenção foi realizada, como mostra a figura 03.

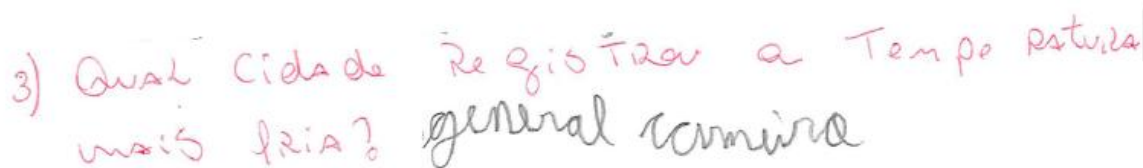
**Figura 03** - 3º fase - Resolução de Vitor - questão 2



**Fonte:** Produção do aluno Vitor.

Essa nova intervenção foi realizada com o intuito de oportunizar uma reflexão do aluno em relação ao que fora solicitado no enunciado da questão. A intervenção proposta visava promover uma reflexão sobre a interpretação das informações e sobre a representação espacial envolvida. No entanto, observamos que o aluno indicou a localização da temperatura de General Carneiro, entre 1 e 2 graus, o que estaria correto a menos de um sinal. A temperatura de General Carneiro,  $-1,5^\circ$ , se localiza entre  $-1$  e  $-2$ .

Figura 04 - 4º fase - Resolução de Vitor - questão 2



3) Qual cidade registrou a Temperatura mais fria? general comira

Fonte: Produção do aluno Vitor.

Na quarta fase da prova, a pesquisadora realizou uma nova intervenção, retomando o contexto inicial da questão, conforme mostra a figura 04, pois suspeitamos que ele havia compreendido, mas que se esquecera de colocar o sinal. De fato, o aluno Vitor respondeu corretamente! Assim, consideramos que as resoluções do estudante Vitor, nessa questão, apresentaram indícios de modificações coerentes com as intervenções e o enunciado, em relação às produções anteriores. Dessa forma, identificamos indícios de estudo sobre a ordenação dos números inteiros em uma reta numérica, bem como sobre o significado dos valores numéricos nela representados.

## 5 Conclusões / Considerações Finais

A utilização da Prova-Escrita-em-Fases, conforme vem sendo investigada pelo GEPEMA, configura-se como um instrumento de avaliação que pode oportunizar a aprendizagem. Nesta pesquisa, buscamos analisar, especificamente, o caráter desse instrumento enquanto estímulo e oportunidade ao estudo. Durante a análise da produção escrita do aluno, percebemos um estreitamento na relação entre o aluno e a pesquisadora, evidenciado pela forma como passaram a expressar dúvidas e reflexões em suas resoluções.

Ao propor um instrumento que possibilita ao aluno revisitar suas produções, refletir sobre suas resoluções e respostas e retomar o conteúdo com base em intervenções individualizadas por meio de *feedbacks*, foi possível observar mudanças na forma do aluno lidar com as tarefas propostas.

A cada nova fase, emergiram indícios de estudo que se manifestaram não apenas por meio das correções ou complementações feitas pelo aluno, mas também pelas mudanças em suas estratégias, pela forma como passou a se posicionar diante das tarefas e pelos caminhos percorridos para resolver os problemas propostos.

Portanto, os resultados desta pesquisa indicam que a Prova-Escrita-em-Fases é, de fato, um caminho possível para a avaliação como oportunidade de aprendizagem e estudo, especialmente quando pautada no respeito à trajetória do aluno e na crença de que todo aluno é capaz de aprender, desde que lhe seja dada a oportunidade de tentar novamente, de maneira orientada pelo professor, refletir e estudar.

---

## REFERÊNCIAS

- BOGDAN, Robert Charles; BIKLEN, Sari Knopp. **Pesquisa qualitativa para a educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Boston: Allyn e Bacon, 1982.
- BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Algumas considerações sobre avaliação educacional**. São Paulo, n. 22, p. 155-178, 2000.
- BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Prova em fases é alternativa à avaliação tradicional e ajuda na recuperação**. [Entrevista concedida] Leonardo Valle, Instituto Claro/ Educação. Londrina, 2023. Disponível em: <<https://www.institutoclaro.org.br/educacao/nossas-novidades/reportagens/prova-em-fases-e-alternativa-a-avaliacao-tradicional-e-ajuda-na-recuperacao/>>. Acesso em: 19 nov. 2024.
- CARDOSO, Milene Aparecida Malaquias. **Recuperação de estudos: uma oportunidade de aprendizagem?** 2023. 140 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2023.
- DE LANGE, Jan. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW & OC, 1987.
- ESTUDO. In: BECHARA, Evanildo. **Dicionário da Língua Portuguesa/Evanildo Bechara**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2011. p.613.
- FREIRE, Paulo. **Professora sim, tia não: cartas a quem ousa ensinar**. São Paulo, Olho d'água, 1997.
- HADJI, Charles. **Avaliação desmistificada**. Tradução de Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- HADJI, Charles. **Avaliação, regras do jogo: das intenções aos instrumentos**. Porto: Ed. Porto, 1994.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed., Rio de Janeiro: E.P.U., 2014.
- MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 274 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2014.
- PAIXÃO, Anie Caroline Gonçalves. **Uma prova em fases de matemática: da análise da produção escrita ao princípio da orientação**. 2016. 103f Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2016.
- PRESTES, Diego Barboza. **Prova em fases de matemática: uma experiência no 5 ano do ensino fundamental**. 2015. 122f Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2015
- SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.
- SOUZA, Juliana Alves de. **Cola em Prova Escrita: de uma conduta discente a uma estratégia docente**. 2018. 146 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

TREVISAN, André Luis. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em matemática** 2013. 160f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013

TROMBINI, Thiago. **Prova-escrita-em-fases: uma análise à luz da educação matemática realística**. 2024. 59f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2024

## **ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE UM FILTRO PASSA-BAIXA DE PRIMEIRA ORDEM UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE E TRANSFORMADA Z**

Edson Pirassol Junior

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

<mailto:edson.1997@alunos.utfpr.edu.br>

Karen Carrilho da Silva Lira

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

<mailto:karenc@utfpr.edu.br>

### **Resumo**

Este trabalho apresenta o projeto e a análise digital de um filtro passa-baixa de primeira ordem, tomando como base um circuito RC analógico. O objetivo principal foi desenvolver uma versão discreta desse filtro, capaz de ser implementada em um computador ou microcontrolador para processar sinais digitais. A metodologia aplicada utilizou a Transformada de Laplace para modelar e caracterizar o comportamento do sistema no domínio contínuo (analógico). Em seguida, empregou-se a Transformada Z como ferramenta para converter a função de transferência analógica para o domínio discreto, utilizando transformação bilinear, também conhecida como método de Tustin. O resultado é uma equação de diferenças que pode ser executada por um processador digital. Este projeto foi desenvolvido no âmbito da disciplina de Cálculo 4 do curso de Engenharia de Computação, destacando a importância da integração entre conceitos matemáticos e aplicações práticas em engenharia.

**Palavras-chave:** **Resumo.** Filtro Passa-Baixa. Transformada Z. Transformada de Laplace. Circuito RC.

### **1 Introdução**

A implementação de funções de filtragem em software é uma necessidade ubíqua no projeto de sistemas embarcados e de processamento digital de sinais, uma vez que muitos dispositivos modernos dependem de sinais digitais precisos e livres de ruídos. Enquanto filtros analógicos são realizados com componentes físicos, como resistores e capacitores, sua contraparte digital oferece vantagens decisivas: reprogramabilidade, inexistência de deriva térmica e perfeita replicabilidade (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010).

Este trabalho concentra-se na transição do domínio contínuo (analógico) para o discreto (digital) utilizando o caso paradigmático do filtro passa-baixa de primeira ordem. Este tipo de filtro foi escolhido devido à sua simplicidade, eficiência e ampla aplicação em suavização de sinais, remoção de ruídos e anti-aliasing em sistemas de aquisição digital.

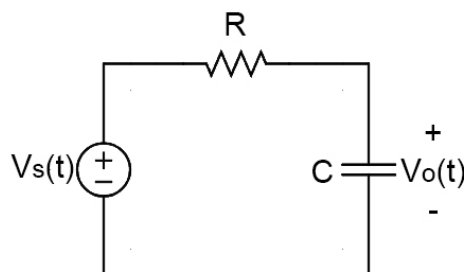
A metodologia adotada envolveu inicialmente a análise do circuito RC analógico por meio da Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), permitindo a derivação da função de transferência no domínio contínuo. Em seguida, aplicou-se a Transformada Z, juntamente com o método de

Tustin (transformação bilinear), para obter a representação discreta do filtro, resultando em uma equação de diferenças executável por um processador digital. A partir disto a equação é capaz de ser executada eficientemente por um processador digital, realizando a conversão de um sinal de entrada amostrado em um sinal de saída filtrado. Para validar a implementação prática, o filtro digital foi programado e testado em uma placa Arduino Due, permitindo a comparação entre o comportamento analógico esperado e o desempenho digital em hardware.

Dessa forma, o trabalho demonstra a integração entre conceitos matemáticos clássicos e aplicações práticas em engenharia, evidenciando que seu foco está no aprendizado e na aplicação de conhecimentos matemáticos no contexto de sistemas embarcados.

## 2 Material e Métodos

A partir do circuito analógico RC passa-baixa de primeira ordem, ilustrado na Figura 1, procedeu-se com a sua análise para derivar a função de transferência no domínio contínuo. O circuito é composto por um resistor  $R$  e um capacitor  $C$  em série, com a entrada  $V_o$  aplicada ao resistor e a saída  $V_s$  tomada sobre o capacitor. Aplicando-se a Lei de Tensão de Kirchhoff (LKT) na malha do circuito obtemos a equação (1):



**Figura 1 – Circuito RC.**  
**Fonte:** PIRASSOL, (2025).

$$-V_s(t) + Ri(t) + V_o(t) = 0 \quad (1)$$

onde

$$i(t) = C \frac{dV_o(t)}{dt} \quad (2)$$

é a corrente instantânea no capacitor.

Portanto

$$\frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_o(t) - \frac{1}{RC}V_s(t) = 0. \quad (3)$$

Aplicando a Transformada de Laplace na equação diferencial (3) e admitindo condições iniciais nulas ( $V_o(0) = 0$ ), temos que:

$$sVo(s) + \frac{1}{RC}Vo(s) - \frac{1}{RC}Vs(s) = 0 \quad (4)$$

obtendo a função de transferência

$$H(s) = \frac{Vo(s)}{Vs(s)} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (5)$$

Com o objetivo de discretizar o sistema e permitir sua implementação em software, o método de Tustin (ou transformação bilinear) foi empregado. Este método realiza um mapeamento entre o plano complexo S e o plano Z, aproximando a operação de integração por meio de uma regra trapezoidal, com um período de amostragem definido T obtendo então  $H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$ . Maiores detalhes sobre o método podem ser encontrados em (DINIZ, SILVA e NETTO; 2014).

Ao aplicar  $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$  em  $H(s) = \frac{Vo(s)}{Vs(s)} = \frac{1}{1 + sRC}$  obtemos:

$$\frac{Vo(z)}{Vs(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{2z-1}{Tz+1}RC} \quad (6)$$

Portanto a função de transferência em Z se torna:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T(z+1)}{T(z+1) + 2RC(z-1)} \quad (7)$$

e com esta função é possível modelar qualquer filtro RC de primeira ordem (OPPENHEIM; SCHAFER, 2010).

### 3 Resultados e Discussão

Considerando uma frequência de aproximadamente 160 Hz,  $\square$  de 10 kHz,  $\square = 1k\Omega$  e  $\square = 1\square F$ , a função de transferência em tempo discreto se torna:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T(z+1)}{T(z+1) + 2RC(z-1)} = \frac{\frac{(z+1)}{1000}}{\frac{z+1}{1000} + \frac{2}{1000}(z-1)} = \frac{z+1}{(z+1) + 20(z-1)} = \frac{z+1}{21z-19} \quad (8)$$

Mas para que um microprocessador possa compreender tal equação, é utilizar a equação de diferenças da função de transferência em tempo discreto. Este processo requer o uso da transformada z inversa (DINIZ, SILVA e NETTO; 2014):

$$z^{-n}X(z) = x[k - n] \quad (9)$$

Manipulando algebricamente (8) temos:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{z+1}{21z-19} \rightarrow Y(z)(21z-19) = X(z)(z+1) \\ Y(z)21z - 19Y(z) &= X(z)z + X(z) \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicando (9) em (10) obtemos:

$$21y(k+1) - 19y(k) = x(k+1) + x(k)$$

$$y(k+1) = 0.047679x(k+1) + 0.047679x(k) + 0.904761y(k)$$

E, por fim, a equação:

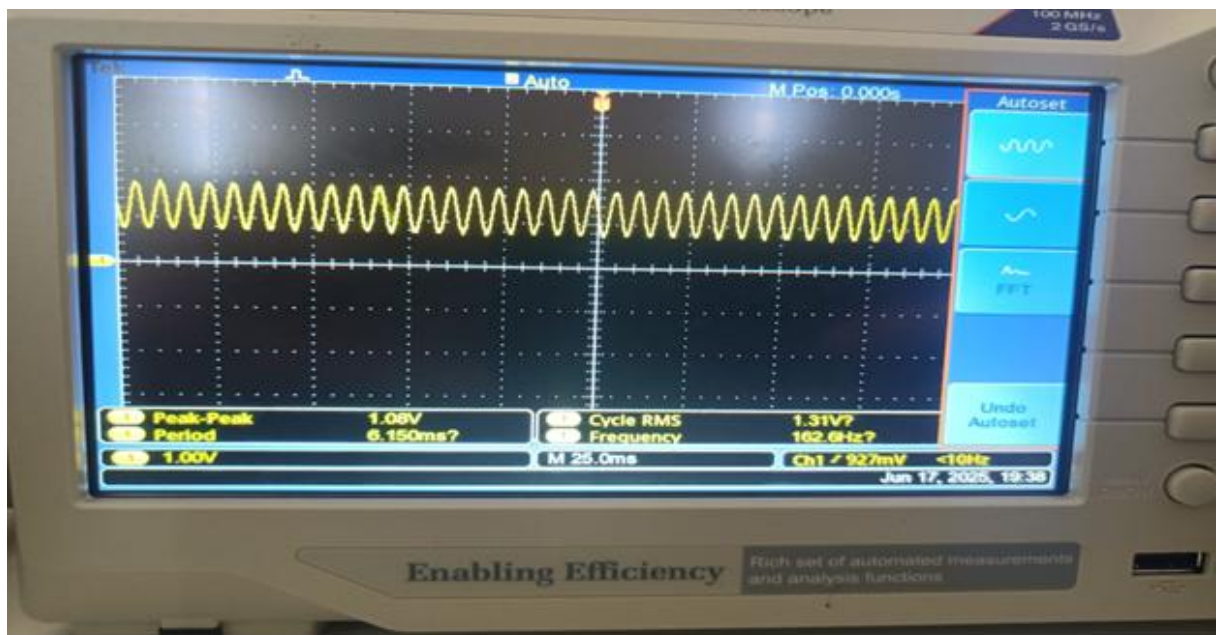
$$y(k) = 0.047679x(k) + 0.047679x(k - 1) + 0.904761y(k - 1) \quad (11)$$

que entrega na saída atual  $y(k)$  o sinal filtrado dependendo da entrada atual  $x(k)$  e anterior  $x(k - 1)$  e saída anterior  $y(k - 1)$ .

Logo, torna-se viável a implementação computacional do filtro em uma vasta gama de plataformas de microcontroladores. Uma opção adequada para este fim é a placa Arduino Due, a qual dispõe de periféricos integrados essenciais para a tarefa: um conversor analógico-digital (ADC - Analog-to-Digital Converter) e um conversor digital-analógico (DAC - Digital-to-Analog Converter), ambos com resolução de 12 bits.

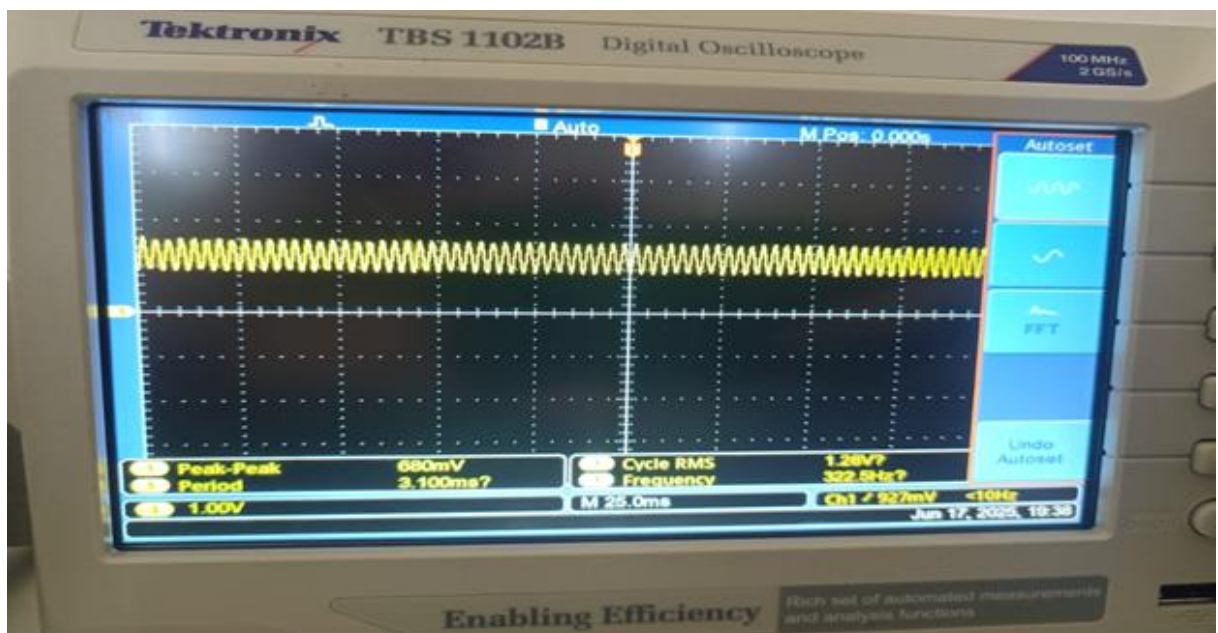
A implementação do algoritmo de filtragem consiste na execução da equação de diferenças (11), em um loop de controle de tempo real. Este loop é governado por uma interrupção por tempo programada para operar na frequência de amostragem estabelecida de 10 kHz, como previamente mencionado. Uma solução código-fonte referente a esta implementação prática está disponível para consulta em repositório público (PIRASSOL; 2025).

Para validação experimental do funcionamento do filtro, foram capturadas formas de onda na saída do sistema quando excitado por sinais senoidais de diferentes frequências: 160 Hz (Figura 2), 320 Hz (Figura 3), 500 Hz (Figura 4) e 1 kHz (Figura 5). Sendo 160 Hz a frequência de corte, é esperado que a amplitude do sinal de saída fosse atenuada progressivamente conforme a frequência de entrada aumentasse. As figuras ilustram claramente este comportamento, mostrando desde uma leve atenuação em 160 Hz até uma supressão severa do sinal em 1 kHz, caracterizando claramente a operação de rejeição de banda acima da frequência de corte, também é preciso respeitar os limites da plataforma escolhida, em especial a tensão do sinal, se limitando em valores entre 0-3.3V para placa Arduino Due.



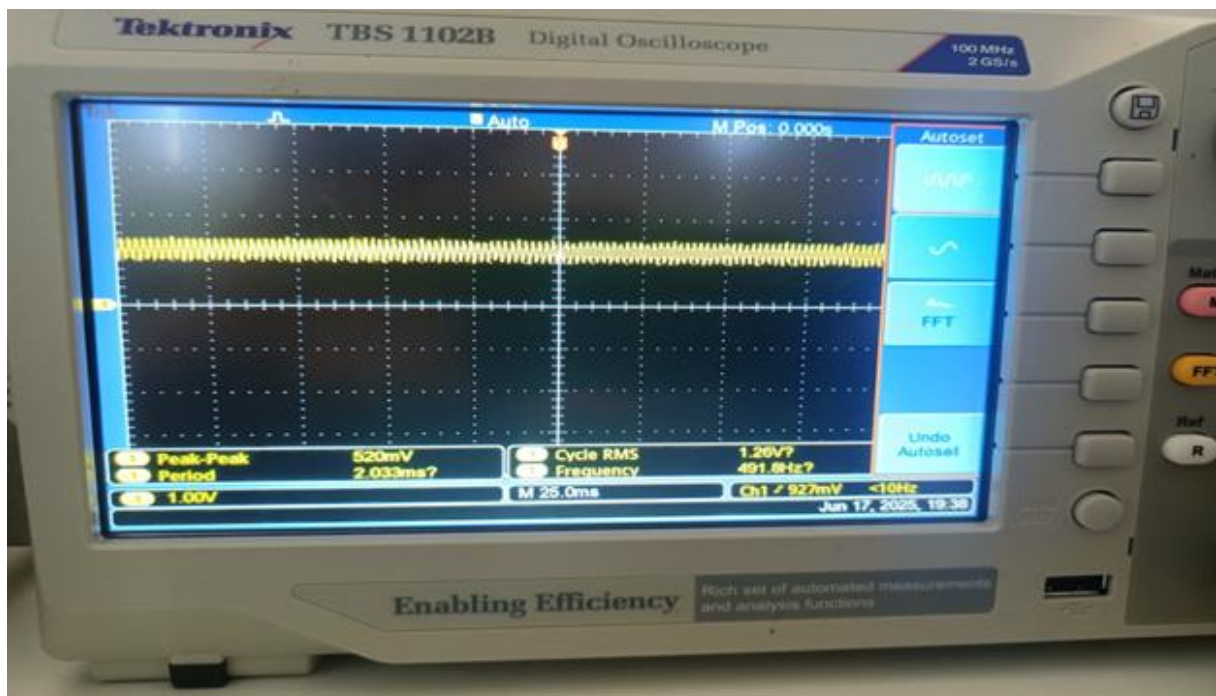
**Figura 2** – Sinal de saída do filtro quando submetido a um sinal senoidal de entrada na frequência de 160 Hz, que é exatamente a frequência de corte.

Fonte: PIRASSOL, (2025).



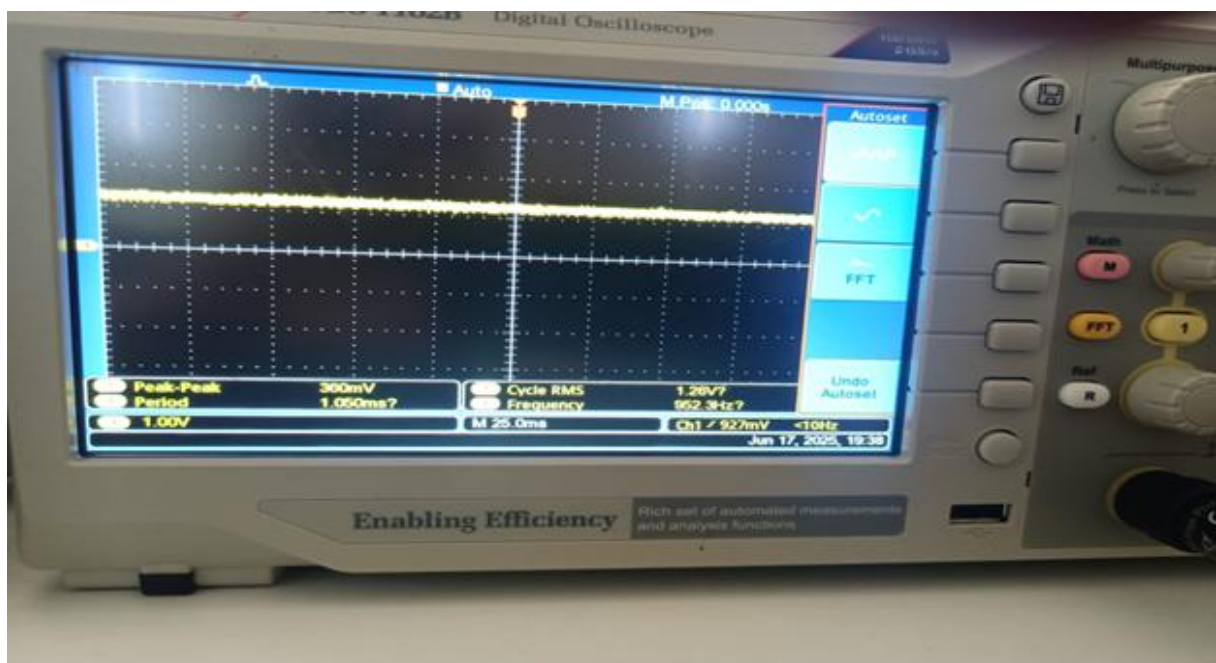
**Figura 3** – Sinal de saída do filtro quando submetido a um sinal senoidal de entrada na frequência de 320 Hz. O sinal de saída exibe uma amplitude significativamente reduzida.

Fonte: PIRASSOL, (2025).



**Figura 4** – Sinal de saída do filtro quando submetido a um sinal senoidal de entrada na frequência de 500 Hz, a atenuação é severa. A amplitude do sinal de saída é muito pequena.

Fonte: PIRASSOL, (2025).



**Figura 5** – Sinal de saída do filtro quando submetido a um sinal senoidal de entrada na frequência de 1 kHz. O sinal de saída está fortemente atenuado, com amplitude próxima ao ruído de fundo do sistema.

Fonte: PIRASSOL, (2025).

Conforme pode-se observar nos resultados experimentais apresentados nas Figuras 2, 3, 4 e 5, é possível comprovar visualmente o funcionamento do filtro, observando-se a

atenuação característica na amplitude do sinal de saída (tensão pico a pico) à medida que a frequência do sinal de entrada ultrapassava a frequência de corte projetada. A principal limitação de desempenho do filtro, uma banda de transição suave e uma taxa de rejeição finita, era esperada e é inerente à sua natureza de primeira ordem. Contudo, esta escolha deliberada resultou em uma solução de baixa complexidade computacional e de fácil prototipagem, atributos que a tornam altamente valiosa para fins didáticos e como ponto de partida para o desenvolvimento de sistemas de filtragem.

## **4 Considerações Finais**

O processo completo, desde a modelagem do sistema analógico no domínio de Laplace, passando pela sua conversão ao domínio discreto por meio da Transformada Z (método de Tustin), até a implementação da equação de diferenças em um microcontrolador, estabelece um paradigma fundamental para o projeto de filtros digitais. Esta mesma metodologia é escalável e serve como base para o desenvolvimento de filtros mais complexos e de ordens superiores. A implementação bem-sucedida não apenas validou os conceitos teóricos, mas também proporcionou uma base sólida para a compreensão dos princípios do processamento digital de sinais. O conhecimento gerado é extensível e serve como fundamento para projetos futuros em diversas áreas, como telecomunicações, instrumentação eletrônica, sistemas embarcados e dispositivos médicos, destacando ainda a importância da interdisciplinaridade, uma vez que integra conceitos de matemática, física, engenharia eletrônica e computação.

## **REFERÊNCIAS**

- PIRASSOL, Edson. lowpass.ino. 2025. Disponível em: <https://github.com/franzpedd/calc4rel>. Acesso em: 22 ago. 2025.
- DINIZ, Paulo Sérgio Ramirez; SILVA, Eduardo Antônio Barros da; NETTO, Sérgio Lima. Processamento digital de sinais: projeto e análise de sistemas. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- OPPENHEIM, Alan V.; SCHAFER, Ronald W. Discrete-Time Signal Processing. 3. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2010.

## PROCESSOS E METODOLOGIAS NO DESENVOLVIMENTO DE GAMES EDUCACIONAIS PARA O ENSINO

Felipe Da Silva Fadel

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

[felipefadel@alunos.utfpr.edu.br](mailto:felipefadel@alunos.utfpr.edu.br)

Renato Francisco Merli

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

[renatomerli@utfpr.edu.br](mailto:renatomerli@utfpr.edu.br)

### Resumo

Este artigo apresenta os processos e metodologias aplicados ao desenvolvimento de jogos digitais educacionais voltados ao ensino de matemática no Ensino Fundamental, fundamentados na Engenharia Didático-Informática (EDI), na Engenharia de *Software* (ES) e orientados pelo *design* pedagógico como eixo integrador entre os dois campos. O objetivo foi investigar como a integração entre planejamento didático e práticas de desenvolvimento pode favorecer aprendizagens contextualizadas e duradouras. A metodologia adotou uma abordagem aplicada e descritiva, utilizando o *Game Design Document* (GDD) como instrumento de planejamento, a *Unity Engine* como plataforma de produção e modelos ágeis e iterativos, como prototipagem e espiral, para organizar o fluxo de trabalho. Três jogos foram desenvolvidos: *InterstellarMath*, com foco em comunicação síncrona via rede; *Desafio dos Deuses*, centrado na persistência de dados para acompanhamento individual; e *Shadow of Linusbae*, que explorou movimentação livre, combate dinâmico e reutilização de componentes técnicos. Os resultados demonstraram que a utilização de metodologias ágeis e ferramentas da EDI e da ES favorecem a prototipagem rápida, a validação incremental e a colaboração ativa de professores como coautores do processo. Conclui-se que a combinação entre *design* pedagógico, EDI e ES gera produtos consistentes do ponto de vista técnico e educacional, pois assegura tanto a estabilidade e reutilização de componentes quanto a aderência aos objetivos de aprendizagem. Além disso, a aplicação da gamificação tentou colocar impacto positivo no engajamento dos alunos, ampliando a motivação e a participação na resolução de problemas matemáticos.

**Palavras-chave:** Jogos educacionais. Engenharia Didático-Informática. Engenharia de *Software*. *Game Design*.

### 1 Introdução

A utilização de jogos digitais no contexto educacional tem se consolidado como uma estratégia eficaz para promover aprendizagens significativas, especialmente na matemática, ao estimular habilidades cognitivas, pensamento crítico e engajamento dos alunos, ultrapassando a mera memorização. Essa abordagem é fortalecida pela Engenharia Didático-Informática (EDI), que integra conhecimentos educacionais e tecnológicos para a criação de recursos digitais alinhados aos objetivos pedagógicos (Gama, 2023; Sena, 2017). A incorporação das tecnologias nos espaços escolares exige um uso planejado e contextualizado, focado na autonomia e no desenvolvimento crítico, considerando aspectos cognitivos, didáticos e epistemológicos para ampliar as potencialidades dos jogos educacionais (Gama, 2023; Huizinga, 2012).

No desenvolvimento desses recursos, a Engenharia de Software (ES) desempenha papel crucial ao oferecer metodologias adaptáveis que asseguram qualidade e organização no processo, com modelos ágeis<sup>1</sup> e iterativos como o *Rational Unified Process* (RUP), que é um modelo de desenvolvimento de *software* iterativo e incremental que organiza o projeto em fases de concepção, elaboração, construção e transição, permitindo entregas parciais e revisões contínuas (Gama, 2023; Sena, 2017). Essa organização facilita a modularização, manutenção e integração de funcionalidades, essenciais para a escalabilidade dos jogos (Gama, 2023). Além disso, o *Game Design Document* (GDD) destaca-se como um elemento fundamental na pré-produção, detalhando objetivos pedagógicos, mecânicas, fluxos e aspectos técnicos, alinhando as equipes multidisciplinares e fundamentando as decisões de design em princípios educacionais e técnicos (Sena, 2017; Novak, 2008).

Este artigo apresenta a evolução técnica de três jogos educacionais desenvolvidos pelo autor na plataforma *Unity*, que podem ilustrar a aplicação potencial dos conceitos da EDI e ES no ensino da matemática. O primeiro, *InterstellarMath*, exemplifica o controle de estados assíncronos via comunicação remota para sincronização de turnos. O jogo *Desafio dos Deuses* aborda persistência e modularização de dados para suporte ao acompanhamento individualizado; e *Shadow of Linusbae* explora movimentação livre, combate dinâmico e reutilização de dados via *ScriptableObjects* e máquinas de estado finito, refletindo práticas alinhadas às metodologias propostas (Gama, 2023). Assim, o estudo demonstra como as fases produtivas podem se beneficiar desses referenciais para a construção de jogos estruturados e pedagógicos (Gama, 2023).

Dessa forma, a combinação entre design pedagógico, engenharia didático-informática e engenharia de software se mostra essencial para a criação de jogos educacionais que promovam aprendizagens efetivas e experiências envolventes, fortalecendo o papel das tecnologias digitais no ensino fundamental e contribuindo para a qualidade e sustentabilidade dos projetos (Gama, 2023; Sena, 2017; Adams, 2014).

## 2 Metodologia

O presente estudo adotou uma abordagem metodológica aplicada e descritiva, fundamentada nos princípios da Engenharia Didático-Informática (EDI) e da Engenharia de Software (ES), para o desenvolvimento de jogos educacionais voltados ao ensino de matemática no Ensino Fundamental. A EDI, conforme descrita por Gama (2023), orientou a

---

<sup>1</sup> Métodos ágeis consistem em abordagens de desenvolvimento que privilegiam entregas rápidas, colaboração constante e adaptação contínua às mudanças, promovendo prototipagem incremental.

integração entre aspectos pedagógicos, cognitivos e tecnológicos, assegurando a adequação dos recursos aos objetivos de aprendizagem. Já a ES forneceu métodos e processos estruturados, baseados em modelos ágeis e iterativos, como o *Rational Unified Process* (RUP), para organizar as etapas de concepção, produção e avaliação.

A fase de pré-produção foi norteadada pela elaboração do *Game Design Document* (GDD), um documento de planejamento que detalha desde os objetivos pedagógicos até os aspectos técnicos e estéticos do jogo. O GDD é como “um guia vivo que comunica a visão e os elementos essenciais do jogo a toda a equipe de desenvolvimento”, funcionando como referência para o alinhamento entre design, programação, narrativa e requisitos educacionais. Nesse estágio, foram definidos elementos como mecânicas de jogo, fluxos narrativos, diagramas de progressão.

Na fase de *Game Design*, além da definição de narrativa, mecânicas, personagens, cenários e níveis de dificuldade, também foram selecionados os conteúdos matemáticos a serem explorados em cada jogo, em consonância com a BNCC, ou outro meio. Essa etapa busca garantir que tópicos como aritmética, geometria e raciocínio algébrico sejam incorporados de maneira lúdica e contextualizada em um jogo que necessite desses conteúdos, transformando o desafio matemático em parte integrante da experiência de jogo. O GDD registrou essas escolhas, funcionando como guia para alinhar objetivos pedagógicos e desenvolvimento técnico, em sintonia com a perspectiva de Prensky, que ressalta a necessidade de integrar conteúdo e mecânica para potencializar a aprendizagem em jogos digitais (Prensky, 2012).

A produção utilizou a *Unity Engine*, software amplamente empregado no desenvolvimento de jogos por sua flexibilidade, suporte multiplataforma e capacidade de integração com bibliotecas externas. Gama (2023) observa que “ao contrário do método tradicional de desenvolvimento de software – que demanda escrever e compilar o código para daí se obter o jogo, utilizar um engine comercial facilita a modificação do jogo enquanto o mesmo é produzido” (p.50), o que favoreceu ciclos rápidos de prototipagem e testes.

No jogo *InterstellarMath*, foi utilizada a biblioteca *FishNet* para a implementação de recursos de rede, permitindo a comunicação em tempo real entre múltiplos clientes por meio de eventos remotos. Já em *Shadow of Linusbae*, a arquitetura técnica fez uso de *ScriptableObjects*, recursos nativos da *Unity* que permitem armazenar dados de forma independente das instâncias de cena, facilitando a reutilização, a manutenção e a personalização de informações, como atributos de personagens e configurações de combate. Além disso, aplicou-se a técnica de objetos persistentes entre cenas, implementada por meio do método *DontDestroyOnLoad*, garantindo que determinadas instâncias, como controladores

de áudio, gerenciadores de progresso do jogo ou sistemas de inventário, se mantivessem ativos mesmo durante as transições entre cenários.

Essa metodologia, ao integrar práticas da EDI e da ES com ferramentas como o GDD, a Unity e bibliotecas específicas, busca estabelecer um fluxo de trabalho replicável e escalável, capaz de alinhar exigências pedagógicas e técnicas para a criação de jogos educacionais eficazes.

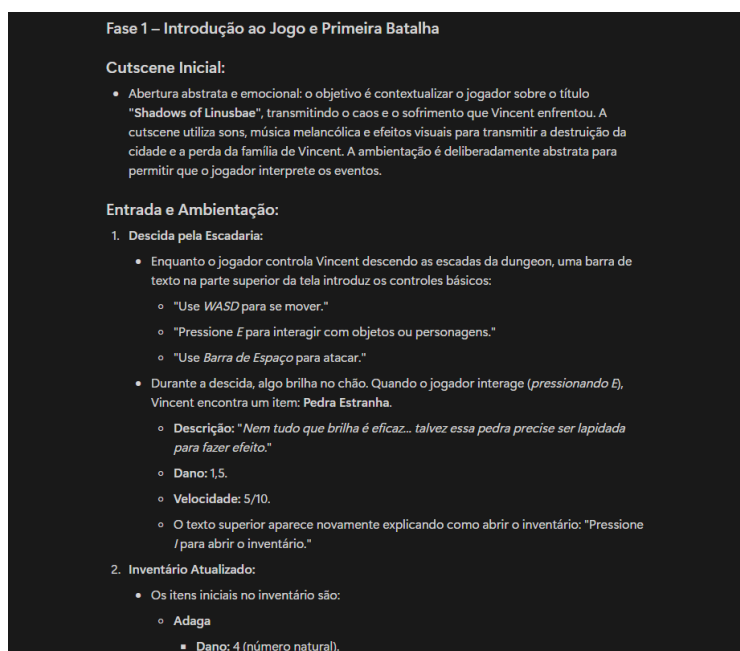
### **3 Resultados e Discussão**

A produção dos jogos educacionais seguiu características alinhadas aos métodos ágeis descritos por Gama (2023), adequados a ambientes de equipes reduzidas e cooperativas. A cada ciclo de desenvolvimento, versões preliminares eram disponibilizadas na plataforma *Itch.io*<sup>2</sup>, possibilitando testes informais pela própria equipe e por professores envolvidos como potenciais clientes. Essa estratégia favoreceu a volatilidade do processo, no sentido de permitir mudanças rápidas nas mecânicas ou no design, em contraste com métodos tradicionais de desenvolvimento de software, em que equipes maiores e a distância do cliente dificultam adaptações em tempo oportuno (Sena, 2017). Nesse contexto, o cooperativismo e a comunicação constante foram essenciais para que os jogos se moldassem continuamente aos objetivos pedagógicos.

Em todos os jogos desenvolvidos, a presença do modelo ágil foi central, tendo os professores participantes do projeto de pesquisa Jogos no Ensino de Matemática atuando ativamente durante o processo, testando versões, sugerindo alterações e validando a pertinência pedagógica das mecânicas propostas. Essa prática reforça a perspectiva de Huizinga (2012), segundo a qual o jogo é um espaço cultural dinâmico, e demonstra como o cliente, nesse caso o professor, assume papel de coautor do produto. Ainda assim, cada jogo incorporou modelos específicos em seu desenvolvimento. Em *Shadow of Linusbae*, prevaleceu o modelo de prototipagem, no qual a roteirização narrativa e o planejamento educacional ocorreram paralelamente ao desenvolvimento técnico. A Figura 1 ilustra o início do GDD produzido, que orientou a construção das fases.

---

<sup>2</sup> Itch.io é uma plataforma de distribuição de jogos digitais; neste estudo, os protótipos foram disponibilizados em versão WebGL para acesso direto via navegador.



**Figura 1** - Game Design Document do jogo *Shadow Of Linusbae*.

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

Protótipos sucessivos foram construídos e submetidos à avaliação, garantindo aprovação gradual de mecânicas de combate e progressão. Já em *InterstellarMath*, adotou-se o modelo em espiral, no qual o foco inicial esteve na jogabilidade e em conceitos gráficos mais amplos, para depois evoluir em direção a telas de apoio (menu, configurações, sistema de pausa). Esse projeto contou ainda com um GDD elaborado previamente por Silva (2022), o que direcionou de forma mais consistente as escolhas técnicas e pedagógicas. Dessa forma, os jogos demonstram a adaptabilidade das metodologias de Engenharia de Software (ES) às especificidades de projetos educacionais digitais, a Tabela 1 abaixo sintetiza o uso de conceitos da engenharia de software na produção dos jogos.

**Tabela 1** – Modelos de desenvolvimento por jogo

| Jogo               | Modelo de desenvolvimento | Componentes propostos                                                                                                           |
|--------------------|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Shadow of Linusbae | Prototipagem + Ágil       | Permitem a reutilização de atributos e mecânicas, além de transitar informações entre diferentes cenas.                         |
| InterstellarMath   | Espiral + Ágil            | Responsável apenas pela organização da cena; não realiza transição de dados entre cenas, utiliza somente <i>playerPrefabs</i> . |
| Desafio dos Deuses | Ágil                      | Garante a transição de informações entre cenas, centralizando dados essenciais para acompanhamento do progresso.                |

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

No que se refere à validação de software, os jogos seguiram três estágios progressivos. Os testes de desenvolvimento foram conduzidos pelos próprios programadores e professores, avaliando individualmente componentes isolados, como funções, menus ou classes de objetos. Em seguida, os testes de sistema integraram esses módulos, de modo a identificar erros resultantes de interações inesperadas e a garantir o cumprimento dos requisitos funcionais.

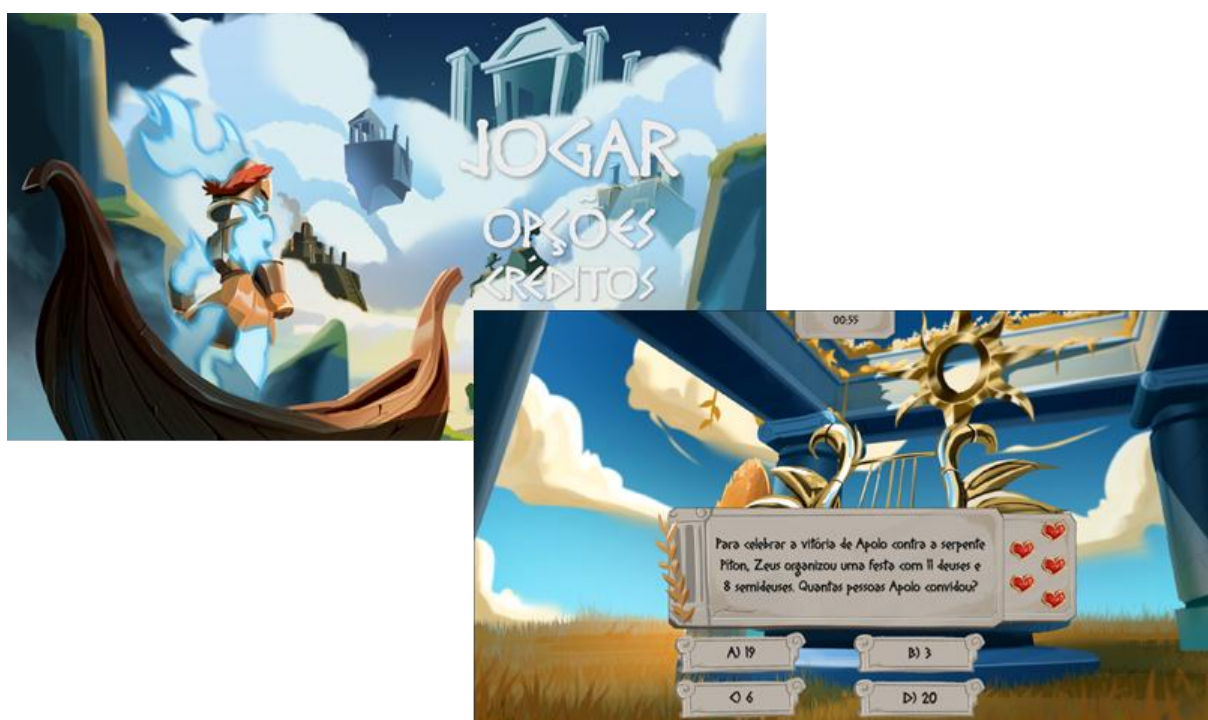
A análise dos componentes técnicos e pedagógicos criados evidencia a articulação entre Engenharia Didático-Informática (EDI) e ES. Em *Shadow of Linusbae*, o uso de componentes próprios na Unity possibilitou modularizar atributos de personagens e mecânicas de combate, facilitando a manutenção e a expansão futura do jogo. Já em *Desafio dos Deuses*, a ênfase esteve na persistência de dados, assegurando acompanhamento individualizado do progresso dos jogadores, o que se mostrou essencial para a finalidade pedagógica de avaliação contínua. No caso de *InterstellarMath*, a implementação da biblioteca *FishNet* garantiu comunicação em rede entre clientes, permitindo jogabilidade síncrona e reforçando a dimensão colaborativa da aprendizagem. Além disso, em todos os jogos observou-se a criação de componentes pedagógicos específicos, como bancos de questões matemáticas, sistemas de *feedback* imediato e progressão adaptativa de desafios, os quais ampliaram a eficácia das mecânicas como instrumentos de aprendizagem.

Dentre os jogos propostos podemos visualizar os resultados alcançados, como no *Desafio dos Deuses*, que foi proposto por Badoco (2025) o jogo une a mitologia grega ao ensino de operações matemáticas, propondo uma narrativa em que humanos competem com deuses em provas de raciocínio lógico e cálculo para conquistar o direito de entrar no Monte Olimpo. Destinado a estudantes do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, o jogo aborda conteúdos de adição e subtração, organizados em sete fases temáticas inspiradas em deuses como Apolo, Hefesto, Ártemis, Afrodite, Hera, Poseidon e Zeus, e estruturadas conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (2009). Cada fase apresenta desafios com níveis de dificuldade progressiva, incluindo reforço e correção quando necessário, garantindo *feedback* imediato e oportunidades de revisão.

Na primeira fase, por exemplo, com o deus Apolo, o jogador resolve problemas de composição do tipo “todo desconhecido” por meio de um quiz de perguntas e respostas, com alternativas múltiplas, devendo acertar seis questões para avançar. Por exemplo, uma questão apresenta: “Apolo reuniu 6 musas para cantar e 4 musas para tocar lira. Quantas musas estavam presentes?” (Figura 2). Na segunda fase, com Hefesto, os problemas de composição de “parte desconhecida” são incorporados a um mini game de corrida, em que o jogador avança ou retrocede casas conforme acerta ou erra as questões.

Essa abordagem permite que os estudantes pratiquem operações matemáticas de forma contextualizada, com *feedback* imediato, reforço em caso de erro e progressão de dificuldade, integrando aprendizagem e narrativa de maneira dinâmica e envolvente.

A tela inicial introduz a narrativa, permite seleção e acompanhamento de fases e exibe opções de configuração, enquanto o avatar do jogador simboliza o potencial de aprendizagem individual. As fases combinam quizzes matemáticos com mecânicas de progressão sequencial, incentivando a revisão e consolidação do conhecimento.



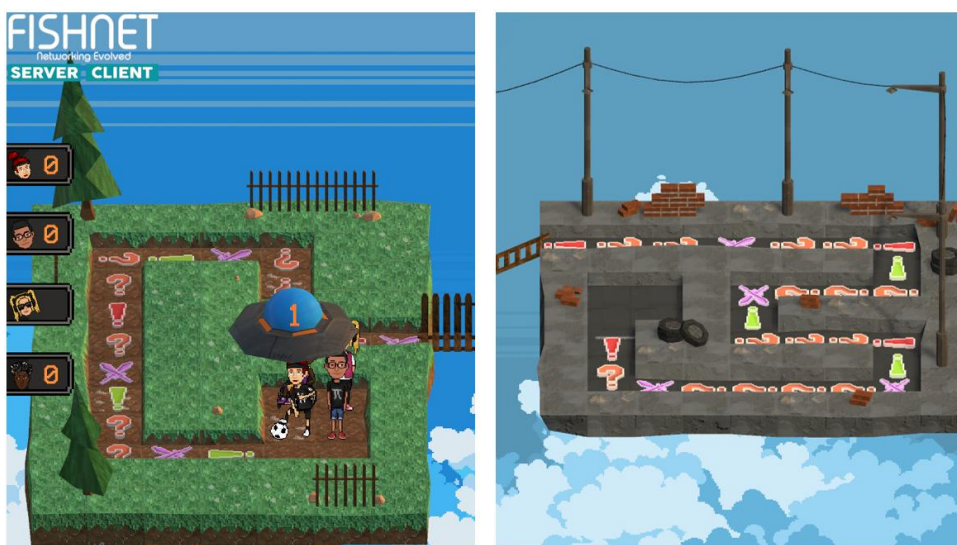
**Figura 2** - Tela inicial e primeira fase do jogo.

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

*InterstellarMath*, cuja proposta se baseia no trabalho de conclusão de curso de Silva (2022), articulando um *Game Design Document* (GDD) voltado ao 7º ano do Ensino Fundamental. O objetivo do jogo é complementar o uso do livro didático "Matemática, Projeto Teláris" (Dante, 2018), permitindo que professores avaliem e motivem os alunos em atividades pedagógicas gamificadas.

A narrativa gira em torno de uma invasão alienígena que altera as leis da natureza, levando os jogadores a percorrerem um tabuleiro flutuante composto por casas de perguntas, minigames e pegadinhas alienígenas. Cada elemento pode impactar o avanço ou retrocesso do jogador no percurso. O jogo é desenvolvido em 3D, com partes do cenário e personagens em 2D, e a jogabilidade segue a dinâmica de turnos, permitindo que cada jogador acompanhe as ações dos demais.

O banco de dados do jogo armazena questões alinhadas à BNCC, à Matriz de Referência de Matemática do Paraná e aos capítulos iniciais do livro didático, possibilitando avaliação precisa de habilidades matemáticas. Os *minigames*, como o "Caça ao Tesouro", oferecem desafios rápidos e interativos que reforçam o aprendizado, combinando diversão com prática pedagógica (Rabin, 2011; Rogers, 2013). A Figura 3 apresenta o tabuleiro principal do jogo junto da cena de um minigame.



**Figura 3** - Tabuleiros do jogo *InterstellarMath*.

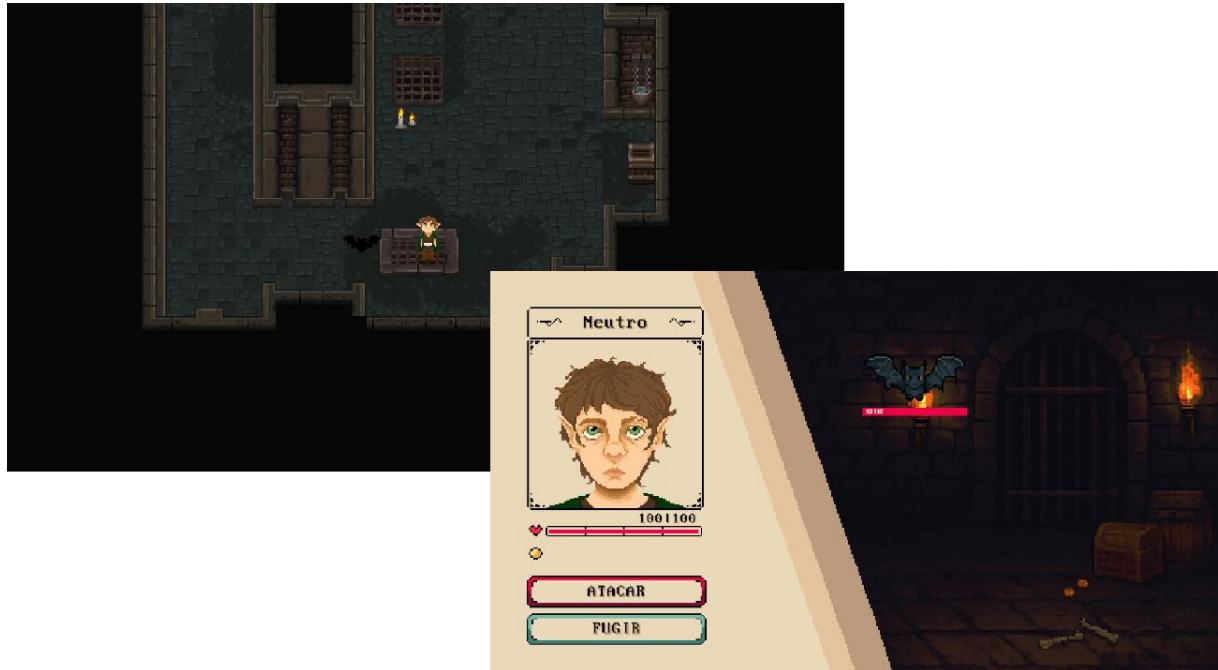
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

*Shadows of Linusbae* representa a produção mais recente e ainda está em desenvolvimento. Trata-se de um RPG de aventura com batalhas em turnos, centrado na exploração de dungeons e progressão do personagem. O jogador assume o papel de *Vicent*, um jovem órfão em busca de redenção e do sonho de possuir sua própria fazenda.

O enredo envolve conflitos entre diversos reinos, cada um com línguas e religiões próprias, e inclui histórias de intrigas políticas, legados de personagens como a princesa Selina, e elementos de fantasia que se articulam com o desenvolvimento de habilidades do protagonista. O jogo combina narrativa rica com mecânicas de combate estratégico, aquisição de equipamentos e habilidades, exploração de cenários e resolução de desafios em sequência, reforçando competências cognitivas e pensamento estratégico.

O público-alvo são estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, e o design do jogo prioriza a aprendizagem através da aventura e da tomada de decisões. A estrutura de *Shadows of Linusbae* incorpora componentes modulados na *Unity*, permitindo que atributos, mecânicas e dados transitam entre cenas, garantindo escalabilidade e flexibilidade na adição de novas fases, inimigos e elementos narrativos. O estilo visual medieval-fantasia, com

ambientes sombrios e detalhados, complementa a experiência imersiva, promovendo engajamento e motivação dos jogadores.



**Figura 4** - Primeira fase à esquerda e cena de luta.

**Fonte:** Elaborado pelo autor (2025).

#### 4 Considerações Finais

O presente estudo buscou analisar processos e metodologias aplicadas ao desenvolvimento de jogos educacionais para o ensino de matemática. A utilização de métodos ágeis mostrou-se adequada ao contexto de equipes reduzidas e cooperativas, permitindo flexibilidade, prototipagem rápida e envolvimento ativo dos professores como clientes e coautores.

Os resultados evidenciam que cada jogo exigiu um modelo específico de desenvolvimento: *Shadow of Linusbae* destacou-se pela prototipagem contínua, *InterstellarMath* pela adoção do modelo em espiral apoiado em um GDD prévio proposto por (Silva, 2022) e *Desafio dos Deuses* pela ênfase na persistência de dados e acompanhamento individualizado. Em todos os casos, a validação incremental das mecânicas e a criação de componentes pedagógicos reforçaram a eficácia dos jogos como instrumentos de aprendizagem. Vale destacar que *Shadow of Linusbae* ainda se encontra em fase de desenvolvimento, representando o projeto mais recente. Por se tratar de um trabalho em andamento, novas funcionalidades, ajustes de mecânicas e melhorias na experiência do usuário continuam sendo implementados.

A comparação com a literatura aponta consonância com diferentes autores. Gama (2023) confirma a pertinência dos métodos ágeis em ambientes educacionais, Sena (2017) e Novak (2008) ressaltam o papel estruturante do GDD e evidencia a relevância de modelos iterativos como prototipagem e espiral, ambos aplicados neste estudo. Por sua vez, Huizinga (2012) e Adams (2014) destacam o valor cultural e educativo dos jogos, aspecto refletido na integração entre narrativa, mecânica e objetivos pedagógicos nos projetos analisados.

Conclui-se, portanto, que a combinação entre design pedagógico, EDI e ES gera produtos consistentes no aspecto técnico e educacional, ampliando a qualidade e a sustentabilidade de jogos digitais voltados ao ensino fundamental. Além disso, os resultados sugerem que a reutilização de componentes técnicos e pedagógicos pode sustentar o desenvolvimento de futuros projetos, potencializando a escalabilidade das soluções e fortalecendo o impacto da gamificação no ensino de matemática.

## REFERÊNCIAS

ADAMS, Ernest. **Fundamentals of game design**. 3. ed. New Riders, 2014. Disponível em: [https://www.academia.edu/81247135/Fundamentals\\_of\\_game\\_design](https://www.academia.edu/81247135/Fundamentals_of_game_design). Acesso em: 17 ago. 2025.

BADOCO, J.V. **DESAFIO DOS DEUSES: GAME DESIGN DOCUMENT (GDD) DE UM JOGO PEDAGÓGICO A LUZ DA ENGENHARIA DIDÁTICO-INFORMÁTICA**. 2025. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM, Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR campus de Campo Mourão, 2025.

GAMA, Francisco De Assis De Lima. **Desenvolvimento de games educativos aplicado ao ensino de matematica**. 2023. Tese de Doutorado - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2023.

SENA, Samara. **Jogos digitais educativos: Design propositivos para GDDE**. 2017. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2017.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens: o jogo como elemento da cultura**. São Paulo: Perspectiva, 1955.

NOVAK, Jeannie. **Game development essentials: an introduction**. 3. ed. Boston: Cengage Learning, 2010.

PRENSKY, Marc. **Aprendizagem baseada em jogos digitais**. São Paulo: Editora Senac São Paulo. 2012. Tradução de Eric Yamagute. 575 p.

SILVA, Larissa Arianna Mekelburg da. **Interstellar math: design de um game pedagógico**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2022. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31515>. Acesso em: 19 ago. 2025.

VERGNAUD, G. **L'apprentissage est-il ou non un processo de desenvolvimento?** In: SENSEVY, G. et al. (org.). *Didactique des mathématiques et langage*. Rennes: Presses Universitaires de Rennes, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática, 7º ano: ensino fundamental anos finais**. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. Disponível em: <https://www.edocente.com.br/pnld/telaris-essencial-matematica-7o-ano-objeto-1-pnld-2024-anos-finais-ensino-fundamental/>. Acesso em: 10 abr. 2024.

RABIN, Steve. **Introdução ao desenvolvimento de games**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

ROGERS, Scott. **Level Up! um guia para o design de grandes jogos**. São Paulo: Blucher, 2013. 575 p.

## **PRÁTICAS AVALIATIVAS E SEUS IMPACTOS NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DE ARTIGOS DO EPREM DE 2011 A 2024**

Francisca Caroline Barbosa  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR  
franciscabarbosa@alunos.utfpr.edu.br

Vanessa Largo Andrade  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR  
Jeferson Kuhn Freiburger  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR

### **Resumo**

Este trabalho apresenta um estudo sobre a avaliação em matemática no Ensino Médio e como o tema aparece nos anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), entre os anos de 2011 e 2024. Foram encontrados 24 trabalhos com o descritor “Avaliação” no título, mas apenas oito tratavam diretamente do Ensino Médio. Na pesquisa, de caráter qualitativo, se observou nos trabalhos, relatos de experiências para identificar quais formas de avaliação eram usadas, como eram compreendidas e quais dificuldades surgiam. Os resultados mostraram que muitas propostas tentam aproximar a avaliação do ensino e da aprendizagem, usando recursos como provas em fases, pareceres descritivos, avaliações integradas e atividades de modelagem. Também apareceram desafios, como a falta de formação adequada para os professores, as diferenças entre as turmas e a dificuldade em registrar melhor os processos avaliativos. Em geral, percebe-se um movimento para tornar a avaliação mais formativa e ligada ao aprendizado, mas ainda é preciso ampliar os estudos e investir em formação continuada para consolidar essas práticas.

**Palavras-chave:** Avaliação. Modalidades. Instrumentos Diversificados.

### **1 Introdução**

A avaliação permeia todos os âmbitos da atividade humana, manifestando-se tanto nas escolhas cotidianas quanto nos processos formais, que subsidiam a tomada de decisões. Dessa forma, os valores, crenças e princípios que orientam as práticas pedagógicas nas escolas derivam de um contexto amplo, que expressa a própria construção social da realidade (Dalben, 1998). Nesse sentido, avaliar pode ser compreendido como um processo de investigação da qualidade de uma determinada realidade, o que envolve a obtenção de conhecimento, seja por meio do senso comum ou pela aplicação de métodos consistentes, concluindo-se quando essa qualidade é revelada (Luckesi, 2022).

Quando se trata da prática pedagógica, esse processo avaliativo está diretamente relacionado à atuação do professor. Na perspectiva tradicional, em que o docente é visto como transmissor do conhecimento, sua função se distingue da do avaliador, responsável por verificar se os conteúdos repassados foram efetivamente aprendidos pelo aluno. Nesse

modelo, a avaliação não considera de forma efetiva o que o estudante sabe, buscando apenas a correspondência com um padrão previamente definido em um gabarito. Os resultados são, geralmente, expressos por valores numéricos que representam o conhecimento adquirido (Antunes, Mendes, Dalto; 2017).

Esse modelo repercute diretamente na experiência escolar, uma vez que o aluno se sente pressionado a atender às expectativas docentes, mostrando o quanto compreendeu os conteúdos trabalhados em sala de aula para alcançar determinada nota. No entanto, quando o professor apresenta uma questão avaliativa que se distancia do material registrado no caderno ou trabalhado em sala, o estudante frequentemente se vê incapaz de respondê-la (Santos, 2016).

A avaliação da aprendizagem pode assumir diferentes modalidades, cada uma com finalidades específicas. Segundo Luckesi (2011), a avaliação diagnóstica busca identificar os conhecimentos prévios dos estudantes; a formativa acompanha o processo, oferecendo subsídios para intervenções pedagógicas; e a somativa verifica os resultados ao final de um período, servindo à certificação. Perrenoud (1999) acrescenta a avaliação reguladora, que intervém durante o percurso, favorecendo a progressão e a autonomia dos alunos. Para efetivar essas modalidades, diversos instrumentos podem ser utilizados, como provas escritas, portfólios, mapas conceituais, seminários, autoavaliações e avaliações entre pares, todos escolhidos conforme os objetivos de ensino e a concepção pedagógica adotada.

Diante disso, o presente artigo apresenta como questão de pesquisa, *o que tem sido abordado no EPREM sobre o tema avaliação em matemática no Ensino Médio?* Deste modo, tem como objetivo pesquisar como a avaliação é apresentada em algumas das edições do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM). Para tanto, utilizou-se como base os artigos do evento que trazem o descritor “Avaliação” em seus títulos, com ênfase naqueles que abordam a avaliação na etapa do Ensino Médio. Para a coleta e análise dos dados, um ensaio de Análise de Conteúdo (AC), de Laurence Bardin, foi realizado.

## **2 Metodologia**

A presente pesquisa é de caráter qualitativo, exploratório e documental, fundamentada na análise de trabalhos disponíveis nos anais do evento. A abordagem qualitativa permite compreender o objeto em seu contexto, sem intervenções do pesquisador. Já a pesquisa exploratória busca ampliar o conhecimento sobre o tema, contribuindo para sua delimitação e definição de objetivos (Prodanov; Freitas, 2013). Por sua vez, a pesquisa documental utiliza diferentes tipos de documentos elaborados com finalidades diversas, como registros e comunicações (Gil, 2017).

Um ensaio da Análise de Conteúdo (AC), de Laurence Bardin (2004), foi realizado neste estudo. A AC é uma metodologia de análise de dados, que compreende algumas fases, como a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Estas fases têm origem do conjunto de documentos pesquisados, nomeado de *corpus*.

Inicialmente, realizou-se um levantamento no site<sup>1</sup> da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), direcionando-se a busca para o evento EPREM, com o objetivo de identificar as edições que disponibilizam seus anais de forma online, e constatou-se que, das 17 edições já realizadas, apenas 8 possuíam os anais acessíveis.

Em seguida, procedeu-se à análise de cada uma dessas edições, buscando identificar trabalhos classificados como Comunicação Científica (CC) e Relato de Experiência (RE). Dentro dessas categorias, foi feito um recorte específico: a seleção dos trabalhos que apresentavam em seus títulos o descritor “Avaliação”. Digitou-se o nome do descritor na busca, e esta triagem resultou em um total de 24 trabalhos distribuídos ao longo das edições. As edições com anais disponíveis no site da SBEM são: VII, XI, XII, XIV, XV, XVI e XVII. Cabe destacar que, devido a um problema técnico no site, não foi possível acessar os trabalhos referentes ao XII EPREM, impossibilitando sua inclusão na pesquisa.

Na etapa seguinte, os resumos dos 24 trabalhos foram analisados – etapa da pré-análise (Bardin, 2004), com o intuito de verificar quais abordavam especificamente o tema da avaliação no Ensino Médio. A partir desse processo, identificaram-se 8 trabalhos que atendiam a esse critério. Por fim, realizou-se a exploração deste material (Bardin, 2004), por meio da leitura integral desses oito trabalhos que compõem o *corpus* de pesquisa, de modo a identificar como a avaliação no Ensino Médio é abordada.

Destaca-se que o processo de categorização não foi alcançado, porém códigos foram atribuídos para cada trabalho, a fim de realizar um estudo mais aprofundado no futuro. Um ensaio da fase da categorização foi realizado, mas o destaque é para as duas primeiras fases da AC. Na sequência deste estudo, serão apresentadas as descrições de cada um dos oito trabalhos, e uma tentativa de análise que buscou destacar convergências e divergências entre os estudos, evidenciando as práticas, concepções e enfoques mais recorrentes no contexto investigado.

### **3 Resultados e Discussão**

Concluída a etapa de seleção dos trabalhos, eles foram organizados no Quadro 1.

**Quadro 1 - Trabalhos selecionados para a análise**

<sup>1</sup> <https://sbemparana.com/site/eprem>

| Código   | Título                                                                                                      | Autores                                                                                                                                  | Ano  |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| T1XIIICC | Avaliação da aprendizagem na reinvenção guiada                                                              | Gabriel dos Santos e Silva e Regina Luzia Corio de Buriasco                                                                              | 2015 |
| T2XIIIRE | A cola como instrumento de avaliação em matemática                                                          | Ademir Basso                                                                                                                             | 2015 |
| T3XIVRE  | A análise da produção escrita: um recurso para uma prática de avaliação da aprendizagem                     | Tiago Ponciano Antunes, Marcele Tavares Mendes e Jader Otávio Dalto                                                                      | 2017 |
| T4XIVCC  | Avaliação em matemática: indicadores e apontamentos                                                         | Adriana Stefanello Somavilla, Susimeire Vivien Rosotti de Andrade, Priscila Gleden Novaes da Silva e Carla Renata Garcia Xavier da Silva | 2017 |
| T5XVCC   | Interação entre avaliação formativa e somativa por meio de uma prova em duas fases                          | Talita Canassa Weber, Marcele Tavares Mendes e Leandro Meneses da Costa                                                                  | 2019 |
| T6XVICC  | A avaliação da aprendizagem matemática a partir de pareceres descritivos em uma escola itinerante do Paraná | Jader Gustavo De Campos Santos Línlya Sachs                                                                                              | 2022 |
| T7XVIIRE | Avaliação integrada em matemática I - Empreendedorismo                                                      | Ademir Basso e Marelice Aparecida Bonato                                                                                                 | 2024 |
| T8XVIIRE | Dificuldades e desafios na realização e avaliação de uma prática com modelagem matemática                   | Bianca Silveira e Neila Tonin Agranionih                                                                                                 | 2024 |

Fonte: Autoria própria (2025).

### 3.1 Descrições dos artigos

#### 3.1.1 Avaliação da aprendizagem na reinvenção guiada

O artigo traz a discussão sobre a avaliação no âmbito da Educação Matemática Realística (RME), com foco no processo de reinvenção guiada. Nessa perspectiva, a matemática é compreendida como uma atividade humana, aprendida pela ação e pela construção de significados em situações realísticas. O estudante é convidado a reinventar conteúdos matemáticos com a mediação do professor, que orienta o percurso por meio de intervenções.

A avaliação, nesse contexto, não se reduz a provas tradicionais, mas é entendida como um processo contínuo de investigação, que busca compreender as produções dos estudantes

e fornecer subsídios para a aprendizagem. Um recurso importante é a análise da produção escrita, que revela como os alunos interpretam problemas, elaboram estratégias e enfrentam dificuldades. Esse procedimento pode ser tanto avaliativo quanto didático, já que permite ao estudante reorganizar suas ideias a partir do feedback recebido. Entre os instrumentos apontados estão provas em fases, provas orais, entrevistas e até provas com consulta. A prova em fases se destaca por possibilitar ao aluno revisar respostas, corrigir erros e aprofundar estratégias com apoio das intervenções do professor. Assim, a avaliação na reinvenção guiada torna-se parte do processo de ensino, assumindo caráter formativo e investigativo.

### **3.1.2 A cola como instrumento de avaliação em matemática**

O artigo T2XIIIIE traz uma reflexão sobre o modo como a avaliação costuma ser conduzida nas escolas e descreve uma experiência com uma turma da 1ª série do Ensino Médio. Em geral, a avaliação em matemática ainda mantém caráter tradicional, que exige apenas a reprodução de definições e cálculos, desvaloriza os conhecimentos prévios dos estudantes e não revela suas dificuldades. Nesse modelo, os alunos recorrem a estratégias como a memorização de fórmulas e o uso de colas, vistas normalmente como algo ruim. O trabalho propõe transformar esse hábito em recurso pedagógico, estimulando o estudo e a aprendizagem durante o processo avaliativo.

A experiência foi organizada em quatro momentos ao longo de um trimestre. A primeira avaliação foi tradicional, sem consulta, servindo como ponto de comparação. Na segunda, os alunos tiveram direito a três consultas rápidas ao caderno. A terceira introduziu a “cola oficial”: cada estudante recebeu um pequeno papel, com marcas do professor, no qual poderia registrar fórmulas, conceitos e exemplos, sendo esse o único recurso permitido. Por fim, a quarta ocorreu com consulta livre ao caderno e ao livro didático, mas com questões mais complexas. Essa progressão permitiu vivenciar diferentes formas de avaliação, desde a lembrança direta até a organização prévia dos conteúdos.

Os resultados foram positivos: a turma mostrou maior interesse e engajamento, e preparar a cola tornou-se momento de estudo e síntese. A média geral foi 7,1, com apenas três alunos abaixo da média. O autor conclui que a cola, quando institucionalizada, pode deixar de ser problema disciplinar e contribuir para a aprendizagem.

### **3.1.3 A análise da produção escrita: um recurso para uma prática de avaliação da aprendizagem**

O artigo trata da prova escrita como instrumento de avaliação, ressaltando que sua utilização, quando limitada à verificação de acertos e erros em relação a um gabarito, reduz-

se a uma prática somativa e classificatória. Nesse modelo, perde-se a oportunidade de compreender habilidades já desenvolvidas pelos estudantes e identificar dificuldades ao longo do processo. Os autores defendem que a prova escrita pode ser ressignificada e transformada em recurso investigativo, capaz de fornecer informações tanto para o professor, ao reorientar sua prática, quanto para o aluno, ao regular sua aprendizagem.

A pesquisa tem caráter qualitativo e interpretativo e foi realizada com uma turma de 25 alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, com idades entre 15 e 16 anos, em uma escola pública de Santa Mariana-PR. O instrumento utilizado foi uma prova escrita composta por quatro problemas, entre eles uma questão do PISA envolvendo porcentagem, escolhida para análise detalhada. A correção seguiu critérios de classificação (errado, parcialmente correto e correto) e as produções foram agrupadas conforme semelhanças de estratégias. O estudo mostrou que, mesmo quando os alunos não chegaram à resposta esperada, suas produções revelaram conhecimentos, procedimentos iniciados e dificuldades específicas.

A análise evidenciou que a produção escrita possibilita ao professor compreender modos de pensar dos alunos e localizar dificuldades, muitas vezes relacionadas a lacunas de séries anteriores. A partir disso, os autores propõem a Prova em Fases, modelo no qual o aluno tem acesso a diferentes momentos de resolução, podendo retomar e revisar suas respostas após intervenções do professor. Essa proposta transforma a prova em processo de regulação da aprendizagem, em que o erro deixa de ser apenas falha e passa a ser parte constitutiva do aprendizado.

### **3.1.4 Avaliação em Matemática: indicadores e apontamentos**

Os autores investigam o papel das avaliações em larga escala no ensino de matemática, com foco nos resultados do PISA e do SAEB. O texto analisa como esses indicadores vêm sendo utilizados para medir a qualidade da educação no Brasil e evidencia avanços e limitações desse modelo avaliativo. A pesquisa tem caráter documental e parte de relatórios como *De Olho nas Metas 2011*, o boletim do PISA 2012 e o relatório *Brasil no PISA 2015*, relacionando-os ao contexto educacional brasileiro.

Na análise dos dados do PISA 2015, observa-se que o Brasil apresentou melhor desempenho em questões ligadas à quantidade e situações cotidianas, mas manteve fragilidades em tópicos como geometria e raciocínio espacial. O relatório destaca desigualdades entre redes de ensino, especialmente o melhor desempenho dos alunos da rede federal, associado ao maior investimento e melhores condições de trabalho dos professores. Também evidencia dificuldades de superar problemas históricos, como a desvalorização do ensino de geometria e as lacunas na formação de professores.

O PISA 2012 reforça esse cenário ao mostrar o Brasil entre os dez países com menor desempenho em matemática, com forte relação entre baixo rendimento e fatores como repetência, distorção idade-série, baixo nível socioeconômico e ausência de educação pré-escolar. Esses resultados apontam consequências no abandono escolar e na inserção no mercado de trabalho. O artigo discute ainda o diálogo entre PISA e SAEB, mostrando convergências, embora existam diferenças quanto ao momento em que certos conteúdos são abordados no currículo. Apesar disso, ambas exigem competências como matematização, comunicação e resolução de problemas. Nas considerações finais, os autores ressaltam que, embora úteis para diagnóstico, os indicadores não podem ser tomados isoladamente, pois reduzem a avaliação a um olhar quantitativo.

### **3.1.5 Interação entre avaliação formativa e somativa por meio de uma prova em duas fases**

O artigo apresenta uma proposta de integração entre duas concepções avaliativas que, em geral, aparecem dissociadas no contexto escolar. A investigação ocorreu em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, com 21 estudantes de uma escola de Londrina, desenvolvida no âmbito de um projeto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O objetivo foi mostrar como a prova em duas fases pode favorecer tanto a certificação do rendimento quanto a regulação da aprendizagem.

O estudo discute os conceitos de avaliação formativa e somativa, apontando que, embora possuam funções distintas, ambas podem se complementar. A formativa busca acompanhar o processo de aprendizagem, regulando e orientando o aluno, enquanto a somativa concentra-se na certificação ao final de uma etapa. Os autores defendem que não é o instrumento que determina o caráter da avaliação, mas o modo como o professor utiliza as informações produzidas. Assim, a prova em duas fases surge como possibilidade de entrelaçar os dois tipos.

Foi aplicada uma prova em duas fases: primeiro os alunos resolveram as questões sem intervenção e depois receberam devolutivas escritas do professor, que indicavam caminhos para reflexão. Na segunda fase, puderam rever e reformular suas resoluções. Os exemplos mostraram que, enquanto alguns estudantes avançaram, outros mantiveram dificuldades, evidenciando tanto o potencial quanto os limites da prática. Os resultados revelam que, embora as diferenças quantitativas não tenham sido expressivas, o processo qualitativo trouxe ganhos significativos. A proposta mostrou-se eficaz para estimular a autonomia dos estudantes, promover reflexões e favorecer a construção de conhecimentos. Os autores concluem que a articulação entre formativo e somativo deve ser vista como

complementar, possibilitando uma avaliação mais justa e próxima da realidade escolar, em que o professor assume papel ativo como mediador do processo.

### **3.1.6 A avaliação da aprendizagem matemática a partir de pareceres descritivos em uma escola itinerante do Paraná**

O artigo analisa o processo de avaliação da aprendizagem matemática em uma escola itinerante do Paraná, tendo como foco os Pareceres Descritivos utilizados em substituição às notas. Essas escolas, ligadas ao Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra, organizam-se em ciclos de formação humana e adotam práticas avaliativas fundamentadas na coletividade, no acompanhamento contínuo e na perspectiva formativa.

A pesquisa concentrou-se nos registros produzidos em 2021 pelos professores de Matemática da Escola Itinerante Valmir Motta de Oliveira, envolvendo Cadernos de Acompanhamento e Pareceres Descritivos de estudantes do Ensino Fundamental e Médio. Foram analisados três registros em Caderno de Acompanhamento e 13 Pareceres Descritivos, com limitações devido à pandemia. Os resultados mostraram que os registros valorizam a aprendizagem e o desenvolvimento integral dos educandos, contemplando aspectos cognitivos e comportamentais. Em alguns casos, os professores indicaram dificuldades específicas e sugeriram intervenções, como retomadas de conteúdos ou encaminhamento para salas de recursos, reforçando o caráter formativo da avaliação. Contudo, também foram observadas fragilidades, como descrições pouco detalhadas ou semelhantes entre diferentes alunos, o que reduz a individualização e o potencial diagnóstico.

O estudo conclui que a avaliação por meio de Pareceres Descritivos contribui para superar o caráter classificatório das notas e fortalece o acompanhamento contínuo. Porém, exige maior cuidado na elaboração dos registros e investimento na formação docente, para consolidar uma prática avaliativa efetivamente qualitativa e inclusiva.

### **3.1.7 Avaliação integrada em Matemática I – Empreendedorismo**

O artigo apresenta uma experiência com estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Colégio CEPACS, em Mariópolis-PR. O objetivo foi integrar a avaliação ao processo de ensino, utilizando múltiplos instrumentos reunidos em um inventário de aprendizagem. A proposta rompe com o modelo tradicional de provas finais, adotando práticas diversificadas e contínuas.

Durante o trimestre, diferentes recursos foram aplicados: questionário diagnóstico de múltipla escolha, post-its sobre expectativas, desenhos ou bonecos de heróis inspiradores, produção de textos para resolver situações-problema, criação de projetos inovadores, mapas mentais sobre redes de relacionamento, atividades de criatividade com círculos, árvores

empreendedoras e um relatório após visita técnica à empresa Atlas Eletrodomésticos. Essas tarefas permitiram aos alunos desenvolver competências empreendedoras, exercitar a criatividade e relacionar conteúdos matemáticos a situações reais. Os resultados mostraram maior envolvimento e motivação dos estudantes, que se aplicaram mais nas atividades e valorizaram a proposta diferenciada. A avaliação deixou de ter caráter apenas classificatório, passando a ser processual e formativa. Professores, equipe pedagógica e direção ressaltaram a mudança de postura dos alunos e a efetividade do trabalho. O estudo conclui que a avaliação integrada ao ensino promove aprendizagem mais significativa, em que avaliar e aprender acontecem de forma simultânea.

### **3.1.8 Dificuldades e desafios na realização e avaliação de uma prática com Modelagem Matemática**

Neste artigo temos um relato de experiência desenvolvido com uma turma de 2º ano do Ensino Médio em Curitiba-PR, no ano de 2023. A proposta integrou uma pesquisa de mestrado e teve como referência o instrumento avaliativo elaborado por Veleda e Burak, composto por quadros de competências que orientam a observação das ações e interações dos estudantes ao longo da prática. A intenção foi compreender como esse recurso pode apoiar o acompanhamento do desenvolvimento dos alunos em atividades de Modelagem Matemática.

A experiência revelou que, embora a Modelagem possibilite tornar as aulas mais dinâmicas e próximas da realidade, sua implementação apresenta inúmeros desafios. A turma era heterogênea, com dificuldades em conteúdos básicos, como frações, porcentagem e notação numérica, além de problemas de organização e indisciplina. Os grupos foram organizados por afinidade e escolheram temas distintos, como Neymar, o filme da Barbie e o mercado de trabalho, mas nem todos avançaram até a conclusão das etapas. Enquanto alguns aplicaram conceitos matemáticos de forma contextualizada, outros enfrentaram obstáculos na coleta de dados, na clareza dos problemas ou no engajamento.

No processo avaliativo, a professora-pesquisadora precisou adaptar o instrumento para facilitar o uso, condensando observações em uma única folha com códigos para cada estudante. Ainda assim, destacou a dificuldade de conciliar o papel de mediadora com o de avaliadora, o que exigiu registros complementares fora da sala. Em alguns momentos, a avaliação ficou em segundo plano. A análise final ressaltou que o instrumento, apesar de limitações, funcionou como guia para retomar competências e direcionar ações. O estudo conclui que a Modelagem exige domínio teórico e flexibilidade, e que a avaliação deve ser entendida como observação contínua, sendo o instrumento de Veleda e Burak um recurso válido, embora desafiador.

#### **4 Considerações Finais**

Neste trabalho buscou-se apresentar reflexões a respeito da questão: *o que tem sido abordado no EPREM sobre o tema avaliação em matemática no Ensino Médio?* Neste sentido, constatou-se que os trabalhos apresentam em sua maioria, que a utilização de estratégias e ou instrumentos diversificados de avaliação são relevantes. Considerar os conhecimentos prévios dos alunos ao propor uma avaliação, analisar o processo de resolução das questões e não somente o resultado final, são ações importantes para se avaliar em sala de aula.

De forma geral, os trabalhos apontam que a avaliação em matemática deve estar integrada ao processo educativo, assumindo função reguladora e investigativa. Avaliar não se restringe a medir resultados, mas a acompanhar o desenvolvimento dos estudantes, favorecendo sua participação ativa, a reflexão sobre seus conhecimentos e a construção de aprendizagens mais significativas.

O processo de resolução de uma questão pode revelar conhecimentos importantes do aluno, bem como, suas dificuldades. Unir avaliação somativa com a formativa surge como possibilidade. Percebeu-se ainda que a avaliação pode assumir caráter formativo quando utilizada como investigação, permitindo identificar avanços, dificuldades e modos de pensar dos alunos. O erro passa a ser entendido como parte do processo e não apenas como falha. A integração entre avaliação formativa e somativa surge como alternativa para tornar a prática mais justa e significativa. Além disso, propostas que envolvem projetos, modelagem matemática, pareceres descritivos ou provas em fases ampliam as possibilidades avaliativas, aproximando ensino e aprendizagem.

Destaca-se que há indícios, pelo número de trabalhos sobre a avaliação no Ensino Médio, que ainda se tem muito a investigar sobre o assunto, mas observa-se que esta pesquisa foi realizada em um evento paranaense, restrita aos anais disponíveis para acesso online, o que limita muito as considerações sobre o tema. Futuramente, pode-se ampliar a pesquisa tanto a nível nacional como internacional, por se tratar de um assunto de relevância para a Educação Matemática, principalmente no que diz respeito ao dia a dia de sala de aula do professor que ensina Matemática.

#### **REFERÊNCIAS**

BARDIN, L. Análise de conteúdo. Lisboa: Edições 70, 2004.

DALBEN, Ângela Imaculada Loureiro de Freitas. A avaliação escolar: um processo de reflexão da prática docente e da formação do professor no trabalho. 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1998.

- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2015, Ponta Grossa. Avaliação da aprendizagem na reinvenção guiada. Ponta Grossa, 2015. 14 p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxiii/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2015, Ponta Grossa. A cola como instrumento de avaliação em matemática. Ponta Grossa, 2015. 10 p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxiii/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Cascavel. A análise da produção escrita: um recurso para uma prática de avaliação da aprendizagem. Cascavel, 2017. 15 p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxiv/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Cascavel. Avaliação em matemática: indicadores e apontamentos. Cascavel, 2017. 12 p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxiv/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. Interação entre avaliação formativa e somativa por meio de uma prova em duas fases. Londrina, 2019. 14p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxv/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2022, Foz do Iguaçu. A avaliação da aprendizagem matemática a partir de pareceres descritivos em uma escola itinerante do Paraná. Foz do Iguaçu, 2022. 14p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvi/comunicacao-cientifica.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2024, Curitiba. Avaliação integrada em matemática I - Empreendedorismo. Curitiba, 2024. 10p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvii/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2024, Curitiba. Dificuldades e desafios na realização e avaliação de uma prática com modelagem matemática. Curitiba, 2024. 11p. Disponível em: <https://sbemparana.com/arquivos/anais/epremxvii/anais.php>. Acesso em: 05 set. 2025.
- GIL, A. C. Como Elaborar Projetos de Pesquisa. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação em educação: questões epistemológicas e práticas. São Paulo: Cortez, 2022.
- LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação da Aprendizagem Escolar: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- PERRENOUD, Philippe. Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. D. Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. S.l.: Editora Feevale, 2013.
- SANTOS, Déborah Cristina Kich de Los. Avaliação da aprendizagem escolar: uma reflexão sobre a prática docente. Orientador: Valdecir Soligo. Cascavel: UNIOESTE, 2016.

## O CUBO MÁGICO SOB A ÓTICA DA TEORIA DOS GRUPOS

Isabelly Birck  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná  
isabellybirck@alunos.utfpr.edu.br

Victória Eduarda Gonçalves da Silva  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Patrick de Azevedo Laismann  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Adriano Gomes de Santana  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

### Resumo

Este artigo apresenta uma introdução à matemática presente no quebra-cabeças conhecido como cubo mágico, explorando-o sob a ótica da teoria de grupos. O objetivo central não é aprofundar os resultados avançados dessa teoria, mas sim destacar conceitos fundamentais que permitem compreender como os movimentos do cubo podem ser descritos e organizados matematicamente. Para isso, são discutidas noções como conjuntos, operações e propriedades estruturais que caracterizam um grupo, relacionando-as as transformações possíveis no cubo. Dessa forma, busca-se mostrar que cada movimento corresponde a uma permutação e que a coleção de todas essas operações forma um grupo com características próprias. Com isso, busca-se tornar acessível a interpretação matemática por trás do brinquedo, aproximando a teoria abstrata da prática concreta do quebra-cabeças. Assim, o trabalho contribui para despertar o interesse na aplicação da álgebra abstrata em contextos lúdicos e visuais, evidenciando como a matemática pode estar presente em situações cotidianas e recreativas.

**Palavras-chave:** Cubo Mágico. Grupo de Rubik. Teoria dos Grupos. Homomorfismos. Órbita e Algoritmos

## 1 Introdução

O Cubo Mágico foi inventado em 1974 pelo arquiteto e professor húngaro Ernő Rubik. Seu objetivo inicial era criar uma ferramenta pedagógica para ajudar seus alunos a entender conceitos de geometria tridimensional. O primeiro protótipo era feito de madeira, elásticos e adesivos coloridos. Em 1975, Rubik registrou a patente do cubo na Hungria.

Além de seu caráter lúdico e desafiador, o brinquedo desperta grande interesse em diferentes áreas do conhecimento, em especial na matemática, por apresentar uma estrutura rica que pode ser descrita formalmente por meio da teoria de grupos. Cada movimento realizado no cubo corresponde a uma transformação que pode ser modelada matematicamente, permitindo explorar conceitos abstratos de forma visual e concreta.

A teoria de grupos, por sua vez, constitui um dos ramos centrais da álgebra moderna e fornece ferramentas para analisar estruturas algébricas que obedecem a determinadas propriedades. Ao relacionar o cubo mágico com essa teoria, é possível não apenas compreender melhor os mecanismos por trás do quebra-cabeças, mas também aproximar conteúdos tradicionalmente considerados abstratos de situações cotidianas e recreativas.

Neste trabalho, busca-se apresentar de maneira introdutória como os movimentos do cubo podem ser organizados e descritos dentro do formalismo matemático da teoria de grupos. Para isso, serão discutidas definições fundamentais, exemplos de aplicações no cubo mágico e exercícios que ilustram como noções como geradores, subgrupos, homomorfismos, órbitas e algoritmos se manifestam nesse contexto. A proposta é evidenciar que a matemática, para além de sua formalidade, pode ser acessível e estimulante quando associada a objetos do cotidiano, contribuindo para despertar interesse e ampliar a compreensão da álgebra abstrata.

## 2 Teoria dos Grupos

A presente seção tem como objetivo apresentar algumas das principais definições da teoria dos grupos, utilizadas como base para a tradução dos conceitos do quebra-cabeças cubo mágico para essa teoria matemática. Não buscamos aqui a exaustividade, mas sim oferecer um panorama inicial com os elementos fundamentais necessários para a compreensão dessa relação. Ressaltamos que o leitor interessado em um aprofundamento poderá encontrar em [1] e [2] estudos mais detalhados, tanto sobre a teoria dos grupos, quanto sobre suas aplicações específicas na análise do cubo mágico. Os trabalhos [3] e [7] estabelecem as notações de faces e movimentos adotadas neste trabalho. Outros trabalhos que também abordam o tema da teoria de grupos e o cubo mágico, são [4], [5], [6]. No mais, [8] apresenta uma abordagem mais pedagógica do tema.

**Definição 2.1** (grupo). *Dado um conjunto  $G$  e uma operação  $\circ$  sobre  $G$ , dizemos que  $(G, \circ)$  é um grupo se:*

1. (associatividade): para todo  $a, b, c \in G$ ,  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ;
2. (elemento neutro): existe  $e \in G$  tal que para todo  $a \in G$ ,  $a \circ e = e \circ a = a$ ;
3. (invertibilidade): para todo  $a \in G$ , existe  $a' \in G$  tal que  $a \circ a' = a' \circ a = e$ .

Chamamos  $e$  de elemento neutro da operação  $\circ$  ou do grupo. Na maioria das vezes escreveremos  $aa'$  ao invés de  $a \circ a'$ .

Nem sempre num grupo  $ab = ba$ . Se isso sempre ocorre, dizemos que é um grupo abeliano.

**Definição 2.2** (subgrupo). *Dado um grupo  $(G, \circ)$  e um subconjunto  $H \subset G$ , dizemos que  $(H, \circ)$  é um subgrupo de  $(G, \circ)$  se  $(H, \circ)$  é um grupo.*

**Definição 2.3** (geradores). *Dado um grupo  $(G, \circ)$  e  $a_1, \dots, a_n \in G$  denotamos por  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  ao menor subgrupo de  $G$  que contém os elementos  $a_1, \dots, a_n$ . Dizemos que um (sub)grupo  $(H, \circ)$  é cíclico se  $(H, \circ) = \langle a \rangle$ .*

Se o grupo  $(G, \circ) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , então todo elemento de  $G$  pode ser representado por uma sequência de produto dos elementos  $a_1, \dots, a_n$  e seus inversos. Por exemplo  $a = a_1 a_3 a'_5 a'_2 a'_1$  é um desses elementos.

**Definição 2.4** (homomorfismo). *Sejam  $(G, \circ)$  e  $(H, *)$  dois grupos. Um homomorfismo do grupo  $G$  para o grupo  $H$  é uma função  $f : G \rightarrow H$  tal que, para todo  $a, b \in G$ ,  $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ .*

*Um homomorfismo bijetor é denominado **isomorfismo**.*

**Definição 2.5** (ação de grupo). *Sejam  $(G, \circ)$  um grupo e  $X$  um conjunto. Dizemos que  $G$  age (à direita) sobre  $X$  se para qualquer par  $(x, a) \in X \times G$ , existe um elemento  $x \cdot a \in X$ , tal que:*

1.  $x \cdot (a \circ b) = (x \cdot a) \cdot b$ ;
2.  $x \cdot e = x$ .

**Definição 2.6** (órbita). *Sejam  $(G, \circ)$  um grupo que age (à direita) sobre um conjunto  $X$ ,  $(H, \circ)$  um subgrupo de  $(G, \circ)$  e  $x \in X$ . Então  $H$  também age (à direita) sobre  $X$ . A órbita de  $x$  com relação a ação de  $H$  sobre  $X$  é o subconjunto*

$$o_H(x) = \{y \in X : \exists a \in H, y = x \cdot a\}.$$

### 3 Grupo de Rubik

Para aplicar a teoria de grupos ao quebra cabeças do cubo mágico precisamos nomear alguns elementos, especificamente, precisamos dizer que objetos formam os elementos desse grupo, qual o conjunto  $G$  desses elementos e qual a operação  $\circ$ . Mais do que isso, precisamos estar consciente de que as propriedades 1, 2 e 3 da definição de grupo são satisfeitas.

A resolução do Cubo Mágico tradicionalmente utiliza uma notação, criada para padronizar a descrição dos movimentos. Essa notação adota letras que representam cada uma das seis faces do cubo, sempre considerando a perspectiva do jogador. Assim, temos:

- $R$  (*Right*): corresponde à face da *direita*;
- $L$  (*Left*): corresponde à face da *esquerda*;
- $U$  (*Up*): corresponde à face *superior*;
- $D$  (*Down*): corresponde à face *inferior*;
- $F$  (*Front*): corresponde à face da *frente*;
- $B$  (*Back*): corresponde à face de *trás*.

Cada letra, isoladamente, indica um giro de  $90^\circ$  no sentido horário da respectiva face, observado diretamente de frente para ela. As variações são indicadas por símbolos adicionais: a presença de um apóstrofo (por exemplo,  $R'$ ) significa que o movimento deve ser feito  $90^\circ$  no sentido anti-horário, enquanto um número (por exemplo,  $R^2$ ) indica uma rotação de  $180^\circ$ .

Essa padronização possibilita a comunicação clara e universal de algoritmos de resolução, garantindo que diferentes praticantes possam reproduzir as mesmas sequências de movimentos sem ambiguidades.

Dizemos que uma configuração do cubo mágico é válida se pode ser resolvida aplicando alguma sequência dos movimentos básicos  $R L F B U$  e  $D$ . Vamos chamar de  $C$  o conjunto de todas as configurações válidas do cubo mágico. Seja  $e \in C$  a configuração em que o cubo se encontra resolvido.

Note que qualquer sequência dos movimentos básicos define uma função  $f : C \rightarrow C$ . Resolver o cubo mágico que está em uma configuração  $c \in C$  nada mais é do que aplicar a sequência de movimentos que define a função  $f : C \rightarrow C$  tal que  $f(c) = e$ . Note que o

conjunto dessas funções com a operação de composição de funções é um grupo. A esse grupo chamamos de Grupo de Rubik e vamos denotá-lo por  $G$ .

Cabe destacar que os exemplos apresentados são expostos após a introdução do método de resolução por camadas. Nesse contexto, a utilização dos conceitos de teoria dos grupos não apenas reforça a compreensão estrutural do Cubo Mágico, mas também permite a elaboração de novas estratégias de resolução. Um exemplo claro é a possibilidade de substituir a repetição de cinco vezes da sequência  $RDR'D'$  pela aplicação direta da sequência  $R'D'RD$ , evidenciando como a análise algébrica fornece alternativas mais eficientes e generalizáveis para o processo de resolução.

**Exemplo 3.1:** Qual a sequência deve ser aplicada ao cubo que foi embaralhado fazendo  $RDR'D'$ ? *Resposta:* para desfazer um embaralhamento, aplicamos a *sequência inversa*. Isso significa inverter a ordem dos movimentos e trocar cada um pelo seu inverso. Assim, a sequência original é  $RDR'D'$ ; invertendo a ordem, obtemos  $D'R'DR$ ; e substituindo cada movimento pelo seu inverso, chegamos a  $DRD'R'$ . Portanto, a sequência inversa é  $DRD'R'$ .

**Exemplo 3.2:** Qual sequência define a função identidade  $id(c) = c$ ? *Resposta:* a identidade é o estado inicial do cubo, sem nenhuma alteração. Nesse caso, a **sequência vazia** representa a identidade, pois corresponde a não realizar movimento algum. Entretanto, outras sequências diferentes também resultam na identidade, como  $RR'$ ,  $UU'$ , ou ainda repetições completas de uma mesma face, como  $R^4$  ou  $U^4$ . Todas essas sequências são equivalentes e podem ser representadas pelo símbolo  $E$ .

**Exemplo 3.3:** A comparação entre diferentes sequências de movimentos mostra duas propriedades importantes do grupo do cubo. Por exemplo,  $FRD$  e  $FDR$  não são iguais, pois os movimentos  $R$  e  $D$  não comutam, já que atuam em faces adjacentes; logo, temos  $FRD \neq FDR$ . Isso evidencia que o grupo do cubo não é abeliano. Por outro lado, ao considerar as sequências  $RLF$  e  $LRF$ , observa-se que  $R$  e  $L$  comutam, pois agem em faces opostas. Assim,  $RLF = LRF$ , mostrando que diferentes sequências podem representar a mesma transformação. Portanto, além de não ser abeliano, o grupo também apresenta a característica de não possuir uma representação única para cada função.

Naturalmente pela definição, o grupo de Rubik  $G$  age à direita do conjunto de configurações válidas  $C$ . Como toda configuração válida  $c$  é obtida aplicando uma sequência  $S$  sobre a configuração do cubo resolvido  $e$ , podemos escrever

$$c = e \cdot S$$

Assim, existe uma associação biunívoca entre configurações  $c \in C$  como elementos  $S \in G$  dada pela equação acima.

**Exemplo 3.4:** Queremos descobrir qual será a sequência  $S$  de três movimentos para obter a configuração da Figura 1. *Resposta:* para encontrar uma sequência curta que produza a configuração desejada, parte-se da observação da figura, identificando quais peças mudaram em relação ao cubo resolvido. Em seguida, consideram-se rotações simples, uma vez que são apenas três movimentos, explorando combinações como  $R$ ,  $U$ ,  $F$  e suas inversas. A partir disso, constroem-se sequências candidatas, como  $RUR'$  ou  $FRU$ , que movem poucas peças e podem gerar o padrão apresentado. Por fim, verifica-se no cubo a adequação da sequência, aplicando-a ao cubo resolvido e comparando o resultado com a configuração da Figura 1. Assim, a sequência  $S$  é justamente aquela que, ao ser aplicada ao cubo resolvido, gera a configuração exibida. No caso da imagem, a sequência que corresponde à configuração é  $FRU$ .

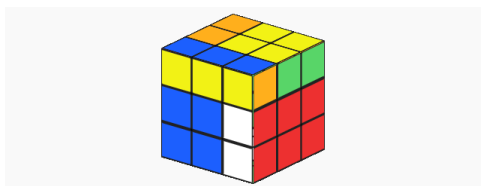


Figura 1: Uma configuração. Fonte: Autores

**Exemplo 3.5:** A Figura 2 representa casos típicos para resolver os vértices da primeira camada, que podem ser solucionados aplicando repetidamente a sequência  $RU R' U'$ .



Figura 2: Casos dos vértices da 1ª camada. Fonte: Autores

A ordem dessa sequência é 6, ou seja,

$$(RU R' U')^6 = E$$

onde  $E$  representa a identidade. Portanto, **6 repetições** retornam o cubo ao estado inicial.

Esse exemplo destaca o uso de sequências de movimentos no cubo de Rubik. É importante observar que podem existir sequências diferentes que representam o mesmo elemento do cubo e que uma mesma configuração pode ser descrita por uma sequência.

Portanto, ao repeti-la seis vezes consecutivas, o cubo retorna à configuração inicial. No entanto, em situações específicas, como no primeiro caso ilustrado na Figura 2, a quantidade de repetições necessárias varia de acordo com a orientação do canto superior direito. Se o adesivo da cor da face superior estiver voltado para a face direita, uma única aplicação de  $RU R' U'$  costuma ser suficiente para inserir o vértice corretamente. Já quando o adesivo da face superior está voltado para a face frontal, normalmente são necessárias duas aplicações sucessivas para que o vértice seja orientado e inserido de maneira adequada.

Uma alternativa bastante utilizada para ajustar o vértice consiste na sequência  $R' D' R D$  aplicada quando o vértice-alvo está posicionado na quina frontal-direita-inferior. Caso o canto não esteja inicialmente nessa posição, pode-se recorrer a um conjugado da forma  $X R' D' R D X^{-1}$ , em que  $X$  é uma rotação responsável por levar o vértice à posição correta antes da aplicação do algoritmo.

Assim, observamos que o grupo de Rubik  $G$  é gerado pelos movimentos básicos, isto é,

$$G = \langle R L F B U D \rangle$$

Como o número de configurações possíveis do cubo mágico é finito, também é finito o número de elementos do grupo. Isso implica que qualquer sequência escolhida, quando aplicada repetidamente a uma configuração, em algum momento retornará o cubo à essa mesma configuração.

**Exemplo 3.6:** Considere a aplicação de diferentes sequências de movimentos no cubo e determine quantas vezes cada uma delas deve ser repetida até que a configuração inicial seja recuperada. *Resposta:* o número de repetições necessárias corresponde à ordem da

sequência, isto é, o menor inteiro positivo  $n$  tal que a aplicação da sequência  $n$  vezes retorna o cubo à posição resolvida.

No caso da sequência  $R$ , cada giro corresponde a um quarto de volta da face direita. Assim, após quatro giros, a face completa uma rotação inteira, de modo que  $R^4 = E$ . Portanto, a ordem de  $R$  é 4. Já a sequência  $R, L$  também possui ordem 4, pois os giros  $R$  e  $L$  atuam em faces opostas e, portanto, comutam, isto é,  $RL = LR$ ; como cada um deles tem ordem 4, o produto também resulta em  $(RL)^4 = E$ .

A sequência  $RU R' U'$  possui ordem 6, pois somente após seis aplicações consecutivas o cubo retorna ao estado inicial, isto é,  $(RU R' U')^6 = E$ . Já a sequência  $R, U$  gera um ciclo mais longo, envolvendo diversas peças do cubo, e sua ordem é 105, o que significa que apenas após 105 repetições o cubo volta à configuração original, ou seja,  $(RU)^{105} = E$ .

Esse exemplo ilustra diretamente o conceito de grupo cíclico, já que cada movimento considerado gera um subgrupo de  $G$  formado por todas as potências desse movimento até retornar à identidade. Por exemplo, no caso de  $R$ , temos o subgrupo gerado por esse movimento, que é formado pelos elementos  $R, R^2, R^3$  e  $E$ . Assim, vemos que a estrutura obtida não é apenas um conjunto de movimentos, mas sim um subgrupo cíclico de  $G$ .

**Exemplo 3.7:** O subgrupo gerado por um conjunto de movimentos é o conjunto de todos os movimentos que podem ser obtidos aplicando essas sequências em qualquer ordem e quantidade de vezes.

No caso do movimento  $U$ , o subgrupo gerado consiste apenas em giros da face superior; trata-se de um grupo cíclico de ordem 4, pois  $U^4 = E$ .

Quando consideramos  $U$  e  $D'$  simultaneamente, como esses giros atuam em faces opostas e portanto comutam, o subgrupo gerado é isomorfo ao produto direto de dois grupos cíclicos de ordem 4.

De modo análogo, o par  $R$  e  $L$  gera também um subgrupo isomorfo ao gerado por  $U$  e  $D'$ , já que  $R$  e  $L$  são giros de faces opostas e cada um tem ordem 4.

Por outro lado, as faces  $R$  e  $F$  não são opostas e não comutam; o subgrupo gerado por  $R$  e  $F$  é, portanto, mais complexo e não abeliano, contendo combinações de rotações de faces adjacentes e formando uma estrutura com mais elementos.

Finalmente, o conjunto que contém  $RU$  e  $U$  gera o mesmo subgrupo que aquele gerado por  $R$  e  $U$ , pois a partir de  $RU$  e de  $U$  obtém-se  $R$  por conjugação:  $R = (RU)U^{-1}$ . Esse subgrupo é não abeliano e inclui as diversas combinações que afetam as peças manipuladas pelas faces  $R$  e  $U$ .

## 4 Homomorfismos de Simetria

Podemos usar o conceito de homomorfismo de grupos no grupo de Rubik para obter sequências de resolução do quebra cabeças a partir das simetrias do cubo. Por exemplo, observe os casos I e II para resolver a segunda camada

A menos das cores, é como se houvesse um espelho vertical entre os cubos dos casos I e II. Se de fato o segundo cubo é a imagem espelhada do primeiro, então quando aplicamos o movimento  $U$  no primeiro veremos o movimento  $U'$  sendo executado no segundo, se aplicarmos o movimento  $F$  ao primeiro veremos  $R'$  no segundo e se aplicarmos  $R$  no primeiro veremos  $F'$  no segundo. Não é à toa que as sequências para resolver cada um destes dois

casos são, respectivamente,  $URU'R'U'F'UF$  e  $U'F'UFURU'R'$ . Nesta simetria, a relação completa entre os movimentos de uma para o outro cube se dá pelos pares  $U \Leftrightarrow U'$ ,  $F \Leftrightarrow R'$ ,  $R \Leftrightarrow F$ ,  $D \Leftrightarrow D$ ,  $L \Leftrightarrow B'$  e  $B \Leftrightarrow L'$ . Estas relações definem um isomorfismo de grupos da forma  $f : G \rightarrow G$ .

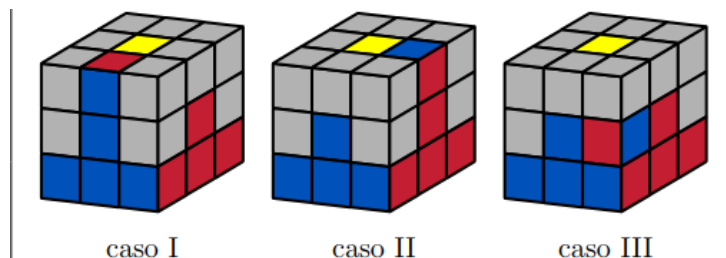


Figura 3: Casos das arestas da 2ª camada. Fonte: Autores

**Exemplo 4.1 :** Volte à Figura 3. Sabendo que a sequência

$$g = RU'R'U'$$

precisa ser aplicada apenas uma vez para *resolver* o vértice do *caso II*, usando simetria, qual sequência poderia ser aplicada para resolver o vértice do *caso I*?

*Resposta:* temos que a sequência  $g = RU'R'U'$  resolve o vértice do *caso II*, em que o adesivo da face superior está voltado para a face direita. Já no caso I, esse mesmo adesivo está voltado para a face frontal, e, portanto, trata-se de uma situação simétrica ao caso anterior. Para transportar o algoritmo conhecido de um caso para o outro, utilizamos o conceito de conjugado. A ideia é aplicar uma rotação que leve a posição/orientação do vértice do *caso I* para a posição/orientação correspondente ao *caso II*, resolver o vértice com o algoritmo já conhecido, e então desfazer a rotação inicial, de modo que o cubo retorne à sua configuração original.

Nesse caso, a rotação mais simples é a da face superior  $U$ , que leva o adesivo voltado para a face frontal à posição em que ele fica voltado para a face direita. Assim, se chamarmos essa rotação de  $X = U$ , a sequência a ser aplicada no *caso I* é dada pelo conjugado  $X^{-1}gX$ . Em termos práticos, isso significa aplicar  $U'$ , depois  $RU'R'U'$ , e em seguida  $U$ . Ao simplificarmos a sequência, observamos que  $U'U = E$ , resultando em  $U'RU'R'$ . Dessa forma, a sequência  $U'RU'R'$  é precisamente o algoritmo que resolve o vértice do *caso I*.

Essa interpretação prática pode ser descrita da seguinte forma: primeiro aplicamos a rotação inversa  $U'$ , para reposicionar o vértice de interesse na posição correspondente ao *caso II*; em seguida aplicamos a sequência  $g$ , que já sabemos resolver aquele caso; e por fim desfazemos a rotação inicial aplicando  $U$ . O resultado final é um algoritmo que atua diretamente sobre o *caso I*, sem necessidade de girar o cubo antes.

Observa-se, portanto, que a técnica de utilizar conjugados é fundamental para transportar algoritmos conhecidos de uma posição para outra por meio de simetrias do cubo. No exemplo analisado, essa estratégia mostrou como, a partir de um algoritmo que resolve o vértice em uma posição (*caso II*), conseguimos obter outro que resolve o mesmo tipo de vértice em uma posição diferente (*caso I*), sem precisar descobrir um novo procedimento do zero. Esse raciocínio não apenas simplifica a resolução prática, mas também evidencia a estrutura algébrica presente no grupo do cubo, já que o uso de conjugados é uma forma natural de explorar as simetrias existentes.

O que está por trás disso é o conceito de homomorfismo de grupos. Na teoria, definimos

uma função  $f : G \rightarrow G$  que satisfaz  $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$ . Uma vez que  $G = \langle R, L, F, B, U, D \rangle$ , basta saber quais são os valores de  $f(R)$ ,  $f(L)$ ,  $f(F)$ ,  $f(B)$ ,  $f(U)$  e  $f(D)$ .

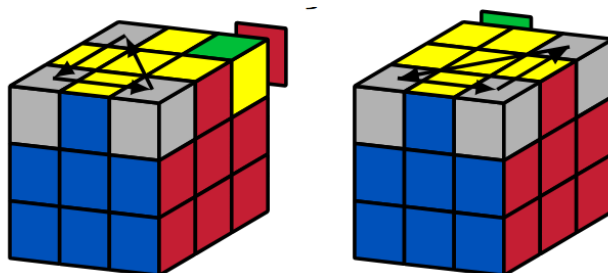


Figura 4: simetria de rotação. Fonte: Autores

**Exemplo 4.2:** A Figura 4 ilustra uma simetria de rotação no cubo de Rubik. Essa simetria define um homomorfismo  $f : G \rightarrow G$  que transforma os movimentos básicos da seguinte forma:  $f(R) = F'$ ,  $f(F) = R'$ , e  $f(U) = U'$ . Assim, cada movimento aplicado ao cubo pode ser transportado por meio dessa correspondência.

Antes de aplicarmos o homomorfismo às sequências, é importante determinar também as imagens dos outros movimentos básicos. Como a simetria envolve uma rotação específica do cubo, temos que  $f(L) = B'$ ,  $f(D) = D$  e  $f(B) = L'$ . Com isso, todas as faces estão contempladas na descrição da transformação.

Podemos agora aplicar o homomorfismo às sequências indicadas.

Para a sequência  $R F B L' F$ , a aplicação de  $f$  resulta em  $f(R) f(F) f(B) f(L') f(F)$ . Substituindo pelos valores encontrados, obtemos  $F' R' L' B F'$ .

Para a sequência  $R U R' U'$ , temos  $f(R) f(U) f(R') f(U')$ . Isso se transforma em  $F' U' R U$ , após simplificação.

Já para a sequência  $L F' U U' L F'$ , aplicando  $f$ , obtemos  $f(L) f(F') f(U) f(U') f(L) f(F')$ . Substituindo, resulta em  $B' R U' U L' R$ .

Esse exemplo mostra como a aplicação de um homomorfismo de simetria permite transportar sequências de movimentos para outras, preservando a estrutura algébrica do cubo, mas modificando a forma como os movimentos aparecem. Na prática, esse procedimento é uma ferramenta importante, pois possibilita reutilizar algoritmos já conhecidos em posições simetricamente equivalentes do cubo, evitando a necessidade de aprender um novo algoritmo para cada situação.

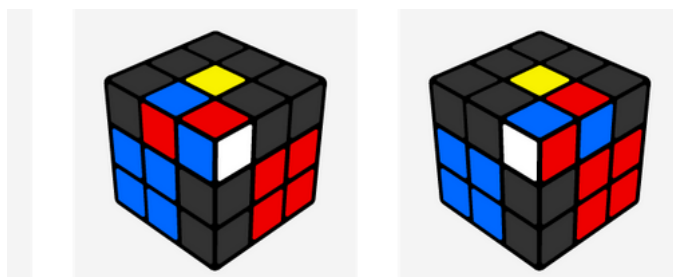


Figura 5: simetria no caso avançado F2L. Fonte: Autores

**Exemplo 4.3:** A Figura 5 apresenta uma simetria por rotação em torno do eixo vertical

*camada U*. Tomando como rotação de referência o giro de 90 graus no sentido horário da face superior  $U$ , a ação dessa simetria sobre os geradores básicos  $R, L, F, B, U, D$  é obtida por conjugação:  $f(M) = U M U^{-1}$  para cada gerador  $M$ . Em termos explícitos, a rotação  $U$  envia a face frontal para a face direita, a face direita para a face posterior, a face posterior para a face esquerda e a face esquerda para a face frontal; as faces  $U$  e  $D$  permanecem em sua posição (apenas giram em torno do próprio eixo). Portanto, sob essa simetria temos, por exemplo,  $f(F) = R, f(R) = B, f(B) = L, f(L) = F$ , enquanto  $f(U) = U$  e  $f(D) = D$ . Esse mapeamento é o homomorfismo de simetria pedido: ele associa a cada movimento básico a rotação equivalente na posição que a simetria indica.

**Exemplo 4.4:** Aplicando o homomorfismo acima a uma sequência que permuta vértices no primeiro cubo, obtemos a sequência que permuta os vértices correspondentes no segundo cubo.

Para transformar uma sequência  $S$ , basta substituir cada gerador por sua imagem  $f(S)$  e manter a ordem. Por exemplo, se no primeiro cubo a sequência que permuta determinados vértices é  $R F B L' F$ , sua imagem pelo homomorfismo  $f$  é  $f(R) f(F) f(B) f(L') f(F)$ . Substituindo pelos valores definidos pela rotação  $U$ , obtemos  $B R L F' R$ . Escrevendo isso em notação direta: a sequência transformada é  $B R L F' R$ .

Se houver cancelamentos ou pares inversos consecutivos, simplificamos; neste caso não há cancelamento imediato, então  $B R L F' R$  é a sequência que, aplicada ao segundo cubo, reproduz a mesma permutação de vértices indicada pela simetria.

**Exemplo 4.5:** Para verificar sequências obtidas por homomorfismo a partir de um algoritmo conhecido (caso clássico de transporte de algoritmos por simetria), procedemos da mesma forma: substituímos cada movimento pela sua imagem e simplificamos.

Tome como ponto de partida a sequência  $L' U' L U' L' U U L$  (sequência que posiciona vértices no método básico) e suponha que ela seja obtida por uma simetria a partir de uma sequência  $g$  conhecida no caso de referência, por exemplo  $g = R U R' U'$  (sequência que resolve um canto em outra posição).

Para obter a sequência correspondente aplicando o homomorfismo  $f$  (associado à rotação  $U$  definida acima), substituímos cada gerador em  $g$  por  $f(\text{gerador})$ :  $f(R) = B, f(U) = U, f(R') = B', f(U') = U'$ . Assim,  $f(g) = B U B' U'$ . Da mesma forma, aplicando  $f$  à sequência longa  $L' U' L U' L' U U L$ , cada  $L$  é substituído por  $f(L) = F$  e cada  $U$  por  $U$ , respectivamente; isto produz  $F' U' F U' F' U U F$ .

Simplificando possíveis cancelamentos (aqui  $U' U$  cancela se aparecerem adjacentes), se houver pares inversos consecutivos devemos removê-los. No caso apresentado, se aplicarmos as simplificações locais (por exemplo se a substituição produzir  $U' U$  em algum ponto), fazemos esses cancelamentos; caso contrário, mantemos a sequência tal qual.

O ponto central é que a sequência transformada por  $f$  é exatamente o algoritmo que realiza a mesma ação topológica no cubo simétrico, e por isso a técnica de aplicar homomorfismos (concretamente, conjugação pela rotação que representa a simetria) permite derivar algoritmos para todos os casos simétricos sem necessidade de criar um algoritmo novo do zero.

## 5 Órbita e Algoritmos

Os métodos tradicionais de resolução do cubo mágico podem ser diretamente relacionados aos conceitos de órbitas e ações de grupos. Mais especificamente subgrupos. Por exemplo, para montar a cruz amarela aplicamos a sequência  $S = F R U R' U' F'$ . Esta sequência não desfaz o que já foi resolvido na primeira e na segunda camada.

Seja  $H$  o subgrupo de  $G$  gerado pela sequência  $S$  e  $c \in C$  uma configuração que tenha as primeira e segunda camadas resolvidas, então toda configuração de  $o_H(c)$  possui as primeira e segunda camadas resolvidas.

Resumidamente, resolver o cubo por etapas e buscar sequências de movimentos que resolve uma etapa e não altera o que já foi resolvido antes. A forma de analisar isso é usar o conceito de órbita.

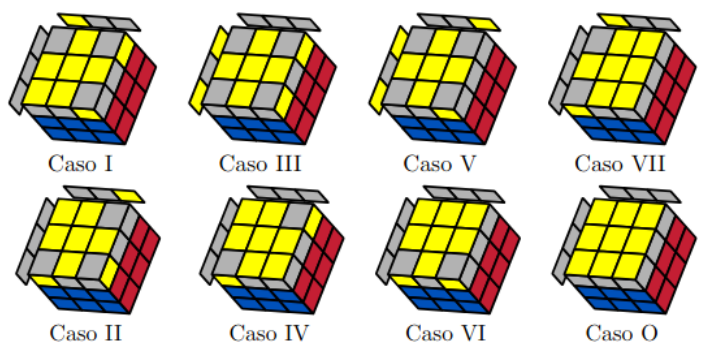


Figura 6: casos OLL com a cruz resolvida. Fonte: Autores

Uma situação onde o conceito de órbita fica claro é a dos casos OLL com a cruz amarela resolvida. Existem 7 sequências para resolver esses casos, porém se você aplicar qualquer uma das sequências em qualquer um dos casos, você cairá num outro do mesmo conjunto, pois essas sequências não desfazem as primeira e segunda camadas e nem a cruz que já estão resolvidas.

**Exemplo 5.1 :** Para analisar a resolução da face amarela no método básico a partir da cruz já montada, podemos considerar a aplicação sistemática de um único algoritmo OLL, nomeadamente a sequência  $R U R' U R U^2 R'$ .

Suponha que o cubo se encontra em uma das sete configurações possíveis da OLL com cruz (ver Figura 6). A repetição desse algoritmo sobre cada estado conduz a um ciclo de transformações entre os casos: a análise mostra que os casos III, V e VII evoluem para o Caso I, enquanto os casos IV, VI e o estado resolvido (Caso 0) evoluem para o Caso II.

Além disso, ao aplicar a sequência sobre o Caso I, obtemos o Caso V, e ao aplicá-la sobre o Caso II, alcançamos a resolução completa da face, isto é, o Caso 0.

Esse comportamento revela uma estrutura cíclica: todos os estados pertencem a uma única órbita sob a ação do algoritmo escolhido. Em outras palavras, a repetição de  $R U R' U R U^2 R'$  não cria novos casos, apenas permuta as configurações dentro do conjunto finito já existente, preservando as camadas previamente resolvidas.

## 6 Considerações Finais

O desenvolvimento apresentado mostrou que o cubo mágico é um campo rico para a exploração de conceitos fundamentais da teoria dos grupos. Ao longo do estudo, foi possível observar que cada movimento pode ser interpretado como uma permutação, e que o conjunto de todas essas transformações forma uma estrutura algébrica organizada, na qual propriedades como identidade, inverso e não comutatividade aparecem de maneira clara e acessível.

A partir dessa perspectiva, noções abstratas ganharam concretude: os subgrupos revelaram-se úteis para compreender etapas parciais da resolução; os homomorfismos permitiram transportar algoritmos entre posições simetricamente equivalentes, evitando a necessidade de criar sequências inéditas; e as órbitas ofereceram uma forma de visualizar os ciclos de estados que se mantêm dentro de determinados conjuntos de configurações. Tais ideias não apenas explicam por que os algoritmos funcionam, mas também apontam para estratégias mais eficientes de resolução, mostrando a força da linguagem algébrica na análise do quebra-cabeças.

Esse percurso evidencia como a teoria de grupos, muitas vezes considerada abstrata, pode ser abordada de maneira intuitiva quando associada a objetos lúdicos. O cubo mágico, nesse sentido, funciona como uma ponte entre formalismo matemático e experiência prática, permitindo ao estudante experimentar, testar hipóteses e reconhecer padrões que emergem naturalmente da estrutura do grupo.

Dessa forma, a análise do cubo mágico não se limita à resolução do quebra-cabeça em si, mas se expande para uma compreensão profunda das estruturas matemáticas subjacentes, oferecendo uma perspectiva visual e concreta para os conceitos abstratos da teoria de grupos e permitindo uma aplicação didática e prática desses conceitos na álgebra pura. Essa aproximação entre o rigor da álgebra e a prática recreativa amplia o horizonte pedagógico, despertando interesse e motivação, ao mesmo tempo em que evidencia como diferentes áreas do conhecimento se articulam e como estruturas abstratas podem descrever fenômenos concretos. Assim, o cubo mágico permanece não apenas como um desafio recreativo, mas também como um laboratório acessível para a exploração de ideias matemáticas profundas.

## Referências

- [1] CHEN, J. *Group theory and the Rubik's cube*. Notas de aula, 2004. Disponível em: <<https://people.math.harvard.edu/jjchen/docs/GroupTheoryandtheRubik'sCube.pdf>>. Acesso em: 30 set. 2025.
- [2] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 2003.
- [3] FREY JR., A. H.; SINGMASTER, D. *Handbook of cubik math*. Cambridge: The Lutterworth Press, 2020.
- [4] LARA, R. G. D. M. *Álgebra e o cubo de Rubik*. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – [Instituição não informada].
- [5] SCHULTZER, W. *Aprendendo álgebra com o cubo mágico*. 2013. v. 27, p. [informação de página não especificada].

- [6] SILVA JÚNIOR, J. E. D. *Teoria de grupo e o cubo mágico*. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – [Instituição não informada].
- [7] TURNER, E. C.; GOLD, K. F. Rubik's groups. *The American Mathematical Monthly*, v. 92, n. 9, p. 617–629, nov. 1985.
- [8] BARBOSA, J. *A utilização do cubo mágico como ferramenta pedagógica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41, n. 2, p. e15107, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-15107>. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/download/3781/2621/15107>. Acesso em: 30 set. 2025.

---

## **DO PCN À BNCC: REFLEXÕES SOBRE CURRÍCULO, COMPETÊNCIAS E AVALIAÇÃO**

Isadora de Oliveira Francisco Rodrigues  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Isadora.2002@alunos.utfpr.edu.br

Cezar Ricardo de Freitas  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

### **Resumo**

O presente artigo tem como objetivo analisar a evolução do currículo brasileiro, comparando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), refletindo sobre suas implicações pedagógicas e políticas. O estudo adota uma abordagem qualitativa, baseado em pesquisa bibliográfica e documental, consultando documentos oficiais da legislação educacional brasileira, como a Constituição Federal, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o Plano Nacional de Educação, os PCN e a BNCC, além de textos acadêmicos que discutem currículo e políticas educacionais. A análise evidencia que os PCN, de caráter orientativo e flexível, buscavam promover a formação crítica, cidadã e interdisciplinar dos estudantes, enquanto a BNCC, de caráter normativo e obrigatório, prioriza competências e habilidades alinhadas a tendências internacionais de avaliação, como o PISA, em detrimento da realidade e diversidade do contexto educacional brasileiro. Observa-se que a centralidade das competências na BNCC reforça a padronização e a mensuração de resultados, desviando-se da função principal do currículo como orientador da prática pedagógica. Conclui-se que é necessário repensar a avaliação na BNCC, de modo que retome sua coerência com o currículo e o projeto pedagógico nacional, promovendo a formação integral do estudante e respeitando a diversidade cultural e social do país.

**Palavras-chave:** Currículo. Avaliação. Educação Básica e Políticas Educacionais.

### **1 Introdução**

A Constituição Federal do Brasil, promulgada em 1988, no artigo 210, prevê a fixação de conteúdos mínimos para o ensino fundamental em todo o território nacional, assegurando “formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” (CONSTITUIÇÃO FEDERAL, 1988). Esses conteúdos seriam uma Base Nacional Comum, onde a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, reafirmou a criação desta base, porém com a possibilidade de ser complementada:

em cada sistema de ensino e em cada estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos (BRASIL, 1996).

Essa base de conteúdos seria adotada em toda a educação básica — abrangendo a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio —, além de também prever uma base específica para a educação escolar indígena.

Entre 1997 e 2013, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), em seu artigo 14, reforçaram a necessidade de um currículo para toda a educação básica. A partir dessas diretrizes, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que serviram como referência nacional para a qualidade da educação no ensino fundamental, orientando a elaboração e execução dos currículos escolares em todo o Brasil e baseados no DCN. Além disso, foram instituídos os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e criado o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) como instrumento de avaliação do desempenho de alunos e escolas. Em 2001 foi lançado o Plano Nacional de Educação (PNE) (Lei nº 10.172/2001) que durou até 2010 e em seu interior previa como meta:

8. Assegurar que, em três anos, todas as escolas tenham formulado seus projetos pedagógicos, com observância das Diretrizes Curriculares para o ensino fundamental e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001, p. 9).

Porem sem traços de objetivo de criar uma nova base curricular.

Em 2014, foi instituído o novo Plano Nacional de Educação (PNE) que durou até 2024, por meio da Lei nº 13.005/2014. O PNE incluiu a necessidade de criação de uma nova base como estratégia para alcançar as metas 1, 2, 3 e 7 das 20 metas estabelecidas para orientar a educação brasileira rumo à universalização do ensino básico, erradicação do analfabetismo, melhoria da qualidade educacional, valorização dos profissionais da educação e fortalecimento da educação superior. As metas relacionadas à BNCC foram:

Meta 1 — universalizar, até 2016, a educação infantil na pré-escola para crianças de 4 a 5 anos e ampliar a oferta de educação infantil em creches para, no mínimo, 50% das crianças de até 3 anos até o final da vigência do PNE;

Meta 2 — universalizar o ensino fundamental de 9 anos para a população de 6 a 14 anos, garantindo que pelo menos 95% dos alunos concluam essa etapa na idade recomendada;

Meta 3 — universalizar, até 2016, o atendimento escolar para jovens de 15 a 17 anos e elevar, até o final da vigência do PNE, a taxa líquida de matrícula no ensino médio para 85%; e

Meta 7 — fomentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, com melhoria do fluxo escolar e da aprendizagem, visando atingir as médias nacionais do Ideb: 6,0 nos anos iniciais do ensino fundamental, 5,5 nos anos finais e 5,2 no ensino médio (BRASIL, p. 9 e 10).

A partir de 2015, iniciou-se a construção da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo o site da BNCC nas primeiras versões, a redação foi feita por 116 especialistas, divididos em 29 comissões com professores, técnicos de secretarias e especialistas indicados pelo MEC (Ministério da Educação), Consed (Conselho Nacional de Secretários da Educação) e Undime (União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação). Já para a versão final, segundo o documento, um Comitê Gestor assumiu a responsabilidade, reunindo órgãos e entidades ligadas ao MEC. Esse comitê teria coordenado a revisão do texto com base em consultas públicas nacionais, pareceres técnicos e contribuições de seminários estaduais.

Passando pela aprovação no Conselho Nacional de Educação (CNE), homologação e, em 2019, a elaboração dos currículos estaduais que tem como base a BNCC.

O Conselho Nacional de Educação aprovou nesta sexta-feira, 15, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que estabelece com clareza os processos essenciais que os alunos devem desenvolver em cada etapa da educação básica brasileira, assegurando os seus direitos de aprendizagem. O documento segue para homologação do ministro da Educação, Mendonça Filho. Com a norma, o Brasil terá pela primeira vez uma BNCC do ensino fundamental, que servirá de parâmetro para a construção dos currículos pelas escolas e redes de ensino (BRASIL, EDUCAÇÃO, 2017).

Além dessas iniciativas, a educação brasileira passou por diversas formulações legais e pela criação de novas normas relacionadas ao ensino. Surge, então, a seguinte questão: por que essas mudanças ocorrem com tanta frequência? Neste artigo, propomos uma reflexão acerca dos motivos que tornam necessária a reformulação constante da educação, tomando como base a análise de dois currículos que marcaram a história educacional recente do país: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

## **2 Metodologia**

Este trabalho possui caráter qualitativo, sendo desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica e documental. Para a construção da análise, foram consultados documentos oficiais da legislação educacional brasileira — como a Constituição Federal de 1988, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, nº 9.394/1996), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o Plano Nacional de Educação (PNE) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Além disso, recorreu-se a textos acadêmicos de autores que discutem currículo e políticas educacionais, tais como Hornburg e Silva (2012) e Bigode (2016), fundamentando teoricamente a análise comparativa entre os documentos curriculares.

A metodologia adotada buscou, portanto, compreender as semelhanças e diferenças entre os PCN e a BNCC, bem como refletir sobre as implicações pedagógicas e políticas dessas mudanças para a educação brasileira.

## **3 Desenvolvimento**

Nossa sociedade tem passado por transformações profundas, especialmente no campo da educação. Os estudantes chegam à escola cada vez mais diversos, conectados e imersos em tecnologias, o que exige novas formas de ensinar e aprender. O professor, nesse cenário, deixa de ser o único detentor do conhecimento e assume o papel de mediador, articulador e incentivador de aprendizagens significativas. Como apontam Tunes e Prestes (2020, p. 183), “A Educação está em crise. Trata-se de mais uma das manifestações da crise de autoridade iniciada há séculos com o advento da modernidade”, evidenciando a necessidade de repensar metodologias e currículos. Assim, tal como a Declaração Mundial

de Educação para Todos (1990) já defendia, não basta garantir o acesso à escola: é preciso assegurar aprendizagens essenciais e contextualizadas, capazes de responder às demandas de uma sociedade em constante transformação.

Nos anos de 1990, para ser mais exato em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram homologados para ser o referencial curricular do Brasil, seguindo o que era imposto pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) que estavam em vigor na época.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), publicados pelo Ministério da Educação, foram elaborados como um conjunto de orientações para auxiliar professores e escolas na organização do ensino. Eles não tinham caráter obrigatório, mas serviam como referência para garantir uma educação de qualidade, contemplando competências, conteúdos e sugestões de abordagem para todas as áreas do conhecimento. Além disso, seu objetivo, segundo o próprio documento, focava na formação de cidadãos críticos e conscientes, com ênfase em valores e raciocínio lógico, apresentando objetivos gerais amplos (BRASIL, 1997).

Na área de Matemática, o documento propõe uma formação ampla, crítica e ética, valorizando a cidadania, a pluralidade cultural, o respeito à diversidade e o uso da lógica na resolução de problemas. E por fim, a avaliação que nos PCNs, era defendida como contínua e formativa, acompanhando o desenvolvimento de conceitos, procedimentos e atitudes dos estudantes, com o objetivo de apoiar intervenções pedagógicas e preparar os alunos para o próximo ciclo<sup>1</sup>.

Como justificativa, para a criação da BNCC o MEC apontou a necessidade de cumprir as metas 1, 2, 3 e 7 do Plano Nacional de Educação (PNE), porém essa criação ocorreu com uma certa pressa, segundo o trabalho de Antonio José Lopes Bigode (2019), doutor em Didática da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona, a partir de 2015, a BNCC teve sua primeira versão construída em apenas três meses, ignorando completamente os PCN[s] e desconsiderando pesquisas acadêmicas sobre currículo e aprendizagem já existentes.

O mesmo autor aponta que essa rapidez sugere cópia de currículos estrangeiros, como o ACARA e o Common Core. No artigo “BASE, QUE BASE? O CASO DA MATEMÁTICA”, Bigode relata também ter participado da consulta pública da primeira versão da BNCC, mas afirma que suas contribuições foram ignoradas pelo grupo do MEC (Ministério da Educação) responsável pela elaboração da base, alegando falta de tempo para alterações.

---

<sup>1</sup> Os PCNs propunham a divisão do ensino em ciclos. O Ensino Fundamental I era formado pelo 1º Ciclo (1ª e 2ª série) e 2º Ciclo (3ª e 4ª série); e o Ensino Fundamental II era formado pelo 3º Ciclo (5ª e 6ª séries) e 4º Ciclo (7ª e 8ª séries).

O próprio documento não esclarece quais critérios foram utilizados para analisar todas as sugestões recebidas, bem como, quais alterações foram aceitas, ele só cita que formulação da BNCC foi coordenada pelo MEC, mas não foi feita de forma isolada:

Legitimada pelo pacto interfederativo, nos termos da Lei nº 13.005/ 2014, que promulgou o PNE, a BNCC depende do adequado funcionamento do regime de colaboração para alcançar seus objetivos. Sua formulação, sob coordenação do MEC, contou com a participação dos Estados do Distrito Federal e dos Municípios, depois de ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade, conforme consta da apresentação do presente documento (BRASIL, p. 20).

Silva e Santos (2018) falam que dentro do site Movimento pela Base (<http://movimentopelaBase.org.br>), é dito que mais de 9 mil professores, gestores, especialistas e entidades de educação ajudaram com a proposta à BNCC. E ainda complementam que com a criação da base subentende-se que os currículos feitos antes dela não são suficientes para atender a demanda do mínimo nacional, que seriam conteúdos básicos para essa geração.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017, para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e em 2018 para o Ensino Médio, é um documento normativo e de caráter obrigatório. Ela define as competências, habilidades e aprendizagens que segundo ela são essenciais que todos os alunos brasileiros devem desenvolver ao longo da Educação Básica, estabelecendo um padrão mínimo nacional para a construção dos currículos escolares (BRASIL, 2017).

A BNCC pelo seu objetivo busca garantir aprendizagens essenciais, reduzir desigualdades e orientar políticas públicas, definindo 10 competências gerais detalhadas para todas as etapas e áreas. Comparando com os objetivos ditos nos PCNs, a BNCC em sua composição têm objetivos semelhantes, como orientar a prática pedagógica, garantir educação de qualidade, promover cidadania, respeito à diversidade e inclusão, além de integrar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Ambos incentivam o trabalho interdisciplinar e a formação ampla do estudante.

Na área da matemática a BNCC reafirma esses princípios, mas organiza-os em dez competências gerais obrigatórias, articuladas desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, Isso segundo o documento para destacar o protagonismo do estudante, a cultura digital, a sustentabilidade e o uso ético da tecnologia, alinhando-se aos desafios do século XXI (BRASIL, p. 9 e 10).

Na BNCC, a avaliação dita também é formativa e contínua como nos PCNs, mas com foco no desenvolvimento de competências e habilidades. Destaca-se no documento: aplicação do conhecimento em situações reais, pensamento crítico, uso de diversos instrumentos (observação, atividades práticas, autoavaliação), ênfase nos aspectos qualitativos, *feedback* constante e protagonismo do aluno. A avaliação visa promover o

desenvolvimento integral, adaptar-se aos diferentes ritmos de aprendizagem e servir como ferramenta para aprimorar o ensino e garantir educação de qualidade. Mas será?

Neste sentido, a fim de se controlar o trabalho docente e as aprendizagens esperadas para que os alunos as desenvolvam, constata-se uma forte influência exercida pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e por outros órgãos internacionais para a estruturação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (JOLANDEK, 2020, p. 34). Isso se deve, também, ao fato de que esse documento curricular foi pensado em meio às tensões advindas dos resultados brasileiros nas avaliações internacionais de larga escala, como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA, em inglês), coordenado pela OCDE (JUNIOR e CALDATO, p. 22).

Aguilar Júnior e Caldato (2022) sugerem em parte do seu texto que a avaliação na BNCC está fortemente vinculada ao paradigma da padronização e mensuração de resultados, influenciada pela lógica das avaliações internacionais, como o PISA (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes). Temos também a própria BNCC:

Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XX, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol) (BRASIL 2019, p. 13).

Parece estar sugerindo que a centralidade das competências na BNCC é fruto de uma tendência internacional guiada por avaliações globais, o que reforça a ideia de padronização e comparação entre países.

## **4 Resultados e Discussão**

A análise da trajetória entre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) evidencia tanto permanências quanto rupturas na organização curricular brasileira. Para Hornburg e Silva, currículo é a “especificação precisa de objetos, procedimentos e métodos para obtenção de resultados que podem ser medidos”. Já Saviani (2015) ressalta que o currículo é o conjunto das atividades nucleares da escola, aquelas que garantem sua identidade e função social. No entanto, a avaliação vinculada à BNCC parece ter se desviado dessa concepção, pois, em vez de se orientar pelo currículo como organizador da prática pedagógica e da formação integral do estudante, buscou alinhar-se a exames internacionais, como o PISA, priorizando a comparação de resultados e a padronização em detrimento da diversidade e da realidade brasileira. Assim, evidencia-se a necessidade de repensar a avaliação da BNCC, de modo que ela volte a ser coerente com o currículo e com o projeto pedagógico nacional, em vez de se reduzir a métricas externas que pouco dialogam com as especificidades da educação no país.

## **5 Conclusões**

A análise comparativa entre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) evidencia a evolução e as tensões presentes na construção curricular brasileira. Enquanto os PCNs buscavam orientar a prática pedagógica de maneira flexível, promovendo a formação crítica e cidadã, a BNCC assume caráter normativo e obrigatório, alinhando-se a tendências internacionais de mensuração de competências e habilidades. Embora segundo o próprio documento tenha como objetivo reduzir desigualdades, garantir aprendizagens essenciais e orientar políticas públicas, a BNCC, em sua avaliação, mostra um desvio de sua função principal, ao priorizar resultados de provas internacionais, como o PISA, em detrimento da organização do currículo como instrumento de orientação pedagógica.

Portanto, é fundamental repensar a avaliação da BNCC, buscando reconectar seu papel à função curricular, de modo que ela contribua efetivamente para a formação integral do estudante, respeitando a diversidade cultural e social do país, e fortalecendo a autonomia das escolas e dos docentes. A educação brasileira, para cumprir seu propósito social, deve se pautar por diretrizes que equilibrem padrões de qualidade com a realidade nacional, garantindo que o currículo continue sendo o eixo estruturante da aprendizagem e não um reflexo de comparações internacionais.

## REFERÊNCIAS

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; CALDATO, J. C. **Raciocínio argumentativo em matemática no PISA e na BNCC**: uma investigação com estudantes da Educação Básica. *Boletim Gepem*, n. 78, p. 21-38, jan./jun. 2021. Disponível em:

<https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/449/430>. Acesso em: 15 ago. 2025.

BIGODE, Antonio José Lopes. Base, que base? O caso da Matemática. **Educação é a Base**, v. 23, p. 123-143, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular é aprovada no CNE e segue para homologação do ministro da Educação**. *Portal MEC*, Brasília, 15 dez. 2017. Disponível em: <https://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/58541-base-nacional-comum-curricular-e-aprovada-no-cne-e-segue-para-homologacao-do-ministro-da-educacao>. Acesso em: 2 set. 2025.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 15 ago. 2025.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – Perguntas Frequentes (FAQ)**. Ministério da Educação, [s.d.]. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/11/#:~:text=previstas%20foram%20cumpridas,-2.,pela%20legisla%C3%A7%C3%A3o%20educacional%20do%20Pa%C3%ADs.> Acesso em: 2 set. 2025.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Art. 210. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 5 out. 1988. Disponível em: <https://www.jusbrasil.com.br/legislacao/1503907193/constituicao-federal-constituicao-da-republica-federativa-do-brasil-1988#art-210>. Acesso em: 2 set. 2025.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, v. 134, n. 248, p. 27.833-27.841, 23 dez. 1996. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/19394.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm). Acesso em: 2 set. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Conhecendo as 20 metas do Plano Nacional de Educação.** Disponível em: [https://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne\\_conhecendo\\_20\\_metas.pdf](https://pne.mec.gov.br/images/pdf/pne_conhecendo_20_metas.pdf). Acesso em: 15 ago. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Fundamental.** Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2025.

BRASIL. **Plano Nacional de Educação.** Brasília: Senado Federal; UNESCO, 2001. Disponível em: <https://mapeal.cippec.org/wp-content/uploads/2014/07/Plano-Nacional-de-Educacao-2001.pdf>. Acesso em: 2 set. 2025.

GALIAN, C. V. A.. **Os PCN e a elaboração de propostas curriculares no Brasil.** Cadernos de Pesquisa, v. 44, n. 153, p. 648–669, jul. 2014. Acesso em: 10 jun. 2025.

GAMA, C. N.; DUARTE, N.. Concepção de currículo em Dermeval Saviani e suas relações com a categoria marxista de liberdade. *Interface - Comunicação, Saúde, Educação*, v. 21, n. 62, p. 521–530, jul. 2017. Acesso em: 15 ago. 2025.

GERONIMO, R. R.; GATTI, D. C.; BARBOSA, L. D. A. **Parâmetros Curriculares Nacionais e Base Nacional Comum Curricular:** uma comparação a partir da disciplina matemática. 25 out. 2021. Disponível em: <https://drive.usercontent.google.com/download?id=17ZU8jhSlzYQP1DSbFJ42OLy5rIB0mbFC&authuser=0&acrobatPromotionSource=GoogleDriveGridView>. Acesso em: 18 ago. 2025.

GOVERNO FEDERAL. **Linha do tempo da Política Nacional de Ensino Médio.** Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/politica-nacional-ensino-medio/linha-do-tempo>. Acesso em: 15 ago. 2025.

HORNBURG, N.; DA SILVA, R. **Teorias sobre currículo:** Uma análise para compreensão e mudança. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://rhemaeducacao.com.br/downloads/material-turma/b16e9444d57f89c5827b9ced938ac840.pdf>>. Acesso em: 15 ago. 2025.

MACEDO, E.. **Currículo e conhecimento: aproximações entre educação e ensino.** Cadernos de Pesquisa, v. 147, pág. 716–737, dez. 2012. Acesso em: 15 ago. 2025.

RABELO, Jackline; SEGUNDO, Maria das Dores Mendes; BARROSO, Maria Cleide da Silva. **Os paradigmas educacionais dominantes na agenda dos organismos internacionais:** uma análise à luz da crítica marxista. *Revista Eletrônica Arma da Crítica*, ano 1, n. 1, p. 78-94, jan. 2009. Disponível em: [https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/23030/1/2009\\_art\\_irabelomdmsegundo.pdf](https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/23030/1/2009_art_irabelomdmsegundo.pdf). Acesso em: 2 set. 2025.

SAVIANI, D. SOBRE A NATUREZA E ESPECIFICIDADE DA EDUCAÇÃO. **Germinal: marxismo e educação em debate**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 286–293, 2015. DOI: 10.9771/gmed.v7i1.13575. Disponível em: <https://periodicos.ufba.br/index.php/revistagerminal/article/view/13575>. Acesso em: 15 ago. 2025.

SILVA, M. V. da; SANTOS, J. M. C. T. **A BNCC e as implicações para o currículo da educação básica.** In: CONGRESSO NACIONAL DE DIVERSIDADE E INCLUSÃO – CONADIS, 2018, [S. l.]. *Anais...* Campina Grande: Editora Realize, 2018. Disponível em: [https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conadis/2018/TRABALHO\\_EV116\\_MD1\\_SA\\_13\\_ID786\\_08102018110158.pdf](https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conadis/2018/TRABALHO_EV116_MD1_SA_13_ID786_08102018110158.pdf). Acesso em: 15 ago. 2025.

TUNES, C.; PRESTES, A. **Escola, professor e autoridade**. Fractal: Revista de Psicologia, v. 32, n. esp., p. 183-184, jun. 2020. Disponível em:

<https://periodicos.uff.br/fractal/article/view/38849/24635>. Acesso em: 15 ago. 2025.

UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura).

**Declaração Mundial sobre Educação para Todos:** satisfação das necessidades básicas de aprendizagem Jomtien 1990 (ED/90/CONF/205/1). 1998. Disponível em:

[https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291\\_por/PDF/086291por.pdf.multi](https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por/PDF/086291por.pdf.multi). Acesso em: 3 set. 2025.

---

## **HISTÓRIA ORAL COM O RELATO DE UM PIBIDIANO SOBRE A CONVIVÊNCIA EM UM COLÉGIO ESTADUAL CÍVICO-MILITAR DE UMA CIDADE DO PARANÁ**

Isadora de Oliveira Francisco Rodrigues

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Isadora.2002@alunos.utfpr.edu.br

Jefferson Feliphi Pires

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Renato Francisco Merli

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Raynanda Maria da Costa Justino

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

### **Resumo**

A pesquisa analisou a percepção de um pibidiano atuante em uma escola estadual cívico-militar do Paraná, buscando compreender como esse modelo de colégio influencia o ambiente escolar, o ensino e a aprendizagem, especialmente na disciplina de Matemática. Utilizando a metodologia da História Oral Matemática, foram aplicadas dez perguntas abertas que possibilitaram identificar impressões sobre regras, disciplina, atuação docente, dificuldades e aspectos positivos do formato. Os resultados indicaram que, embora a escola apresente normas específicas e foco na disciplina, sua prática pedagógica mantém proximidade com o modelo tradicional, sem mudanças significativas na abordagem do conteúdo. As principais diferenças encontradas relacionam-se ao controle comportamental, organização e estética institucional. A análise evidencia que o modelo cívico-militar, mais do que alterar metodologias de ensino, reforça aspectos disciplinares que podem favorecer a ordem em sala de aula.

**Palavras-chave:** Escola. Percepção. Matemática.

### **1 Introdução**

Desde o ano de 2020, o estado do Paraná iniciou uma força-tarefa para implementar Colégios Estaduais Cívico-Militares em diversos municípios, com a meta de alcançar pelo menos 400 unidades neste modelo. De acordo com informações do Governo do Estado, essa ação foi conduzida pelo governador Carlos Massa Ratinho Junior, que afirma que o estado do Paraná é o que mais tem escolas cívico-militares e anunciou que pretende chegar a 400 escolas segundo o Jornal União.

O governador ainda ressalta que as escolas convencionais continuarão existindo no estado, permitindo que os responsáveis pelos alunos escolham a instituição em que eles irão estudar ao ingressar no Ensino Fundamental II da Educação Básica.

O modelo cívico-militar foi adotado como estratégia para melhorar o desempenho de escolas que não conseguiam atingir resultados satisfatórios no IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica). Conforme o portal do Governo do Estado do Paraná na aba intitulada como Colégios Cívico-Militares, “a implantação do modelo nas instituições de ensino é feita a partir de consulta pública realizada com a comunidade escolar”. Isso significa que, antes de a mudança ser efetivada, houve a participação de pais, responsáveis e moradores do bairro onde cada escola está situada no ano de 2020 segundo o jornal da cidade.

Diante desse contexto, surge a questão: *como esse modelo de colégio tem influenciado a realidade escolar?* Para responder a essa pergunta, realizamos uma entrevista via Google Meet com um integrante do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), estudante do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal do Paraná, que realiza permanências na instituição há mais de dois anos, acompanhando uma professora de Matemática da escola. A metodologia utilizada para a exposição e análise dos resultados foi a História Oral Matemática onde pudemos subtrair respostas para saber os impactos desse tipo de modelo de colégio analisado.

## **2 Metodologia**

Este estudo adota como referência a História Oral Matemática, uma abordagem qualitativa voltada para a compreensão das experiências de indivíduos inseridos no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática. Essa metodologia, segundo Garnica (2007, p. 2), consiste em investigar o que foi dito e não dito fazendo interpretações e procurando entender o que realmente o outro está querendo falar. Ao ser aplicada à Educação Matemática, a História Oral possibilita registrar e interpretar memórias, relatos e percepções que revelam tanto dimensões individuais quanto coletivas das vivências escolares. Dessa forma, contribui para uma análise aprofundada das práticas pedagógicas e de seus reflexos na formação de professores e estudantes (Garnica, 2007).

A História Oral segundo Ferreira e Luccas (2015, p. 3) é um método de pesquisa que possibilita a obtenção de resultados válidos com fidelidade aos depoimentos, de modo que os resultados obtidos sejam pertinentes ao problema investigado.

Meihy e Holanda (2014) destacam seis momentos fundamentais no desenvolvimento de um trabalho de História Oral: elaboração do projeto; gravação; estabelecimento do documento escrito e sua serialização; análise; arquivamento; e devolução social. Esses passos asseguram a seriedade do processo, a preservação das narrativas e a devolutiva dos resultados à sociedade.

Assim, ao ser compreendida tanto como método de pesquisa quanto como perspectiva voltada ao campo da Educação Matemática, a História Oral revela-se um instrumento potente para o registro e a análise das experiências vividas por professores e estudantes. Seu rigor metodológico garante a confiabilidade dos dados e, ao mesmo tempo, possibilita interpretações que valorizam memórias, saberes e práticas, contribuindo para a construção de um conhecimento mais significativo sobre os processos de ensino e aprendizagem em Matemática.

Dessa forma, para fundamentar este estudo, elaboramos um conjunto de dez perguntas direcionadas ao contexto do Colégio Cívico-Militar, com o objetivo de compreender a influência que esse modelo de colégio exerce na realidade escolar. As questões serviram como eixo norteador das entrevistas, possibilitando a coleta de narrativas e percepções que sustentam a investigação proposta.

1. Como foi seu primeiro contato com a escola estadual cívico-militar onde realiza a permanência do PIBID?
2. Antes de entrar na escola, o que você sabia ou imaginava sobre o modelo cívico-militar?
3. O que você consegue interpretar em relação ao ensino e aprendizagem na escola em matemática? O modelo da escola teve impacto no aprendizado dos estudantes?
4. Quais são as principais regras que os estudantes precisam seguir no dia a dia, como em relação à vestimenta, corte de cabelo e comportamento?
5. Como você percebe a reação dos estudantes diante dessas regras?
6. Existe diferença entre o que as pessoas de fora pensam sobre a escola cívico-militar e o que você vivencia no dia a dia?
7. Como você percebe a atuação e o comportamento dos professores nesse modelo de escola? Como a professora que você acompanha interage com ele?
8. Quais são as principais dificuldades que você observa para alunos e professores nesse modelo de escola?
9. Há aspectos positivos que você considera importantes nesse formato de gestão escolar? E em relação à Matemática?
10. Depois da sua experiência, como você explicaria para alguém a diferença entre uma escola cívico-militar e uma escola militar?

Por meio dessas perguntas, buscamos compreender de que forma o Colégio Cívico-Militar é na perspectiva de um pibidiano, avaliando se o modelo realmente pode trazer benefícios à comunidade escolar, sob a perspectiva de alguém que vivencia essa realidade dentro da escola há dois anos.

### **3 Resultados**

A entrevista realizada com o pibidiano teve como objetivo compreender suas percepções e vivências durante as permanências na Escola Estadual Cívico-Militar, analisando desde as impressões iniciais até a comparação com outros modelos escolares. A entrevista foi realizada oralmente, registrada e posteriormente transcrita para análise.

No relato sobre o primeiro contato com a escola, o entrevistado destacou que a aproximação ocorreu em 2024, durante sua primeira participação no programa PIBID. Ele contou ter sido recebido pela equipe escolar e conduzido a uma visita pelas dependências, incluindo salas de aula, setores administrativos e espaços destinados às práticas docentes. Um registro fotográfico com o coordenador do programa e a turma de Matemática marcou simbolicamente o início das atividades no local.

Quanto às expectativas antes da experiência, o entrevistado revelou imaginar um ambiente de rígido cumprimento de regras, disciplina constante e alunos sempre uniformizados. Com o passar das permanências, porém, percebeu que, embora exista um conjunto de normas, nem todas são aplicadas de forma inflexível, aproximando a vivência da realidade de outras escolas públicas estaduais que já conhecia em sua trajetória acadêmica.

No que se refere ao ensino e aprendizagem em Matemática, o pibidiano observou que o conteúdo e a metodologia não apresentam diferenças substanciais em relação a instituições de modelo tradicional, entendido aqui como escolas públicas regulares que seguem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), sem vínculos com o modelo cívico ou militar. Segundo ele, as regras internas da escola cívico-militar contribuem para manter a ordem e favorecer o andamento das aulas, criando um ambiente mais organizado para explicações e realização de atividades.

Entre as principais regras identificadas, estão o uso do uniforme (preferencialmente a farda completa), cabelo preso para meninas, calçado adequado e proibição de itens como bonés, óculos escuros e acessórios chamativos. Segundo o entrevistado, a reação dos estudantes a essas normas não é totalmente favorável, especialmente no que diz respeito à vestimenta, já que muitos desejam maior liberdade para se expressarem visualmente.

A respeito da visão externa em comparação com a realidade observada, o entrevistado relatou que a percepção popular tende a superestimar a rigidez e disciplina do modelo cívico-militar. Na prática, a escola enfrenta desafios semelhantes aos de qualquer outra instituição pública, diferenciando-se principalmente pelo foco na disciplina e pela atenção dada ao comportamento dos estudantes. Essa comparação foi feita com base em sua experiência prévia em outras escolas públicas estaduais durante sua formação, e não por atuação direta em escolas militares.

Sobre a atuação dos professores, foi ressaltado que as práticas pedagógicas seguem o padrão das demais escolas regulares, com a única particularidade de maior cuidado com a apresentação pessoal. A professora acompanhada pelo entrevistado manteve sua metodologia habitual, adaptando-se apenas às exigências estéticas do modelo.

Entre as principais dificuldades, o pibidiano mencionou a implementação e cumprimento integral dos protocolos formais como apresentação, continência e posturas militares, que demandam tempo e nem sempre são executados de forma regular.

No que diz respeito aos pontos positivos, o entrevistado não identificou diferenças marcantes no ensino de Matemática, mas destacou o impacto do controle comportamental. Segundo ele, a cobrança constante quanto à postura e ao silêncio faz com que os alunos se mantenham mais atentos, diminuindo interrupções durante as explicações e facilitando a condução das atividades.

Ao comparar a escola cívico-militar com a escola militar, o entrevistado explicou que a primeira mantém gestão compartilhada entre civis e militares e estrutura curricular semelhante à das escolas comuns, adotando apenas protocolos e regras inspirados no modelo militar. Já a escola militar possui gestão integralmente militarizada, com disciplina mais severa, exigências físicas e protocolos executados de forma constante. Essa comparação não veio de sua vivência direta, mas de informações que o pibidiano obteve em sua formação acadêmica e em conversas com colegas que conhecem o funcionamento desse outro modelo.

Essa análise permite compreender que a experiência na escola cívico-militar, apesar de trazer uma roupagem disciplinar diferenciada, mantém proximidade com o cotidiano escolar tradicional. Suas principais especificidades estão ligadas à estética, à conduta e ao controle interno, mais do que a mudanças metodológicas significativas no ensino.

#### **4 Conclusões**

O presente estudo analisou, por meio da metodologia da História Oral Matemática, a experiência de um pibidiano atuante em um Colégio Estadual Cívico-Militar do Paraná, buscando compreender como esse modelo de colégio influencia o ambiente escolar e o ensino de Matemática. A partir do relato, foi possível perceber que, embora o formato cívico-militar apresente regras específicas, protocolos disciplinares e uma estética institucional distinta, a prática pedagógica observada mantém grande proximidade com o modelo tradicional de ensino.

As principais diferenças apontadas dizem respeito à ênfase na disciplina, à organização e ao controle comportamental dos estudantes. Esses elementos, segundo o entrevistado, contribuem para a manutenção da ordem e para um ambiente mais favorável à



---

[ADvico%2Dmilitares%20federais,unidades%20a%20partir%20de%202024](#). Acesso em: 25 de ago. 2025.

GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ. Colégios cívico-militares. **Secretaria de Estado da Educação do Paraná**, 2025. Disponível em:

[https://www.educacao.pr.gov.br/colegios\\_civico\\_militares](https://www.educacao.pr.gov.br/colegios_civico_militares). Acesso em: 25 de ago. 2025.

JORNAL UNIÃO. Paraná: governador confirma que Estado vai incorporar escolas cívico-militares federais. **Jornal União**, 2024. Disponível em:

<https://jornaluniao.com.br/noticias/educacao/parana-governador-confirma-que-estado-vai-incorporar-escolas-civico-militares-federais>. Acesso em: 25 de ago. 2025.

MEIHY, J. C. S. B.; HOLANDA, F. **História oral: como fazer, como pensar**. São Paulo: Editora Contexto, 2014. Acesso em: 25 de ago. 2025.

PARANÁ. Colégios cívico-militares no estado do Paraná. **YouTube**, 2024. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=ItJFeSo87qw>. Acesso em: 25 de ago. 2025.

## MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO MÉDIO DE ROSAS-DO-DESERTO: UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE MALTHUS, VERHULST, MONTROLL E GOMPERTZ

Jeferson Kuhn Freiburger  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR-TD  
jefer.kuhn03@gmail.com

Francisca Caroline Barbosa  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR-TD

Mariana Furlan Tissiani  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR-TD

Jahina Fagundes de Assis Hattori  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná - UTFPR-TD

### Resumo

Este estudo teve como objetivo modelar matematicamente o crescimento médio de rosas-do-deserto (*Adenium obesum*) ao longo de 26 semanas, comparando os modelos de Malthus, Verhulst, Montroll e Gompertz. Utilizando dados da altura média das plantas cultivadas sob condições controladas, os modelos foram ajustados por meio de simulações computacionais e avaliados com base em métricas estatísticas, como erro quadrático médio (RMSE) e coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Os resultados indicaram que os modelos de Montroll e Gompertz apresentaram melhor ajuste aos dados reais, capturando a tendência de crescimento inicial acelerado e posterior estabilização, enquanto o modelo de Malthus superestimou o crescimento devido à sua natureza exponencial. O modelo de Malthus mostrou um desempenho intermediário, com ajuste menos preciso em comparação aos modelos que melhor descreveram o crescimento das plantas. Conclui-se que o modelo de Gompertz, apresentou-se mais adequado para descrever o crescimento da planta estudada.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Rosa-do-deserto. Modelos logísticos. Simulação computacional.

### 1 Introdução

A modelagem matemática configura-se como um processo dinâmico voltado à construção e validação de representações matemáticas. Trata-se de um método de abstração e generalização que visa à previsão de comportamentos ou tendências. Em essência, envolve a tradução de situações do mundo real para o campo matemático, de modo que as soluções obtidas possam ser compreendidas e interpretadas na linguagem cotidiana (BASSANEZI, 2014).

Nesse contexto, a análise do crescimento populacional destaca-se como uma importante aplicação da modelagem matemática, permitindo prever a expansão de diferentes tipos de populações, como as humanas, vegetais, tumorais, bacterianas, entre outras. A compreensão da dinâmica de crescimento, especialmente da população humana,

é particularmente relevante para o planejamento urbano e o desenvolvimento sustentável de cidades e nações (PINHEIRO, 2021).

Um modelo matemático é, portanto, uma representação simbólica baseada em uma formulação abstrata da matemática. Essa formulação só pode ser considerada um modelo quando as variáveis envolvidas possuem significados específicos, diretamente relacionados ao contexto da realidade que está sendo representado. Além disso, uma das características mais importantes da modelagem é seu caráter provisório e ajustável, ou seja, um modelo só é considerado adequado quando satisfaz os critérios definidos por seu criador. Isso implica que todo modelo está sujeito a revisões e melhorias (BASSANEZI, 2014).

Com o objetivo de compreender o comportamento de crescimento vegetal por meio da modelagem matemática, este estudo analisa o crescimento médio de um conjunto composto por treze exemplares da planta conhecida como rosa-do-deserto (*Adenium obesum*), cultivadas sob as mesmas condições e adubadas trimestralmente. Embora os dados empíricos sobre o crescimento dessas plantas já estejam previamente registrados, este estudo busca utilizá-los como base para a aplicação e comparação de diferentes modelos matemáticos de crescimento populacional.

A proposta deste estudo é investigar de que forma diferentes modelos representam e explicam a evolução do crescimento ao longo do tempo. Para isso, serão abordados e comparados quatro métodos amplamente utilizados na modelagem de fenômenos biológicos: os modelos de Malthus, Verhulst, Montroll e Gompertz. A comparação permitirá identificar qual modelo melhor se ajusta aos dados analisados, contribuindo para uma compreensão mais precisa do comportamento da espécie vegetal estudada.

## **2 Material e Métodos**

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa aplicada de abordagem quantitativa, desenvolvida sob a forma de estudo de caso, com o objetivo de modelar matematicamente o crescimento médio de rosas-do-deserto *Adenium obesum* ao longo de 26 semanas, utilizando como parâmetro principal a altura das plantas. O trabalho visa comparar o desempenho dos modelos de Malthus, Verhulst, Gompertz e Montroll na descrição da curva de crescimento dessa espécie, confrontando os dados empíricos com as previsões teóricas.

Os dados foram coletados semanalmente durante 26 semanas em um grupo de rosas-do-deserto cultivadas sob condições controladas, com adubação trimestral seguindo recomendações agronômicas para a espécie. Foram incluídas apenas plantas saudáveis, sem sinais de pragas ou doenças, submetidas aos mesmos tratos culturais, incluindo irrigação, adubação e exposição solar. A altura média das plantas foi registrada em centímetros em cada intervalo de medição.

Para a análise dos dados, os modelos matemáticos foram ajustados por meio de simulações computacionais, utilizando métodos de otimização para minimizar os erros entre os valores teóricos e empíricos. O desempenho de cada modelo foi avaliado com base em métricas estatísticas, como o erro quadrático médio (RMSE) e o coeficiente de determinação ( $R^2$ ), permitindo a comparação objetiva de sua precisão. Adicionalmente, as curvas geradas pelos modelos foram plotadas juntamente com os dados observados, facilitando a visualização e interpretação dos resultados. Essa abordagem permitiu identificar qual modelo melhor descreve o padrão de crescimento das rosas-do-deserto, contribuindo para o entendimento da dinâmica de desenvolvimento dessa espécie em condições controladas de cultivo.

## 2.1. Modelo de Malthus

No campo da dinâmica populacional, o chamado modelo de Malthus considera que o crescimento de uma população é proporcional à sua quantidade em cada instante de tempo, caracterizando um crescimento exponencial. Segundo esse modelo, a população humana tenderia a crescer indefinidamente, sem qualquer tipo de limitação (BASSANEZI, 2014).

O modelo de Malthus considera  $P(t)$  como a quantidade de indivíduos em uma população no instante  $t$ , expressa pela taxa de variação da população,  $P$ , em função do tempo,  $t$  (PINHEIRO, 2021). Podemos escrevê-la então como:  $\frac{dP}{dt} = P(t)$

Assume-se que a taxa proporcional de crescimento da população de indivíduos reprodutores se mantém constante ao longo do ano. Além disso, considera-se que as taxas de natalidade  $n$  e de mortalidade  $m$  também permanecem inalteradas durante esse período (BASSANEZI, 2014).

Temos então que  $\alpha = n - m$ , representando a taxa de crescimento específico da população  $\square(\square)$ , aqui considerada constante, temos:

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha$$

Com isso, generalizando o modelo, chegamos na solução para  $\square(\square)$ , com condição inicial  $P(0) = P_0$ , sendo ela:

$$P(t) = (\alpha + 1)^t \cdot P_0$$

## 2.2. Modelo de Verhulst

Um dos modelos mais conhecidos e relevantes é o proposto pelo sociólogo belga P. F. Verhulst, em 1838. Esse modelo parte do pressuposto de que toda população está sujeita a limitações naturais que inibem seu crescimento, fazendo com que ela tenda a um valor

máximo constante ao longo do tempo. Trata-se de uma abordagem mais representativa e realista do ponto de vista biológico (BASSANEZI, 2014).

Este modelo pode ser visto como uma adaptação do modelo de Malthus, no qual a taxa de crescimento é diretamente proporcional ao tamanho da população em cada momento. Podemos escrevê-lo então como sendo:  $\frac{dP}{dt} = \beta(P) \cdot P$ , com o  $\beta(P) = r \left( \frac{P_{\infty} - P_0}{P_{\infty}} \right)$ ,  $r > 0$  e  $P_{\infty}$  sendo o valor limite da população (BASSANEZI, 2014).

Realizando alguns cálculos, chegamos na solução para  $P(t)$ , sendo ela:

$$P(t) = \frac{P_{\infty} \cdot P_0}{(P_{\infty} - P_0) \cdot e^{-rt} + P_0}$$

### 2.3 Modelo de Montroll

Em 1971, o cientista e matemático norte-americano Elliot Waters Montroll apresentou um modelo com características próximas às do modelo de Verhulst. Nesse modelo, a taxa de crescimento diminui à medida que a população aumenta, porém essa relação não precisa ser linear, diferentemente do que ocorre no modelo logístico (PINHEIRO, 2021).

Considerando  $P_{\infty}$  como o valor máximo que uma população  $P = P(t)$  pode atingir, e  $\lambda$  como a taxa de crescimento relativa quando  $P$  é pequeno. O modelo proposto por Montroll é descrito por uma equação diferencial não linear:  $\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_{\infty}} \right)^{\alpha} \right]$ ,  $\lambda > 0$  e  $\alpha > 0$  (BASSANEZI, 2014).

A solução geral do Modelo de Montroll é dada pela expressão:

$$P(t) = \frac{P_{\infty} \cdot P_0}{((P_0^{\alpha} + (P_{\infty}^{\alpha} - P_0^{\alpha}) \cdot e^{-\lambda t}))^{\frac{1}{\alpha}}}$$

### 2.4. Modelo de Gompertz

Benjamin Gompertz argumentou que a população humana não cresce de forma exponencial, como defendia Malthus, mas possui um limite superior. Isso significa que a população aumenta até certo ponto e, a partir daí, tende a permanecer praticamente estável. Com base nessa ideia, um dos princípios do seu modelo é que a taxa de crescimento de uma população é inicialmente muito elevada, mas diminui rapidamente ao longo do tempo (LANGARO, 2017).

O modelo de Gompertz é dado pela equação diferencial com condição inicial, proposta por Cauchy,  $\frac{dx}{dt} = x(a - b \ln x)$  (BASSANEZI, 2014).

A solução geral do modelo de Gompertz é então:

$$x(t) = x_{\infty} \left( \frac{x_0}{x_{\infty}} \right) e^{-bt}$$

### 3 Resultados e Discussão

Os dados reais obtidos no decorrer das semanas em que foi feita a análise estão apresentados na Tabela 1.

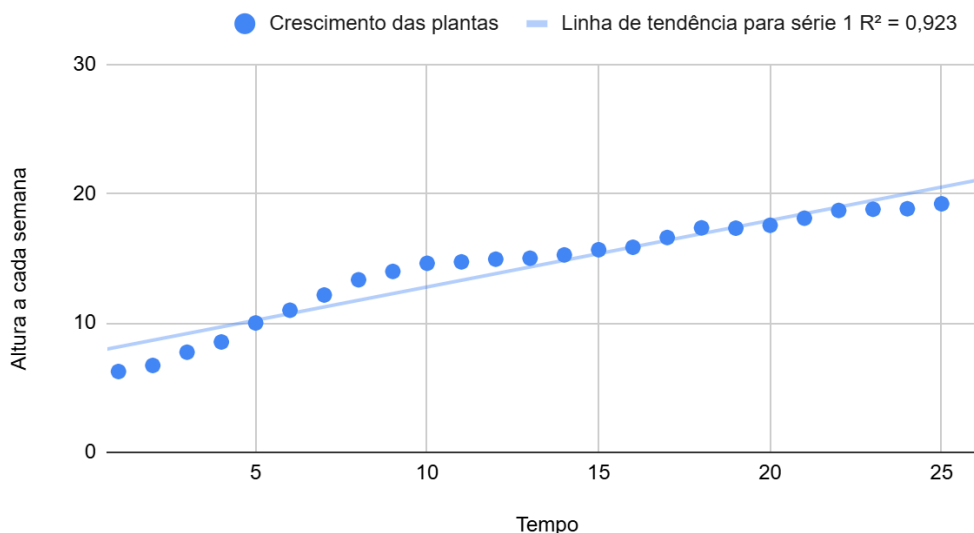
**Tabela 1** – Variação da altura média das rosas-do-deserto durante o período experimental

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 5,84        |
| 2              | 6,25        |
| 3              | 6,72        |
| 4              | 7,74        |
| 5              | 8,53        |
| 6              | 10,00       |
| 7              | 10,98       |
| 8              | 12,16       |
| 9              | 13,34       |
| 10             | 13,98       |
| 11             | 14,62       |
| 12             | 14,72       |
| 13             | 14,93       |
| 14             | 15,01       |
| 15             | 15,26       |
| 16             | 15,66       |
| 17             | 15,85       |
| 18             | 16,61       |
| 19             | 17,35       |
| 20             | 17,33       |
| 21             | 17,55       |
| 22             | 18,10       |
| 23             | 18,70       |
| 24             | 18,79       |
| 25             | 18,83       |
| 26             | 19,22       |

**Fonte:** Autores, 2025.

A partir dos dados apresentados na Tabela 1, foi possível plotar o gráfico de dispersão, juntamente com a linha de tendência que mais se adaptava à realidade da altura média das plantas, o resultado obtido é apresentado na Figura 1.

## Média de crescimento



**Figura 1** – Gráfico de dispersão e linha de tendência dos dados.

**Fonte:** Autores, 2025.

A partir dos dados previamente apresentados, foi possível aplicar os diferentes modelos, permitindo a comparação entre eles. A seguir, serão apresentadas as aplicações e os resultados obtidos para cada modelo.

### 3.1. Aplicação do Modelo de Malthus

Ao aplicar a equação apresentada anteriormente no modelo de Malthus, foi possível obter os dados apresentados na Tabela 2.

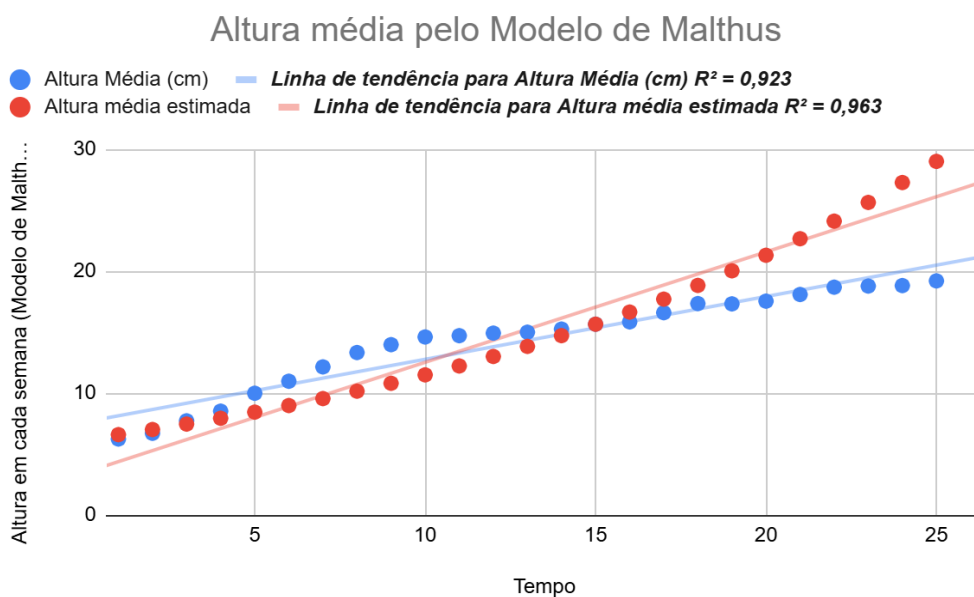
**Tabela 2** – Altura média resultante do Modelo de Malthus

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,21        |
| 2              | 6,60        |
| 3              | 7,01        |
| 4              | 7,47        |
| 5              | 7,95        |
| 6              | 8,45        |
| 7              | 8,99        |
| 8              | 9,56        |
| 9              | 10,17       |
| 10             | 10,82       |
| 11             | 11,51       |
| 12             | 12,24       |
| 13             | 13,02       |
| 14             | 13,84       |
| 15             | 14,72       |

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,21        |
| 16             | 15,66       |
| 17             | 16,66       |
| 18             | 17,72       |
| 19             | 18,84       |
| 20             | 20,04       |
| 21             | 21,32       |
| 22             | 22,67       |
| 23             | 24,12       |
| 24             | 25,65       |
| 25             | 27,28       |
| 26             | 29,02       |

**Fonte:** Autores, 2025.

Ao comparar a altura média real das plantas com os valores estimados pelo modelo, foi possível obter uma representação gráfica que ilustra essa relação. Essa comparação está apresentada na Figura 2, permitindo visualizar as diferenças e semelhanças entre os dados observados e os previstos.



**Figura 2** – Comparação da altura real com a altura estimada pelo modelo de Malthus.

**Fonte:** Autores, 2025.

### 3.2. Aplicação do Modelo de Verhulst

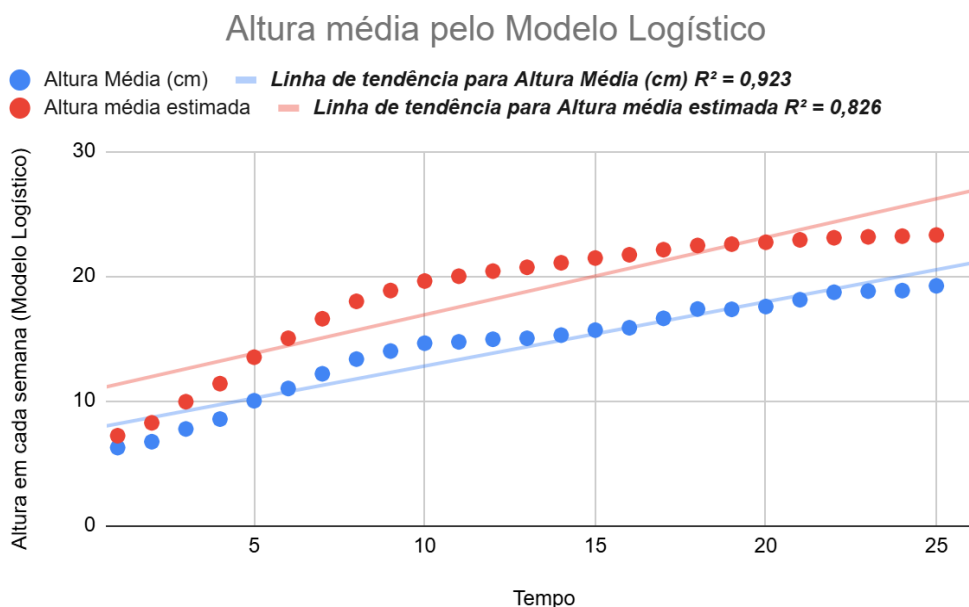
A aplicação da equação previamente apresentada no contexto do modelo de Verhulst possibilitou a obtenção de resultados que descrevem o comportamento da população ao longo do tempo. Esses resultados estão apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3 – Altura média resultante do Modelo de Verhulst**

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,28        |
| 2              | 7,20        |
| 3              | 8,23        |
| 4              | 9,92        |
| 5              | 11,37       |
| 6              | 13,49       |
| 7              | 15,01       |
| 8              | 16,56       |
| 9              | 17,97       |
| 10             | 18,84       |
| 11             | 19,60       |
| 12             | 19,99       |
| 13             | 20,40       |
| 14             | 20,70       |
| 15             | 21,06       |
| 16             | 21,44       |
| 17             | 21,70       |
| 18             | 22,11       |
| 19             | 22,45       |
| 20             | 22,56       |
| 21             | 22,71       |
| 22             | 22,90       |
| 23             | 23,07       |
| 24             | 23,14       |
| 25             | 23,20       |
| 26             | 23,29       |

**Fonte:** Autores, 2025.

A comparação entre a altura média real das plantas e os valores estimados pelo modelo resultou em uma representação gráfica que evidencia essa relação. Essa análise comparativa está ilustrada na Figura 3.



**Figura 3** – Comparação da altura real com a altura estimada pelo modelo de Verhulst.  
**Fonte:** Autores, 2025.

### 3.3. Aplicação do Modelo de Montroll

A aplicação da equação previamente apresentada no contexto do modelo de Verhulst possibilitou a obtenção de resultados que descrevem o comportamento da população ao longo do tempo. Esses resultados estão apresentados na Tabela 4.

**Tabela 4** – Altura média resultante do Modelo de Montroll

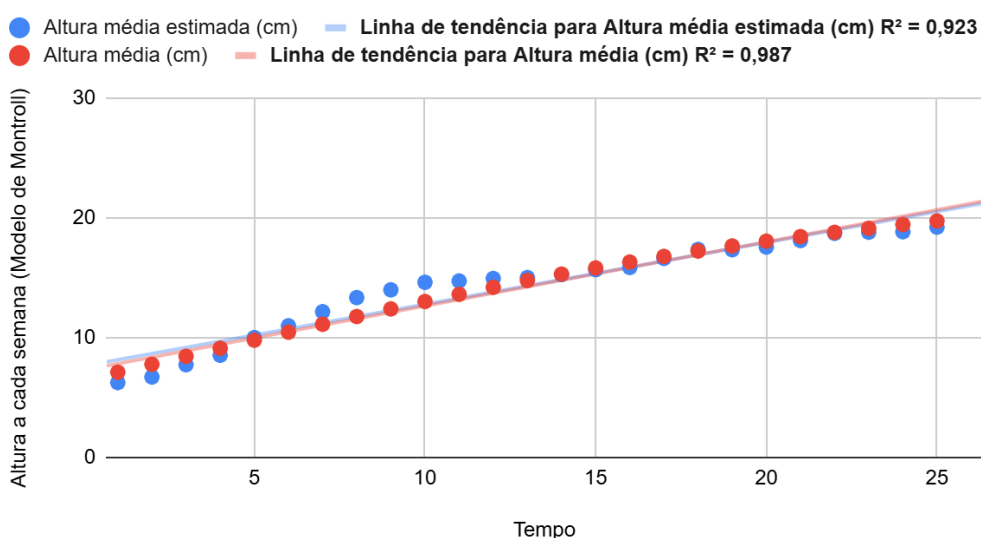
| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,47        |
| 2              | 7,16        |
| 3              | 7,77        |
| 4              | 8,44        |
| 5              | 9,11        |
| 6              | 9,78        |
| 7              | 10,45       |
| 8              | 11,11       |
| 9              | 11,76       |
| 10             | 12,39       |
| 11             | 13,01       |
| 12             | 13,61       |
| 13             | 14,19       |
| 14             | 14,76       |
| 15             | 15,29       |

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,47        |
| 16             | 15,81       |
| 17             | 16,30       |
| 18             | 16,77       |
| 19             | 17,22       |
| 20             | 17,64       |
| 21             | 18,04       |
| 22             | 18,42       |
| 23             | 18,78       |
| 24             | 19,12       |
| 25             | 19,43       |
| 26             | 19,73       |

**Fonte:** Autores, 2025.

A comparação entre a altura média real das plantas e os valores estimados pelo modelo resultou em uma representação gráfica que evidencia essa relação. Essa análise comparativa está ilustrada na Figura 4.

#### Altura média pelo Modelo de Montroll



**Figura 4** – Comparação da altura real com a altura estimada pelo modelo de Montroll.

**Fonte:** Autores, 2025.

### 3.4. Aplicação do Modelo de Gompertz

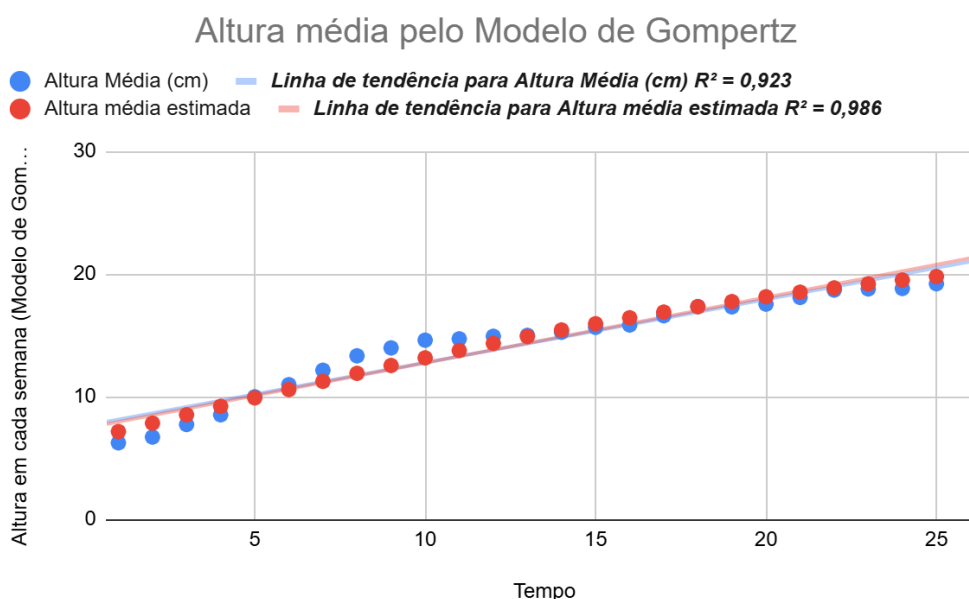
A aplicação da equação previamente apresentada no contexto do modelo de Verhulst possibilitou a obtenção de resultados que descrevem o comportamento da população ao longo do tempo. Esses resultados estão apresentados na Tabela 5.

**Tabela 5** – Altura média resultante do Modelo de Gompertz

| Tempo (semana) | Altura (cm) |
|----------------|-------------|
| 1              | 6,49        |
| 2              | 7,17        |
| 3              | 7,85        |
| 4              | 8,53        |
| 5              | 9,22        |
| 6              | 9,91        |
| 7              | 10,59       |
| 8              | 11,26       |
| 9              | 11,91       |
| 10             | 12,55       |
| 11             | 13,17       |
| 12             | 13,77       |
| 13             | 14,35       |
| 14             | 14,91       |
| 15             | 15,44       |
| 16             | 15,95       |
| 17             | 16,44       |
| 18             | 16,91       |
| 19             | 17,34       |
| 20             | 17,76       |
| 21             | 18,16       |
| 22             | 18,53       |
| 23             | 18,88       |
| 24             | 19,21       |
| 25             | 19,52       |
| 26             | 19,81       |

**Fonte:** Autores, 2025.

A comparação entre a altura média real das plantas e os valores estimados pelo modelo resultou em uma representação gráfica que evidencia essa relação. Essa análise comparativa está ilustrada na Figura 5.



**Figura 5** – Comparação da altura real com a altura estimada pelo modelo de Gompertz.

**Fonte:** Autores, 2025.

#### 4 Considerações Finais

Este estudo demonstrou a eficácia da modelagem matemática na descrição do crescimento de *Adenium obesum*, com destaque para os modelos de Montroll e Gompertz, que apresentaram o melhor ajuste aos dados experimentais. Esses modelos não apenas capturaram a dinâmica de crescimento inicial acelerado e posterior estabilização, mas também forneceram previsões mais precisas em comparação aos demais. O modelo de Malthus, por sua vez, mostrou-se inadequado devido à sua natureza exponencial ilimitada, enquanto o modelo de Verhulst, embora mais realista, não alcançou a mesma eficiência preditiva.

A análise comparativa reforçou a importância de considerar fatores limitantes intrínsecos ao crescimento vegetal, como disponibilidade de recursos e condições ambientais, nos modelos matemáticos. A utilização de métricas estatísticas, como RMSE e  $R^2$ , permitiu uma avaliação objetiva do desempenho de cada modelo, garantindo robustez aos resultados.

Por fim, os resultados obtidos têm implicações significativas para o cultivo racional de rosas-do-deserto, podendo oferecer subsídios para o planejamento agrícola e a otimização de práticas de manejo. Este estudo também contribui para o avanço da pesquisa em modelagem matemática aplicada à biologia vegetal, destacando a necessidade de modelos dinâmicos que integrem múltiplos fatores ambientais e fisiológicos. Futuros trabalhos podem

explorar a incorporação de variáveis adicionais, como nutrientes do solo e condições climáticas, para aprimorar ainda mais a precisão das previsões.

## REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014. 394 p.

PINHEIRO, A. N. C. F., Modelos de Crescimento Populacional – Teoria e aplicação a dados demográficos de São Tomé e Príncipe. Lisboa, 2021. Disponível em [https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/53694/1/TM\\_Aunaty\\_Pinheiro.pdf](https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/53694/1/TM_Aunaty_Pinheiro.pdf). Acesso em 20 de jun. de 2025.

LANGARO, L. N. Modelagem matemática: um estudo de modelos existentes na literatura. Toledo, 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/26767>. Acesso em 20 de jun. de 2025.

## CONSTRUINDO CONHECIMENTO

### PONTE DE PALITO DE PICOLÉ COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA

Jenifer Casaroto

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

jenifercasaroto@gmail.com

Leandro Antunes

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Wiliam Francisco de Araujo

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

#### Resumo

A aprendizagem baseada em projetos possibilita ao estudante vivenciar o conhecimento de forma prática, relacionando teoria e aplicação. Na construção de uma ponte treliçada de palitos de picolé, diversos conceitos matemáticos e físicos são mobilizados para compreender e justificar as escolhas estruturais. Na matemática, destacam-se as relações entre triângulos, fundamentais na estrutura em treliça por garantirem estabilidade ao distribuir as cargas. O teorema de Pitágoras auxilia na determinação de medidas e proporções, enquanto a lei dos senos e a lei dos cossenos permitem calcular ângulos e comprimentos em diferentes configurações triangulares, apoiando decisões de projeto. Na física, o estudo das forças de tração e compressão é essencial para compreender como o peso aplicado sobre a ponte se distribui pelos palitos e nós da estrutura. Essa análise possibilita avaliar a resistência e o equilíbrio, promovendo discussões sobre limites de carga e segurança. Assim, a aprendizagem baseada em projetos aplicada à construção da ponte integra conhecimento teórico e prática experimental, favorecendo o raciocínio lógico, o trabalho colaborativo e a aprendizagem significativa.

**Palavras-chave:** aprendizagem baseada em projetos. ponte treliçada. trigonometria. teorema de Pitágoras. forças de tração e compressão.

#### 1 Introdução

A matemática, ao longo da história, consolidou-se como fundamento essencial para a construção civil e para a compreensão do mundo físico. Desde as primeiras civilizações, como os egípcios e gregos, que aplicavam princípios geométricos em obras monumentais, até a engenharia contemporânea, observa-se a relevância da geometria e da trigonometria como pilares para a elaboração de projetos estruturais seguros e funcionais (BOYER; MERZBACH, 2010). Nesse contexto, a escola pode se apropriar dessas conexões entre teoria e prática para tornar o ensino mais significativo.

Uma das propostas metodológicas que favorece essa integração é a aprendizagem baseada em projetos (ABP), que coloca o estudante como protagonista do processo educativo. A partir da resolução de problemas reais e da construção de produtos concretos, a ABP permite que os alunos articulem saberes prévios e novos conhecimentos em experiências colaborativas (DEWEY, 1916; BENDER, 2014). No ambiente escolar, esse método rompe com o ensino tradicional centrado na transmissão de conteúdos, valorizando a investigação, a experimentação e o trabalho em equipe.

Um exemplo prático dessa abordagem é a construção de uma ponte treliçada de palitos de picolé, atividade que envolve conceitos fundamentais da matemática e da física. Os triângulos, presentes na estrutura em treliça, possibilitam compreender propriedades de rigidez e estabilidade, articulando noções de congruência, teorema de Pitágoras, lei dos senos e lei dos cossenos. Simultaneamente, os princípios físicos, como as forças de ação e reação, permitem analisar a distribuição de cargas e os limites de resistência da estrutura.

Ao unir teoria e prática, a construção da ponte favorece a aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), pois conecta os conteúdos escolares a situações concretas, despertando o interesse dos estudantes e desenvolvendo competências como raciocínio lógico, criatividade e cooperação. Além disso, alinha-se às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe metodologias ativas e interdisciplinares voltadas à formação integral dos educandos (BRASIL, 2017).

Dessa forma, o presente trabalho busca investigar como a construção de uma ponte treliçada de palitos pode ser utilizada como recurso pedagógico interdisciplinar, articulando matemática e física em uma prática fundamentada na aprendizagem baseada em projetos.

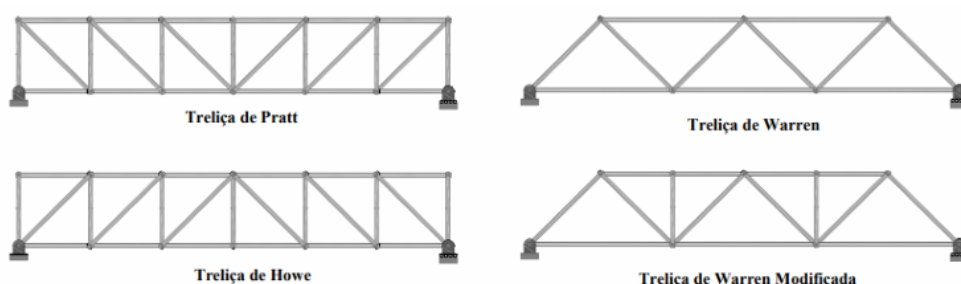
## **2 Competição Ponte Treliçada de Palitos de Picolé**

O uso de pontes treliçadas construídas com palitos de picolé tem ganhado espaço em diferentes instituições de ensino brasileiras como recurso pedagógico e também em competições acadêmicas. Essas atividades, além de despertar o interesse dos estudantes, permitem a aplicação prática de conceitos de Matemática, Física e Engenharia, como o equilíbrio estático, a distribuição de forças em treliças e a otimização de materiais. Em geral, os desafios propõem que as equipes projetem e construam uma ponte leve, mas capaz de suportar grandes cargas, estimulando o raciocínio lógico e a criatividade.

Algumas universidades e escolas técnicas realizam anualmente competições desse tipo. Na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), por exemplo, o Desafio de Pontes já apresentou estruturas de palitos que, com apenas 766 gramas de massa, alcançaram a impressionante marca de 320 quilos de carga antes da ruptura (UFSC, 2022). Na Universidade de Uberaba (Uniube), uma ponte com cerca de 800 palitos e menos de um quilo

resistiu a 302 quilos, evidenciando a eficiência do projeto estrutural adotado (UNIUBE, 2018). Na Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), estudantes de Engenharia Civil construíram pontes de até 300 palitos, sendo que a vencedora suportou 135 quilos, enquanto no Instituto Federal de São Paulo (IFSP) Campus Itaquaquecetuba, competições semelhantes desafiam os participantes a otimizar geometrias e junções para suportar cargas crescentes (UDESC, 2022; IFSP, 2022). Em Viçosa (MG), o projeto de extensão Construindo Pontes leva a atividade para escolas públicas, aproximando alunos do Ensino Médio da realidade universitária e permitindo que eles apliquem noções de geometria e resistência de materiais ao mesmo tempo em que refletem sobre as causas das rupturas (UFV, 2023). Outras iniciativas, como o concurso “Travessia” da FEI, em São Bernardo do Campo, também demonstram a força didática da proposta, apresentando pontes que superam 150 quilos de carga em categorias que incluem estudantes do ensino superior e médio (FEI, 2010).

Essas experiências revelam tendências comuns, a relação entre carga suportada e peso da ponte é um critério decisivo, pois exige que os participantes projetem treliças eficientes, muitas vezes inspiradas em modelos clássicos como Warren, Pratt ou Howe.



**Figura 1** – Tipos de treliças usadas em pontes ou passagens superiores

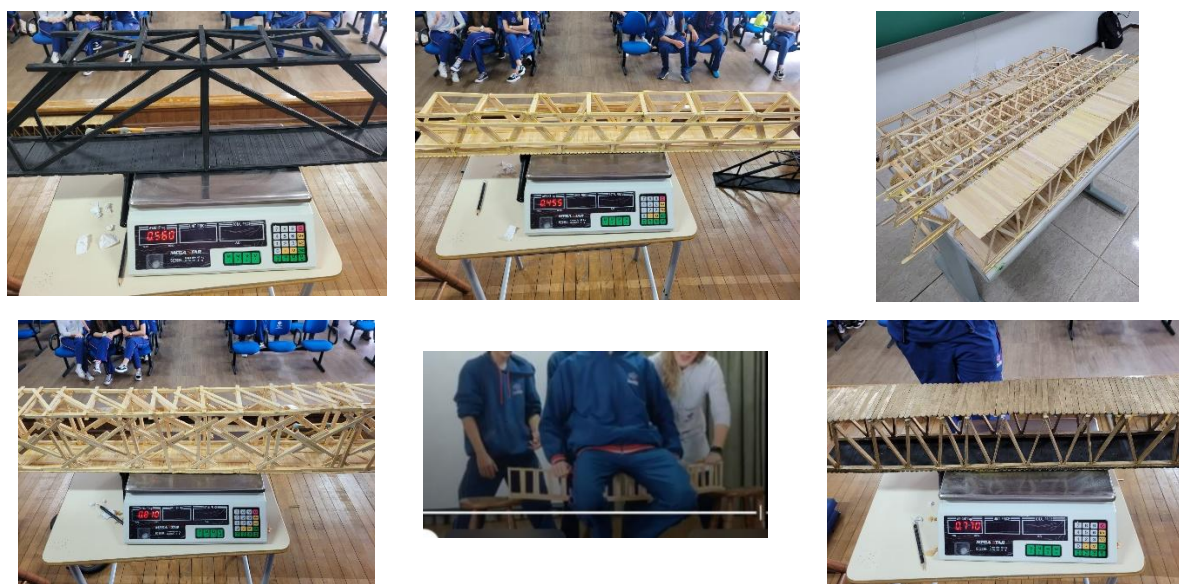
**Fonte:** Gomes, (2016).

O uso exclusivo de palitos e cola impõe limitações que estimulam a criatividade na distribuição de barras e na definição de ângulos, favorecendo a aplicação de cálculos de trigonometria, forças e momentos. Os ensaios de ruptura, normalmente realizados com aplicação gradual de pesos, geram momentos de análise, permitindo comparar previsões teóricas com resultados experimentais e compreender fatores de falha, como a fragilidade nas juntas ou a compressão excessiva em diagonais.

As competições de pontes de palitos, portanto, não se restringem a simples disputas, mas configuram-se como espaços de aprendizagem ativa. Elas integram conceitos de Matemática e Física, como teorema de Pitágoras, leis dos senos e cossenos, análise vetorial de forças e equilíbrio estático em um ambiente desafiador e cooperativo. Ao mesmo tempo, estimulam habilidades socioemocionais, como trabalho em equipe, tomada de decisão e

pensamento crítico. Essa revisão de casos brasileiros evidencia que a construção de pontes de palitos vai além de uma prática lúdica, trata-se de uma metodologia que articula teoria e prática, incentiva a curiosidade científica e aproxima os estudantes da realidade das engenharias, reforçando o caráter interdisciplinar da proposta pedagógica.

### 3 Galeria de Pontes Trelaçadas



**Figura 2** – Pontes com palitos de picolé

**Fonte:** Autor, (2025).

### 4 Cálculos e situações problema na Ponte Trelaçada

A construção de uma ponte trelaçada de palitos de picolé oferece um ambiente para o desenvolvimento de habilidades matemáticas e físicas, permitindo que os estudantes relacionem fórmulas a situações concretas. Ao longo do planejamento, da execução e dos testes de resistência, é possível explorar diferentes cálculos que simulam as demandas do projeto da ponte trelaçada de palito de picolé.

Um dos primeiros desafios é o dimensionamento das barras da trelaç. Supondo que a ponte possua vãos horizontais de 10 cm e barras verticais de 5 cm, o comprimento das diagonais pode ser obtido pelo Teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} \cong 11,18 \text{ cm}$$

Esse cálculo é essencial para definir a quantidade de palitos, o corte preciso e o ângulo de montagem, evitando desperdício de material e garantindo simetria estrutural.

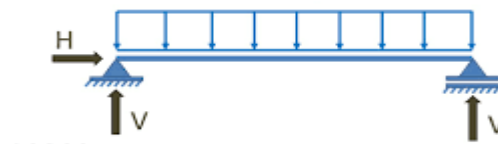
Quando as barras não formam triângulos retângulos, é possível aplicar a Lei dos Senos ou a Lei dos Cossenos para determinar ângulos e comprimentos:

- Lei do Senos:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
- Lei do Cossenos:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{c}$

Essas relações permitem calcular, por exemplo, o comprimento de uma barra inclinada quando se conhece o vão horizontal e o ângulo de inclinação desejado.

Durante os testes de resistência, é interessante propor problemas que envolvam a distribuição de forças. Em uma ponte simplesmente apoiada com uma carga  $P$  aplicada no centro, as reações em cada apoio podem ser estimadas por:

Figura 3: Reações de apoio



$$V_1 = V_2 = \frac{P}{2}$$

Se uma ponte com massa de 0,8 kg suporta 60 kg de carga distribuída, cada apoio recebe aproximadamente 30 kgf, permitindo discutir a diferença entre força peso (em newtons) e massa (em quilogramas).

Outra situação-problema envolve a compressão e a tração nas barras para uma treliça simples em forma de triângulo isósceles com altura  $h$  e vão  $L$ , a força  $F$  em cada barra diagonal pode ser estimada por:

$$F = \frac{P \cdot L}{4h}$$

Onde  $P$  é a carga aplicada, esse cálculo permite comparar barras sujeitas a compressão com aquelas submetidas à tração, relacionando o resultado ao ponto de ruptura observado no ensaio.

Esses cálculos podem ser propostos como desafios em sala de aula, por exemplo:

- Determinar a altura mínima da treliça para que uma ponte de 60 cm de vão suporte uma carga de 150 kg, dado que cada barra diagonal não pode ultrapassar 50 N de compressão.
- Calcular o número ideal de palitos necessários para uma ponte com eficiência mínima de 250, considerando o peso médio de 1,2 g por palito.

- Estimar o aumento de resistência ao dobrar a quantidade de barras diagonais, discutindo a relação entre número de elementos, estabilidade e custo de material.

Ao incorporar essas situações-problema, o projeto da ponte de palitos ultrapassa o caráter artesanal, transformando-se em uma atividade investigativa. Os estudantes não apenas aplicam fórmulas, mas também interpretam resultados, comparam previsões teóricas com dados experimentais e refletem sobre as limitações dos materiais, consolidando a integração entre Matemática, Física e Engenharia no contexto escolar.

## **5 Materiais e Métodos**

Esta proposta pedagógica consiste na utilização da metodologia de Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP), integrando conteúdos de forma prática e significativa para os estudantes. O objetivo é desenvolver uma sequência didática que integre conteúdos de Matemática e Física no Ensino Médio, utilizando a construção de uma ponte treliçada de palitos de picolé como recurso para favorecer o processo de ensino-aprendizagem.

A escolha da ABP justifica-se por seu foco na resolução de problemas reais e no protagonismo do estudante, que, ao assumir papel ativo, mobiliza conhecimentos prévios e constrói novos saberes em um contexto prático e colaborativo (DEWEY, 1916; BENDER, 2014). A atividade proposta será conduzida como uma sequência didática, aplicada a uma turma do Ensino Médio, e estruturada em quatro etapas principais. O tempo dedicado a cada etapa é flexível, dependendo do planejamento do professor.

### **1. Planejamento e Fundamentação Teórica**

Nesta primeira etapa, o professor introduzirá os conceitos matemáticos e físicos que embasam a atividade. Na Matemática, serão trabalhados os fundamentos geométricos das treliças, com destaque para a importância dos triângulos como figuras rígidas; o Teorema de Pitágoras, para o cálculo de diagonais e proporções; a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos, aplicadas em ângulos e comprimentos de barras inclinadas. Na Física, serão abordadas as forças de tração e compressão, as condições de equilíbrio estático e a noção de vetores de força, relacionando os conceitos à sustentação da estrutura. As aulas serão desenvolvidas na metodologia expositiva dialogada, com resolução de problemas contextualizados (exemplo: como calcular o comprimento de uma barra inclinada de apoio ou como a carga se distribui em um nó da treliça).

### **2. Desenho e Protótipo**

Nesta fase, os estudantes, organizados em grupos, transformarão os conceitos estudados em propostas concretas de ponte. Dentre as atividades desenvolvidas estarão a

elaboração de esboços em papel milimetrado ou software simples de desenho e a definição de medidas, ângulos e pontos de apoio para a ponte. Cada grupo deverá apresentar os cálculos que justificam suas escolhas estruturais.

O objetivo desta etapa é promover a aplicação prática da trigonometria e do equilíbrio de forças, além de estimular a argumentação matemática. Como recursos, serão necessários folhas de papel milimetrado, régua, compasso, transferidor, calculadora e, se possível, software de modelagem geométrica.

Ao final, os alunos deverão apresentar um protótipo em papel, acompanhado de justificativa escrita com cálculos.

### 3. Construção Prática

Com base nos protótipos, os grupos iniciarão a montagem da ponte. Haverá o corte e colagem dos palitos de picolé segundo as dimensões estabelecidas, montagem das treliças laterais e da base e união das partes em uma estrutura única, com o professor podendo tirar eventuais dúvidas, se necessário.

Nesta etapa, os alunos irão transformar abstrações em um objeto físico, exercitando a motricidade, a criatividade e a cooperação.

Como recursos, serão necessários palitos de picolé, cola branca do tipo PVA ou cola de madeira, fita adesiva, tesoura, prancheta de apoio para fixação e elásticos para pressão durante a secagem.

Os alunos deverão dividir as tarefas entre cada grupo (quem mede, quem corta, quem cola), desenvolvendo habilidades de gestão de projeto, obtendo como produto final a ponte treliçada montada e registrada por meio de fotos e anotações.

### 4. Testes e Análise

Na última etapa, as estruturas serão submetidas a ensaios de resistência. Haverá a aplicação gradual de pesos (como sacos de areia, livros, pesos de academia ou garrafas com água) até o limite de ruptura da ponte. Os estudantes deverão registrar a carga máxima suportada e observar em qual parte da estrutura ocorreu a falha.

O objetivo é relacionar cálculos prévios às observações experimentais, promovendo análise crítica da eficiência estrutural e discussão sobre os fatores que influenciam a resistência. Como recursos, serão necessários pesos padronizados, balança para medir massa, suporte para apoiar as pontes e câmera fotográfica para registros.

Os alunos deverão produzir uma tabela de resultados, relatório comparando previsões teóricas com dados experimentais, análise coletiva das diferentes soluções adotadas pelos grupos.

## 5. Registro e Avaliação

- Participação dos estudantes nas atividades.
- Clareza e precisão nos cálculos matemáticos.
- Criatividade e coerência no projeto da ponte.
- Qualidade do relatório final e da justificativa apresentada.
- Capacidade de análise crítica diante dos resultados dos testes.

A coleta de dados será feita por meio de registros escritos, fotografias, anotações de observações e análise do desempenho das estruturas construídas.

## 6 Resultados e Discussão

Espera-se que a aplicação da aprendizagem baseada em projetos (ABP), por meio da construção de uma ponte treliçada de palitos de picolé, proporcione resultados significativos tanto no campo cognitivo quanto no socioemocional dos estudantes.

Do ponto de vista conceitual, os alunos deverão demonstrar maior compreensão dos conteúdos matemáticos, como as relações entre triângulos, o teorema de Pitágoras e as leis dos senos e dos cossenos. A prática de cálculos associados ao planejamento da estrutura tende a favorecer a consolidação do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas em situações reais. No campo da física, a análise das forças de tração e compressão permitirá que os estudantes percebam a importância da distribuição de cargas e da rigidez estrutural, conceitos essenciais em engenharia e construção civil.

Além da dimensão conceitual, espera-se também o desenvolvimento de competências relacionadas ao trabalho em equipe, à criatividade e à tomada de decisão. A necessidade de dividir tarefas, elaborar estratégias de construção e testar soluções estimulará a cooperação entre os grupos, assim como a reflexão crítica sobre os acertos e erros durante o processo. Nesse sentido, a ABP poderá favorecer uma aprendizagem significativa (AUSUBEL, 2003), em que os novos conhecimentos são integrados aos saberes prévios dos alunos.

Espera-se ainda que os testes de resistência das pontes construídas promovam um momento de análise crítica, no qual os estudantes poderão comparar previsões teóricas com resultados práticos. Essa etapa permitirá discutir a importância da precisão nos cálculos, bem como refletir sobre as limitações dos materiais utilizados e os fatores que interferem na resistência estrutural.

Os resultados previstos dialogam com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que orienta para a valorização de metodologias ativas e interdisciplinares, capazes de desenvolver competências como pensamento crítico, resolução de problemas e protagonismo estudantil (BRASIL, 2017). Desse modo, a proposta de construção da ponte treliçada de

palitos poderá ser discutida não apenas como uma atividade experimental, mas como um recurso pedagógico interdisciplinar que integra teoria, prática e formação integral do estudante.

## **7 Conclusões / Considerações Finais**

Espera-se que a construção de uma ponte treliçada com palitos de picolé mostre-se uma estratégia pedagógica eficaz para unir teoria e prática, transformando conteúdos muitas vezes vistos como abstratos em experiências concretas e significativas. Ao mobilizar conceitos de geometria, trigonometria e física, os estudantes podem compreender a importância das estruturas triangulares, da distribuição de forças e da estabilidade, relacionando a matemática e a ciência ao mundo real.

Mais do que o domínio de cálculos, o processo pode proporcionar vivências alinhadas à Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP), em que a pesquisa, a experimentação e a resolução de problemas são centrais. Nesse sentido, o trabalho em equipe, a cooperação e a criatividade ganham destaque, atendendo às competências previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que valoriza o protagonismo estudantil e o desenvolvimento integral.

Assim, conclui-se que o projeto não apenas pode alcançar os objetivos didáticos de ensinar conteúdos matemáticos e físicos, mas também se constitui em uma proposta pedagógica inovadora. A atividade de construção da ponte de palitos representa um recurso de aprendizagem que pode ser replicado e adaptado a diferentes contextos escolares, fortalecendo a autonomia, o pensamento crítico e a motivação dos alunos. Portanto, trata-se de uma prática que merece espaço contínuo no ambiente educacional, como forma de promover uma aprendizagem significativa e conectada às necessidades do mundo atual.

## **REFERÊNCIAS**

AUSUBEL, David Paul. Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

AUSUBEL, David Paul. The psychology of meaningful verbal learning. New York: Grune & Stratton, 1963.

BENDER, William N. Aprendizagem baseada em projetos: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2012.

BENDER, William N. Aprendizagem baseada em projetos: práticas para o sucesso escolar. Porto Alegre: Penso, 2014.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BICUDO, Irineu (Trad.). Os Elementos. Euclides. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da Matemática. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017.

BURTON, David M. The history of mathematics: an introduction. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

DEWEY, John. Democracy and education. New York: Macmillan, 1916.

DEWEY, John. Schools of to-morrow. New York: Dutton, 1915.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

FEI. Concurso Travessia desafia estudantes a construir ponte resistente com palitos de sorvete. 2010. Disponível em:  
[https://www.institutodeengenharia.org.br/site/universidades/exibe/id\\_sessao/66/id\\_universidade/6/id\\_noticia/468/FEI-desafia-estudante-a-construir-ponte-resistente-com-palitos-de-sorvete/](https://www.institutodeengenharia.org.br/site/universidades/exibe/id_sessao/66/id_universidade/6/id_noticia/468/FEI-desafia-estudante-a-construir-ponte-resistente-com-palitos-de-sorvete/). Acesso em: 27 set. 2025

GOMES, Maria Idália da Silva. Estudo e Análise de Trelças. Lisboa: Instituto Politécnico de Lisboa, Departamento de Engenharia Civil, 2016.

HILBERT, David. Fundamentos da geometria. 1899. Diversas edições posteriores em alemão e traduções em inglês e português.

IFSP. Edital – I Competição de Pontes de Palitos – SEMEC 2022. Disponível em:  
[https://itq.ifsp.edu.br/images/EngenhariaMecanica/EDITAL\\_-Ponte\\_de\\_palitos-\\_SEMEC\\_2022.pdf](https://itq.ifsp.edu.br/images/EngenhariaMecanica/EDITAL_-Ponte_de_palitos-_SEMEC_2022.pdf). Acesso em: 27 set. 2025.

KATZ, Victor J. A history of mathematics: an introduction. 3. ed. Boston: Addison Wesley, 2009.

LAY, David C. Linear algebra and its applications. 4. ed. Boston: Pearson, 2013.

MOREIRA, Marco Antonio. Aprendizagem significativa: da teoria à sala de aula. São Paulo: Centauro, 2013.

PIAGET, Jean. A equilibração das estruturas cognitivas: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

ROBBINS, Mansfield. Plimpton 322: the earliest known table of Pythagorean triples. American Mathematical Monthly, v. 56, n. 1, 1950.

ROMAN, José Carlos Orosco. Fundamentos de engenharia mecânica. v. 1. São Paulo: Jasa Produções, 2022.

STEWART, Ian. História da matemática em 24 capítulos fáceis. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

UDESC. Estudantes da UDESC Alto Vale participam de competição de pontes de palito. 2022. Disponível em:

[https://www.udesc.br/noticia/estudantes\\_da\\_udesc\\_alto\\_vale\\_participam\\_de\\_competicao\\_de\\_pontes\\_de\\_palito](https://www.udesc.br/noticia/estudantes_da_udesc_alto_vale_participam_de_competicao_de_pontes_de_palito). Acesso em: 27 set. 2025.

UFSC. Equipe da UFSC Joinville ganha Desafio de Pontes com estrutura de palitos de picolé que suporta até 320 kg. 2022. Disponível em: <https://noticias.ufsc.br/2022/11/equipe-da-ufsc-joinville-ganha-desafio-de-pontes-com-estrutura-de-palitos-de-picole-que-suporta-ate-320-kg/>. Acesso em: 27 set. 2025.

UFV. Construindo pontes: a construção de pontes de palito de picolé no ensino básico como incentivo à inserção no ensino superior. Revista ELO, 2023. Disponível em: <https://periodicos.ufv.br/elo/article/view/16236>. Acesso em: 28 set. 2025.

UNIUBE. Alunos de Engenharia construíram ponte de palito de picolé que suportou 302 quilos. 2018. Disponível em: <https://uniube.br/acontece-na-uniube/alunos-de-engenharia-construiram-ponte-de-palito-de-picole-que-suportou-302-quilos>. Acesso em: 28 set. 2025.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

---

## **CURRÍCULO DE MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE A PARTIR DE TRABALHOS DO EPREM DE 2011 A 2024**

Júlia Bertuzzo Chesca

UTFPR

juliabertuzzochesca@gmail.com

Mauro André Junges Rech

UTFPR

Vanessa Largo Andrade

UTFPR

### **Resumo**

O currículo é um dos principais objetos de estudo da Educação, especialmente no que se refere à Matemática no Ensino Médio, etapa que concentra conteúdos essenciais para a formação acadêmica e social dos estudantes. Este artigo tem como objetivo analisar como diferentes trabalhos publicados nos Anais do Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM) abordam a temática do currículo em Matemática nesse nível de ensino. Foram selecionados seis artigos, publicados entre 2011 e 2019, que discutem o currículo a partir de três perspectivas: histórica, documental e relacionada à aprendizagem. O estudo demonstra que os trabalhos de enfoque histórico ressaltam a constituição social e cultural do currículo; aqueles voltados aos documentos oficiais destacam os impactos dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e os que apresentam currículo e aprendizagem revelam tanto desafios quanto possibilidades para tornar o ensino de Matemática de forma que os alunos o compreendam. Conclui-se que compreender o currículo do Ensino Médio requer integrar essas três dimensões, reconhecendo-o como prática social situada historicamente, normatizada por políticas educacionais e concretizada nas práticas pedagógicas.

**Palavras-chave:** Currículo como Prática Social. Ensino de Matemática. Educação Básica.

### **1 Introdução**

O currículo escolar constitui um campo de estudo central para a compreensão do processo educativo, especialmente quando se considera a Matemática no Ensino Médio. Esta etapa da Educação Básica concentra não apenas conteúdos fundamentais para a formação acadêmica dos estudantes, mas também expectativas sociais relacionadas ao ingresso no ensino superior e ao mundo do trabalho. Nesse contexto, pensar o currículo de Matemática significa refletir sobre quais saberes são valorizados, como são organizados e de que forma impactam os processos de ensino e aprendizagem.

Os debates em torno do currículo são marcados por diferentes perspectivas. Para Sacristán (2000), o currículo deve ser entendido como prática social que se materializa em documentos, métodos e conteúdos, sendo historicamente situado. Goodson (1995) destaca a constituição histórica das disciplinas escolares, ressaltando que o currículo é fruto de disputas

políticas e culturais. Saviani (2008), por sua vez, evidencia a dimensão social do conhecimento escolar e a necessidade de relacionar o currículo às demandas históricas da sociedade.

O conceito de currículo tem sido amplamente discutido nas últimas décadas, a partir de diferentes perspectivas teóricas. Para Sacristán (2000), o currículo não deve ser compreendido apenas como um documento normativo, mas como a materialização de uma prática social que organiza e orienta a ação pedagógica. Dessa forma, o currículo assume caráter histórico, político e cultural, refletindo disputas de poder e concepções de conhecimento.

Nessa linha, Goodson (1995) destaca que a constituição das disciplinas escolares é um processo social e histórico, no qual determinados saberes são selecionados e legitimados em detrimento de outros. A Matemática, nesse sentido, consolidou-se como disciplina central na formação escolar, especialmente no Ensino Médio, etapa em que assume papel estratégico na preparação para exames seletivos e para a inserção social e profissional dos estudantes.

Moreira e Silva (1995) enfatizam que o currículo é uma construção social, marcada por disputas ideológicas e culturais, que envolve tanto os documentos oficiais quanto as práticas cotidianas em sala de aula. Essa compreensão é essencial para analisar como as propostas curriculares — como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) — influenciam diretamente a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio.

Do ponto de vista crítico, Saviani (2008) aponta que o currículo precisa ser entendido a partir das condições históricas e sociais que o constituem, sendo fundamental relacionar a seleção dos conteúdos à função social da escola. Assim, analisar como os documentos oficiais tratam a Matemática no Ensino Médio é também refletir sobre quais saberes são considerados necessários à formação cidadã e quais permanecem à margem do processo educativo.

A literatura também evidencia a importância de articular currículo e aprendizagem. Conforme destaca Sacristán (2013), o currículo só se efetiva na medida em que se concretiza na prática pedagógica e impacta os processos de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, compreender as dificuldades dos estudantes frente a conteúdos como a Álgebra ou a inserção de metodologias como a Modelagem Matemática, significa também compreender como o currículo é vivenciado no cotidiano escolar.

No Brasil, documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), e depois substituídos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) têm

desempenhado papel fundamental na organização do currículo do Ensino Médio, orientando práticas pedagógicas e influenciando pesquisas na área de Educação Matemática.

Nesse contexto, este estudo propõe a questão de pesquisa: *do que tratam as pesquisas do EPREM quando o foco está no Currículo em Educação Matemática no Ensino Médio?* O objetivo é analisar os trabalhos publicados nos anais do evento intitulado Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), e que estão disponibilizados no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), sobre a temática currículo em Educação Matemática no Ensino Médio.

Um ensaio com o uso da metodologia da Análise de Conteúdo (AC), conforme Bardin (2015), foi utilizada neste estudo, para a busca, seleção e análise dos documentos – no caso, dos trabalhos disponíveis no site e nas diferentes edições do EPREM. A partir desse processo, três categorias foram trazidas para este estudo: Currículo na Perspectiva Histórica, Currículo em Documentos Oficiais e Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio.

## **2 Encaminhamentos Metodológicos**

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica e documental (GIL, 2008), na medida em que se fundamenta na análise de produções acadêmicas publicadas em anais de evento científico. De acordo com Severino (2016), a pesquisa bibliográfica tem como objetivo examinar materiais já publicados, possibilitando o aprofundamento de conceitos, a sistematização de ideias e a construção de análises comparativas.

Um ensaio da metodologia da Análise de Conteúdo, de Laurence Bardin foi realizado para a composição deste estudo. O *corpus* (Bardin, 1977) de investigação é composto por seis artigos publicados nos Anais do EPREM. Os resultados surgem de diferentes edições do evento: 2011 (Apucarana - XI EPREM), 2017 (Cascavel - XIV EPREM) e 2019 (Curitiba e Maringá - XV EPREM). O descritor utilizado para a obtenção dos trabalhos foi “currículo”, digitado no campo de busca do site do EPREM<sup>1</sup>. Inicialmente, foram realizadas leituras dos títulos e dos resumos dos trabalhos, e selecionados seis artigos apresentados em diferentes edições do evento.

Um ensaio de categorização foi realizado, e as três categorias resultantes foram Currículo na Perspectiva Histórica, Currículo em Documentos Oficiais e Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio.

Para a constituição do *corpus*, realizou-se uma busca direta nos anais digitais do EPREM, utilizando o descritor “currículo” no campo de pesquisa disponibilizado pelo evento. Esse procedimento resultou em um total de 12 trabalhos, cujos títulos foram inicialmente

---

<sup>1</sup> <https://sbemparana.com/site/eprem>

analisados. Em seguida, procedeu-se à leitura dos resumos para verificar a pertinência em relação ao foco deste estudo, que é o currículo no Ensino Médio. Dessa forma, foram excluídos os trabalhos que tratavam exclusivamente do Ensino Fundamental ou que não apresentavam relação direta com o nível de ensino investigado. Ao final desse processo, foram selecionados os seis artigos.

Os trabalhos que compõem o *corpus* estão apresentados no Quadro 1.

Quadro 1 - Artigos selecionados para a análise

| CÓDIGO DO TRABALHO | TÍTULO                                                                                                          | AUTORES                                                                                 | ANO DO EVENTO |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| T1                 | Modelagem Matemática na sala de aula: a questão do currículo.                                                   | FERREIRA, Roberto; DIONÍSIO, Carlos BURAK.                                              | 2011          |
| T2                 | A álgebra no ensino médio e suas dificuldades de aprendizagem.                                                  | SILVA, Flávio Anunciação da; COSTA, Renata Cristina da.                                 | 2017          |
| T3                 | Uma história do currículo sob o olhar da história das disciplinas escolares.                                    | PINTO, Neuza Bertoni.                                                                   | 2017          |
| T4                 | Algumas das consequências da elaboração, publicação e implementação da BNCC.                                    | CALDATTO, Marlova Estela.                                                               | 2017          |
| T5                 | Uma análise do tratamento dado ao raciocínio matemático em currículos nacionais.                                | CARNEIRO, Luís Felipe Gonçalves; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira.                      | 2019          |
| T6                 | Ilustrações em Margarita Philosophica: um olhar para o currículo educacional e para a Geometria na Idade Média. | TONHATO, Igor Cardoso; CARDOSO, Matheus Vieira do Nascimento; TRIVIZOLI, Lucieli Maria. | 2019          |

Fonte: Autores, 2025.

### 3 Descrições, Análises e Considerações

A análise dos trabalhos foi organizada a partir de três eixos principais, inspirados em Sacristán (2000) e Goodson (1995). Na categoria Currículo na Perspectiva Histórica estão os artigos que discutem o currículo em perspectiva histórica, analisando sua constituição e

transformações. Na categoria Currículo em Documentos Oficiais estão os trabalhos que examinam documentos oficiais que normatizam o currículo da Educação Básica, como PCNEM e BNCC. Na categoria Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio foram alocados os artigos que relacionam currículo e ensino de Matemática no Ensino Médio, considerando dificuldades e práticas pedagógicas.

### **3.1 Currículo na Perspectiva Histórica**

Dois dos artigos selecionados abordam o currículo sob um viés histórico, T6 e T3, embora escritos em contextos distintos, ambos se inserem na tradição de estudos que compreendem o currículo como uma construção social e cultural, conforme defendido por Goodson (1995), para quem a constituição das disciplinas escolares é resultado de disputas políticas, históricas e ideológicas.

O T6 investiga as ilustrações presentes na obra *Margarita Philosophica*, de Gregor Reisch, publicada no início do século XVI, refletindo sobre o currículo medieval e o ensino da Geometria. Os autores evidenciam como o *trivium* e o *quadrivium*<sup>2</sup> compunham a estrutura curricular da época, em que a Matemática ocupava lugar de destaque no *quadrivium*. Ainda que não trate diretamente do Ensino Médio contemporâneo, o artigo contribui para compreender a historicidade do currículo, mostrando que os modos de organizar o conhecimento variam de acordo com contextos sociais, políticos e culturais.

De forma complementar, o T3 analisa o currículo a partir da perspectiva da história das disciplinas escolares. A autora argumenta que o currículo deve ser entendido como uma construção histórica, atravessada por relações de poder, em consonância com Sacristán (2000), que entende o currículo como prática social historicamente situada. Embora o foco do artigo não seja especificamente o Ensino Médio, sua contribuição reside em oferecer um olhar mais amplo sobre a formação do currículo escolar, permitindo compreender que as definições curriculares atuais — inclusive no Ensino Médio — não podem ser dissociadas de suas origens históricas.

Assim, ambos os trabalhos revelam que compreender o currículo do Ensino Médio em Matemática exige reconhecer sua dimensão histórica. O currículo não é apenas uma lista de conteúdos, mas o resultado de processos de seleção cultural, política e pedagógica. Essa perspectiva histórica, ainda que não trate diretamente das práticas atuais do Ensino Médio, constitui base fundamental para compreender as disputas contemporâneas em torno da BNCC e das dificuldades de aprendizagem que emergem do currículo prescrito e praticado.

---

<sup>2</sup> Estrutura curricular do *Trivium*, era composta por Gramática, Lógica e Retórica, e do *Quadrivium*, por Aritmética, Geometria, Música e Astronomia.

### **3.2 Currículo em Documentos Oficiais**

Dois dos artigos analisados concentram-se na discussão do currículo a partir de documentos normativos da Educação Básica brasileira, T4 e T5. Esses trabalhos dialogam diretamente com o debate acerca da BNCC e dos PCNEM, refletindo sobre como tais documentos estruturam o ensino de Matemática no Ensino Médio.

O artigo T4 discute as consequências da elaboração, publicação e implementação da BNCC, destacando os impactos dessa política curricular sobre a organização do trabalho docente. A autora aponta que a BNCC, ao estabelecer um conjunto de competências e habilidades comuns a todos os estudantes, influencia fortemente o currículo escolar, inclusive no Ensino Médio. Sua análise vai ao encontro da concepção de Sacristán (2000), ao defender o currículo como prática social que se concretiza em prescrições oficiais, mas que também deve ser problematizado quanto à sua aplicabilidade e coerência com as demandas da realidade escolar.

Já no T5 realizam uma análise comparativa do tratamento dado ao raciocínio matemático nos PCN e na BNCC. Os autores evidenciam que, embora ambos os documentos reconheçam a importância desse aspecto para a formação dos estudantes, há diferenças significativas na forma como o raciocínio matemático é concebido e operacionalizado no currículo. Esse estudo mostra que as orientações curriculares não são neutras, mas revelam concepções distintas sobre o papel da Matemática no Ensino Médio. Essa perspectiva dialoga com Moreira e Silva (1995), que compreendem o currículo como espaço de disputas ideológicas e culturais, em que diferentes visões de conhecimento são legitimadas ou marginalizadas.

Em conjunto, os dois artigos evidenciam que a compreensão do currículo no Ensino Médio não pode prescindir da análise dos documentos oficiais que o orientam. Tanto a BNCC quanto os PCNEM configuram marcos de referência fundamentais para os professores e para a organização das práticas escolares. No entanto, como apontam os autores, há tensionamentos entre as prescrições desses documentos e as condições reais de implementação, o que suscita reflexões sobre a efetiva articulação entre currículo, ensino e aprendizagem.

### **3.3 Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio**

Dois dos artigos selecionados abordam o currículo de Matemática no Ensino Médio em estreita relação com o processo de aprendizagem dos estudantes, T2 e T1. Ambos problematizam como o currículo se materializa na sala de aula e como impacta diretamente as experiências de ensino e de aprendizagem.

O T2 focaliza as dificuldades de aprendizagem em Álgebra no Ensino Médio, destacando que a forma como o currículo organiza os conteúdos pode potencializar ou reduzir tais dificuldades. As autoras discutem que a fragmentação dos conteúdos, a ênfase excessiva em técnicas algébricas descontextualizadas e a pouca articulação com a realidade dos estudantes constituem fatores que dificultam a aprendizagem. Essa análise está em consonância com Sacristán (2013), para quem o currículo só adquire sentido quando se concretiza na prática pedagógica e afeta diretamente a experiência dos alunos.

Já em T1 os autores discutem a Modelagem Matemática como alternativa curricular inovadora para tornar a Matemática de maneira que os alunos a compreendam e próxima de suas realidades. Ao problematizar o currículo, os autores defendem que a modelagem pode contribuir para romper com a rigidez dos programas tradicionais e favorecer aprendizagens mais ativas e contextualizadas. Nesse sentido, o artigo exemplifica a visão de Saviani (2008), que entende o currículo como seleção de conhecimentos socialmente relevantes, devendo ser organizado de modo a contribuir para a formação integral do estudante.

Ambos os trabalhos reforçam que o currículo do Ensino Médio não pode ser analisado apenas em termos de documentos oficiais, mas também a partir das práticas pedagógicas e de seus efeitos sobre a aprendizagem. Enquanto em T2 revelam as limitações do currículo prescrito diante das dificuldades concretas de aprendizagem, em T1 apontam caminhos possíveis para ressignificar o currículo por meio de metodologias inovadoras. Em conjunto, os artigos evidenciam que compreender o currículo do Ensino Médio implica considerar sua dimensão prescrita, mas também sua dimensão vivida, aquela que se concretiza no encontro entre professores, estudantes e práticas educativas.

### **3.4 Considerações sobre as Descrições e Análises**

As três categorias apresentadas nos dão indícios de que pensar o currículo de Matemática no Ensino Médio implica articular a análise de documentos oficiais, a reflexão sobre a história das disciplinas escolares e a atenção às práticas pedagógicas que se desenvolvem em sala de aula.

Com relação ao Currículo na Perspectiva Histórica, pode-se destacar de T3 e T6, o currículo como fruto de processos sociais e culturais, marcados por disputas de poder e por escolhas que definem quais saberes são valorizados em cada época. Compreender a história auxiliar na análise dos desafios contemporâneos, e mostra que a organização curricular nunca é neutra ou natural, mas resultado de decisões políticas e culturais.

Em T4 e T5, no que diz respeito ao Currículo em Documentos Oficiais, destaca-se o impacto de políticas como os PCNEM e a BNCC na definição do currículo do Ensino Médio. A análise desses artigos mostra que tais documentos não apenas prescrevem conteúdos e

competências, mas também refletem concepções de Matemática e de formação estudantil, influenciando diretamente as práticas escolares.

Por fim, na categoria Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio foram alocados T1 e T2, nos quais o currículo só adquire sentido pleno quando se concretiza na prática pedagógica, principalmente nos momentos em que as dificuldades de aprendizagem em conteúdos matemáticos surgem.

#### **4 Considerações Finais**

A análise dos seis artigos selecionados permitiu identificar diferentes formas de compreender e discutir o currículo de Matemática no Ensino Médio. Ainda que escritos em contextos e com objetivos distintos, os trabalhos apresentam contribuições complementares, sendo possível um olhar para o *corpus* em três dimensões, a constituição histórica do currículo; a presença dos documentos oficiais que normatizam a Educação Básica; e as implicações do currículo para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

Deste modo, buscou-se respostas para a questão de pesquisa: *do que tratam as pesquisas do EPREM quando o foco está no Currículo em Educação Matemática no Ensino Médio?* Por meio deste estudo, três categorias foram obtidas, Currículo na Perspectiva Histórica, Currículo em Documentos Oficiais e Currículo e Aprendizagem no Ensino Médio.

Portanto, espera-se que a análise realizada possa auxiliar para se ampliar a compreensão do currículo de Matemática no Ensino Médio. O currículo não se restringe a prescrições normativas, mas envolve disputas históricas e culturais, ao mesmo tempo em que se concretiza em experiências de aprendizagem.

Novos estudos são importantes e necessários, principalmente com foco em investigações relativas a como as orientações curriculares são efetivamente implementadas nas escolas, especialmente diante dos desafios impostos pela BNCC e pelas demandas de uma sociedade em constante transformação.

#### **REFERÊNCIAS**

CALDATTO, Marlova Estela. Algumas das consequências da elaboração, publicação e implementação da BNCC. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 11., 2017, Cascavel. Anais [...]. Cascavel: UNIOESTE, 2017.

CARNEIRO, Luís Felipe Gonçalves; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira. Uma análise do tratamento dado ao raciocínio matemático em currículos nacionais. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 13., 2019, Curitiba. Anais [...]. Curitiba: UTFPR, 2019.

FERREIRA, Carlos Roberto; BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática na sala de aula: a questão do currículo. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 8., 2011, Apucarana. Anais [...]. Apucarana: UENP, 2011.

GIL, Antonio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOODSON, Ivor F. Currículo: teoria e história. Petrópolis: Vozes, 1995.

MOREIRA, Antonio Flávio; SILVA, Tomaz Tadeu da (orgs.). Currículo, cultura e sociedade. São Paulo: Cortez, 1995.

PINTO, Neuza Bertoni. Uma história do currículo sob o olhar da história das disciplinas escolares. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 11., 2017, Cascavel. Anais [...]. Cascavel: UNIOESTE, 2017.

SACRISTÁN, José Gimeno. O currículo: uma reflexão sobre a prática. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SACRISTÁN, José Gimeno. O currículo: uma reflexão sobre a prática. 8. ed. Porto Alegre: Artmed, 2013.

SAVIANI, Dermeval. Escola e democracia. 41. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

SEVERINO, Antonio Joaquim. Metodologia do trabalho científico. 24. ed. São Paulo: Cortez, 2016.

SILVA, Flávio Anunciação da; COSTA, Renata Cristina da. A álgebra no ensino médio e suas dificuldades de aprendizagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 11., 2017, Cascavel. Anais [...]. Cascavel: UNIOESTE, 2017.

TONHATO, Igor Cardoso; CARDOSO, Matheus Vieira do Nascimento; TRIVIZOLI, Lucieli M. Ilustrações em Margarita Philosophica: um olhar para o currículo educacional e para a Geometria na Idade Média. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – EPREM, 13., 2019, Maringá. Anais [...]. Maringá: UEM, 2019.

## **Construção de um Puzzle Lógico como Ferramenta de Investigação em Lógica**

Lucas André Petry  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná  
lucasandrep2007@gmail.com

Wiliam Francisco de Araujo  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

### **Resumo**

A presença da lógica no cotidiano é mais do que evidente, porém acaba por muitas vezes esquecida ou ainda deixada de lado, prejudicando o discurso e a formação de argumentos coerentes. A partir disso, o presente trabalho apresenta as noções básicas da lógica formal, visando entender seu funcionamento na construção de um puzzle de caráter investigativo, onde, por meio das informações fornecidas, como depoimentos de suspeitos, o jogador deve, usando os conceitos da lógica, encontrar o culpado. No entanto, durante as tentativas de elaboração do puzzle, foi observado uma dificuldade na construção de argumentos baseando-se apenas nos depoimentos, uma vez que estes não possuem validade de verdade assegurada. Dessa forma, torna-se necessário recorrer a artifícios que não se aplicam a situações reais, como por exemplo, a suposição de que inocentes falam sempre a verdade. Concluímos que a lógica é uma ferramenta fundamental na construção de argumentos, porém, as constatações que se realizaram contribuem para a ideia de que a mesma mostra-se mais eficaz quando fundamentada em premissas verdadeiras e bem definidas, apresentando maior dificuldade em lidar com situações de incerteza ou ambiguidades.

**Palavras-chave:** Lógica. Argumento. Proposição.

## **1 Introdução**

Ao longo da história, muito se tem discutido a respeito da argumentação e da estruturação do pensamento. Aristóteles foi um dos primeiros a desenvolver uma forma de pensamento lógico [4]. Sua forma de pensar tinha por finalidade, não definir como verdade certas ideias, mas analisar a construção e a validade dos argumentos que as envolviam. Mais adiante, outro grande nome de destaque é George Boole, que já no século XIX, avançava nos estudos relacionados à lógica e criava um sistema de álgebra usado até hoje. Sua contribuição para esse ramo possibilitou a criação da base da programação que está presente em praticamente todo equipamento eletrônico moderno [3].

Ainda que de grande importância e usabilidade, a lógica como ferramenta de argumentação, muitas vezes acaba por ser abandonada, o que acaba com a organização das ideias. O acúmulo de informações, ou ainda a perda da razão, faz com que o interlocutor possa não perceber contradições que comprometem sua linha de raciocínio, caso o mesmo não saiba fazer o uso correto do instrumento que será aqui exposto.

Como será melhor apresentado posteriormente, é possível a criação de enigmas e puzzles a partir dos conceitos da lógica matemática que usam a mesma em sua resolução. Porém,

durante uma busca, notou-se a dificuldade em encontrar materiais que abordem esse tema e que tratem da criação desses jogos da maneira como se pretende.

A partir dessa problemática, este trabalho tem como objetivo, por meio de uma revisão bibliográfica realizada no âmbito de um projeto de iniciação científica, apresentar os fundamentos que constituem a lógica formal e mostrar como ela pode ser aplicada no cotidiano.

Ao longo da segunda seção, exporemos os conceitos básicos da lógica matemática, com base nas obras Lógica e Álgebra de Boole [4] e Fundamentos da Matemática [5]. Ainda que introdutório, este conteúdo foi incluído para proporcionar uma melhor compreensão do artigo como um todo, especialmente para leitores que ainda não estão familiarizados com o tema.

A partir da terceira seção, desenvolve-se a construção de um puzzle lógico, um jogo cuja resolução envolve os conceitos aqui apresentados, com o intuito de compreender melhor o papel da lógica em qualquer atividade que a empregue.

## 2 Resultados e Discussão

### 2.1 Proposições

Começamos por introduzir o conceito de proposição, que será a base para o entendimento da lógica como um todo. Todos os resultados nessa seção podem ser encontrados em [4].

**Definição 2.1.** *"Proposição é uma sentença declarativa, afirmativa, e que deve exprimir um pensamento de sentido completo". Isto é, qualquer frase que declare alguma ideia concreta e que seja de validade definível, ou seja, que possa ser julgada verdadeira ou falsa.*

Observe as seguintes frases:

- $2+2=4$
- O sol é uma estrela.
- $\tan \frac{\pi}{2} = 0$
- ele é loiro!

Note que as três primeiras são proposições, porém a quarta não, uma vez que não é possível determinar seu valor lógico. Na matemática, podemos representar uma proposição qualquer por letras minúsculas ( $p, q, r \dots$ ). Como já citado, qualquer proposição  $p$  pode ser verdadeira ou falsa, dizemos então que a mesma pode ter valor lógico Verdadeiro (**V**), quando a mesma for verdadeira ou valor lógico Falso (**F**), quando for falsa. Voltando ao exemplo anterior:

- |                                    |                     |
|------------------------------------|---------------------|
| • $p: 2+2=4$                       | $V(p) = \mathbf{V}$ |
| • $q: \text{O sol é uma estrela.}$ | $V(q) = \mathbf{V}$ |
| • $r: \tan \frac{\pi}{2} = 0$      | $V(r) = \mathbf{F}$ |

Com base no descrito, existem dois princípios que garantem a coerência e a validade dos raciocínios. São eles:

- **Princípio da não contradição:** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- **Princípio do terceiro excluído:** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não havendo um terceiro caso.

As proposições podem ser simples indicadas por letras minúsculas ( $p, q, r, \dots$ ), que expressam uma única ideia que não possui outras proposições que a formam. Ou ainda podem ser compostas, indicadas por letras maiúsculas ( $P, Q, R, \dots$ ), são formadas por 2 ou mais proposições simples unidas por conectivos como "e", "ou", "se, então", etc.

Sabemos que para uma proposição qualquer  $p$ , teremos 2 possibilidades de valor lógico, Verdadeiro ou Falso. Se considerarmos 2 proposições,  $p$  e  $q$ , e observarmos todas as combinações de valores lógicos, veremos então 4 possibilidades no total:  $p$  e  $q$  verdadeiras,  $p$  e  $q$  falsas,  $p$  verdadeira e  $q$  falsa e por fim,  $p$  falsa e  $q$  verdadeira. Para 3 proposições teríamos  $2^3 = 8$  possibilidades e assim sucessivamente para um número maior de proposições.

Um artifício que auxilia na observação e será de grande valia mais adiante na construção de proposições compostas é a **Tabela Verdade**. Ela se apresenta por colunas, cada uma apresentando uma proposição, e linhas que apresentam os possíveis valores lógicos de cada combinação. Observe as tabelas abaixo:

| <b>p</b> |
|----------|
| V        |
| F        |

| <b>p</b> | <b>q</b> |
|----------|----------|
| V        | V        |
| V        | F        |
| F        | V        |
| F        | F        |

Verifique que cada tabela apresenta todas as possibilidades de valores lógicos. O número de possibilidades, ou ainda, o número de linhas da tabela será definido pela quantidade de proposições que a compõem, seguindo a regra **nº linhas =  $2^n$**  em que  $n$  é o número de proposições.

## 2.2 Conectivos

No cotidiano é muito comum utilizarmos em nossa fala certas expressões responsáveis por unir, ou ainda mudar o sentido das ideias que os cercam. Na lógica matemática essas expressões também aparecem, denominadas **Operadores Lógicos**, alterando e conectando proposições e, assim, formando novas proposições com diferentes valores lógicos.

Vamos definir os principais operadores lógicos:

**Negação:** Atua sobre apenas uma proposição. Como o próprio nome deixa claro, o operador de negação, **nega** a proposição, invertendo assim seu valor lógico. Simbolicamente pode ser representada por  $\sim a$ ,  $\neg a$  ou  $a'$  (lê-se "não a"). Pela Tabela-Verdade é possível analisar sua ação em uma proposição:

|     |          |
|-----|----------|
| $a$ | $\neg a$ |
| $V$ | $F$      |
| $F$ | $V$      |

**Conjunção:** Unindo duas proposições a conjunção remete ao conectivo "e" da língua portuguesa. O valor lógico de uma conjunção é somente verdadeiro quando as duas proposições que a compõem são verdadeiras, sendo falso nos demais casos. Simbolicamente pode ser representada por  $p \wedge q$  ou  $p \cdot q$  (lê-se "p e q"). Na Tabela-Verdade:

|     |     |              |
|-----|-----|--------------|
| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
| $V$ | $V$ | $V$          |
| $V$ | $F$ | $F$          |
| $F$ | $V$ | $F$          |
| $F$ | $F$ | $F$          |

**Disjunção:** A disjunção está relacionada ao conectivo "ou" que define o valor lógico como falso apenas quando ambas as proposições que a compõem são falsas, e como verdade nos demais casos. Simbolicamente pode ser representada por  $p \vee q$  ou  $p + q$  (lê-se "p ou q"). Pela Tabela-Verdade:

|     |     |            |
|-----|-----|------------|
| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
| $V$ | $V$ | $V$        |
| $V$ | $F$ | $V$        |
| $F$ | $V$ | $V$        |
| $F$ | $F$ | $F$        |

Observe como aqui, diferente do sentido comumente dado, o conectivo "ou" também considera a possibilidade de ambas as proposições serem verdadeiras. Em função disso, alguns livros, incluindo esse em que se baseia este trabalho, apresenta um operador extra, menos comum, chamado disjunção exclusiva ( $\oplus$ ), que considera verdadeiro somente os casos em que apenas uma das proposições constituintes é verdadeira.

**Condicional:** Simbolicamente representa-se  $p \rightarrow q$  (lê-se "se p, então q"). Une duas proposições e tem como valor lógico falsidade apenas quando a primeira proposição (p) tiver valor lógico verdade, e a segunda (q), valor lógico falsidade (observe a ordem). Veja a Tabela-Verdade:

|     |     |                   |
|-----|-----|-------------------|
| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
| $V$ | $V$ | $V$               |
| $V$ | $F$ | $F$               |
| $F$ | $V$ | $V$               |
| $F$ | $F$ | $V$               |

É importante destacar que a condicional não assume alguma relação entre as proposições, ela é apenas um operador assim como os demais. A proposição "Se o sol é uma estrela, então  $2+2=4$ " é verdadeira, mesmo não havendo nenhuma relação entre esses dois fatos.

**Bicondicional:** Simbolicamente representa-se  $p \leftrightarrow q$  (lê-se "p se, e somente se q"). Une suas sentenças e tem valor lógico verdadeiro apenas quando ambas as proposições possuírem o mesmo valor lógico, e falso nos demais casos.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| $V$ | $V$ | $V$                   |
| $V$ | $F$ | $F$                   |
| $F$ | $V$ | $F$                   |
| $F$ | $F$ | $V$                   |

## 2.3 Construção de argumentos

Chamemos de **tautologia**, uma proposição que é sempre verdadeira. Isto é, aquela cuja coluna da Tabela-Verdade é formada apenas por  $V$  (verdade). Da mesma forma, podemos definir por **contradição** a proposição que para todas as possibilidades, é sempre falsa. Observe o exemplo abaixo:

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|-----|----------|-------------------|-----------------|
| $V$ | $F$      | $F$               | $V$             |
| $F$ | $V$      | $F$               | $V$             |

Enquanto  $p \wedge \neg p$  é uma contradição, pois é sempre falsa, independente do valor de  $p$ ,  $p \vee \neg p$  é sempre verdadeira, portanto, uma tautologia.

A partir disso podemos definir as noções de implicação e equivalência.

**Definição 2.2. Implicação:** É toda proposição do tipo condicional que seja uma tautologia. Observe o exemplo:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow p \vee q$ |
|-----|-----|------------|--------------------------|
| $V$ | $V$ | $V$        | $V$                      |
| $V$ | $F$ | $V$        | $V$                      |
| $F$ | $V$ | $V$        | $V$                      |
| $F$ | $F$ | $F$        | $V$                      |

Como  $p \rightarrow p \vee q$  é verdadeira, independente do valor de  $p$  ou  $q$ , então é uma tautologia e assim dizemos que  $p$  implica  $p \vee q$ , ou ainda, de forma simbólica,  $p \Rightarrow p \vee q$ . ( $\Rightarrow \neq \rightarrow$ )

**Definição 2.3. Equivalência:** É toda proposição do tipo bicondicional, que também é uma tautologia. Exemplo:

| $p$ | $\neg p$ | $\neg(\neg p)$ | $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$ |
|-----|----------|----------------|----------------------------------|
| $V$ | $F$      | $V$            | $V$                              |
| $F$ | $V$      | $F$            | $V$                              |

Como  $p \leftrightarrow \neg(\neg p)$  é tautologia, então  $p$  é equivalente à  $\neg(\neg p)$ , ou ainda  $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$ .

Decorre das noções aqui apresentadas uma série de inferências e equivalências lógicas que são de grande ajuda na prova de argumentos mais complexos. Veja algumas das principais regras:

- Lei da dupla negação:  $p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$

- Silogismo Disjuntivo:  $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$
- Modus Ponens:  $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
- Modus Tollens:  $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
- Transitiva:  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$
- Contrapositiva:  $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
- Lei de Morgan:  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Todas essas e outras regras podem ser demonstradas por Tabela-verdade.

Diante do exposto, podemos definir o conceito de argumento válido, mostrando como funciona, e onde se aplica na resolução de problemas lógicos.

**Definição 2.4.** *Argumento válido é uma sequência de proposições  $h_1, h_2, \dots, h_n, t$ , em que sempre que as  $n$  primeiras  $h_1, h_2, \dots, h_n$  são verdadeiras, a última,  $t$ , também o é. Ou seja, a conjunção entre todas as  $n$  primeiras proposições implica em  $t$ . As primeiras são denominadas **hipóteses** e a última é chamada **tese** (DAGHLIAN, 1986) [4]. Observe o exemplo abaixo:*

|   |                   |                           |
|---|-------------------|---------------------------|
| 1 | $p \rightarrow q$ | $h_1$                     |
| 2 | $p$               | $h_2$                     |
| 3 | $\neg q \vee r$   | $h_3$                     |
| 4 | $q$               | 1,2, modus ponens         |
| 5 | $r$               | 3,4, silogismo disjuntivo |

Observe como a tese ( $r$ ) é uma implicação das hipóteses, a que se chega por meio das regras de inferência e equivalência, logo o argumento dado acima é válido.

O conceito de argumento válido é o cerne da lógica matemática. É por meio dele que qualquer dedução acontece e tem seu valor garantido. Dado um argumento válido, premissas verdadeiras levam à conclusões/teses verdadeiras, conseqüentemente, se houver contradições entre as hipóteses e a tese, o argumento não é válido.

A partir das ideias até aqui apresentadas é possível perceber como a lógica está presente em muitas das situações do dia a dia, e ainda, como o entendimento de seus conceitos tornam-se de grande valia na interpretação de tais situações. Veja alguns exemplos práticos citados em uma aula do Professor Ledo Vaccaro [2]:

O tio diz à sua sobrinha: "Se você molhar as plantas eu vou lhe dar umas moedas". A sobrinha, ao invés de fazer o que seu tio pede, decide brincar. Mais tarde, o tio entrega as moedas para a menina, mesmo ela não tendo feito o que havia pedido. Observe como, mesmo que aparentemente, o tio não cumpriu com o que disse, logicamente não há falha alguma em suas ações. A fala do mais velho, que se caracteriza por uma condicional, garante que se a menina regar as plantas, ganhará as moedas. Porém não diz nada referente o caso dela não o fazer, assim deixando em aberto o que acontece nesse caso.

Outro exemplo, um rapaz diz "Se chover, então vou à casa de minha mãe". Dessa afirmação podemos concluir que se chover, então o rapaz visitou sua mãe. E se fez sol? Nada há para concluir, ele pode ter ido ou não. Ainda, se por acaso o rapaz visitou sua mãe, o que podemos concluir? Nada mais uma vez, já que ele pode ter visitado sua mãe fazendo chuva ou não. Porém, se ele não visitou sua mãe deduzimos logicamente que não choveu (inferência modus tollens).

### 3 Construção do puzzle Lógico

Agora, munidos dos conceitos básicos da lógica proposicional e do funcionamento da mesma na construção de argumentos, passemos à construção do puzzle. A ideia proposta durante as discussões a respeito do conteúdo, além de uma aplicação prática para as abstrações feitas, visa compreender como a lógica atua na formação de hipóteses e conclusões, além de situá-la no discurso como um todo.

Existe uma infinidade de jogos que se baseiam na lógica para sua resolução. Veja um exemplo divulgado pelo canal Choque de Conhecimento [1]:

**Quatro suspeitos, acusados de praticar um crime fazem as seguinte declarações:**

- **João: Carlos é o criminoso.**
- **Pedro: Eu não sou criminoso.**
- **Carlos: Paulo é o criminoso.**
- **Paulo: Carlos está mentindo.**

**Sabendo que há apenas um criminoso, e que apenas ele mente, determine quem é o culpado.**

**resolução:** Uma das maneiras de se resolver esse problema é considerar cada possibilidade, e observar quem fala a verdade e quem mente. A partir disso verifica-se em qual caso não há contradição, e este será a resposta. Em relação ao exemplo dado, analisando os casos: 1° João é o criminoso, logo só ele mente, porém Carlos diz ser Paulo o culpado, o que é uma contradição. 2° Pedro é o criminoso, analogamente, Carlos denuncia Paulo, o que gera contradição. 3° Carlos é o criminoso, nesse caso não há contradição, João, Pedro e Paulo falam a verdade. 4° Paulo é o criminoso, da mesma forma gera conflito com a fala de João. Como só uma das possibilidades não gera contradição, então esta é a resposta: Carlos é o culpado.

Podemos observar como o jogo acima é uma aplicação direta da ideia de argumento como a definimos. Para cada caso, se as hipóteses (falas de quem não é o culpado) não condizem com a tese (acusado), então a suposição não é válida e o caso é descartado.

Porém, além de uma estrutura muito simples, poucas proposições, o exemplo retratado acaba por desconsiderar algum realismo ou semelhança com um caso real, uma vez que delimita a quantidade de culpados, ou ainda define quem fala a verdade e quem mente. Esses são artifícios que auxiliam na hora do jogo, deixando-o mais simples, porém, não contribuem para a aparência do jogo em si.

A partir daqui, buscamos criar um jogo de mesma estrutura, suspeitos e depoimentos, mas agora de forma mais complexa, envolvendo um número maior de proposições, e também, procurando assumir um nível maior de preocupação com a realidade. Claro, ainda sempre usando como única ferramenta para resolução, a Lógica.

Com base no descrito até aqui, foi elaborado um primeiro protótipo do desafio. Deixando de lado as histórias e partindo para modelos totalmente abstratos e ainda limitado pelas restrições de culpados e mentirosos, o jogo a seguir já apresenta um nível maior de dificuldade, em vista do maior número de proposições.

**Quem é o mentiroso?**

Durante uma investigação foram encontrados 3 suspeitos, A, B e C, acusados de cometerem um crime. Cada suspeito (A, B e C) prestou um depoimento contendo seu álibi ( $g, a, \neg c$  respectivamente) juntamente com outras sentenças que relacionam esses álibis com outras proposições quaisquer ( $b, d, e, f$ ). Segue abaixo o depoimento de cada suspeito:

| Suspeito A               | Suspeito B               | Suspeito C               |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| • $g$                    | • $a$                    | • $\neg c$               |
| • $a \vee \neg b$        | • $b \vee \neg g$        | • $\neg a \vee \neg b$   |
| • $e \rightarrow \neg a$ | • $\neg d \rightarrow f$ | • $f \leftrightarrow g$  |
| • $b \rightarrow c$      | • $\neg c \vee \neg f$   | • $f \rightarrow d$      |
|                          | • $e \rightarrow b$      | • $\neg c \rightarrow e$ |

A investigação também concluiu que  $b \rightarrow \neg d$ . Assumindo que um dos álibis é falso, isto é, existe um, e apenas um culpado, e que inocentes falam apenas a verdade, determine o culpado.

**Resolução:** De forma semelhante a resolução do primeiro primeiro modelo apresentado, este também pode ser solucionado verificando cada uma das 3 possibilidades de culpado. Apenas uma não apresenta contradição. Neste caso, ser inocente ou culpado está diretamente ligado ao álibi de cada suspeito, logo teremos os três seguintes casos:

1. suposição  $\neg g, a, \neg c$  : Neste caso A é mentiroso e B e C falam a verdade. Analizando todas as proposições de B e C e usando das regras de inferência temos a seguinte sequência de proposições:  $\neg c \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow \neg d \rightarrow f \rightarrow d$ . Pelo princípio da não contradição não pode existir  $d$  e  $\neg d$  ao mesmo tempo, visto que seria uma contradição, logo esse caso não é solução.
2. suposição  $g, \neg a, \neg c$  : Esse caso considera B culpado e A e C inocente. Com base nas falas de A e C, infere-se as seguintes proposições:  $g \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow \neg b \rightarrow e \rightarrow \neg c \rightarrow e \rightarrow \neg a$ . Não há contradição nas falas de A e C, como também elas confirmam a suspeita de que B é o culpado.
3. suposição  $g, a, c$  : Neste caso C é o mentiroso. Olhando para as proposições de A e B concluímos:  $g \rightarrow b \rightarrow \neg d \rightarrow f \rightarrow \neg c$ . Não há contradição entre as falas, porém,  $\neg c$  contradiz com a hipótese de que C é o culpado, logo esta não é a solução.

Com base nas suposições e nas imposições feitas pelo enunciado, o único culpado é o suspeito B.

Observe como este pelo fato de ser abstrato e fazer uso para a resolução de regras como contra-positiva e silogismo-disjuntivo, tornam o conhecimento da lógica formal para sua resolução mais necessário. Se considerarmos algum sentido para as proposições podemos criar um jogo semelhante que exige conhecimentos mais básicos dos conectivos. Veja o exemplo:

### Quem comeu o chocolate?

Um dos três netos de Seu Antônio, comeu o chocolate do avô. O velho irritado interrogou cada um deles, Alberto, Benício e Carlos. Se apenas quem comeu o chocolate mentiu, e ninguém estava sujo, quem foi?

| Alberto                                                                                                                                                                                                                                        | Benício                                                                                                                                                                                            | Carlos                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eu não gosto de chocolate, logo não comi.</li> <li>• Eu estava na cozinha</li> <li>• Carlos estava na sala</li> <li>• Quem comeu não estava na cozinha</li> <li>• Benício estava no quarto</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Se eu tivesse comido, estaria sujo.</li> <li>• Eu estou limpo</li> <li>• Eu estava no quarto</li> <li>• Alberto comeu, ou quem comeu esta sujo</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eu estava na sala</li> <li>• Se eu tivesse comido não estaria na sala</li> <li>• Se Benício estava no quarto então ele comeu</li> <li>• Se Alberto comeu, ele não estava na cozinha</li> </ul> |

**Resolução:** Esse jogo, por ser muito parecido com o anterior, também pode ser resolvido analisando cada possibilidade. Porém, ao olhar para cada fala é possível fazer algumas observações. Benício diz: "Alberto comeu, ou quem comeu está sujo". Sabemos que ninguém estava sujo, podemos inferir então que ou foi Alberto quem comeu, ou Benício está mentindo, e pela regra do jogo, é a pessoa procurada. Assim fica claro que Carlos é inocente e só fala a verdade. Agora, olhando para o comentário de Carlos: "Se Benício estava no quarto, então ele comeu", como Alberto e Benício afirmam que esse último estava no quarto, concluímos então que a pessoa que comeu o chocolate foi o Benício, que é a resposta procurada.

No mundo real muitas das conveniências dos jogos mostrados até agora não existem. Em primeira análise, a limitação quanto ao número de culpados, normalmente admitindo apenas um, torna o jogo demasiado simples, reduzindo muito o número de possibilidades. Ademais, quando consideramos que apenas o culpado mente, estamos também nos afastando da realidade, visto que a inocência não garante a verdade absoluta.

Porém, na tentativa de conseguir um desafio complexo e mais fidedigno, é que se percebe a importância desses "limitadores", e como eles são fundamentais para tornar o enigma possível. Durante a construção, nota-se a dificuldade de formar o quebra-cabeça sem apoio de um conjunto de fatos externos aos depoimentos que corroborem com a identificação do culpado, ou categorize as proposições dadas nos depoimentos como verdadeiras ou falsas.

Durante a formulação do enigma é possível perceber alguns problemas que dificultam a criação de um método para encontrar o culpado. Suponhamos que um dos suspeitos diga a proposição  $p \rightarrow q$ . Como não podemos confiar nem mesmo na fala de quem é inocente, a única maneira de saber se  $p \rightarrow q$  é verdade é conhecendo os valores lógicos de  $p$  e  $q$ . O problema é que a partir do momento que se conhece esses valores, a proposição  $p \rightarrow q$  se torna irrelevante. Mesmo que  $p \rightarrow q$  seja então falsa, admitimos no início que qualquer um pode mentir, logo isso não acusaria o suspeito.

Outro obstáculo encontrado na construção do jogo, é que nesse modelo, contradições também perdem valor. Se há contradição entre dois suspeitos, além de não se saber quem está mentindo, nenhum deles é necessariamente o culpado, deixando a dedução ainda mais complicada.

Todas essas dificuldades levam a crer numa restrição seguida pela lógica no cenário em discussão, onde a simples dedução por meio de fontes sem nenhuma garantia parece impossível. Se tomarmos por inspiração, grandes sucessos da ficção policial, olhando para histórias de Conan Doyle, ou Agatha Christi, que envolvam algum tipo de crime ou investigação, é possível notar a lógica muito presente, porém são as evidências e confissões que comprovam as

suspeitas. A arte da dedução usada por Sherlock Holmes se baseia na lógica. O detetive, baseado nas informações e as possíveis pistas que possui, chega a respostas, por meio de inferências lógicas, que o levam para mais perto da resolução do caso. Entretanto, o detetive usando da lógica, faz deduções e supõe hipóteses que não são comprovadas senão por meio de novas evidências encontradas. Isto é, a lógica auxilia e é crucial, mas não faz o trabalho sozinha.

Ainda para além da ficção, se considerarmos casos reais, envolvendo investigações, suspeitos, todos esses dependem de fatos externos aos depoimentos, como provas concretas, filmagens, perícias, etc. Isso pois o depoimento vem do ser humano, e este está sujeito ao erro. Uma pessoa pode ficar nervosa e se contradizer, mesmo não sendo culpada. Ela pode também se lembrar de um rosto que nunca viu e complicar a investigação. Essas coisas são normais e fazem com que o testemunho, por mais que importante e muito comum, dificilmente a prova final ou a resolução de um caso.

Diante do que foi debatido, apresento um último modelo, que ainda utiliza alguns desses artifícios, porém de forma reduzida.

### Encontre o falso álibi!

Cinco suspeitos A, B, C, D e E, foram acusados de cometerem um crime. Cada um deu seu depoimento contendo seu respectivo álibi  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  e  $\pi$ , além de um conjunto de proposições envolvendo proposições simples como  $a, b, c, d$  e  $f$ . Considerando  $X^* = "X \text{ fala a verdade}"$ , e sabendo que existe pelo menos um culpado, determine-o.

| Suspeito A               | Suspeito B                                        | Suspeito C                | Suspeito D                    | Suspeito E                             |
|--------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------|----------------------------------------|
| • $\alpha$               | • $\beta$                                         | • $\gamma$                | • $\lambda$                   | • $\pi$                                |
| • $b \rightarrow \neg c$ | • $c \rightarrow \alpha$                          | • $\lambda \rightarrow d$ | • $c \rightarrow \neg \gamma$ | • $\neg \beta \rightarrow \neg \gamma$ |
| • $b$                    | • $f \rightarrow (\neg \lambda \vee \neg \alpha)$ | • $a \rightarrow f$       | • $a \rightarrow d$           | • $b$                                  |
| • $a \rightarrow d$      | • $\pi$                                           | • $f \rightarrow d$       | • $a \rightarrow c$           | • $\alpha \wedge \lambda$              |
| • $\neg \pi$             | • $\neg C^* \rightarrow \neg \gamma$              |                           |                               | • $\neg \lambda$                       |

### Fatos Conhecidos

1.  $B^* \vee A^*$
2.  $a$
3.  $d \rightarrow c$
4.  $\gamma \leftrightarrow \pi$

**Resolução:** Este modelo é muito diferente dos anteriores, o que dificulta aplicar o mesmo método de analisar cada possibilidade. Primeiramente, podemos olhar para a primeira proposição da lista de fatos já conhecidos:  $B^* \vee A^*$ , ela diz que A ou B falam a verdade. Ao analisar as falas de A, juntamente com a lista de proposições conhecidas, temos a seguinte sequência:  $b \rightarrow \neg c \rightarrow \neg d \rightarrow \neg a$ , o que contradiz a proposição  $a$  que já é dada como verdadeira, logo A não fala a verdade e consequentemente, por silogismo-disjuntivo, B fala

totalmente a verdade. Decorre que E é inocente e pelo conjunto de proposições verdadeiras também é possível inocentar C. Pela proposição de B: " $\neg C \rightarrow \neg \gamma$ ", usando a contrapositiva, podemos inferir que C fala a verdade também. Agora, só restam 2 suspeitos: A e D. Com base nos depoimentos de B e C fazemos a seguinte sequência de inferências:  $a \rightarrow f \rightarrow \neg \lambda \vee \neg \alpha$  e  $f \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow \alpha$ . Segue então que A é inocente e o único suspeito restante é D. Como existe pelo menos um culpado, esse é D.

Este último modelo, ainda que sem se preocupar com o sentido das proposições, apresenta uma forma de resolução diferente dos demais exemplos dados até então. Além de não limitar a quantidade de culpados, ele deixa em aberto quem mente e quem diz a verdade, com exceção do primeiro elemento do conjunto de fatos conhecidos que diz que A ou B fala a verdade.

## 4 Conclusão

Pelo estudo da lógica matemática e análise dela na construção de puzzles que à envolvem, fica evidente sua presença no cotidiano, na construção de frases e argumentos, além da importância do seu conhecimento para a elaboração de raciocínios logicamente coerentes. Por outro lado, a construção de um jogo que simule um caso real com suspeitos de cometerem algum delito, mostrou que a lógica não resolve tudo sozinha, mas trabalha as proposições já conhecidas para só então conseguir novos resultados.

Por fim, como conclusão deste trabalho, podemos situar a lógica como ferramenta imprescindível de qualquer forma de raciocínio. Porém, é válido ressaltar como esta acaba sofrendo na falta de uma base de verdades já conhecidas onde possa atuar. Ainda que ela seja extremamente útil para mostrar contradições, este trabalho inclina-se a ideia de que conclusões e argumentos só se dão logicamente, ao que parece, num conjunto fechado de proposições, o que justificaria a dificuldade na construção do puzzle.

## Referências

- [1] Determine quem é o criminoso. YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=nmcFS7ULvtc>. Acesso em: 27 ago. 2025.
- [2] Papmem - janeiro de 2017 - lógica e conjuntos. YouTube, 2017. (01:11:03). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=kkgokxCJuik>. Acesso em: 27 ago. 2025.
- [3] BBC News Brasil. Como matemático inventou há mais de 150 anos a fórmula de buscas usada pelo google. *BBC News Brasil*, 2015. Disponível em: [https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/11/151102\\_boole\\_google\\_tg](https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/11/151102_boole_google_tg). Acesso em: DD MMM. 2025.
- [4] Jacob Daghljan. *Lógica e Álgebra de Boole*. Atlas, São Paulo, 1986.
- [5] João Roberto Valdeni Soliani Geronimo and Franco. *Fundamentos de Matemática: Uma Introdução à Lógica Matemática, Teoria*. EDUEM, [S.l.], 2021.

## **SIMULAÇÃO DE SÉRIES DE FOURIER A PARTIR DE SOFTWARE CRIADO PARA FINS DIDÁTICOS**

Lucas Kenji Nishimura  
UTFPR

lucasnishimura.2004@alunos.utfpr.edu.br

Karen Carrilho da Silva Lira  
UTFPR

karenc@utfpr.edu.br

### **Resumo**

Este trabalho descreve o desenvolvimento e a aplicação de uma ferramenta computacional interativa, concebida para o estudo e a visualização de Séries de Fourier. A aplicação permite que os usuários definam funções, incluindo aquelas definidas por partes, em intervalos customizáveis, e observem a aproximação pela série de Fourier correspondente após o cálculo automático dos seus coeficientes. Desenvolvida em Python com o suporte das bibliotecas Tkinter, SymPy, NumPy e Matplotlib, a ferramenta dispõe de uma interface gráfica intuitiva, com controle deslizante para o ajuste do número de termos da série e visualização gráfica em tempo real. Os resultados validam a eficácia da ferramenta como um recurso didático, ilustrando com clareza conceitos fundamentais como convergência, o fenômeno de Gibbs e a decomposição de funções em seus componentes harmônicos, consolidando-se como um valioso recurso para o ensino de cálculo avançado e áreas afins.

**Palavras-chave:** Séries de Fourier, Software Educacional, Visualização Matemática, Python, Ensino de Matemática.

## **1 Introdução**

As Séries de Fourier constituem uma ferramenta matemática de fundamental importância para a análise e decomposição de funções periódicas em uma soma de componentes senoidais. Propostas por Jean-Baptiste Joseph Fourier no início do século XIX, essas séries possuem vasta aplicabilidade em diversas áreas da ciência e engenharia, como processamento de sinais, análise de vibrações, teoria da condução do calor e resolução de equações diferenciais parciais [1, 2].

Apesar de sua relevância, a compreensão conceitual das Séries de Fourier frequentemente impõe desafios significativos a estudantes de graduação, especialmente no que tange à visualização do processo de convergência e ao comportamento da aproximação conforme o número de termos aumenta. O método tradicional, que envolve o cálculo manual dos coeficientes e a subsequente plotagem das somas parciais, é um processo laborioso e suscetível a erros, o que restringe a exploração intuitiva dos conceitos.

Este trabalho visa superar tais limitações por meio do desenvolvimento de uma ferramenta computacional interativa, que possibilita a simulação e visualização de Séries de Fourier de maneira dinâmica e acessível. Concebido no contexto da disciplina de Cálculo 4 do curso de Engenharia de Computação da UTFPR, o projeto integra a teoria matemática com a prática computacional, fomentando uma aprendizagem mais ativa e significativa.

A ferramenta desenvolvida permite que usuários insiram funções arbitrárias, inclusive seccionalmente contínuas, visualizem o gráfico da função original sobreposto ao de sua aproximação pela série e ajustem interativamente o número de termos da soma parcial. Essa abordagem não apenas simplifica a apreensão dos conceitos matemáticos subjacentes, mas também evidencia a aplicação prática de técnicas de programação na resolução de problemas complexos.

## 2 Materiais e Métodos

As Séries de Fourier permitem a representação de funções periódicas por meio de sua decomposição em uma soma infinita de senos e cossenos. Para uma função  $f(x)$  definida no intervalo  $[-L, L]$ , sua Série de Fourier é expressa como [3]:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

Onde os coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são determinados pelas seguintes fórmulas integrais:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n \geq 1 \quad (4)$$

A validade desta representação é assegurada pelo Teorema de Convergência de Fourier, que estabelece as condições sob as quais a série converge para a função (notadamente, para funções seccionalmente contínuas com um número finito de descontinuidades de salto) [4, 5]. Um aspecto notável, que surge na aproximação de funções com descontinuidades, é o fenômeno de Gibbs. Ele descreve a oscilação persistente que ocorre nas vizinhanças de um ponto de descontinuidade, cujo valor de *overshoot* (ocorrência onde a função aproximada por Série de Fourier excede seu valor alvo) não diminui com o aumento do número de termos, embora sua largura tenda a zero.

### 2.1 Arquitetura do Software

O software foi projetado em Python sob uma arquitetura modular, que segrega as responsabilidades em três componentes principais:

- **Interface Gráfica (GUI):** Implementada com a biblioteca Tkinter, este componente é responsável pela interação com o usuário. Ele fornece campos para a entrada de expressões de funções, definição de intervalos e um controle deslizante para o ajuste dinâmico do número de termos da série.

- **Motor de Cálculo Simbólico:** Utilizando a biblioteca SymPy, este é o núcleo do sistema. Ele realiza a interpretação das funções inseridas, calcula simbolicamente os coeficientes de Fourier através das integrais (2) a (4) e constrói a expressão da soma parcial da série.
- **Módulo de Visualização:** Baseado nas bibliotecas Matplotlib e NumPy, este módulo encarrega-se da renderização gráfica da função original e de sua aproximação de Fourier, atualizando a exibição de forma interativa.

## 2.2 Fluxo de Processamento

O fluxo de processamento da ferramenta inicia-se com a entrada de dados pelo usuário. O motor simbólico, então, calcula os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$ . Com os coeficientes obtidos, a expressão simbólica da série é montada até uma ordem  $N$ . Para otimizar a performance, esta expressão é convertida em uma função numérica de alta eficiência, utilizando a função `lambdify` do SymPy, que a traduz para uma operação compatível com NumPy. Subsequentemente, esta função é avaliada sobre um conjunto de pontos discretos do domínio para a renderização do gráfico, que é dinamicamente atualizado em resposta aos ajustes do usuário no controle deslizante.

## 2.3 Otimizações Implementadas

Para garantir a performance e a fluidez da aplicação, foram adotadas as seguintes estratégias de otimização:

- **Cache de Coeficientes:** Um sistema de cache armazena os coeficientes já calculados. Isso evita recálculos integrais dispendiosos ao apenas modificar o número de termos  $N$  da soma parcial, resultando em atualizações quase instantâneas.
- **Computação Vetorizada:** A avaliação da função em múltiplos pontos do domínio é realizada de forma vetorizada com NumPy, o que acelera significativamente o processo em comparação a laços de repetição convencionais.
- **Interpolação e Animação Suave:** Foram aplicados algoritmos de interpolação para criar transições animadas e visualmente agradáveis durante as atualizações do gráfico, melhorando a experiência do usuário.

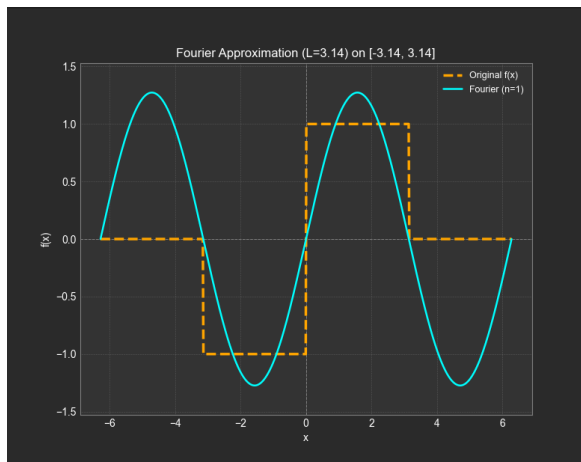
## 3 Resultados e Discussão

A ferramenta desenvolvida oferece uma plataforma interativa e robusta para a exploração de Séries de Fourier. Suas funcionalidades centrais incluem o cálculo automatizado de coeficientes para funções arbitrárias (contínuas ou por partes) e a visualização simultânea da função original e de sua aproximação. O controle deslizante, que permite variar o número de termos de 1 a 100, é o principal recurso interativo, possibilitando a observação em tempo real do processo de convergência.

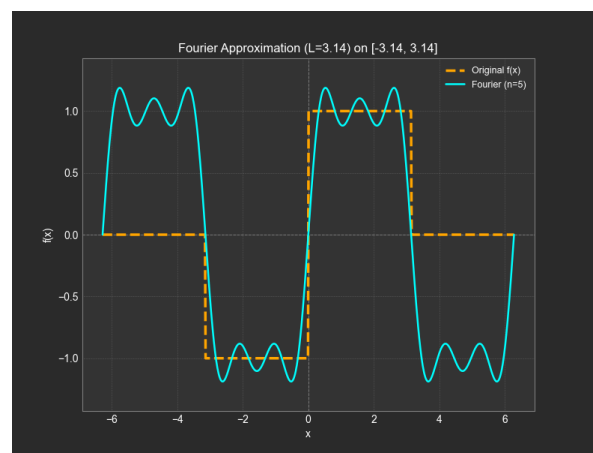
**Estudo de Caso 1: Onda Quadrada** Para a análise de uma onda quadrada, definida em  $[-\pi, \pi]$  como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

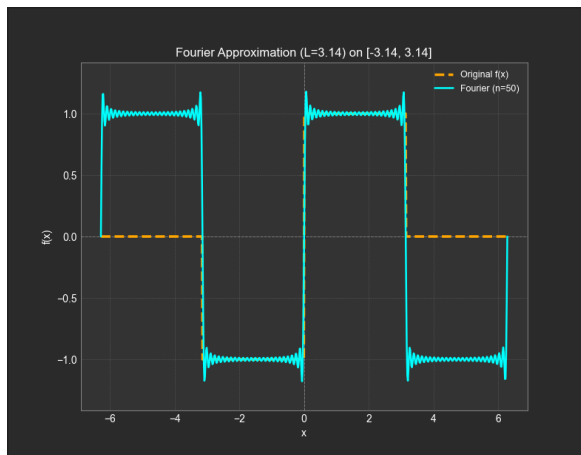
A ferramenta calcula com precisão os coeficientes ( $a_n = 0$  para todo  $n$ ,  $b_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$ ). A visualização interativa, apresentada na Figura 1, permite ao usuário observar a lenta convergência da série. É notável a persistência do fenômeno de Gibbs nas proximidades das discontinuidades em  $x = 0$  e  $x = \pm\pi$ . O ajuste do número de termos (comparando as subfiguras 1a a 1d) evidencia como as oscilações se tornam mais rápidas e se aproximam das bordas, sem, contudo, desaparecerem completamente. A interface do software para este estudo de caso é mostrada na Figura 2.



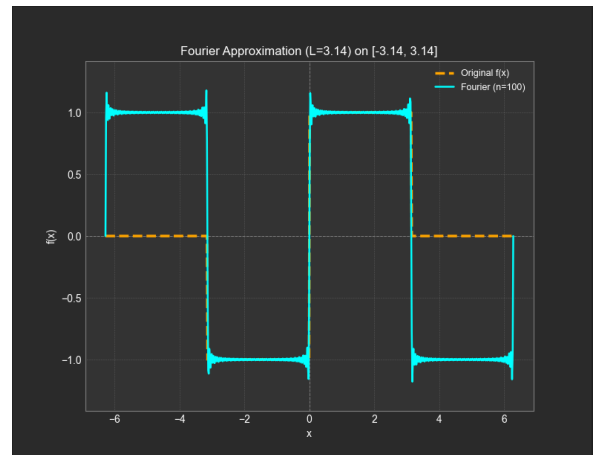
(a) N = 1 termo



(b) N = 5 termos

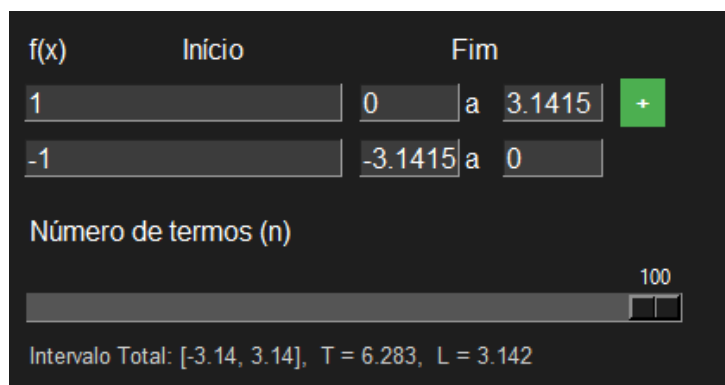


(c) N = 50 termos



(d) N = 100 termos

Figura 1: Convergência da Série de Fourier para a onda quadrada com diferentes números de termos (N).



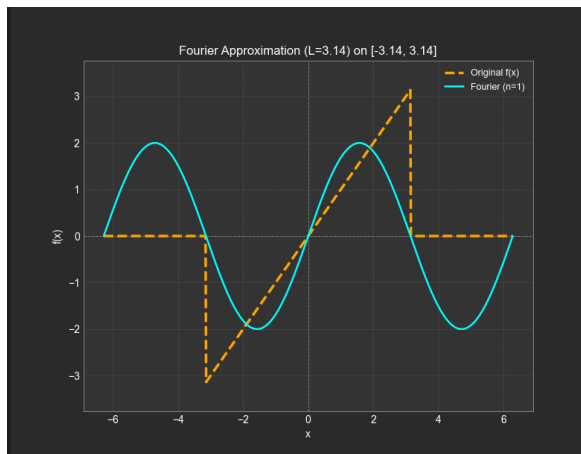
| $f(x)$ | Início  | Fim      |
|--------|---------|----------|
| 1      | 0       | a 3.1415 |
| -1     | -3.1415 | a 0      |

Número de termos (n) 100

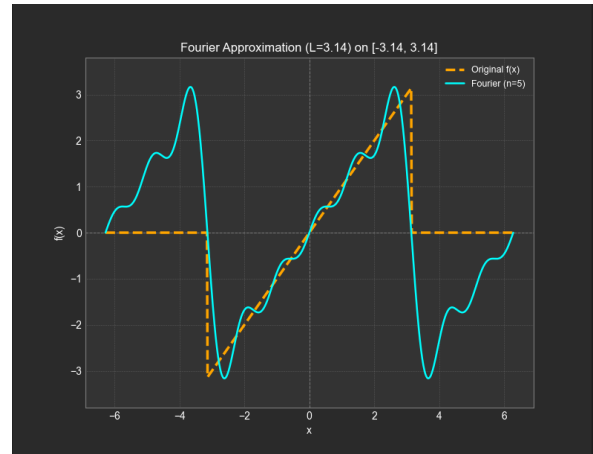
Intervalo Total: [-3.14, 3.14], T = 6.283, L = 3.142

Figura 2: Interface do software configurada para a função de onda quadrada.

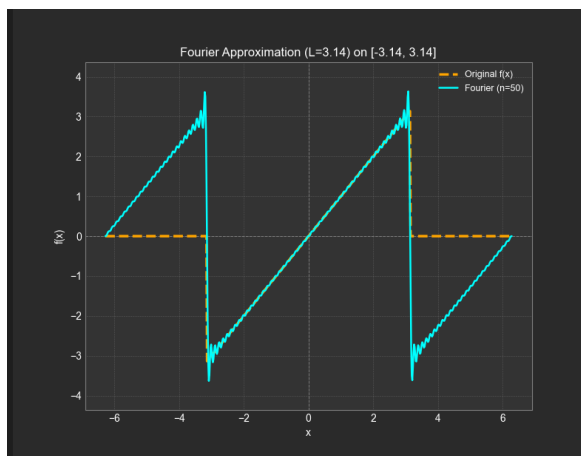
**Estudo de Caso 2: Função Afim (Onda Dente de Serra)** Ao analisar a função contínua por partes  $f(x) = x$  no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , a ferramenta demonstra um comportamento de convergência distinto. Em contraste com a onda quadrada, a aproximação da função (conhecida como onda dente de serra) é visivelmente mais rápida, como ilustrado na Figura 3. A interface utilizada para esta simulação é apresentada na Figura 4. A comparação visual entre os dois casos enriquece a compreensão sobre como as características da função afetam a taxa de convergência de sua Série de Fourier.



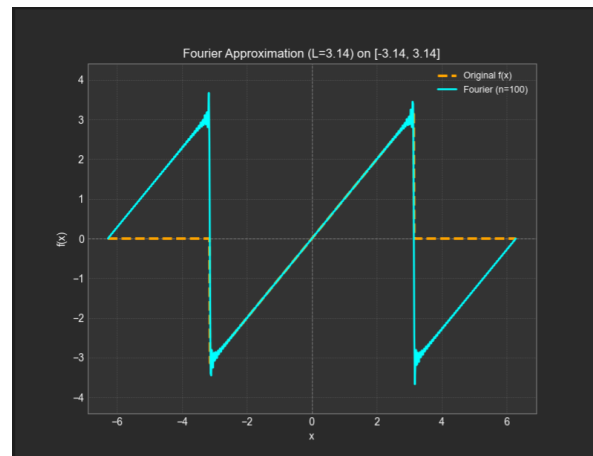
(a)  $N = 1$  termo



(b)  $N = 5$  termos

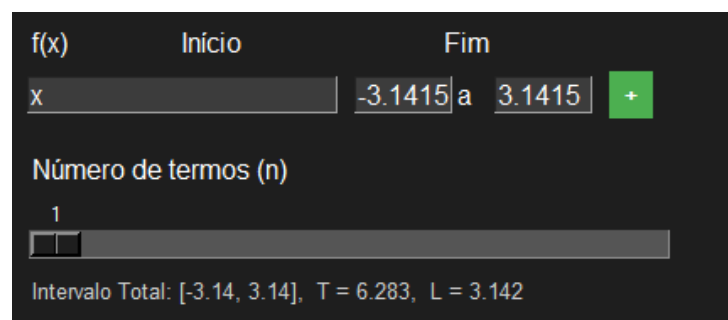


(c)  $N = 50$  termos



(d)  $N = 100$  termos

Figura 3: Convergência da Série de Fourier para a função dente de serra ( $f(x) = x$ ).



$f(x)$       Início      Fim  
 $x$       -3.1415      a      3.1415      +  
 Número de termos ( $n$ )  
 1  
 Intervalo Total: [-3.14, 3.14],  $T = 6.283$ ,  $L = 3.142$

Figura 4: Interface do software configurada para a função dente de serra.

## 4 Conclusão

Este trabalho culminou no desenvolvimento e validação de uma ferramenta computacional interativa para o ensino e aprendizado de Séries de Fourier. A aplicação demonstrou ser altamente eficaz como recurso didático e instrumento de análise, ao permitir a exploração intuitiva de conceitos matemáticos abstratos por meio de uma interface gráfica amigável e de

recursos de visualização dinâmica.

Os resultados confirmam a implementação robusta do cálculo de coeficientes e a criação de uma interface responsiva. A ferramenta se destaca por facilitar a visualização do processo de convergência e de fenômenos associados, como o de Gibbs, mantendo um desempenho computacional satisfatório.

Como perspectivas para trabalhos futuros, planeja-se a expansão das funcionalidades do software, incluindo:

- Implementação do cálculo para a forma complexa da Série de Fourier.
- Inclusão de uma ferramenta para análise do espectro de frequências (amplitude vs. frequência).
- Funcionalidade para exportar gráficos e animações (e.g., em formato GIF ou MP4).
- Desenvolvimento de uma versão da aplicação baseada na web para ampliar o acesso e a usabilidade.

A ferramenta desenvolvida não apenas cumpre seu objetivo didático, mas também reforça a potente sinergia entre a teoria matemática e a implementação computacional, consolidando-se como uma contribuição relevante para a modernização do ensino de matemática avançada.

## Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [2] BRACEWELL, R. N. **The Fourier Transform e Its Applications**. 3. ed. Boston: McGraw-Hill, 2000.
- [3] KREYSZIG, E. **Matemática Superior para Engenharia**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- [4] OSGOOD, B. **Lectures on the Fourier Transform and Its Applications**. Stanford: Stanford University, 2007. Disponível em: <https://see.stanford.edu/Course/EE261>.
- [5] STRANG, G. **Introduction to Linear Algebra**. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1993.
- [6] NUMPY DEVELOPERS. **NumPy Documentation**. [S.l.], 2025. Disponível em: <https://numpy.org/doc/>. Acesso em: 16 set. 2025.
- [7] SYMPY DEVELOPMENT TEAM. **SymPy Documentation**. [S.l.], 2025. Disponível em: <https://docs.sympy.org/>. Acesso em: 16 set. 2025.
- [8] PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. **Tkinter — Python interface to Tcl/Tk**. [S.l.], 2025. Disponível em: <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html>. Acesso em: 16 set. 2025.
- [9] MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM. **Matplotlib Documentation**. [S.l.], 2025. Disponível em: <https://matplotlib.org/stable/contents.html>. Acesso em: 16 set. 2025.

## APLICAÇÃO DO MODELO MALTHUSIANO AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO

Matheus Lima Ribeiro  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná  
matheuslimaribeiro@alunos.utfpr.edu.br

Andriele Lucia Zimpel  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Karen Carrilho da Silva Lira  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

### Resumo

O presente trabalho visa analisar por modelagem matemática o crescimento populacional da capital do estado do Rio de Janeiro, que também se intitula Rio de Janeiro. Por ser um estudo em início, é utilizado apenas o Modelo de Malthus, onde adequamos suas variáveis de tal forma que possamos criar um comparativo entre os cálculos e a realidade. O estudo é iniciado com a finalidade de ilustrar as vantagens e desvantagens do uso deste modelo matemático para estimativas populacionais, e com isso mostrar o impacto que fatores externos trazem para tais cálculos, e também, no futuro, utilizar como base para a manipulação de outros modelos para fins comparativos e de projeção da população nos próximos anos.

**Palavras-chave:** Modelo de Malthus. Modelagem Matemática. Dinâmica Populacional.

## 1 Introdução

O estudo do crescimento populacional é um dos pilares mais importantes relacionados à demografia de uma específica cidade. Dele, podemos extrair informações cruciais para analisar fatores de infraestrutura, socioeconômicos e políticas públicas. Visto isso, com o tempo surgiu a necessidade de criar estimativas populacionais levando como parâmetro o impacto que esse crescimento causaria nos aspectos populacionais de uma área.

A utilização de estimativas ao longo do tempo se mostraram mais eficientes a partir da utilização de métodos matemáticos, a fim de obter projeções para os próximos anos e a possibilidade do estudo também referente às consequências dessa expansão. Levando essa premissa de estudo como argumento, Thomas Robert Malthus, um economista e demógrafo inglês, propõe o Modelo Malthusiano, onde "A população, quando não controlada, aumenta em proporção geométrica. A subsistência aumenta apenas em proporção aritmética." (Malthus, 1798).

O intuito da utilização de dados da cidade do Rio de Janeiro é, principalmente, pela disponibilidade dos seus dados, tanto pelo IBGE, tanto pelo Datario, e por conta dos últimos acontecimentos globais. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar, de maneira breve, um estudo inicial sobre a aplicação de equações diferenciais ordinárias no crescimento

populacional, tomando como base o modelo proposto por Malthus. Ressalta-se que se trata de uma análise introdutória, que será posteriormente aprofundada e desenvolvida em etapas futuras, com vistas a uma compreensão mais ampla do fenômeno, e a quão discrepante se torna o modelo do caso real levando em consideração pandemias, crises econômicas, guerras, e outros eventos que possam alterar a dinâmica populacional.

## 2 Material e Métodos

Considere  $P$  o número de indivíduos relacionados à população analisada. De acordo com Bassanezi (2002), esse número é dependente do tempo e podemos representá-lo como

$$\frac{dP}{dt} = P(t) \quad (1)$$

Para o uso do modelo de Malthus, Bassanezi(2002) admite que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população,  $n > 0$  o coeficiente de natalidade e  $m > 0$  o coeficiente de mortalidade. Bassanezi (2002) e Vidaletti (2022) indicam que o modelo pressupõe que as taxas de natalidade e mortalidade são proporcionais à população em determinado instante, e é descrito pela equação da diferença

$$P_{t+1} - P_t = nP_t, \quad (2)$$

no caso de um crescimento, e

$$P_{t+1} - P_t = -mP_t \quad (3)$$

no caso de um decrescimento. Unificando as equações, temos:

$$P_{t+1} - P_t = (n - m)P_t. \quad (4)$$

De acordo com a manipulação da equação, temos que  $P_t$  é sempre constante, relacionada a sua taxa ( $\alpha$ ) de crescimento, e é obtida pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade, sendo estas  $n$  e  $m$ , respectivamente. Ou seja,

$$\alpha = n - m. \quad (5)$$

Assim, tem-se que:

$$P_{t+1} - P_t = \alpha P_t \quad (6)$$

$$P_{t+1} = \alpha P_t + P_t. \quad (7)$$

E por fim, evidenciando  $P_t$ , temos

$$P_{t+1} = P_t(\alpha + 1) \quad (8)$$

e sendo desenvolvido como um problema de valor inicial, de tal forma que possamos investigar o comportamento gradativo da equação a partir da variação dos parâmetros.

Tomando  $P(0) = P_0$ , definimos

$$\begin{cases} P_{t+1} = P_t(\alpha + 1) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (9)$$

E variando o valor  $t$ , obtemos

$$P_1 = P_0(\alpha + 1), \quad (10)$$

$$P_2 = P_1(\alpha + 1) = P_0(\alpha + 1)(\alpha + 1) = P_0(\alpha + 1)^2. \quad (11)$$

e generalizando, temos

$$P_t = P_0(\alpha + 1)^t. \quad (12)$$

E então, manipulando-a para conseguirmos

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha) \cdot t}; \quad (13)$$

onde, neste caso, podemos utilizar os anos como referência e as taxas de natalidade e mortalidade.

Para fins de comparação, é utilizado o erro relativo, sendo este definido, segundo Ruggerio *et al.* (2003) [3], como:

$$E_r = \frac{|X - \bar{X}|}{|X|} \quad (14)$$

onde  $\bar{X}$  representa o valor obtido através do modelo de Malthus e  $X$ , o valor obtido a partir das estatísticas populacionais.

### 3 Resultados e Discussão

Para avaliar a aplicabilidade do modelo de Malthus ao crescimento populacional, foram comparados os valores previstos pela equação (13).

Com os dados reais da população obtidos nos censos do IBGE dos anos 1991, 2000, 2010 e 2022, essa comparação permite observar até que ponto a taxa de crescimento constante utilizada no modelo aproxima-se da dinâmica real da população.

Na sequência, apresenta-se a Tabela 1, que relaciona os valores populacionais observados nos anos de 1991, 2000, 2010 e 2022, bem como os valores estimados pelo modelo de Malthus a partir da população inicial de 1991.

Tabela 1: População real 1991/2000/2010/2022 e população segundo o modelo de Malthus

| Ano  | Pop. Real | Pop. Malthus |
|------|-----------|--------------|
| 1991 | 5480768   | 5480768      |
| 2000 | 5857904   | 5856781      |
| 2010 | 6320446   | 6304903      |
| 2022 | 6211223   | 6888137      |

Fonte população real: IBGE (2022)[1].

Ao analisar a Tabela 1, percebe-se que nos anos de 1991 a 2000 o modelo foi extremamente preciso, apresentando um erro relativo de 0,019%, isso indica que, para o período entre 1991 e 2000, o crescimento populacional comportou-se de forma muito próxima ao crescimento exponencial assumido pelo modelo de Malthus. Entretanto, em 2010, calcula-se um erro relativo de 0,25%, ainda baixo, mas 13 vezes maior que o de 2000. Por último, no ano de 2022 o houve uma significativa diferença entre a projeção do modelo e o valor real, esta discrepância entre os valores pode ser melhor vista no gráfico, Figura 1, abaixo:

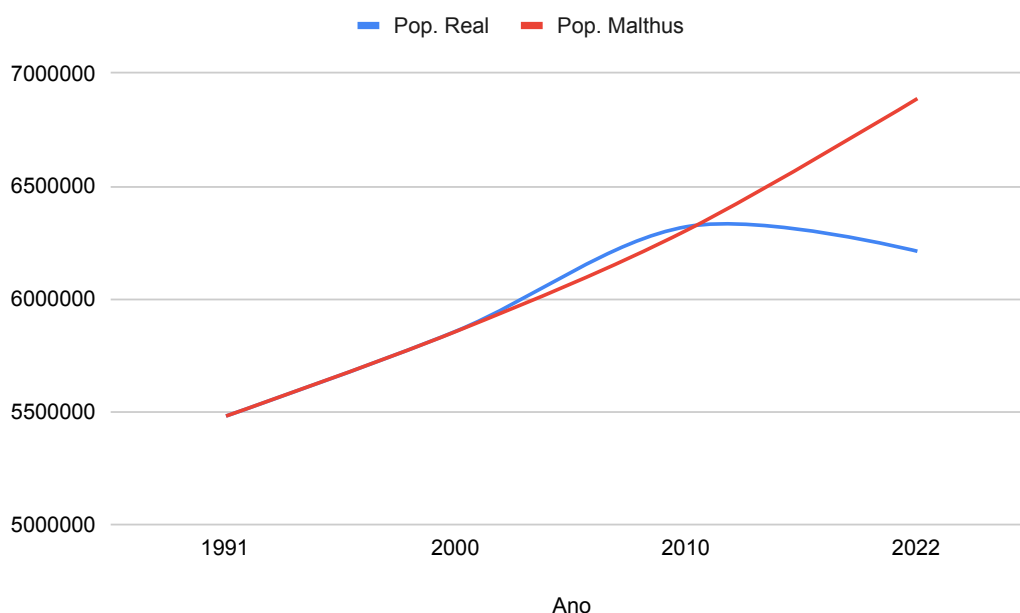


Figura 1: População real e população segundo o modelo de Malthus  
Fonte: IBGE (2022) [1]

A comparação entre os dados projetados pelo modelo de Malthus e a população real em 2022 revela uma diferença significativa. Enquanto o modelo de Malthus projetou uma população de aproximadamente 6888137 indivíduos, os dados do IBGE atestam uma população real de apenas 6211223. Este desvio de cerca de 677 mil pessoas, correspondente a um erro relativo de aproximadamente 10,9%.

O modelo de Malthus, por construção matemática, assume um crescimento exponencial baseado em taxas constantes de natalidade e mortalidade. A projeção para 2022 é, portanto, a extrapolação natural das condições demográficas vigentes no período base do modelo (1991-2000). A diferença observada sugere, assim, que um ou mais desses pressupostos sofreram

alterações ao longo das duas décadas seguintes.

A superestimativa do modelo para 2022 pode ser atribuída a uma convergência de fatores estruturais e conjunturais que violam os pressupostos fundamentais do crescimento malthusiano. Dentre os fatores cabe citar a alta taxa de óbitos entre 2020 e 2022 devido ao COVID-19. Segundo o painel de controle do COVID-19 do data.rio[2], nesse período ocorreram aproximadamente 38196 mortes atribuídas à doença. Esse aumento abrupto na mortalidade comprometeu o crescimento populacional previsto pelo modelo, evidenciando que o modelo de Malthus, por assumir taxas constantes de natalidade e mortalidade, não captura choques externos de grande magnitude, como epidemias ou crises sanitárias, limitando sua precisão em períodos de estabilidade.

## 4 Conclusão

A análise realizada evidencia que o modelo de Malthus possui boa capacidade de aproximação em períodos curtos e sob condições de estabilidade demográfica, como se verificou entre 1991 e 2010. Nesse intervalo, os erros relativos foram muito baixos, o que indica que a hipótese de crescimento exponencial constante foi adequada para descrever a dinâmica populacional. No entanto, quando se projeta para períodos mais longos, como no caso de 2022, a discrepância torna-se significativa, revelando as limitações do modelo diante de fatores externos que alteram as taxas de natalidade e mortalidade.

A superestimativa para 2022 demonstra que modelos baseados em pressupostos rígidos, como o malthusiano, não são capazes de incorporar choques conjunturais, a exemplo da pandemia da COVID-19, que impactou diretamente a dinâmica populacional. Assim, embora útil como ferramenta inicial de análise, o modelo de Malthus deve ser complementado por abordagens mais complexas e flexíveis. Devido à limitação de tempo nesta pesquisa, não foi possível aplicar e comparar outros modelos de crescimento populacional, mas pretende-se realizar tais análises em trabalhos futuros, ampliando a compreensão sobre a adequação de diferentes modelos às dinâmicas reais da população.

## Referências

- [1] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Rio de Janeiro (RJ). Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/rj/rio-de-janeiro.html> . Acesso em: 26 ago. 2025.
- [2] PREFEITURA DO RIO DE JANEIRO. Painel Rio COVID-19. Disponível em: <https://www.data.rio/apps/PCRJ::painel-rio-covid-19/explore> . Acesso em: 26 ago. 2025.
- [3] RUGGIERO, M. A. G.; SPERANDIO, S. F. S.; MENDES, L. A. P.; MONKEN, F. J. Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. 1. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- [4] VIDALETTI, V. Modelagem matemática aplicada ao crescimento populacional e de uma atividade econômica (suinocultura) da cidade de Tupãssi / PR. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/23979>
- [5] MALTHUS, T. Um ensaio sobre o princípio da população. Disponível em: <https://www.econlib.org/library/Malthus/malPop.html>

- [6] BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática. 4<sup>o</sup>ed. São Paulo: Contexto.

## SERVIDORES DE INTERNET E SEGURANÇA DIGITAL: EXPLORANDO A FUNÇÃO EXPONENCIAL NO MODELO DE MALTHUS

Mayara Aparecida de Lima Antoniazzi  
Colégio Estadual Vinícius de Moraes  
E-mail: mayara.antoniazzi@escola.pr.gov.br

Mariana Aparecida Brambila  
Colégio Estadual Vinícius de Moraes  
E-mail: brambila.mariana@escola.pr.gov.br

Leandro Wrzecionek de Brito  
Colégio Estadual Vinícius de Moraes  
E-mail: leandro.wrzecionek@escola.pr.gov.br

Diellen Soares Chesca  
Instituição  
E-mail: diellen.chesca@escola.pr.gov.br

### Resumo

Este estudo tem como objetivo analisar a evolução do número de servidores de internet de segurança no Brasil entre 2012 e 2024, aplicando o modelo exponencial de Malthus para avaliar a adequação dessa abordagem na descrição do crescimento desses servidores. A pesquisa utilizou dados históricos disponíveis em fontes públicas, organizados e analisados com ferramentas quantitativas. A modelagem exponencial de Malthus foi aplicada para estimar a taxa de crescimento, e os resultados foram comparados com os dados reais, representados por gráficos e tabelas. Observou-se que o modelo de Malthus é adequado para descrever o crescimento dos servidores nos primeiros anos da série, com boa aderência aos dados de 2012 a 2016. No entanto, a partir de 2017, houve divergência crescente entre os valores estimados e os reais, indicando que fatores externos, como mudanças tecnológicas e políticas de segurança digital, podem ter influenciado o crescimento. Em conclusão, o modelo exponencial de Malthus é útil para representar tendências de crescimento em períodos curtos, mas carece de precisão no longo prazo. Para futuras investigações, sugere-se a adaptação de modelos que integrem essas variáveis.

**Palavras-chave:** segurança digital, servidores, modelo exponencial, Malthus, crescimento exponencial.

### 1 Introdução

Desde a máquina a vapor da Primeira Revolução Industrial até o smartphone, a humanidade tem vivenciado profundas transformações tecnológicas. No século XXI, o smartphone se tornou um bem comum e uma das tecnologias mais avançadas da história, destacando-se pela compactação, portabilidade e múltiplas funções. Mais do que outros dispositivos digitais, ele impacta diretamente o desenvolvimento humano e a constituição dos sujeitos contemporâneos, o que exige uma análise crítica e ética de seus usos (Oliveira: Barroco, 2023).

A segurança digital não protege apenas indivíduos; é também essencial para empresas pois reduz o impacto de ameaças invisíveis e assegura maior produtividade e proteção de dados em aplicativos e sites (Kala, 2023). A ampla conectividade facilita o acesso

à tecnologia, mas expõe usuários a riscos como *malwares*, *exploits*, *bots* e ataques disfarçados, muitas vezes imperceptíveis a olhos leigos (Dave et al., 2023; Redação TI Inside, 2023).

Em um mundo cada vez mais globalizado, organizações e administradores de sites são compelidos a investir em ambientes digitais mais seguros, visto que lidam com informações valiosas próprias ou de consumidores que confiam seus dados a essas plataformas. Dessa forma, no desenvolvimento de qualquer sistema de navegação, a segurança do usuário figura entre as primeiras diretrizes, com destaque para a proteção dos servidores, cuja implementação é obrigatória (Mashkoo; Egyed; Wille; Stock, 2022).

As ameaças virtuais se disseminam de diversas formas, como anúncios suspeitos, links em páginas populares ou até mesmo em lojas virtuais. Embora alguns sejam mais nocivos que outros, todos compartilham o mesmo objetivo: comprometer a integridade dos sistemas e dos dados por meio de disfarces, roubo de informações, golpes online, travamentos e falhas nas configurações de privacidade. Diante desse quadro, torna-se evidente que investir na segurança de servidores é essencial para assegurar a qualidade e a confiabilidade dos serviços digitais (Nicolazzo; Nocera; Pedrycz, 2024).

Portanto, as empresas e suas tecnologias estão se revigorando, a partir da implementação de práticas seguras, para que todos possam utilizar em seus aparelhos, tentando minimizar os casos de ameaças online (Agência EY, 2025).

Para analisar esse crescimento, é possível recorrer a modelos matemáticos que descrevem fenômenos com comportamento de expansão acelerada, como o modelo exponencial de Malthus, originalmente aplicado ao estudo do crescimento populacional, esse modelo considera uma taxa de crescimento proporcional ao tamanho atual da população (Santana, 2025) ou, no caso deste estudo, ao número de servidores de internet de segurança. Tal abordagem permite identificar padrões, estimar tendências e avaliar a adequação de modelos matemáticos à realidade observada.

Este trabalho tem como objetivo analisar a evolução dos servidores de internet de segurança no Brasil, no período de 2012 a 2024, e avaliar a aplicabilidade do modelo exponencial de Malthus para descrever essa tendência. Por meio dessa análise, busca-se compreender o grau de aderência entre os valores reais e os estimados, destacando a utilidade e as limitações desse modelo no contexto da segurança digital.

## **2 Material e Métodos**

Os dados utilizados nesta pesquisa foram obtidos no site *Segurança na Internet: tudo o que você precisa saber*<sup>1</sup>, contemplando informações referentes ao período de 2012 a 2024. A seleção desse intervalo temporal teve como objetivo permitir a análise da evolução dos servidores estudados ao longo de um período suficientemente representativo, apresentados na tabela 1.

**Tabela 1 – Servidores de Internet de Segurança**

| Tempo(Ano) | Tempos ajustados | Servidores |
|------------|------------------|------------|
| 2012       | 0                | 14.059     |
| 2013       | 1                | 17.456     |
| 2014       | 2                | 22.778     |
| 2015       | 3                | 32.503     |
| 2016       | 4                | 84.536     |
| 2017       | 5                | 328.718    |
| 2018       | 6                | 426.560    |
| 2019       | 7                | 578.468    |
| 2020       | 8                | 656.211    |
| 2021       | 9                | 743.189    |
| 2022       | 10               | 985.305    |
| 2023       | 11               | 1.188.440  |
| 2024       | 12               | 1.471.519  |

Fonte: World Bank Group (2025)

## 2.1 Análise de Dados e Aplicação do Modelo

Após a coleta, os dados foram organizados em planilhas eletrônicas e submetidos a tratamento quantitativo. Em seguida, aplicou-se o modelo de crescimento exponencial de Thomas Malthus. Modelo que foi apresentado em 1798 e tem por finalidade descrever o crescimento de uma população (Tavoni; Oliveira, 2013). Por este motivo, o artigo foi baseado neste modelo, por visar o aumento gradual dos servidores de segurança.

Através da expressão matemática cujo Malthus criou:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$$

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.malwarebytes.com/pt-br/internet-security>

em que  $P_0$  representa o valor inicial observado,  $r$  é a taxa de crescimento estimada a partir dos dados históricos e  $t$  corresponde ao tempo.

Com base nessa modelagem, foi aplicado o logaritmo natural nos valores reais conforme representado no quadro 1:

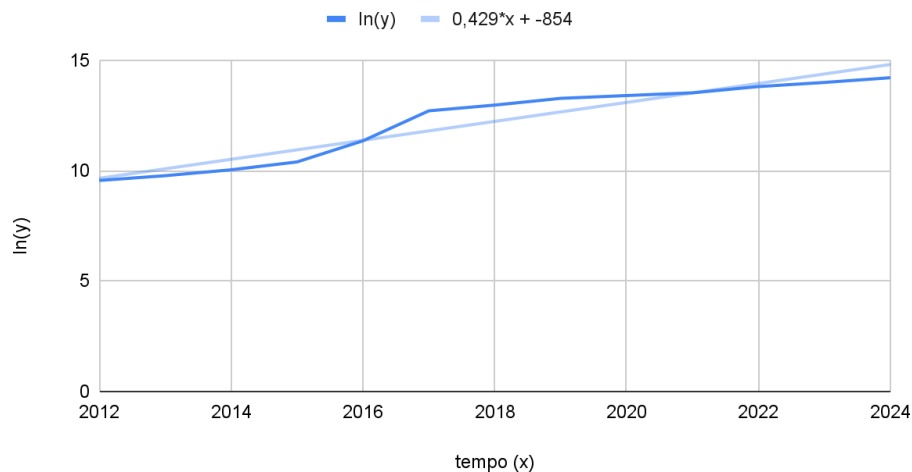
**Tabela 2** - Logaritmo natural aplicado aos dados

| servidores (y) | $\ln(y)$    |
|----------------|-------------|
| 14059          | 9,551018039 |
| 17456          | 9,767438708 |
| 22778          | 10,03355044 |
| 32503          | 10,38908767 |
| 84536          | 11,34493276 |
| 328718         | 12,70295552 |
| 426560         | 12,96350832 |
| 578468         | 13,26813851 |
| 656211         | 13,39423766 |
| 743.189        | 13,51870567 |
| 985.305        | 13,80070652 |
| 1.188.440      | 13,98815208 |
| 1.471.519      | 14,20180576 |

**Fonte:** Autores, 2025.

As informações representadas no quadro 1 estão sistematizadas na Figura 1.

**Figura 1** - Representação do  $\ln(y)$  vs tempo (x)



**Fonte:** Autores, 2025.

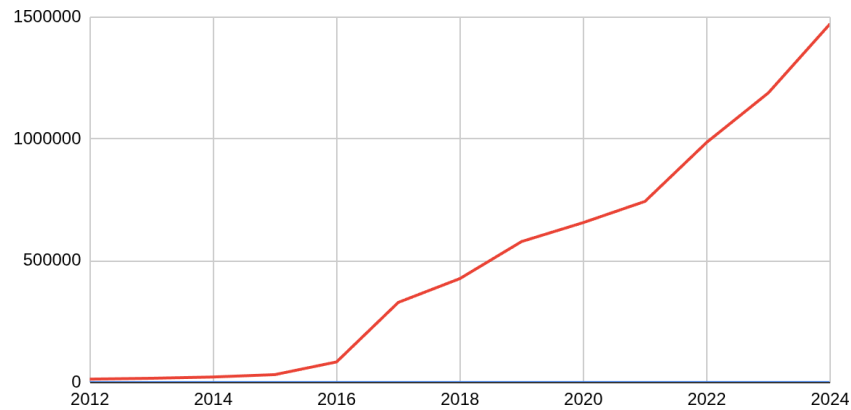
Assim, como mostrado na Figura 1, obtemos a função:  $\ln(y) = 0,4297x - 854$ . A partir dessa equação encontramos o coeficiente  $a$ , do termo angular da reta, ou seja, nesse caso é o coeficiente que determina a taxa de crescimento desta função - que é de 0,4297. Sendo assim, este valor permitiu encontrar a linha de tendência dos servidores, segundo os números reais da pesquisa.

Todos os cálculos, estimativas e gráficos foram elaborados no Microsoft Excel, garantindo precisão e reprodutibilidade. Os resultados obtidos a partir dessa análise serão apresentados e discutidos na seção seguinte.

### 3 Resultados e discussões

A seguir apresenta-se, na Figura 2, o gráfico real dos números de servidores, dos anos de 2012 a 2024. Observa-se que, ao longo do intervalo, o número de servidores cresceu de 14059 (2012) para 1.471.519 (2024), evidenciando uma expansão significativa.

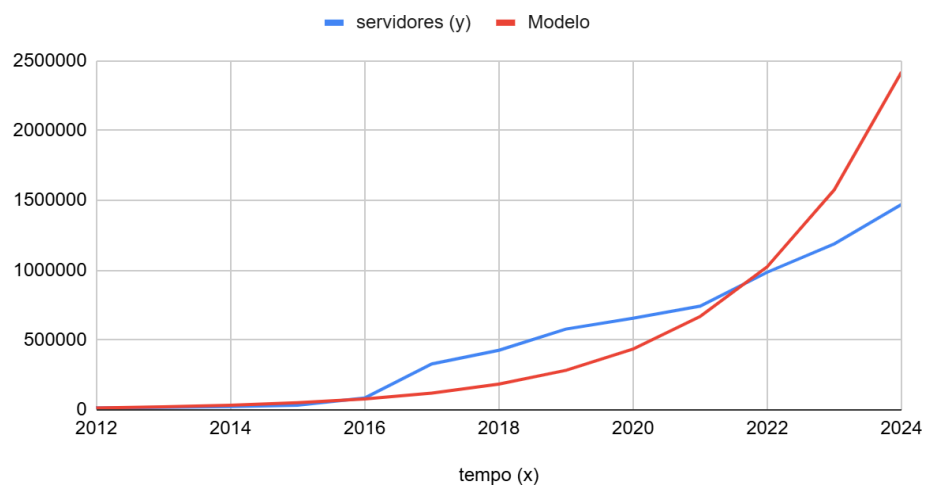
**Figura 2- Número de servidores reais**



**Fonte:**Autores,2025

A seguir, observa-se na Figura 3 os valores reais e os estimados, a partir do modelo de Malthus, que evidencia uma semelhança com os servidores (linha azul), e o modelo (linha vermelha).

**Figura 3 – Comparação entre valores reais e estimados pelo modelo de Malthus**



**Fonte:** Autores, 2025

De forma geral, os resultados mostram que o modelo de Malthus é adequado para representar a tendência geral de crescimento no número de servidores de internet de

segurança, especialmente nos anos iniciais da função. Contudo, a divergência observada nos últimos anos sugere a influência de fatores externos que podem ter alterado a taxa de crescimento, como mudanças tecnológicas, políticas de segurança digital, variações no registro de servidores ou até mesmo saturação do mercado.

Como analisado na Figura 3, houve uma alteração drástica ao se comparar o modelo de Malthus e os servidores reais. Para identificar com mais precisão, foi aplicado o cálculo do erro absoluto e relativo,

$$E_a = |\bar{x} - x| \text{ e } E_r = \frac{E_a}{x}$$

em que  $x$  é o valor real e  $\bar{x}$  é o valor estimado pelo modelo.

Os resultados podem ser encontrados na Tabela 3,

**Tabela 3-** Cálculo do Erro Absoluto e Relativo

| tempo (x) | Erro Absoluto | Erro Relativo |
|-----------|---------------|---------------|
| 2012      | 0             | 0             |
| 2013      | 4134,702023   | 23,68642314   |
| 2014      | 10379,29524   | 45,5671931    |
| 2015      | 18417,35575   | 56,66355644   |
| 2016      | 6336,538597   | 7,495668824   |
| 2017      | 208625,4422   | 63,46638829   |
| 2018      | 242131,333    | 56,7637221    |
| 2019      | 295237,0167   | 51,03774396   |
| 2020      | 221247,2214   | 33,71586599   |
| 2021      | 75205,97596   | 10,11936075   |
| 2022      | 40530,58064   | 4,113506035   |
| 2023      | 386957,279    | 32,56010224   |
| 2024      | 947851,7389   | 64,41314988   |

Aplicando-se o cálculo, tornou-se comprovado que a média de erro foi de 37,46% no modelo concluído.

## 4 Conclusões

O estudo permitiu analisar a evolução do número de servidores de internet de segurança no Brasil no período de 2012 a 2024, bem como avaliar a aplicação do modelo exponencial de Malthus para representar essa tendência.

Verificou-se um crescimento expressivo no número de servidores ao longo dos anos, passando de pouco mais de 14 mil, em 2012, para aproximadamente 1,47 milhão em 2024. O modelo apresentou boa aderência aos dados nos primeiros anos do modelo, refletindo adequadamente o padrão de crescimento.

No entanto, observou-se que, a partir de 2017, houve divergência crescente entre os valores estimados e os valores reais, com o modelo superestimando o número de servidores nos anos finais. Esse comportamento indica que fatores externos podem ter influenciado a taxa de crescimento, tornando-a variável ao longo do tempo.

De modo geral, a modelagem demonstrou ser uma ferramenta útil para compreender e prever tendências, especialmente quando aplicada a intervalos de tempo mais curtos ou com taxas de crescimento mais estáveis. Para estudos futuros, recomenda-se a análise de modelos que considerem variações na taxa de crescimento ou que integrem outros fatores que impactam diretamente a segurança digital. Além de ser um modelo preciso, também há maneiras de calcular os erros ocorridos, assim mantendo uma qualidade e eficiência muito mais adequada.

Diante do exposto, é notável que o modelo que obtivemos ocorreu um erro que é relativamente alto, com os erros relativo e absoluto observa-se que o modelo de Malthus não seria o mais recomendável para a situação.

## REFERÊNCIAS

DAVE, Deepak; SHUKLA, Divya; CHAUDHARY, Sanjay. The new frontier of cybersecurity: emerging threats and innovations. *arXiv preprint arXiv:2311.02630*, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2311.02630>. Acesso em: 21 ago. 2025.

KALA, Emmanuel Mambou. The impact of cyber security on business: how to protect your business. *Open Journal of Safety Science and Technology*, v. 13, n. 2, p. 133-146, 2023. DOI: 10.4236/ojsst.2023.132010. Disponível em: <https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=126109>. Acesso em: 21 ago. 2025.

MALWAREBYTES. Segurança na internet. [S. l.: s. n.], [202-]. Disponível em: <https://www.malwarebytes.com/pt-br/internet-security>. Acesso em: 28 ago. 2025.

NICOLAZZO, Serena; NOCERA, Antonino; PEDRYCZ, Witold. Service level agreements and security SLA: a comprehensive survey. 2024. Disponível em:

<https://arxiv.org/abs/2405.00009>. Acesso em: 28 ago. 2025.

OLIVEIRA, Flávio Augusto Ferreira de; BARROCO, Sonia Mari Shima. Revolução tecnológica e smartphone: considerações sobre a constituição do sujeito contemporâneo. *Psicologia em Estudo*, v. 28, e51648, 2023. DOI:

<https://doi.org/10.4025/psicoestud.v28i0.51648>.

REDAÇÃO TI INSIDE. Setor financeiro é o segundo mais atingido por ataques de ransomwares. *TI Inside Online*, 6 abr. 2023. Disponível em:

<https://tiinside.com.br/06/04/2023/setor-financeiro-e-o-segundo-mais-atingido-por-ataque-de-ransomwares/>. Acesso em: 21 ago. 2025.

SANTANA, Leandro Furtado. Modelagem matemática e computacional da dinâmica populacional: uma abordagem por equações diferenciais no software Scilab. [S. l.: s. n.], 2025.

TAVONI, Rodrigo; OLIVEIRA, Rodrigo Zotin Gonçalves de. Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 2, p. 86–99, 2013.

WORLD BANK. Secure internet servers. [S. l.: s. n.], [202-]. Disponível em:

<https://data.worldbank.org/indicator/IT.NET.SECR?locations=BR>. Acesso em: 28 ago. 2025.

## CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DAS MATRÍCULAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA EM TOLEDO-PR: UMA ABORDAGEM COM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Milena da Silva Ribeiro

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

milenasilvaribeiro@alunos.utfpr.edu.br

Karen Carrilho

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

### Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento do crescimento e do decréscimo do número de matrículas na Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio no município de Toledo-PR, utilizando uma abordagem matemática fundamentada em equações diferenciais ordinárias. Por meio da aplicação de modelos logísticos com evasão escolar, foi possível estimar o ponto de equilíbrio das matrículas em cada etapa da Educação Básica, considerando diferentes cenários de taxas de crescimento e evasão. Os dados utilizados foram extraídos do Censo Escolar e de plataformas oficiais como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e o QEdu. Os resultados indicam que a Educação Infantil se mantém próxima da capacidade máxima, mesmo com evasão moderada, devido ao papel da pré-escola e ao engajamento familiar. No Ensino Fundamental, os anos iniciais apresentam níveis de permanência satisfatórios, enquanto os anos finais são mais vulneráveis à evasão; pequenas reduções nas taxas podem aumentar **consideravelmente** o número de matrículas. No Ensino Médio, observa-se que a evasão impacta de forma significativa o número de matrículas, reforçando a importância de ações voltadas à permanência dos alunos. **Palavras-chave:**; Matrículas escolares;; Evasão escolar; Modelagem matemática.

### 1 Introdução

A educação é um dos pilares fundamentais para o desenvolvimento social, econômico e cultural de uma sociedade. Compreender sua dinâmica ao longo do tempo permite planejar políticas públicas mais eficazes, otimizar o uso de recursos e antecipar demandas futuras. No município de Toledo, no estado do Paraná, o monitoramento do número de matrículas e da permanência dos estudantes na educação básica é um indicador importante da realidade educacional local.

Este artigo tem como objetivo analisar o comportamento do crescimento e do decréscimo da educação no município, utilizando ferramentas matemáticas, em especial as equações diferenciais ordinárias. Ao empregar modelos de crescimento exponencial, busca-se interpretar de maneira quantitativa as transformações no número de matrículas ao longo dos anos e assim projetar tendências futuras.

A Modelagem Matemática no ensino e na pesquisa educacional se caracteriza como uma ferramenta poderosa para representar e investigar situações do mundo real, por meio de construções matemáticas que traduzem a realidade em equações, gráficos e análises

quantitativas. Segundo Bassanezi (2002), modelar é “procurar um equilíbrio harmonioso entre a teoria e a prática, mostrando o valor intrínseco da Matemática, assim como sua plasticidade e beleza, enquanto ferramenta para o entendimento de outras áreas do conhecimento”.

A escolha dessa abordagem matemática permite representar a variação do número de matrículas de forma contínua e sistemática, contribuindo para uma análise mais precisa do ritmo de crescimento ou queda ao longo do tempo. Para isso, serão utilizados dados oficiais provenientes do Censo Escolar, da Secretaria Municipal de Educação de Toledo e de plataformas educacionais, que servirão de base para a construção e validação dos modelos.

## **2 Metodologia**

Neste trabalho, o fenômeno analisado foi o comportamento das matrículas escolares ao longo do tempo em Toledo-PR. A realidade educacional local, com variações no número de alunos matriculados e índices preocupantes de evasão escolar, sobretudo no Ensino Médio, justifica a escolha dessa situação como contexto investigativo.

A metodologia adotada neste trabalho foi de abordagem quantitativa, por meio da modelagem matemática do número de matrículas com equações diferenciais ordinárias (EDOs). Primeiramente, foram coletados dados sobre o número de alunos matriculados nas escolas do município de Toledo, disponíveis na plataforma QEdu, referentes ao ano de 2023 (QEdu, 2023). Também foram consultados dados do IBGE relacionados à quantidade de escolas, docentes e capacidade educacional (IBGE, 2023).

A variação do número de matrículas ao longo do tempo foi representada por um modelo matemático baseado na teoria do crescimento populacional. Inicialmente, considerou-se o modelo exponencial proposto por Thomas Malthus, que descreve o crescimento de uma população pela equação (ZILL; CULLEN, 2017):

$$\frac{dP}{dT} = rP(t),$$

em que  $P(t)$  representa a população e  $r$  a taxa de crescimento. No entanto, esse modelo assume crescimento ilimitado, o que não é compatível com sistemas reais, como o número de alunos matriculados. Para incorporar essas limitações, utilizou-se o modelo logístico de crescimento, desenvolvido por Pierre Verhulst, que acrescenta uma limitação natural ao crescimento através do conceito de capacidade de carga (ZILL; CULLEN, 2017). Esse modelo é descrito pela equação:

$$\frac{dP}{dT} = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

em que  $K$  representa a capacidade máxima que o sistema pode suportar. No contexto educacional, a variável foi adaptada para  $E(t)$ , representando o número de matrículas escolares no tempo  $t$ . Assim, o modelo passa a ser:

$$\frac{dE}{dt} = rE(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K}\right),$$

Para tornar a equação mais realista, foi adicionado um termo de decaimento proporcional ao número de matrículas, representado por  $-dE(t)$ , onde  $d$  é a taxa de evasão. Esse tipo de termo é comum em modelos que representam perdas contínuas em sistemas dinâmicos. Assim, a equação final utilizada no estudo foi:

$$\frac{dE}{dt} = rE(t) \left(1 - \frac{E(t)}{K}\right) - dE(t)$$

Em que:

- $E(t)$ : número de matrículas no tempo  $t$ ;
- $r$ : taxa de crescimento das matrículas;
- $K$ : capacidade máxima do sistema educacional;
- $d$ : taxa de evasão escolar.

Esse modelo combina crescimento (taxa  $r$ ) com evasão (taxa  $d$ ), permitindo visualizar o comportamento futuro do sistema educacional.

Para estimar a capacidade máxima do sistema educacional de Toledo ( $K$ ), foram feitas estimativas separadas para cada etapa da Educação Básica. Na Educação Infantil, considerando que cada escola possui ao menos uma turma por ano da pré-escola com uma média de 20 alunos por turma, e com 77 unidades escolares, a capacidade total estimada para essa etapa é de aproximadamente  $77 \times 20 \times 5 = 7.700$  alunos, considerando cinco anos da Educação Infantil. Isso representa uma média de 100 alunos por escola.

No Ensino Fundamental, que abrange do 1º ao 9º ano, estimou-se uma média de 30 alunos por turma nos anos iniciais e 35 alunos por turma nos anos finais. Considerando uma turma por ano em cada uma das 72 escolas, a capacidade total estimada para o Ensino Fundamental é de cerca de  $72 \times (30 \times 5 + 35 \times 4) = 72 \times 265 = 19.080$  alunos, o que corresponde a uma média de 265 alunos por escola.

Já no Ensino Médio, com média de 40 alunos por turma e três séries em cada uma das 23 escolas, a capacidade estimada é de  $23 \times 40 \times 3 = 2.760$  alunos, resultando em uma média de 120 alunos por escola.

A taxa de crescimento foi fixada inicialmente em  $r=0,1$  para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, e em  $r=0,08$  para o Ensino Médio, considerando o potencial de expansão do sistema educacional local. Esses valores correspondem a aumentos de 10% ao ano nas duas primeiras etapas e de 8% ao ano no Ensino Médio, o que é compatível com o crescimento da

demanda por vagas e com os programas de incentivo à matrícula e à educação integral. Já a taxa de evasão foi estimada em  $d=0,03$  para a Educação Infantil,  $d=0,04$  para o Ensino Fundamental e  $d=0,06$  para o Ensino Médio. Esses valores refletem o comportamento médio observado em fontes como o INEP (2023) e a plataforma QEdu (2023), especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, onde a evasão tende a ser mais acentuada.

Para identificar o ponto de equilíbrio, ou seja, o valor para o qual o número de matrículas tende a se estabilizar ao longo do tempo, iguala-se a equação diferencial a zero:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow rE(t) = K \left( 1 - \frac{E(t)}{K} \right) - dE(t)$$

Colocando  $E(t)$  em evidência, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= E(t) \left[ r \left( 1 - \frac{E(t)}{K} \right) - d \right] \\ r \left( 1 - \frac{E(t)}{K} \right) - d &= 0 \\ r \left( 1 - \frac{E(t)}{K} \right) &= d \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por  $r$ :

$$\left( 1 - \frac{E(t)}{K} \right) = \frac{d}{r}$$

E isolando  $E(t)$ :

$$\frac{E(t)}{K} = 1 - \frac{d}{r} \Rightarrow E(t) = K \left( 1 - \frac{d}{r} \right)$$

Esse valor representa o número esperado de matrículas no longo prazo. Ele pode assumir pontos fixos, que podem ser repulsores ou atratores. Nesse caso, o ponto fixo é considerado um atrator, em razão do modelo adotado, desde que as taxas de crescimento e evasão permaneçam constantes.

### 3 Resultados e Discussão

Com os valores iniciais assumidos, a equação de equilíbrio aplicada para cada etapa da Educação Básica resulta nos seguintes valores:

- Educação Infantil:

$$E = 7.700 \left( 1 - \frac{0,03}{0,10} \right) = 5.390$$

- Ensino Fundamental:

$$E = 19.080 \left( 1 - \frac{0,04}{0,10} \right) = 11.448$$

- Ensino Médio:

$$E = 2.760 \left( 1 - \frac{0,06}{0,08} \right) = 690$$

Considerando a quantidade de unidades escolares por etapa em Toledo (77 escolas de Educação Infantil, 72 de Ensino Fundamental e 23 de Ensino Médio) a capacidade máxima total do sistema educacional foi estimada em:

$$K = (77 \times 100) + (72 \times 265) + (23 \times 120) = 7.700 + 19.080 + 2.760 = 29.540 \text{ alunos}$$

Esses valores são significativamente inferiores ao número atual de matrículas para cada etapa do Ensino Básico, sugerindo que, com os parâmetros utilizados, a tendência seria de redução no total de alunos nos próximos anos.

Foram simulados diferentes cenários, conforme a tabela abaixo:

**Tabela 1 – Indicadores da Educação**

| Etapa                 | Capacidade<br>(K) | Cenário                 | Taxa de<br>Crescimento<br>(r) | Taxa de<br>Evasão<br>(d) | Equilíbrio<br>Estimado<br>E |
|-----------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| Educação<br>Infantil  | 7.700             | Padrão                  | 0,10                          | 0,03                     | 5.390                       |
|                       |                   | Crescimento<br>otimista | 0,15                          | 0,03                     | 6.160                       |
|                       |                   | Redução de<br>evasão    | 0,10                          | 0,01                     | 6.930                       |
| Ensino<br>Fundamental | 19.080            | Padrão                  | 0,10                          | 0,04                     | 11.448                      |
|                       |                   | Crescimento<br>otimista | 0,15                          | 0,04                     | 13.992                      |
|                       |                   | Redução de<br>evasão    | 0,10                          | 0,02                     | 15.264                      |
| Ensino Médio          | 2.760             | Padrão                  | 0,08                          | 0,06                     | 690                         |
|                       |                   | Crescimento<br>otimista | 0,12                          | 0,06                     | 1.380                       |
|                       |                   | Redução de<br>evasão    | 0,08                          | 0,03                     | 1.725                       |

**Fonte:** Autor próprio, 2025

Os valores obtidos representam a quantidade de matrículas, que tende a se estabilizar ao longo do tempo em cada etapa da Educação Básica, considerando os diferentes cenários simulados. Os dados mostram que a evasão escolar tem um impacto significativo, especialmente no Ensino Médio, onde as taxas de abandono costumam ser mais altas. Por outro lado, pequenas melhorias nas taxas de crescimento ou na permanência dos estudantes podem resultar em aumentos expressivos na quantidade de alunos atendidos, especialmente no Ensino Fundamental.

A atividade mostra-se adequada para o Ensino Médio, preferencialmente no 3<sup>a</sup> ano, em disciplinas de Matemática com foco em Modelagem, Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), funções e análise de gráficos.

Além de desenvolver habilidades matemáticas, a proposta estimula o pensamento crítico sobre a realidade educacional, permitindo que os alunos interpretem dados reais e contextualizem a Matemática dentro da comunidade em que vivem, tornando o aprendizado mais significativo e conectado com o mundo.

Os resultados obtidos com o modelo aplicado às três etapas da Educação Básica revelam diferenças marcantes no comportamento das matrículas ao longo do tempo. Na Educação Infantil, observa-se que, mesmo com uma evasão moderada, o sistema tende a se manter próximo da sua capacidade máxima em cenários realistas. Esse comportamento pode estar relacionado ao papel da educação infantil como porta de entrada para o sistema escolar, à obrigatoriedade da pré-escola e ao engajamento das famílias nessa fase inicial.

No Ensino Fundamental, especialmente nos anos iniciais, os níveis de permanência ainda são relativamente satisfatórios. No entanto, os anos finais apresentam maior vulnerabilidade à evasão, conforme indicam os dados nacionais, o que já se reflete nos valores de equilíbrio mais baixos em relação à capacidade total. Isso pode estar associado a fatores como dificuldade de aprendizagem acumulada, desmotivação escolar, falta de acompanhamento familiar e desigualdades socioeconômicas. O modelo demonstrou que, mesmo pequenas reduções na taxa de evasão, por exemplo de 4% para 2%, são capazes de elevar o número de matrículas em equilíbrio em mais de 3 mil alunos. Tal fato evidencia a importância de políticas voltadas à permanência do aluno, como reforço escolar, projetos integradores e atendimento psicopedagógico.

O cenário mais crítico se apresenta no Ensino Médio. Com uma taxa de evasão estimada em 6%, o sistema tende a se estabilizar em apenas 25% da sua capacidade total, mesmo considerando uma taxa de crescimento de 8% ao ano. Essa diferença acentuada entre capacidade e equilíbrio reflete a realidade nacional. Os motivos vão desde a inserção

precoce no mercado de trabalho, desinteresse pela proposta pedagógica, até a ausência de sentido prático da escola na vida do jovem. O modelo aplicado permite quantificar essa fragilidade e mostra que, sem medidas específicas de contenção da evasão, o sistema seguirá subutilizado, mesmo com oferta suficiente.

#### **4 Considerações Finais**

O modelo logístico com evasão adotado permitiu representar de forma contínua a variação do número de matrículas ao longo do tempo, além de simular cenários futuros com base em diferentes taxas de crescimento e evasão escolar.

Os resultados indicam que, embora Toledo possua uma estrutura física com capacidade para atender a mais de 29 mil estudantes, a manutenção das taxas atuais pode levar à estabilização do número de matrículas abaixo da capacidade máxima, especialmente no Ensino Médio. Tal constatação evidencia a urgência de ações corretivas voltadas à permanência dos alunos no sistema, como políticas de combate à evasão, programas de reforço escolar, integração com o ensino técnico e valorização da escola como espaço de transformação social.

Do ponto de vista metodológico, a Modelagem Matemática demonstrou ser não apenas útil, mas essencial para compreender fenômenos complexos como a evasão escolar. Investigações futuras podem aprofundar esse modelo, incorporando dados por faixa etária, gênero ou localização geográfica (urbana/rural), bem como variáveis socioeconômicas, como renda familiar e nível de escolaridade dos responsáveis, tornando a análise ainda mais rica e precisa.

Em sala de aula, essa proposta permite que os estudantes proponham seus próprios modelos, comparem simulações e reflitam sobre intervenções possíveis, aproximando a Matemática da realidade social vivida por eles.

Portanto, os resultados evidenciam que a evasão escolar impacta significativamente o número de matrículas, principalmente no Ensino Médio. A modelagem matemática permitiu visualizar esse comportamento e testar possíveis cenários. A continuação desse tipo de análise, com dados mais específicos, pode aprofundar a compreensão do problema e fortalecer discussões sobre o papel da escola na permanência dos alunos.

#### **REFERÊNCIAS**

**BRASIL.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Censo Escolar da Educação Básica 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br>.

Acesso em: 11 set. 2025.

BRUMANO, Cleuza Eunice Pereira. **A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória**. Juiz de Fora-MG, 2014.

**IBGE**. Indicadores municipais – Toledo (PR). 2023. Indicador: Taxa de escolarização líquida. Disponível em:

<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/toledo/pesquisa/13/0?ano=2023&indicador=5913>.

Acesso em: 11 set. 2025.

**QEDU**. Perfil da educação em Toledo (PR). Censo Escolar. Disponível em:

<https://gedu.org.br/municipio/4127700-toledo/censo-escolar>. Acesso em: 11 set. 2025.

Zill, D. G., Cullen, M. R., **Equações Diferenciais**, v. 1, São Paulo: Thompson Learnin.

## **SHADOWS OF LINUSBAE: INTEGRAÇÃO ENTRE NARRATIVA LÚDICA E APRENDIZAGEM INDIRETA NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

Priscila Liz Queiroz

UTFPR – Campus Toledo

priscila.liz.queiroz@gmail.com

Renato Francisco Merli

UTFPR – Campus Toledo

renatomerli@utfpr.edu.br

### **Resumo**

Este trabalho apresenta o processo de concepção do Game Design Document (GDD) e do protótipo inicial do jogo digital Shadows of Linusbae, desenvolvido como proposta pedagógica inovadora para o ensino de Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental. O jogo busca enfrentar dificuldades recorrentes na aprendizagem de números racionais, frações, porcentagens e números primos através da integração orgânica desses conteúdos a uma narrativa imersiva de RPG de aventura. A metodologia adotada envolveu um processo colaborativo com reuniões quinzenais entre professores, pesquisadores e estudantes para mapeamento curricular detalhado baseado na BNCC, elaboração participativa do GDD e desenvolvimento iterativo de protótipos visuais. Os resultados alcançados incluem um GDD abrangente com diretrizes pedagógicas claras, protótipos visuais de personagens e cenários, além de mecânicas de jogo inovadoras que integram conceitos matemáticos diretamente à progressão narrativa. A validação preliminar com especialistas em educação matemática indicou alto potencial pedagógico da proposta. Conclui-se que o Shadows of Linusbae representa uma contribuição significativa para o campo dos jogos educativos, demonstrando como a integração orgânica entre narrativa lúdica e conteúdo curricular pode promover aprendizagens matemáticas significativas, apontando caminhos promissores para futuras aplicações e pesquisas em contextos educacionais reais.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Indireta; Jogos Educativos; Ensino de Matemática.

### **1 Introdução**

O ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental é marcado por desafios persistentes e complexos, principalmente relacionados à compreensão de conceitos abstratos que exigem elevado nível de pensamento matemático. No 6º ano, conteúdos como números racionais, frações, porcentagens e números primos representam um ponto crítico de dificuldade recorrente para os estudantes, constituindo uma verdadeira barreira epistemológica no processo de aprendizagem (LOPES, 2020; CAMARGO; CARVALHO, 2017). Essas dificuldades não decorrem apenas da complexidade intrínseca dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também, e principalmente, da forma fragmentada e descontextualizada como, tradicionalmente, são apresentados em sala de aula, sem

articulação com situações significativas do cotidiano dos estudantes (NUNES; BRYANT, 1997).

Os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) revelam um cenário preocupante: segundo o INEP (2020), avaliações nacionais apontam queda progressiva e consistente do desempenho dos estudantes em Matemática justamente nos anos finais do Ensino Fundamental, com índices particularmente críticos nos conteúdos de números racionais e operações fracionárias. Este quadro reforça a urgência de desenvolvimento e implementação de metodologias inovadoras que possam aproximar os conteúdos matemáticos da realidade experiencial dos alunos, transformando a aprendizagem em um processo mais significativo e engajador.

Neste contexto desafiador, os jogos digitais educativos surgem como uma estratégia pedagógica particularmente promissora, por aliarem motivação intrínseca, narrativa envolvente e desafios progressivos em uma experiência de aprendizagem ativa e contextualizada (GEE, 2003). A gamificação do processo educativo permite criar ambientes de aprendizagem imersivos onde os conceitos matemáticos são experimentados de forma prática e significativa, superando a abstração que caracteriza o ensino tradicional.

Diversos estudos recentes (HUMBERT, 2019; MAYER, 2009; SCHELL, 2008) têm demonstrado o potencial educacional dos jogos digitais, destacando que sua eficácia pedagógica depende não apenas de aspectos lúdicos superficiais, mas principalmente da coerência e profundidade da integração entre os objetivos educacionais e as mecânicas de jogo. Para que os jogos contribuam de forma significativa para a aprendizagem matemática, é essencial que os conteúdos escolares estejam integrados organicamente às mecânicas, narrativas e sistemas de progressão, ao invés de estarem meramente justapostos como exercícios disfarçados.

Diante desse cenário complexo e desafiador, este artigo apresenta o processo detalhado de concepção e desenvolvimento inicial do *Shadows of Linusbae*, um jogo digital de RPG narrativo cujo objetivo central é apoiar efetivamente o ensino de Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental através de uma integração orgânica entre conteúdo curricular e experiência lúdica. O projeto envolveu a elaboração colaborativa de um Game Design Document (GDD) pedagogicamente fundamentado, a produção de protótipos visuais detalhados e a definição de mecânicas matemáticas inovadoras, todas alinhadas às competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O objetivo principal é analisar criticamente o processo de criação do jogo e discutir seu potencial como recurso pedagógico inovador para transformar o ensino e aprendizagem de Matemática.

## **2 Fundamentação Teórica**

A fundamentação teórica que sustenta este trabalho articula de forma integrada teorias de aprendizagem construtivistas, estudos contemporâneos sobre aprendizagem baseada em jogos e as orientações curriculares da BNCC para o ensino de Matemática no 6º ano, criando um quadro teórico robusto para o desenvolvimento do jogo educacional.

### **2.1 Teorias de aprendizagem aplicadas ao design de jogos educativos**

A concepção pedagógica do *Shadows of Linusbae* está ancorada no construtivismo, particularmente nas contribuições de Piaget (1972) e Vygotsky (1991). Piaget defende que o conhecimento é construído ativamente pelo sujeito através da interação com o ambiente e da resolução de situações-problema significativas. No contexto do jogo, esta perspectiva se manifesta através de desafios matemáticos que exigem que o jogador experimente, teste hipóteses e reconstrua conceitos através da ação, ao invés de apenas receber informações passivamente.

Vygotsky (1991) amplia essa perspectiva ao enfatizar o papel crucial da linguagem, do meio social e dos instrumentos culturais de mediação na construção do conhecimento. Sua concepção de zona de desenvolvimento proximal sugere que os alunos aprendem melhor quando enfrentam desafios que exigem esforço cognitivo, mas que podem ser superados com apoio adequado. Jogos digitais bem desenhados, especialmente os narrativos, oferecem precisamente este tipo de estrutura de suporte, onde o jogador é constantemente desafiado em seu nível atual de compreensão, mas recebe pistas, feedback contextualizado e recursos estratégicos para avançar progressivamente.

Kolb (1984), com sua teoria da aprendizagem experiencial, propõe um modelo cíclico composto por quatro etapas interconectadas: experiência concreta, observação reflexiva, conceitualização abstrata e experimentação ativa. No contexto do *Shadows of Linusbae*, este ciclo se manifesta de forma orgânica quando o jogador vivencia situações matemáticas concretas no jogo, reflete sobre suas escolhas e estratégias, formula conceitos abstratos a partir dessas experiências e os testa novamente em novas interações, criando um processo contínuo de construção de conhecimento.

Norman (2004), ao discutir o design emocional, argumenta convincentemente que elementos estéticos e experienciais — como cores, ambientação, narrativa e feedback emocional — influenciam diretamente a motivação intrínseca e a eficácia da aprendizagem. Assim, ao integrar conceitos matemáticos complexos ao enredo emocionalmente envolvente do jogo, cria-se uma experiência educativa que associa de forma poderosa emoção e aprendizado, superando a dicotomia tradicional entre razão e afeto na educação matemática.

### **2.2 Aprendizagem baseada em jogos e aprendizagem situada**

Gee (2003) introduz o conceito fundamental de aprendizagem situada, onde o conhecimento é adquirido e construído em contextos autênticos de prática, em vez de ser apresentado de

forma abstrata e descontextualizada. Jogos digitais educativos bem projetados permitem que o estudante aprenda Matemática enquanto interage com sistemas complexos de regras, significados e relações próprios do universo do jogo, criando uma ponte natural entre a abstração matemática e a experiência concreta.

Humbert (2019), em revisão abrangente da literatura sobre o uso do Minecraft em educação, demonstra empiricamente que a integração orgânica de desafios matemáticos significativos ao ambiente virtual imersivo favorece aprendizagens profundas e significativas, particularmente em conceitos espaciais, geométricos e de raciocínio proporcional. Seus achados reforçam a importância do design cuidadoso das mecânicas de jogo para garantir a integração efetiva entre conteúdo educacional e experiência lúdica.

Mayer (2009), ao tratar dos princípios da aprendizagem multimídia, enfatiza que a combinação estratégica de diferentes modalidades representacionais — texto, imagem, som, animação e interatividade — pode potencializar significativamente o processo de aprendizagem, desde que os elementos estejam pedagogicamente articulados e carga cognitiva seja adequadamente gerenciado. Este princípio é particularmente relevante para o design de jogos educativos, que naturalmente integram múltiplas modalidades de representação.

### **2.3 Orientações da BNCC e desafios específicos de aprendizagem**

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) estabelece claramente que, no 6º ano do Ensino Fundamental, devem ser priorizadas habilidades matemáticas críticas e estruturantes, com ênfase especial em:

- EF06MA04: reconhecer e aplicar propriedades de números primos em contextos práticos e significativos;
- EF06MA07: resolver e elaborar problemas envolvendo operações básicas e equivalência de frações em situações contextualizadas;
- EF06MA13: utilizar porcentagens de forma flexível em situações cotidianas e matemáticas diversificadas.

Pesquisas acadêmicas consistentes (SILVEIRA; BIANCA, 2016; CAMARGO; CARVALHO, 2017; LOPES, 2020) reforçam que estes conteúdos específicos estão entre os mais problemáticos e críticos para os alunos brasileiros, caracterizando-se como verdadeiros obstáculos epistemológicos no percurso de aprendizagem matemática. Esta constatação torna imperativo o desenvolvimento de estratégias pedagógicas inovadoras e diferenciadas que possam abordar estas dificuldades de forma mais efetiva.

## **3 Metodologia**

O desenvolvimento do Shadows of Linusbae seguiu uma abordagem metodológica colaborativa, interativa e iterativa, inspirada nos princípios do design-based research e estruturada em três etapas principais integradas: mapeamento curricular detalhado, elaboração participativa do GDD e desenvolvimento incremental de protótipos visuais e conceituais.

### **3.1 Mapeamento curricular colaborativo**

Desde novembro de 2023, foram realizadas reuniões quinzenais sistemáticas envolvendo o professor orientador especialista em educação matemática, alunos de graduação em Matemática (bolsistas e voluntários), e dois professores convidados da rede pública de ensino. Estas reuniões seguiram um protocolo estruturado de análise curricular que incluiu:

- Análise detalhada da BNCC para identificação de habilidades críticas do 6º ano relacionadas a frações, porcentagens e números primos;
- Discussão de dificuldades de aprendizagem específicas associadas a cada conceito matemático, baseada na experiência prática dos professores;
- Brainstorming de ideias para representação destes conceitos em desafios de jogo contextualizados e narrativas coerentes com o universo de RPG;
- Análise de viabilidade técnica e pedagógica das propostas de mecânicas de jogo.

O processo de mapeamento garantiu que todos os elementos matemáticos do jogo estivessem solidamente ancorados nas competências e habilidades da BNCC, enquanto mantinham relevância e significado dentro da narrativa do jogo.

### **3.2 Elaboração colaborativa do Game Design Document**

O Game Design Document (GDD) foi construído coletivamente utilizando a plataforma Notion, que permitiu registro colaborativo em tempo real de todas as decisões de design. O documento seguiu a estrutura proposta por Perucia et al. (2005), organizada nas seguintes seções principais:

- **Narrativa e enredo:** Descrição detalhada da história principal, arcos narrativos, personagens e universo ficcional;
- **Mecânicas principais:** Sistemas de combate, progressão, economia e puzzles integrando conceitos matemáticos;
- **Personagens:** Atributos, habilidades evolutivas e desenvolvimento do arco do protagonista Vincent;
- **Progressão de fases:** Estruturação gradual de dificuldade e introdução de conceitos matemáticos;
- **Elementos visuais:** Diretrizes de arte, paleta de cores e estilo visual;
- **Diretrizes pedagógicas:** Fundamentação educacional, objetivos de aprendizagem e conexões com a BNCC.

Cada seção foi desenvolvida iterativamente, com várias versões sendo discutidas, testadas conceitualmente e refinadas com base nos feedbacks do grupo.

### **3.3 Desenvolvimento de protótipos e processo de validação**

Foram produzidos protótipos visuais detalhados incluindo sprites dos personagens principais (Vincent e sua mãe Amélia), cenários representando diferentes tipos de casas e ambientes do jogo, e interfaces de usuário preliminares. Estes protótipos serviram como artefatos concretos para discussão nas reuniões de validação, permitindo avaliar a coerência entre estética, narrativa e proposta pedagógica.

Embora a validação empírica com alunos ainda não tenha ocorrido nesta fase inicial, o GDD e os protótipos passaram por análise crítica rigorosa pelos professores envolvidos, que avaliaram critérios de clareza, pertinência educacional, adequação curricular e potencial de engajamento. Este processo garantiu que o design do jogo estivesse pedagogicamente fundamentado antes do início do desenvolvimento técnico propriamente dito.

## **4 Resultados e Discussão**

Os resultados alcançados neste estágio de desenvolvimento incluem a sistematização completa do GDD, a produção de protótipos visuais detalhados e a definição de mecânicas de jogo inovadoras que integram organicamente conceitos matemáticos ao universo narrativo do jogo.

### **4.1 Integração pedagógica das habilidades da BNCC**

O jogo implementa uma abordagem inovadora de integração curricular onde os conteúdos matemáticos não são meramente adicionados como exercícios isolados, mas sim incorporados organicamente às ações centrais do jogador e à progressão da narrativa. Exemplos específicos incluem:

- **Números primos (EF06MA04):** Sistema de combate estratégico onde inimigos com pontos de vida baseados em números primos exigem o uso de armas com valores de dano também primos para máxima eficiência. Por exemplo, contra um inimigo com 11 pontos de vida (primo), armas com dano 3, 5 ou 7 são mais eficazes, promovendo reconhecimento ativo de propriedades numéricas;
- **Frações (EF06MA07):** Puzzles ambientais e missões de coleta que exigem divisão equitativa de recursos entre personagens, compreensão de equivalência fractionária para desbloquear áreas, e uso de representações visuais de frações na interface;
- **Porcentagens (EF06MA13):** Sistema econômico complexo envolvendo cálculo de descontos em lojas, penalidades de 20% na vida ao fugir de combates, e bônus progressivos baseados em percentuais de conclusão de objetivos.

**Tabela 1 – Sistema de integração de habilidades da BNCC às mecânicas do jogo**

| <b>Habilidade BNCC</b> | <b>Conceito matemático</b> | <b>Mecânica do jogo</b> | <b>Exemplo de implementação</b>                     |
|------------------------|----------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------|
| EF06MA04               | Números primos             | Combate estratégico     | Inimigos com vida prima exigem armas com dano primo |
| EF06MA07               | Frações                    | Puzzles de divisão      | Divisão equitativa de recursos entre personagens    |
| EF06MA13               | Porcentagem                | Sistema econômico       | Cálculo de descontos e penalidades percentuais      |
| EF06MA15               | Localização espacial       | Sistema de coordenadas  | Navegação por coordenadas cartesianas               |
| EF06MA18               | Interpretação de dados     | Gráficos de atributos   | Análise visual de estatísticas de personagem        |

Fonte: Autores (2025).

#### **4.2 Narrativa imersiva e desenvolvimento de personagens**

A narrativa do jogo foi cuidadosamente elaborada para criar conexões emocionais e significativas com os conceitos matemáticos. O protagonista Vincent é um jovem complexo que, após perder os pais tragicamente em um conflito entre reinos, embarca em uma jornada de reconstrução pessoal enquanto busca cumprir o sonho de seu pai: estabelecer uma fazenda próspera. Sua trajetória envolve enfrentar monstros em dungeons hostis, formar alianças estratégicas com personagens diversos, e desvendar mistérios profundos sobre seu passado e os reinos que compõem o universo ficcional.

A história da princesa Selina, cujo casamento político desfeito provocou uma cascata de guerras e intrigas entre os reinos, constitui o pano de fundo histórico rico e complexo que drive a narrativa principal. Esta camada narrativa adicional permite explorar conceitos matemáticos em contextos históricos e culturais diversificados, enriquecendo a experiência de aprendizagem.

#### **4.3 Elementos visuais e estética coerente**

Os protótipos visuais desenvolvidos incluem sprites detalhados dos personagens principais, designs de ambientação coerentes com o universo medieval-fantástico, e interfaces de usuário intuitivas que incorporam representações visuais de conceitos matemáticos. A paleta

de cores em verde musgo, marrom terroso e cinza foi cuidadosamente escolhida para criar um ambiente visualmente coeso que contrasta deliberadamente com a lógica matemática dos desafios, seguindo os princípios do design emocional de Norman (2004).

Os elementos visuais não são meramente decorativos, mas funcionam como ferramentas de aprendizagem ativas. Por exemplo, barras fracionárias visuais ajudam na compreensão de frações, diagramas de porcentagem são integrados à interface de combate, e representações gráficas de atributos facilitam a comparação de estatísticas.

#### **4.4 Análise comparativa com jogos educativos existentes**

A Tabela 2 apresenta uma análise comparativa abrangente entre o Shadows of Linusbae e outros jogos educativos estabelecidos no mercado, destacando diferenças fundamentais na abordagem de integração entre conteúdo matemático e experiência lúdica:

**Tabela 2 – Análise comparativa de jogos educativos de Matemática**

| <b>Jogo</b>         | <b>Abordagem de integração</b> | <b>Público-alvo</b> | <b>Diferenciais pedagógicos</b>                        | <b>Limitações</b>               |
|---------------------|--------------------------------|---------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------|
| Shadows of Linusbae | Orgânica através da narrativa  | 6º ano EF           | RPG narrativo imersivo; integração curricular profunda | Em desenvolvimento              |
| Prodigy             | Minijogos isolados             | 1º ao 8º EF         | Personalização de avatar; adaptabilidade               | Fragmentação conteúdo-narrativa |
| DragonBox           | Desafios independentes         | 1º ao 9º EF         | Mecânicas visuais simplificadas                        | Foco em conceitos específicos   |
| Minecraft Edu       | Sandbox criativo               | Todos os níveis     | Liberdade criativa; multidisciplinar                   | Requer mediação docente ativa   |

Fonte: Autores (2025).

Esta análise comparativa demonstra que o Shadows of Linusbae ocupa um espaço único no ecossistema de jogos educativos, particularmente na integração orgânica entre narrativa imersiva e conteúdo matemático curricular específico.

## **5 Considerações Finais**

O desenvolvimento do Shadows of Linusbae representa uma contribuição significativa e inovadora para o campo emergente dos jogos digitais educativos, demonstrando

concretamente como a integração orgânica entre narrativa lúdica imersiva e conteúdo curricular pode criar experiências de aprendizagem matemática profundamente significativas e engajadoras. O projeto, embora ainda em versão beta, já conta com um Game Design Document abrangente e pedagogicamente fundamentado, protótipos visuais de alta qualidade, e mecânicas de jogo inovadoras que transformam conceitos matemáticos abstratos em elementos centrais da experiência interativa.

Os resultados alcançados até o momento sugerem que a abordagem de integração narrativa empregada no *Shadows of Linusbae* possui potencial significativo para superar as limitações de jogos educativos tradicionais, que frequentemente falham em criar conexões significativas entre conteúdo, aprendizado e experiência lúdica. A validação preliminar com especialistas em educação matemática indica que a proposta está pedagogicamente alinhada com as necessidades reais de sala de aula.

No entanto, é importante reconhecer as limitações atuais do projeto, particularmente a falta de dados empíricos de validação com estudantes reais. Esta limitação, inerente à fase atual de desenvolvimento, abre importantes perspectivas para pesquisas futuras que deverão focar na implementação prática e avaliação de eficácia em contextos educacionais reais.

Como perspectivas futuras imediatas, prevê-se a realização de testes extensivos com estudantes do 6º ano, o refinamento iterativo das mecânicas com base nos feedbacks coletados, e o desenvolvimento de recursos de apoio docente para facilitar a integração do jogo em práticas pedagógicas diversificadas. A longo prazo, a arquitetura modular do jogo permite sua adaptação para outros anos e conteúdos matemáticos, ampliando significativamente seu potencial impacto educacional.

Em conclusão, o *Shadows of Linusbae* não apenas oferece uma ferramenta pedagógica inovadora, mas também contribui para o avanço teórico-metodológico do campo de game-based learning, demonstrando na prática como princípios de design de jogos, fundamentos pedagógicos e conteúdo curricular podem ser integrados de forma coerente e efetiva para transformar a experiência de aprendizagem matemática.

## REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018.
- CAMARGO, R. A.; CARVALHO, D. L. O ensino da porcentagem nos anos finais do Ensino Fundamental: concepções e práticas. *Revista Educação Matemática em Foco*, v. 10, n. 14, p. 128–149, 2017.

- CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Effects of a preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 136–163, 2007.
- GEE, J. P. *What Video Games Have to Teach Us About Learning and Literacy*. New York: Palgrave Macmillan, 2003.
- HUMBERT, M. Minecraft in Education: A Review of the Literature. *Journal of Educational Technology Systems*, v. 48, n. 2, p. 234–253, 2019.
- KOLB, D. A. *Experiential learning: experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1984.
- LOPES, C. R. O ensino de números racionais: dificuldades e possibilidades. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2020, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2020.
- MAYER, R. E. *Multimedia learning*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2009.
- NORMAN, D. A. *Emotional Design: Why We Love (or Hate) Everyday Things*. New York: Basic Books, 2004.
- NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- PERUCIA, A. S.; BERTHÊM, A. C.; BERTSCHINGER, G. L.; MENEZES, R. R. C. *Desenvolvimento de jogos eletrônicos: teoria e prática*. São Paulo: Novatec Editora, 2005.
- VYGOTSKY, L. *A formação social da mente: o desenvolvimento do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1991.
- SHELL, J. *The Art of Game Design: A Book of Lenses*. Burlington: Morgan Kaufmann, 2008.
- ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*. London: RoutledgeFalmer, 1996.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Ensinar e aprender matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. In: FIORENTINI, D. (org.). *Professor de matemática: formação, identidade e saberes docentes*. São Paulo: Cortez, 2009.
- SILVEIRA, A. M.; BIANCA, D. Dificuldades de aprendizagem em matemática nos anos iniciais: uma análise a partir da BNCC. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 45-60, 2016.

---

## **EXPLORANDO A MATIFIC NO ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM TEA: POTENCIAIS E DESAFIOS**

Letícia de Lima Oliveira  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná – UTFPR  
limaoliveiraleticia@gmail.com

Glaucia Eduarda Mariussi Hoffmann  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná – UTFPR  
glauciamariussi@gmail.com

Rariane Nolasco Fernandes  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná – UTFPR  
rariane38@hotmail.com

### **Resumo**

Este trabalho apresenta uma proposta de investigação sobre o uso da plataforma **Matific** no ensino de matemática para alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Alunos com TEA frequentemente enfrentam dificuldades de concentração, compreensão de conceitos abstratos e interação social, exigindo metodologias adaptadas. A pesquisa será realizada com um aluno 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, utilizando atividades interativas da plataforma em sala de tecnologia. Espera-se que a intervenção promova maior engajamento, autonomia e estímulo à interação social, além de favorecer a aprendizagem de conteúdos matemáticos. O estudo busca contribuir para práticas pedagógicas mais inclusivas e motivadoras, mostrando como plataformas digitais podem ser recursos eficazes para atender às necessidades individuais de alunos com TEA, tornando o aprendizado mais acessível, interativo e personalizado.

**Palavras-chave:** Tecnologias digitais. Autismo. Matific.

### **1 Introdução**

Este trabalho apresenta o potencial da plataforma Matific como ferramenta pedagógica para alunos diagnosticados com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Partimos do pressuposto de que as tecnologias digitais podem ser poderosas aliadas na educação inclusiva, embora sua aplicação específica no ensino da matemática para esse público ainda seja um campo pouco explorado. Como apontam Garcia Müller e Menezes (2021, p. 49), “conclui-se que ainda é incipiente o número de pesquisas sobre o uso de tecnologias para apoiar a construção de conhecimentos matemáticos para sujeitos com TEA e/ou Deficiência Intelectual”. Essa lacuna justifica e motiva a presente investigação.

Nesse cenário, plataformas educacionais digitais emergem como uma alternativa metodológica promissora. Yabushita, Nascimento e Marcolino (2023, p. 3) defendem que “as plataformas educacionais digitais são ferramentas que podem auxiliar no ensino de Matemática, oferecendo recursos interativos que facilitam a compreensão de conceitos abstratos e promovem um ambiente de aprendizagem dinâmico”. A plataforma Matific, em

particular, com sua abordagem lúdica e gamificada, parece se alinhar perfeitamente a essa premissa.

A questão central, no entanto, vai além da mera motivação. É preciso perguntar: como esses recursos efetivamente engajam estudantes neuro atípicos? Chequetto e Gonçalves (2019, p. 210) observam que “a utilização de tais recursos, configura-se como instrumento que pode possibilitar e estimular o aprendizado dos alunos.” Esse potencial de estímulo é crucial para alunos com TEA, que podem encontrar na interface previsível e controlável de um *software* um ambiente mais confortável para a aprendizagem do que a imprevisibilidade da sala de aula tradicional.

Contudo, a simples inserção da tecnologia não é suficiente. É imperativo que haja uma adaptação às individualidades de cada aluno. Oliveira, Lopes e Oliveira (2022, p. 2) são categóricos ao afirmar que “as Tecnologias Assistivas (TA) utilizadas para o ensino de Matemática para estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA), nos anos iniciais do Ensino Fundamental, devem considerar as especificidades de cada aluno e adaptar o processo educativo às suas necessidades.”

Dito isso, este estudo busca analisar de que maneira a plataforma Matific pode ser efetivamente integrada à prática pedagógica, não como uma solução milagrosa, mas como um instrumento a mais no arsenal do educador. O objetivo final é verificar se sua utilização proporcionará uma experiência diversificada e prazerosa no estudo da matemática, respeitando a singularidade de cada aluno com TEA e, assim, potencializando seu desenvolvimento cognitivo.

## 2 Metodologia

A pesquisa será realizada com um aluno diagnosticado com Transtorno do Espectro Autista (TEA), matriculados no 7º ano do Ensino Fundamental II, o aluno apresenta amplas dificuldades na realização de atividades matemáticas.

Trata-se de um estudo de caso exploratório, com abordagem qualitativa, que buscará analisar o impacto da utilização da plataforma digital Matific no processo de ensino e de aprendizagem dos alunos com TEA. Segundo Obnesorg, *et al.*:

As tecnologias assistivas, como aplicativos e softwares educativos, demonstraram ser ferramentas eficazes para auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos abstratos, seguir instruções e realizar tarefas de forma independente. Além disso, estas tecnologias promovem um ambiente de aprendizagem mais acessível e adaptado às necessidades específicas dos alunos com TEA” (Obnesorg *et al.*, 2024, p. 2)

Assim, observa-se que recursos digitais como a plataforma Matific podem desempenhar papel semelhante, ao tornar o aprendizado matemático mais dinâmico e

acessível, respeitando o ritmo de cada estudante. Dessa forma, fortalecem-se práticas pedagógicas inclusivas que favorecem o desenvolvimento integral dos alunos com TEA.

A intervenção será realizada na sala de tecnologia, utilizando a plataforma Matific, disponibilizada pela rede pública para todos os alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais. A plataforma será utilizada para atividades interativas e jogos educacionais adaptáveis, que possibilitam a prática de habilidades matemáticas de forma lúdica e personalizada. Oliveira, Lopes, Oliveira (2025, p. 12-13) ressaltam que “os jogos, seja no formato físico ou por meio das tecnologias, são bastante eficientes para se ensinar Matemática para crianças com deficiência, principalmente porque oportuniza a interação social e elas aprendem brincando”.

Dessa forma a professora adaptará os exercícios da plataforma de acordo com as necessidades individuais de cada aluno, garantindo que o ritmo e o nível de dificuldade estejam compatíveis com suas habilidades.

A escolha dos métodos de coleta de dados — observação dos alunos, análise do desempenho na plataforma Matific e entrevistas com as professoras — foi feita para avaliar, de forma completa, como o uso da tecnologia ajuda no aprendizado de matemática por alunos com autismo (TEA). Combinar essas diferentes formas de investigação permite entender tanto os resultados concretos (como o progresso nas atividades) quanto aspectos subjetivos (como o envolvimento dos alunos e a opinião das professoras). Dessa forma, é possível ter uma visão mais clara e confiável sobre a real eficácia da ferramenta no processo de ensino.

Sendo assim, serão utilizados os seguintes instrumentos:

- Observação sistemática: registro do comportamento dos alunos durante as atividades na plataforma, participação, engajamento e interação social.
- Avaliações de desempenho: exercícios realizados dentro da plataforma Matific, comparando acertos, erros e progresso ao longo do tempo.

Os dados coletados serão analisados qualitativamente, buscando identificar padrões de comportamento, engajamento e progresso no aprendizado matemático. Além disso, será feita análise descritiva do desempenho dos alunos na plataforma, considerando elementos como tempo de execução, quantidade de exercícios concluídos e *feedback* recebido.

A metodologia proposta visa oferecer um ensino mais inclusivo, interativo e adaptado, proporcionando aos alunos com TEA oportunidades de aprendizagem significativas e estimulantes. Conforme demonstrado por Silva et al. (2024), “metodologias que incorporam tecnologias assistivas no ensino de matemática para alunos com TEA proporcionam 'uma abordagem adaptada e personalizada', criando ambientes de aprendizagem mais inclusivos e significativos”.

### 3 Resultados e Discussão

O presente estudo investigará a utilização da plataforma Matific com alunos diagnosticados com Transtorno do Espectro Autista (TEA), com o objetivo de compreender seu impacto no ensino de matemática. Espera-se que a aplicação da plataforma contribua para o desenvolvimento das competências matemáticas dos alunos, considerando suas necessidades individuais e promovendo maior engajamento nas atividades.

Prevê-se que a plataforma proporcionará atividades interativas e adaptáveis, capazes de motivar os alunos e favorecer a participação ativa. Espera-se também que a intervenção proporcionará a melhora na autonomia e no interesse dos alunos, permitindo que explorem conceitos matemáticos de forma personalizada. Oliveira; Lopes; Oliveira (2025, p. 2) reforçam a necessidade de adaptação das atividades: “aspectos como ritmo, adaptação e suporte específicos às necessidades dos alunos com TEA são enfatizados”.

Além disso, a experiência prevista permitirá comparar o engajamento e a compreensão dos alunos em aulas tradicionais de matemática e em atividades realizadas na plataforma digital. Oliveira, Lopes, Oliveira (2025, p. 7) fortalecem que “apesar da relevância sobre a acessibilidade e os Objetos de Aprendizagem Acessíveis para o ensino de Matemática, a exploração dessa temática ainda é pouco abordada no Brasil”.

Assim, espera-se que a aplicação do Matific favorecerá um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, motivador e adaptado às particularidades dos alunos com TEA, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e social, além de fornecer informações importantes para futuras pesquisas sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática inclusivo.

### REFERÊNCIAS

CHEQUETTO, Jonas José; GONÇALVES, Agda Felipe Silva. Possibilidades no ensino de Matemática para um aluno com autismo. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, v. 5, n. 02, p. 206-222, 2019. DOI: 10.36524/dect.v5i02.110. Disponível em: <https://doi.org/10.36524/dect.v5i02.110>. Acesso em: 08 set. 2025.

DA SILVA, Cláudia Rosane Moreira; *et al.* Inclusão escolar e matemática: uso do simulador PhET como tecnologia assistiva para alunos com TEA. **Revista Educação Inclusiva**, v. 6, n. 2, 2024. DOI: <https://doi.org/10.56579/rei.v6i2.644>. Acesso em: 01 out. 2025.

DA SILVA, Josiana Manuela, *et al.* O uso de tecnologias assistivas para promover a inclusão de alunos com tea na aprendizagem matemática: estratégias e desafios. **Caderno Pedagógico**, Curitiba, v. 21, n. 9, p. 01-22, 2024.

MÜLLER, Miriam Garcia; DE MENEZES, Crediné Silva. Tecnologias educacionais acessíveis para apoiar o ensino de matemática: uma revisão sistemática de literatura. *RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v. 19, n. 2, p. 41-50, dez.

2021. DOI: 10.22456/1679-1916.121185. Disponível em:  
<https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/121185>. Acesso em: 24 ago. 2024.

OLIVEIRA, Camila Rezende; LOPES, Cjanna Vieira; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de. Tecnologias assistivas aplicadas à educação matemática inclusiva para estudantes com Transtorno de Espectro Autista nos anos iniciais do ensino fundamental. *Texto Livre: Linguagem e Tecnologia*, Belo Horizonte-MG, v. 18, p. e56096, 2025. DOI: 10.1590/1983-3652.2025.56096. Disponível em:  
<https://periodicos.ufmg.br/index.php/textolivre/article/view/56096>. Acesso em: 08 set. 2025.

YABUSHITA, Andréia Melânia Motter; NASCIMENTO, William Junior do; MARCOLINO, Anderson da Silva. Plataformas Educacionais Digitais no Ensino de Matemática para Estudantes Autistas: Uma Revisão Sistemática. *RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, 2025. Disponível em:  
<https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/144978>. Acesso em: 08 set. 2025.

## **MECANISMOS LEGAIS DE PARTICIPAÇÃO SOCIAL NO BRASIL: O CONSELHO MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO COMO ESPAÇO DE GESTÃO DEMOCRÁTICA**

Rayanna Kamila Bilatto

UTFPR- Toledo

rayannabilatto33@outlook.com

Alice Beatriz Serschön

UTFPR- Toledo

Cezar Ricardo de Freitas

UTFPR - Toledo

### **Resumo**

Este trabalho tem como objetivo discutir os mecanismos legais de participação social no Brasil, a partir do estudo de caso de um Conselho Municipal de Educação (CME) da região Oeste do Paraná. A pesquisa foi realizada por meio de uma entrevista com a presidente do órgão, que possibilitou compreender sua estrutura, funções e papel na gestão democrática da educação. O estudo evidenciou que o CME exerce funções normativas, consultivas, deliberativas e fiscalizadoras, sendo um espaço relevante de acompanhamento e formulação de políticas educacionais. Contudo, identificou-se que a participação da sociedade ocorre predominantemente de forma representativa, por meio de associações e segmentos, o que limita a efetividade da democracia direta. Além disso, a divulgação das ações do Conselho ainda se restringe a meios institucionais, não atingindo plenamente a comunidade. Conclui-se que, embora o CME seja um instrumento importante de fortalecimento da democracia participativa, ainda há desafios a serem superados para ampliar a transparência, a inclusão e a participação direta da sociedade nas decisões educacionais.

**Palavras-chave:** Conselho Municipal de Educação. Participação Social. Gestão Democrática.

### **1 Introdução**

O presente trabalho tem como finalidade analisar a participação social no Brasil, a partir do estudo dos mecanismos legais que possibilitam a intervenção da sociedade nas decisões do poder público. Para tanto, toma-se como objeto de análise de um Conselho Municipal de Educação (CME) da região oeste do Paraná por meio de uma entrevista realizada com a atual presidente do referido órgão.

Este texto partiu de uma atividade desenvolvida na disciplina optativa “Democracia e Cidadania no Brasil”, do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como propósito promover a compreensão crítica dos instrumentos institucionais de participação política, tais

como conselhos e fóruns temáticos, relacionando-os ao processo histórico de construção da democracia brasileira.

O objetivo central da atividade consistiu em compreender, a partir da realidade local, de que forma os conselhos municipais se configuram como mecanismos legais de participação social, considerando aspectos como estrutura, funcionamento, representatividade e efetividade. Buscou, ainda, analisar como a democracia e a participação da sociedade, conquistas da Constituição de 1988, se concretizam no cotidiano da gestão pública, com ênfase no campo educacional.

## **2 Metodologia**

Para realizar a entrevista com o conselho municipal de educação (CME), inicialmente entramos em contato com um membro do conselho, explicando o objetivo da entrevista e verificando o interesse em participar. Esse membro sugeriu que conversássemos diretamente com a presidente do Conselho e, por meio dele, obtivemos o contato com a presidente do CME.

Após entrarmos em contato com a presidente, explicamos o objetivo da entrevista e perguntamos se queria participar, ela disse que gostaria sim de participar. Devido a rotina cheia tanto da presidente, como das alunas, decidimos realizar a entrevista de maneira assíncrona, via aplicativo de mensagem *Whatsapp*. Então elaboramos um roteiro de entrevista com perguntas que abordaram vários aspectos do seu cargo, indo da formação profissional até como o conselho age na sociedade. A seguir poderemos conferir este roteiro na íntegra.

### **ROTEIRO DA ENTREVISTA:**

- 1.**Qual sua formação acadêmica e atuação profissional fora do Conselho?
- 2.**Qual é a principal função do Conselho de Educação?
- 3.**Como é feita a escolha dos membros? É realizada uma eleição ou é feita a indicação de candidatos?
- 4.**Há divulgação pública do processo eleitoral? Em caso afirmativo, qual o espaço?
- 5.**Existe envolvimento ativo dos conselheiros? Há assiduidade ou sobrecarga da presidência?
- 6.**As decisões são feitas por consenso ou votação? Há diversidade de posicionamentos políticos e pedagógicos?
- 7.**O Conselho tem autonomia para tomar decisões ou precisa seguir as diretrizes nacionais/estaduais?
- 8.**Como as decisões tomadas nesse espaço impactam a população?

9. Como você avalia a participação da comunidade nas decisões do Conselho e o impacto dessas decisões na educação local? Pode destacar exemplos de propostas da população que foram acatadas e resultaram em avanços concretos?
10. De que forma a sociedade civil pode participar das atividades do Conselho?
11. O Conselho atua com outros órgãos ou fóruns? Como se dá essa articulação?
12. Existe algum mecanismo para divulgar as decisões ou ações tomadas por esse conselho à população em geral?

Após as perguntas passarem pela avaliação do professor da disciplina enviamos através do aplicativo de mensagens *Whatsapp* para a presidente do CME. Em seguida aguardamos as respostas vinda da presidente para dar início a escrita do trabalho.

### **3 Resultados e Discussão**

A Constituição Federal de 1988, promulgada em 5 de outubro, inaugura um novo período na história democrática brasileira. Após o longo período de repressão e restrição dos direitos civis durante o regime militar (1964–1985), o novo contexto constitucional buscou resgatar e ampliar os espaços de participação popular, prevendo mecanismos institucionais que fortalecessem a democracia participativa. Um desses mecanismos foi a gestão democrática do ensino público, prevista no artigo 206, inciso VI, que determina que o ensino será ministrado com base na “gestão democrática do ensino público”, o que impulsionou a criação de conselhos municipais de Educação por todo o país.

De acordo com Décio Saes, no texto “A evolução da cidadania política no Brasil” (2001), esse momento representou o auge jurídico da cidadania política no Brasil, com a reestruturação das instituições democráticas, a legalização de partidos políticos e a tentativa de aprofundamento do controle social sobre o Estado. No entanto, como o próprio autor alerta, essa cidadania democrática, embora garantida formalmente, conviveu com limitações estruturais, como a influência crescente do capital financeiro e a resistência de setores dominantes a qualquer forma de redistribuição real de poder.

É importante destacar que a Constituição Federal de 1988, no Capítulo IV, que trata dos Municípios, em seu artigo 31, §1º e §4º, prevê a atuação dos conselhos como mecanismos de apoio ao controle externo exercido pela Câmara Municipal, reforçando, assim, a importância do CME na fiscalização e no fortalecimento da gestão democrática local. A fim de compreender melhor essa questão, a seguir detalharemos cada uma das questões presentes na entrevista realizada com a atual presidente de um Conselho Municipal de Educação (CME) da região Oeste do Paraná.

Na primeira pergunta, onde perguntou-se: “Qual sua formação acadêmica e atuação profissional fora do Conselho?”. A entrevistada relatou possuir formação em Pedagogia e especializações em Psicopedagogia e Educação Especial, além de uma trajetória na área educacional, com experiências como professora, coordenadora, diretora escolar e orientadora pedagógica.

Na segunda pergunta, onde perguntou-se: “Qual é a principal função do Conselho de Educação?”. A entrevistada explicou que o órgão possui funções normativas, consultivas, deliberativas e fiscalizadoras. Como função normativa, cabe ao Conselho elaborar regras que adaptam ao município as determinações das legislações federais e estaduais. No âmbito consultivo, o Conselho assessora o poder executivo municipal na formulação, implementação e avaliação de políticas públicas educacionais. Suas funções deliberativas envolvem a tomada de decisões sobre questões relevantes para a educação municipal, enquanto a função fiscalizadora refere-se ao acompanhamento da aplicação das políticas educacionais e ao cumprimento das leis e normas.

Na terceira pergunta, onde perguntou-se: “Como é feita a escolha dos membros? É realizada uma eleição ou é feita a indicação de candidatos?”. A presidente informou que os membros são indicados via ofício pelos segmentos representados, conforme previsto no Regimento Interno. A presidência e a vice-presidência são escolhidas por eleição, realizada em reunião ordinária do órgão, e posteriormente os nomes são encaminhados ao Poder Executivo para homologação e publicados no Diário Oficial do Município.

Ao ler este trecho podemos perceber que a forma de escolher os membros do conselho, é através de indicação dos segmentos representados, ou seja, não é feita uma eleição direta para eleger os membros do conselho. Benevides (1991) destaca que a democracia direta do Brasil é insuficiente, onde a participação popular ainda é restrita a espaços formais e controlados. O IPEA (2010) destaca que, mesmo após a Constituição de 1988, a democratização das decisões políticas segue mais representativa que participativa, e que os mecanismos de democracia direta (MDDs), como plebiscitos, referendos e conselhos, ainda não atingiram sua capacidade máxima de envolver a população de forma ativa.

Na quarta pergunta, onde perguntou-se: “Há divulgação pública do processo eleitoral? Em caso afirmativo, qual o espaço?”. A presidente informou que a publicidade dos atos do Conselho Municipal de Educação é garantida por meio de publicações no Órgão Oficial do Município e também por meio da página do CME no site do município.

O trecho mostra como é importante garantir que as decisões e ações do Conselho Municipal de Educação (CME) sejam divulgadas publicamente, conforme determina a Constituição Federal de 1988, em seu artigo 37, que estabelece a publicidade como um dos

princípios fundamentais da administração pública. Ao publicar suas informações no site oficial da prefeitura e no diário oficial do município, o CME assegura que a população tenha acesso às informações sobre as políticas educacionais, promovendo transparência e participação social.

Esse tipo de prática ajuda a fortalecer a democracia política, pois permite que as pessoas acompanhem, compreendam e até fiscalizem as ações do poder público. Isso é especialmente importante no caso da educação, que é reconhecida como um direito social no artigo 6º da Constituição. Ao garantir que os atos do CME sejam de conhecimento público, também se coloca em prática o princípio da gestão democrática do ensino público, previsto no artigo 206, inciso VI, da Constituição Federal.

Na quinta pergunta, onde perguntou-se: “Existe envolvimento ativo dos conselheiros? Há assiduidade ou sobrecarga da presidência?”. De acordo com a entrevistada, os membros participam ativamente das reuniões, justificando ausências quando necessário.

O envolvimento ativo dos conselheiros nas atividades do Conselho Municipal de Educação (CME), conforme relatado, demonstra um importante exercício de democracia participativa, pois revela que os membros estão comprometidos com o acompanhamento e a deliberação sobre as políticas públicas educacionais do município. Esse tipo de participação reflete os princípios constitucionais estabelecidos no artigo 206, inciso VI, da Constituição Federal de 1988, que trata da gestão democrática do ensino público. Além disso, também dialoga com o artigo 1º, parágrafo único, da mesma Constituição, que afirma que “todo o poder emana do povo, que o exerce por meio de representantes eleitos ou diretamente”. A atuação presente e responsável dos conselheiros contribui para a consolidação de um sistema educacional mais justo, transparente e alinhado com as necessidades da comunidade, fortalecendo assim a prática política enquanto ação coletiva voltada ao bem comum. Porém, cabe investigar, em que medida os conselheiros “dialogam” com o segmento que eles representam, afim de aproximar as decisões do representante dos interesses dos representados, como requer uma democracia ampliada.

Na sexta pergunta, onde perguntou-se: “As decisões são feitas por consenso ou votação? Há diversidade de posicionamentos políticos e pedagógicos?”. A entrevistada afirmou que as decisões são votadas e que, ocasionalmente, surgem divergências políticas e pedagógicas. Em caso de empate, o voto de desempate é da presidência.

O fato de as decisões do Conselho serem tomadas por votação e não apenas por consenso reflete um modelo democrático deliberativo, em que diferentes opiniões podem coexistir e ser debatidas. A existência de divergências políticas e pedagógicas é um sinal saudável de pluralismo, característica fundamental da democracia. Segundo documento do

IPEA (2010), na teoria democrática contemporânea, como a de Jürgen Habermas e Carole Pateman, o dissenso e o confronto de ideias são elementos centrais para a construção de decisões mais legítimas e representativas.

Na sétima pergunta, onde perguntou-se: “O Conselho tem autonomia para tomar decisões ou precisa seguir as diretrizes nacionais/estaduais?”. A presidente afirmou que o CME atua em consonância com as legislações estaduais e federais.

Segundo Grupi (2001) no texto “Tudo começou com Maquiavel”, o Estado moderno se distingue por sua autonomia e soberania, funcionando segundo suas próprias leis e lógica política, não dependendo da religião ou da moral tradicional. Nesse sentido, mesmo que haja certa autonomia no âmbito local, como no CME, ainda assim há subordinação à lógica estatal mais ampla.

Na oitava pergunta, onde perguntou-se: “Como as decisões tomadas nesse espaço impactam a população?”. A entrevistada pontuou que, ao definir e acompanhar as políticas educacionais do município, o órgão influencia diretamente a oferta de uma educação acessível, inclusiva e de qualidade. Ressaltou ainda que o Conselho é aberto à comunidade e considera suas demandas e opiniões como forma de aprimorar continuamente a educação ofertada.

Conforme o texto sobre “Mecanismos de Democracia Direta” (IPEA, 2010), a Constituição de 1988 prevê a participação direta da população na condução do Estado, por meio de conselhos gestores, como o CME. Esses espaços dão à população a chance de interferir nas políticas públicas, reforçando a legitimidade democrática do sistema.

Na nona pergunta, onde perguntou-se: “Como você avalia a participação da comunidade nas decisões do Conselho e o impacto dessas decisões na educação local? Pode destacar exemplos de propostas da população que foram acatadas e resultaram em avanços concretos?”. A presidente explicou que a comunidade está representada por membros das Associações de Pais e Mestres (APMs), os quais têm direito a voz e voto nas reuniões. Todas as demandas recebidas são analisadas e devidamente encaminhadas pelo colegiado.

No texto citado acima, destaca-se o modelo de democracia representativa, no qual os cidadãos elegem representantes para participar das discussões e deliberações. Esse modelo é observado na fala da presidente, ao afirmar que a comunidade participa por meio de seus representantes nas APMs. Porém não é um instrumento de democracia direta, uma vez que a comunidade não é consultada sobre as decisões.

Na décima pergunta, onde perguntou-se: “De que forma a sociedade civil pode participar das atividades do Conselho?”. A entrevistada informou que, atualmente, não há essa participação direta no conselho, somente através de representantes.

Ainda de acordo com o texto do IEPA, a participação direta da sociedade em decisões públicas, por meio de conselhos, conferências, consultas ou iniciativas populares, é fundamental para ampliar o controle social, fortalecer o vínculo entre Estado e sociedade e aumentar a responsividade das instituições às demandas da população. A limitação da participação da sociedade civil apenas à via representativa restringe o potencial de inclusão cidadã e pode enfraquecer a legitimidade das decisões políticas tomadas no conselho.

Assim, do ponto de vista constitucional, político e democrático, o ideal seria combinar os dois modelos, representativo e participativo, como forma de garantir maior pluralidade, transparência e justiça social nas políticas públicas educacionais.

Na décima primeira pergunta, onde perguntou-se: “O Conselho atua com outros órgãos ou fóruns? Como se dá essa articulação?”. A entrevistada esclareceu que o CME integra o Sistema Municipal de Ensino, juntamente com a Secretaria Municipal da Educação, o Conselho do FUNDEB, o Conselho de Alimentação Escolar, além das instituições de ensino mantidas pelo poder público e pela iniciativa privada. Todos esses órgãos atuam de forma articulada.

No campo da política educacional, essa articulação entre diferentes conselhos e órgãos também se conecta aos debates sobre democracia participativa discutidos no texto “Mecanismos de Democracia Direta”. Mesmo não sendo MDDs clássicos (como referendo ou plebiscito), os conselhos gestores são instrumentos de participação institucionalizada da sociedade civil na formulação das políticas, funcionando como canais de *accountability* e de aproximação entre o Estado e os cidadãos.

Portanto, essa integração entre órgãos públicos e conselhos fortalece a democracia local, amplia a transparência das decisões políticas e contribui para uma educação pública mais justa, inclusiva e socialmente comprometida.

Por fim, na décima segunda pergunta, onde perguntou-se: “Existe algum mecanismo para divulgar as decisões ou ações tomadas por esse conselho à população em geral?”. A presidente informou que as decisões e atividades do Conselho são divulgadas por meio do órgão oficial do município e pela página do CME no site do município.

A Constituição Federal de 1988 estabelece que a administração pública deve seguir princípios como agir dentro da lei, com ética, transparência e eficiência. Dentre esses princípios, a publicidade, ou seja, tornar as ações públicas visíveis e acessíveis à população é essencial para garantir que todos possam saber o que está sendo feito com os recursos

públicos e quais decisões estão sendo tomadas. Quando o Conselho Municipal de Educação divulga suas ações de forma clara e acessível, ele contribui para que a comunidade acompanhe, compreenda e até participe mais ativamente das políticas educacionais. Isso fortalece o controle social e valoriza a cidadania, permitindo que as pessoas se sintam parte das decisões que afetam sua realidade.

#### **4 Considerações Finais**

Com este trabalho, foi possível compreender melhor como funcionam, na prática, os mecanismos legais de participação social no Brasil, especialmente por meio do estudo do Conselho Municipal de Educação (CME). A entrevista com a presidente do CME ajudou a visualizar como os conselhos atuam no cotidiano da gestão pública e como estão relacionados com o que aprendemos sobre democracia e cidadania.

Apesar de o CME ser um espaço importante de deliberação e fiscalização das políticas educacionais, e estar previsto na Constituição de 1988 como parte da gestão democrática do ensino, percebemos que ainda existem muitas limitações. Um exemplo disso é que os conselheiros não são escolhidos por meio de eleição direta pela população, o que mostra que a participação ainda é mais representativa do que realmente participativa.

Além disso, mesmo que as decisões sejam tomadas por votação e que haja debates dentro do conselho, ainda faltam canais de escuta e participação direta da sociedade. A divulgação das ações do CME também acontece de forma mais institucional, sem chegar efetivamente à maioria da população. Isso mostra que ainda temos que tornar esses espaços mais abertos e acessíveis.

De forma geral, esse estudo nos permitiu refletir sobre como os conselhos, apesar de serem avanços importantes no fortalecimento da democracia, ainda precisam melhorar muito para garantir uma participação social mais ampla e inclusiva. É necessário que o Estado incentive formas mais diretas de envolvimento da população e que a sociedade também se sinta parte do processo de tomada de decisões.

#### **REFERÊNCIAS**

**BRASIL.** Constituição da República Federativa do Brasil de 1988 – compilado. Presidência da República. Casa Civil. Disponível em: [https://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/constituicao/constituicaocompilado.htm](https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm). Acesso em: 23 jun. 2025.

GRUPPI, Luciano. **Tudo começou com Maquiavel:** as concepções de estado em Marx, Engels, Lenin e Gramsci. 15. ed. Porto Alegre: L&PM, 1998. 93 p. ISBN 8525405000.

INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA (IPEA). Mecanismos de democracia direta e seus usos: 1988–2008. In: SILVA, Fabio de Sá e; LOPEZ, Felix Garcia; PIRES, Roberto Rocha C. (org.). **Estado, instituições e democracia: democracia**. Brasília: IPEA, 2010. v. 2, p. 229–252. (Série Eixos Estratégicos do Desenvolvimento Brasileiro; Livro 9).

SAES, Decio A. M de. A questão da evolução da cidadania política no Brasil. **Estudos Avançados**, v. 15, n. 42, p. 379–410, maio 2001.

## **UTILIZAÇÃO DO JOGO BINGO DAS FRAÇÕES: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO II**

Rayanna Kamila Bilatto

Universidade Tecnológica Federal do

Paraná

rayannabilatto33@outlook.com

Milena da Silva Ribeiro

Universidade Tecnológica Federal do

Paraná

### **Resumo**

Este trabalho apresenta um relato de experiência realizado durante o Estágio Supervisionado na Educação Básica II, a respeito da aplicação de um jogo nomeado “Bingo das frações”, com o intuito de reforçar as quatro operações básicas com frações. A atividade foi realizada com duas turmas de 7º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública, no estado do Paraná. Os resultados da experiência revelaram uma participação ativa dos alunos, que demonstraram entusiasmo e engajamento ao longo da atividade. Concluímos, que a inserção do lúdico no ensino de operações com frações mostrou ser uma prática eficiente, devendo ser mais rotineira na escola.

**Palavras-chave:** Ensino lúdico de frações. Ensino de Matemática. Operações com Frações.

### **1 Introdução**

Frequentemente observa-se que os alunos não demonstram interesse pelas aulas de matemática, o que acaba dificultando o processo de aprendizagem. Essa falta de motivação leva os professores a refletirem sobre como tornar as aulas mais atrativas, de modo a incentivar os estudantes a aprenderem com mais disposição. Uma das estratégias para alcançar esse objetivo é o uso de atividades lúdicas, que tornam o conteúdo mais leve e dinâmico, favorecendo a participação dos alunos e possibilitando uma aprendizagem mais prazerosa.

De acordo com Melo e Lima (2022), o uso de jogos em sala de aula motiva os estudantes, desperta o interesse e torna a aprendizagem mais atrativa e significativa, colocando o aluno como sujeito ativo no processo de aprendizagem, diferentemente das aulas tradicionais, e sendo um recurso pedagógico importante para o ensino da Matemática. Nessa mesma perspectiva, Braga e Lima (2020) destacam que o “Bingo das Frações” apresenta-se como uma estratégia que alia ludicidade e resolução de problemas, permitindo que os estudantes consolidem conceitos matemáticos a partir de situações desafiadoras, mas em um ambiente interativo e motivador. Além disso, estudos indicam que atividades lúdicas facilitam

a aprendizagem de frações, tornando o conteúdo mais acessível e estimulando o engajamento dos alunos (Cordeiro et al., 2017).

Partindo dessas ideias, o presente trabalho tem como objetivo relatar a experiência com o uso do “Bingo das Frações”, vivenciada por um dos autores na disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica II, oferecida pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). A proposta buscou articular teoria e prática, demonstrando como o jogo pode ser utilizado como uma estratégia didática dinâmica, capaz de promover maior envolvimento dos alunos e reforçar o aprendizado das operações com frações, de forma competitiva e divertida.

## 2 Metodologia

Este trabalho apresenta a aplicação de uma ferramenta didática desenvolvida durante o Estágio Supervisionado II por um dos autores, realizada em uma escola pública do estado do Paraná. A proposta consistiu no desenvolvimento e na aplicação de um jogo denominado “Bingo das Frações”, com o objetivo de reforçar, de forma lúdica e participativa, os conteúdos relacionados às operações com frações.

A regência foi composta por seis horas - aula em cada turma. Nas cinco primeiras, foram abordadas as operações com frações: multiplicação, divisão, adição e subtração com denominadores iguais e diferentes. Na sexta e última aula, ocorreu a aplicação do jogo, utilizado como complemento às estratégias tradicionais de ensino.

Participaram da atividade duas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental (turmas B e C), contendo aproximadamente 30 alunos em cada sala. Para a realização do jogo, a turma foi organizada em duplas, sendo que cada dupla recebeu uma cartela impressa do bingo. Ressalta-se que todas as cartelas eram diferentes entre si (conforme ilustrado na figura 1).

| BINGO |      |                                                                                     |      |       |
|-------|------|-------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|
| 1/12  | 3/10 | 5/9                                                                                 | 7/9  | 11/30 |
| 1/6   | 3/40 | 5/18                                                                                | 7/4  | 13/18 |
| 2/9   | 3/14 |  | 7/20 | 15/10 |
| 2/21  | 3/2  | 6/5                                                                                 | 7/12 | 40/30 |
| 2/6   | 5/12 | 6/6                                                                                 | 9/8  | 41/70 |

**Figura 1** - Exemplo de cartela do jogo.

**Fonte:** Autores, 2025.

O jogo foi conduzido pelo estagiário, que sorteou perguntas envolvendo cálculos com frações (conforme ilustrados nas figuras 2A e 2B). As duplas deveriam resolver cada questão em seus cadernos e, ao encontrar a resposta correta, verificar se o resultado estava presente em sua cartela. Caso o número estivesse presente, ele era marcado com um feijão.

|                              |                                  |                                  |                                  |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  | $\frac{3}{5} - \frac{1}{5}$      | $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$      | $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$      |
| $\frac{3}{8} + \frac{1}{6}$  | $\frac{4}{9} - \frac{1}{6}$      | $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{7} \div 2$             | $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ |
| $\frac{2}{5} + \frac{1}{10}$ | $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$      | $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$      | $\frac{5}{6} \div 2$             | $\frac{3}{10} + \frac{2}{7}$     |
| $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  | $\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$ | $\frac{3}{4} + 1$                | $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$   | $\frac{9}{3} \div \frac{5}{7}$   |
| $-\frac{1}{4}$               |                                  |                                  |                                  |                                  |
| $\frac{1}{6} + \frac{1}{5}$  | $\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$      | $\frac{2}{3} \div 4$             | $\frac{1}{3} \times \frac{2}{7}$ | $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$   |

**Figura 2A** - Perguntas do jogo.

Fonte: Autores, 2025.

|                                   |                              |                                  |                                  |                                  |
|-----------------------------------|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$  | $\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$  | $\frac{3}{7} \times \frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9} + \frac{1}{9}$      | $3 \div \frac{2}{3}$             |
| $\times \frac{1}{4}$              | $+\frac{3}{8}$               |                                  |                                  |                                  |
| $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$       | $\frac{5}{12} + \frac{1}{3}$ | $\frac{7}{10} - \frac{2}{5}$     | $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$ | $\frac{5}{6} \div \frac{5}{8}$   |
| $\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}$ | $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$  | $\frac{5}{9} + \frac{1}{6}$      | $\frac{2}{7} \times \frac{4}{9}$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$      |
|                                   |                              |                                  | $+\frac{1}{2}$                   |                                  |
| $\frac{3}{10} \div \frac{1}{5}$   | $\frac{7}{8} - \frac{1}{4}$  | $\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$      | $\frac{1}{3} \div 2$             | $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ |
| $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$       | $\frac{3}{5} \times 2$       | $\frac{4}{6} + \frac{1}{3}$      | $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$      | $\frac{1}{4} + \frac{2}{16}$     |

**Figura 2B** - Perguntas do jogo.

Fonte: Autores, 2025.

Foram estabelecidas cinco formas de vitória: linha, coluna, diagonal, quatro cantos e cartela cheia. Quando uma dupla completava uma dessas combinações e gritava “Bingo”, o estagiário conferia as respostas da cartela e os cálculos realizados para validar o resultado. A partir desse momento, a forma de vitória utilizada era retirada das opções para as rodadas seguintes.

Para estimular a participação, os vencedores recebiam um chocolate como premiação. Em caso de empate, quando duas duplas completavam a mesma combinação simultaneamente, os participantes lançavam um dado, e o maior número definia o ganhador da rodada.

### 3 Resultados e Discussão

A aplicação do jogo “Bingo das Frações” ocorreu nas duas turmas do 7º ano (B e C) e apresentou resultados positivos quanto ao engajamento e à aprendizagem dos alunos. Durante a atividade, foi possível observar que os estudantes demonstraram entusiasmo e interesse em participar. O clima em sala era de descontração e cooperação entre as duplas,

com muitos alunos expressando alegria, enquanto realizavam os cálculos e aguardavam os sorteios.

Durante a realização da atividade, notou-se que os alunos não apresentavam dificuldades em realizar operações de multiplicação, divisão, adição e subtração de frações quando os denominadores eram iguais. No entanto, ao lidar com soma e subtração de frações com denominadores diferentes, alguns alunos demonstraram maior dificuldade, uma vez que esses cálculos exigem aplicação do mínimo múltiplo comum (MMC), conteúdo que havia sido retomado nas aulas anteriores.

De modo geral, as respostas apresentadas foram, em sua maioria, corretas, o que reforça a efetividade das aulas anteriores no aprendizado das operações com frações. O jogo mostrou-se, assim, uma estratégia para revisar os conteúdos trabalhados.

Ao final da atividade, muitos alunos manifestaram interesse em repetir a experiência, pedindo que o jogo fosse aplicado novamente em outras aulas.

Por se tratar de apenas uma aula destinada ao jogo, não foi possível explorar todas as possibilidades de jogadas previstas (linha, coluna, diagonal, quatro cantos e cartela cheia). A partida foi conduzida até o encerramento do tempo disponível, o que limitou o número de rodadas realizadas.

#### **4 Considerações Finais**

A aplicação do jogo “Bingo das Frações” durante o Estágio Supervisionado na Educação Básica II proporcionou um momento descontraído, ao mesmo tempo em que permitiu aos alunos colocar em prática os conhecimentos trabalhados nas aulas anteriores. Essa experiência mostrou que é possível unir aprendizagem e ludicidade em uma mesma atividade.

Durante a aplicação, observou-se que os alunos apresentaram maior dificuldade com frações de denominadores diferentes, ressaltando a importância de reforçar esses conceitos em aulas futuras. Entretanto, os resultados indicaram que a competitividade e a interação entre os estudantes favoreceram a motivação e o interesse, promovendo um ambiente leve e colaborativo de aprendizagem. Esse clima contribuiu significativamente para os resultados satisfatórios, tanto na predominância de respostas corretas, quanto no entusiasmo dos alunos e no pedido de repetição da atividade.

Por fim, entende-se que a utilização de jogos didáticos, como o “Bingo das Frações”, se configura como uma estratégia pedagógica eficaz no ensino de matemática, proporcionando aos alunos uma aprendizagem mais prazerosa. É fundamental que os

educadores considerem a integração de recursos semelhantes em suas práticas pedagógicas, adaptando-os às necessidades de cada disciplina.

## REFERÊNCIAS

CORDEIRO, Natália Moraes; GUIMARÃES, Jonnathan Felipe Araújo; NUNES, José Edvaldo de Oliveira. Ensino de frações: o uso de atividades lúdicas como recurso facilitador da aprendizagem. In: **Anais do IV Congresso Nacional de Educação. Campina Grande. 2017.** p. 1-6.

BRAGA, Eduardo dos Santos de Oliveira; LIMA, Valéria da Silva. O Bingo das Frações Sob a Ótica da Resolução de Problemas. **Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar**, v. 6, n. 16, 2020.

MELO, Claudiano Henrique da Cunha; LIMA, Claudiney Nunes de. A importância dos jogos no ensino de Matemática no Ensino Fundamental II. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 22, nº 39, 18 de outubro de 2022. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii>. Acesso em: 27 out. 2025.

---

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO DE ROSA-DO-DESRTO  
(ADENIUM OBESUM): UMA ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS MODELOS DE  
MALTHUS, VERHULST, GOMPERTZ E MONTROLL**

Glaucia Eduarda Mariussi Hoffmann  
Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

glauciamariussi@gmail.com

Sabrina Rossetto Zanette

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

Amanda Ribeiro Ramalho

Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná

**Resumo**

Este estudo teve como objetivo analisar o crescimento de rosas-do-deserto (*Adenium obesum*) utilizando quatro modelos matemáticos: Malthus (exponencial), Verhulst (logístico), Gompertz e Montroll. A metodologia consistiu no monitoramento semanal da altura de 14 plantas ao longo de 26 semanas, em condições controladas de cultivo, sem aplicação de fertilizantes. Os dados coletados foram ajustados aos modelos por meio de regressão não-linear e métodos de mínimos quadrados, com auxílio de ferramentas computacionais como Python e Excel. A análise comparativa dos resultados, baseada no erro quadrático médio (RMSE) mostrou que o modelo de Malthus, por não considerar limitações ambientais, apresentou o pior desempenho. Em contraste, Verhulst e Montroll destacaram-se pelo melhor ajuste, enquanto Gompertz mostrou leve subestimação nas alturas finais. Concluiu-se que modelos que incorporam restrições ambientais são mais adequados para descrever processos biológicos limitados. O trabalho reforça a importância da seleção criteriosa de modelos matemáticos e sugere futuras investigações sobre a influência de variáveis como nutrição e clima para aprimorar a modelagem.

**Palavras-chave:** Crescimento vegetal. Erro quadrático médio (RMSE). Otimização de parâmetros. Limitações ambientais.

**1 Introdução**

A modelagem matemática configura-se como uma ferramenta fundamental na análise, interpretação e previsão de fenômenos complexos, sendo amplamente empregada em distintas áreas do conhecimento, como a biologia, a economia, a epidemiologia e as ciências sociais. O uso de modelos matemáticos para descrever fenômenos do mundo real é uma prática consolidada em diversas áreas do conhecimento, especialmente quando se trata de processos de crescimento biológico. Plantas, organismos e populações, ao longo do tempo, apresentam padrões de desenvolvimento que podem ser representados por equações matemáticas, permitindo não apenas a compreensão de seu comportamento, mas também a previsão e o controle de variáveis envolvidas no processo.

A planta *Adenium obesum*, conhecida no Brasil como rosa-do-deserto, é uma planta nativa de regiões áridas, pertence à família Apocynaceae e é apreciada pela exuberância de suas flores e pelas formas esculturais do seu caule (NUNES E PEREIRA, 2021), é uma planta arbustiva, com caule espesso e base dilatada. Sua altura pode chegar até 4 metros, e as flores se compõem de misturas de cores vibrantes e sua produção pode ocorrer durante a maior parte do ano.

Neste contexto, a Rosa-do-Deserto se destaca como um objeto interessante para a aplicação de modelos de crescimento. Nativa da Arábia e África, essa planta suculenta, que se tornou um ornamento, apresenta um crescimento inicial acelerado seguido por uma estabilização à medida que atinge a maturidade. Sua capacidade de armazenar água em seu caule engrossado e sua adaptação a condições extremas fazem com que seu crescimento seja influenciado por fatores ambientais e fisiológicos (PEÇANHA et al., 2020), tornando-a um caso relevante para análise por meio de modelos matemáticos que descrevem dinâmicas de crescimento limitado.

Neste trabalho foram estudados quatro modelos de crescimentos: de Malthus, de Verhulst, de Montroll e o de Gompertz. No contexto da modelagem de processos de crescimento, destacam-se, entre os modelos mais recorrentes na literatura, o modelo de Gompertz e o modelo de Montroll. Ambos se revelam eficazes na representação de sistemas que apresentam crescimento limitado, distinguindo-se, entretanto, por suas formulações matemáticas específicas e pelas diferentes interpretações atribuídas aos seus parâmetros.

O modelo de Malthus, formulado no final do século XVIII, por Thomas Robert Malthus é um modelo de crescimento populacional que descreve o crescimento de forma exponencial. Esse modelo considera que o crescimento populacional ocorre de forma proporcional à quantidade de indivíduos presentes em determinado momento. Dessa maneira, a população cresce sem enfrentar qualquer tipo de limitação, idealizando um cenário onde não existem fatores inibidores como fome, guerras, doenças ou desastres, e onde todos os indivíduos são iguais entre si, possuindo comportamentos semelhantes. (NASCIMENTO, 2012)

Proposto pelo matemático belga Pierre-François Verhulst em 1838, o modelo que carrega seu nome, leva em consideração o crescimento inicial de uma população, quando existem fatores que interferem no crescimento populacional, isso ocorre quando investigamos casos mais realísticos (NASCIMENTO, 2012). Tal modelo é também conhecido como modelo Logístico.

O modelo de Montroll, é um modelo matemático, utilizado inicialmente para descrever o crescimento populacional, considerando um crescimento relativo não linear. Esse modelo, proposto por Elliott Montroll no ano de 1971, pode ser visto como uma generalização dos outros modelos matemáticos (SILVA E CARDOSO, 2011) como forma de modelar o crescimento assintótico de uma variável, o modelo conta que o ponto máximo de crescimento pode ocorrer em qualquer valor entre  $P_0$  e  $P_\infty$ .

O modelo de Gompertz, desenvolvido em 1825 pelo matemático Benjamin Gompertz, é muito utilizado para descrever o crescimento limitado de um sistema, como por exemplo o crescimento celular de um tumor. Gompertz utiliza uma taxa de inibição da variável, que é proporcional ao logaritmo da variável, significa que o crescimento é grande no início da aplicação, mas muda rapidamente para um crescimento mais lento (NASCIMENTO, 2012).

O objetivo deste trabalho é observar o crescimento de rosas-do-deserto (*Adenium Obesum*) através dos comportamentos dos modelos Malthus, Verhulst, Montroll e Gompertz. A partir disso, busca-se analisar como esses modelos podem ser aplicados de forma complementar em fenômenos reais, como o crescimento de plantas.

## 2 Metodologia

Este estudo foi desenvolvido a partir da observação do crescimento de rosas-do-deserto (*Adenium obesum*) cultivadas em vasos individuais, sem aplicação de adubo ou fertilizante, com o objetivo de verificar o comportamento de crescimento natural da planta e a adequação de diferentes modelos matemáticos para descrevê-lo.

As plantas foram monitoradas semanalmente, durante um período de aproximadamente seis meses, compreendendo o intervalo entre novembro de 2023 e maio de 2024. As medições consistiram na altura de cada planta (em centímetros), coletada manualmente com régua, sempre nas mesmas condições de ambiente, iluminação e irrigação controlada. O conjunto de dados resultante reflete o desenvolvimento de múltiplos exemplares, registrados ao longo de 26 semanas.

Para a análise matemática, optou-se por aplicar dois modelos de crescimento amplamente utilizados em estudos biológicos: o modelo de Gompertz e o modelo de Montroll. Ambos são adequados para descrever processos de crescimento limitados por fatores ambientais, que apresentam comportamento sigmoidal e ponto de inflexão característico. Além disso, para fins comparativos e de contextualização teórica, também são considerados o modelo de Malthus, que descreve um crescimento populacional exponencial ilimitado em um ambiente idealizado, e o modelo de Verhulst (ou modelo logístico), que introduz a noção de capacidade de suporte ambiental, resultando também em

uma curva sigmoide, porém com crescimento desacelerado à medida que a população se aproxima de seu limite máximo.

A partir dos dados coletados, foi realizada a aplicação dos mesmos em cada modelo, buscando qual descreve melhor o crescimento real observado. Os parâmetros foram obtidos por meio de técnicas de regressão não-linear, utilizando o método dos mínimos quadrados. Como ferramenta de apoio para os cálculos e geração de gráficos, foi empregado software de análise estatística e matemática, com destaque para o uso do Excel e linguagens de programação como Python, que oferecem recursos adequados para ajuste de modelos não-lineares.

Por fim, foi realizada uma comparação entre os resultados obtidos com cada modelo, considerando indicadores estatísticos como o erro quadrático médio (RMSE). Com isso, pretende-se identificar qual dos modelos estudados apresenta melhor desempenho na descrição do comportamento de crescimento das rosas-do-deserto neste cenário experimental.

### 3 Os Modelos

O modelo de Malthus é dado pela equação:  $P(t) = P_0 \cdot e^{rt}$

Onde:

- $P(t)$  é a população no tempo  $t$ ;
- $P_0$  é a população inicial no tempo  $t = 0$ ;
- $r$  é a taxa de crescimento;
- $e$  é a base do logaritmo natural;
- $t$  é o tempo;

Para o modelo de Verhulst, é dada a equação:

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \text{ onde } A = \frac{K - P_0}{P_0}$$

- $P(t)$  é a população no tempo  $t$ ;
- $P_0$  é a população inicial ( $t = 0$ );
- $K$  é a capacidade de suporte do ambiente;
- $r$  é taxa de crescimento;
- $e$  é a base do logaritmo natural;
- $t$  é o tempo;

O modelo de Gompertz, é dado pela equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = b \cdot \ln\left(\frac{x_{\infty}}{x(t)}\right) \cdot x(t) ;$$

Onde: a taxa de crescimento de  $x(t)$  é proporcional ao valor atual de  $x(t)$  e ao logaritmo da razão entre a capacidade de suporte  $x_{\infty}$  e o valor atual de  $x(t)$ . Esse termo logarítmico faz com que o crescimento diminua com o tempo.

O modelo de Montroll, dado pela equação diferencial, é baseado em uma modificação logística na variável de tempo  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = b \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{x_{\infty}}\right) \cdot \theta(t)$$

Onde:  $x(t)$  é a variável dependente;  $x_{\infty}$  é a capacidade de suporte;  $b$  é o parâmetro de crescimento;  $\theta(t)$  é a função de salto.

#### **4 Resultados e Discussão**

A partir dos dados de crescimento das rosas-do-deserto, foi possível ajustar os modelos. O Quadro 1 apresenta os dados reais da altura de 14 plantas em cada semana, e, o Quadro 2 mostra a comparação conjunta entre os dados reais e as curvas geradas pelos quatro modelos utilizando as alturas médias semanais.

**Quadro 1:** Dados coletados sobre o crescimento de rosas-do-deserto

| PLANTA     | 9    | 10  | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 19   | 20   | 21   | 22   | 23   |
|------------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| DATA       | h    | h   | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    | h    |
| 19/11/2023 | 6,5  | 4,6 | 4,5  | 5,0  | 5,9  | 5,9  | 4,7  | 6,7  | 5,0  | 6,1  | 5,2  | 6,1  | 5,9  | 4,7  |
| 25/11/2023 | 7,1  | 4,5 | 6,5  | 5,0  | 6,5  | 6,0  | 5,9  | 6,7  | 5,7  | 6,3  | 5,8  | 6,7  | 6,5  | 5,2  |
| 03/12/2023 | 7,1  | 4,8 | 6,8  | 4,9  | 5,8  | 6,0  | 4,9  | 7,7  | 6,7  | 6,8  | 5,7  | 6,3  | 6,7  | 5,3  |
| 10/12/2023 | 7,9  | 5,2 | 7,4  | 5,5  | 7,2  | 6,0  | 5,8  | 7,8  | 8,0  | 6,9  | 5,7  | 8,0  | 8,4  | 6,1  |
| 17/12/2023 | 8,5  | 5,0 | 8,0  | 5,3  | 6,9  | 6,0  | 5,5  | 8,8  | 8,4  | 8,4  | 6,5  | 8,3  | 9,0  | 6,5  |
| 24/12/2023 | 8,0  | 5,3 | 7,6  | 5,3  | 7,5  | 6,4  | 6,0  | 9,7  | 9,3  | 7,7  | 7,1  | 9,3  | 10,3 | 6,5  |
| 31/12/2023 | 8,2  | 6,0 | 8,8  | 5,7  | 8,7  | 7,5  | 6,4  | 11,3 | 11,2 | 8,6  | 9,0  | 10,6 | 11,2 | 8,1  |
| 07/01/2024 | 8,4  | 5,8 | 8,7  | 6,6  | 9,3  | 7,9  | 7,4  | 12,2 | 11,8 | 8,9  | 8,7  | 11,8 | 11,0 | 7,9  |
| 14/01/2024 | 8,4  | 6,5 | 8,7  | 7,0  | 9,8  | 8,3  | 7,3  | 13,5 | 12,4 | 9,0  | 9,0  | 12,5 | 11,7 | 8,8  |
| 21/01/2024 | 9,2  | 7,0 | 10,0 | 7,4  | 9,8  | 7,9  | 8,7  | 14,8 | 12,6 | 9,2  | 19,5 | 13,0 | 11,7 | 8,9  |
| 28/01/2024 | 9,6  | 7,7 | 10,2 | 7,7  | 10,6 | 8,6  | 9,4  | 16,0 | 13,1 | 9,7  | 10,1 | 12,9 | 12,2 | 9,0  |
| 04/02/2024 | 10,1 | 7,5 | 10,1 | 8,0  | 10,8 | 9,3  | 9,4  | 15,7 | 13,6 | 9,6  | 9,3  | 12,3 | 11,9 | 9,3  |
| 11/02/2024 | 9,4  | 7,7 | 11,3 | 8,1  | 11,0 | 9,3  | 9,5  | 16,4 | 13,8 | 10,1 | 10,8 | 13,6 | 13,5 | 9,6  |
| 18/02/2024 | 9,8  | 7,7 | 11,0 | 7,8  | 10,4 | 9,5  | 9,5  | 16,7 | 13,5 | 10,5 | 10,5 | 13,6 | 13,4 | 10,3 |
| 25/02/2024 | 10,1 | 7,8 | 10,5 | 11,6 | 10,4 | 9,8  | 10,0 | 16,5 | 13,9 | 8,5  | 10,8 | 12,4 | 13,8 | 9,3  |
| 03/03/2024 | 9,5  | 8,2 | 11,8 | 8,3  | 10,3 | 11,1 | 10,2 | 17,6 | 14,5 | 10,6 | 10,9 | 14,4 | 13,9 | 10,1 |
| 10/03/2024 | 9,5  | 8,3 | 11,9 | 8,8  | 10,7 | 9,0  | 9,9  | 17,3 | 14,1 | 11,0 | 10,8 | 13,8 | 14,5 | 9,8  |
| 17/03/2024 | 10,0 | 9,3 | 12,1 | 8,9  | 11,5 | 10,7 | 10,5 | 17,1 | 14,6 | 11,1 | 11,6 | 14,3 | 15,1 | 10,6 |
| 24/03/2024 | 10,4 | 8,6 | 12,0 | 8,6  | 10,4 | 10,4 | 11,1 | 18,0 | 14,7 | 11,5 | 12,0 | 15,2 | 15,4 | 10,0 |
| 01/04/2024 | 10,2 | 8,8 | 12,1 | 8,7  | 10,5 | 10,7 | 11,0 | 17,8 | 15,0 | 10,9 | 11,9 | 15,4 | 14,6 | 10,3 |
| 07/04/2024 | 10,5 | 8,6 | 12,0 | 9,0  | 10,3 | 10,7 | 10,7 | 17,3 | 15,1 | 11,3 | 12,0 | 14,9 | 15,4 | 10,9 |
| 14/04/2024 | 10,2 | 9,2 | 12,6 | 9,4  | 10,8 | 10,6 | 10,4 | 17,8 | 15,5 | 11,8 | 12,2 | 15,5 | 16,4 | 11,0 |
| 21/04/2024 | 10,0 | 9,6 | 12,3 | 9,2  | 10,3 | 11,0 | 10,5 | 17,9 | 16,2 | 11,7 | 12,1 | 16,4 | 15,4 | 10,9 |
| 29/04/2024 | 10,3 | 9,9 | 13,2 | 10,5 | 10,4 | 11,3 | 11,8 | 18,2 | 17,1 | 11,9 | 12,8 | 16,4 | 16,3 | 10,7 |
| 05/05/2024 | 10,5 | 9,6 | 12,0 | 10,1 | 10,5 | 10,6 | 11,5 | 18,3 | 16,5 | 11,8 | 12,8 | 16,4 | 15,1 | 11,4 |
| 11/05/2024 | 10,4 | 9,8 | 12,5 | 9,4  | 10,1 | 11,0 | 11,4 | 18,1 | 16,1 | 11,7 | 12,7 | 16,4 | 15,6 | 11,0 |

Fonte: Autor, 2025

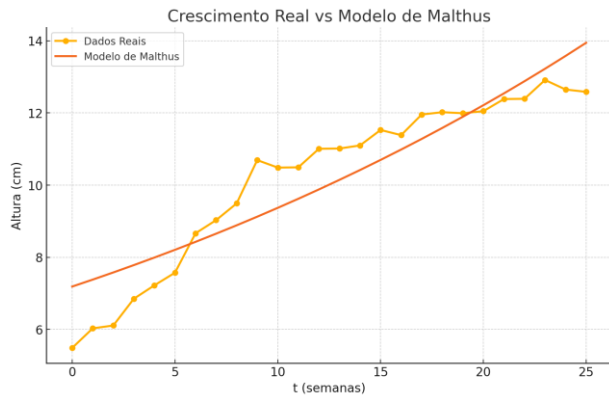
**Quadro 2:** Comparação conjunta entre os dados reais e as curvas geradas.

| Semana (t) | Dados Reais | Malthus | Verhulst | Gompertz | Montroll |
|------------|-------------|---------|----------|----------|----------|
| 0          | 5,4857      | 7,187   | 5,2736   | 5,1534   | 5,2718   |
| 1          | 6,0286      | 7,3801  | 5,8211   | 5,7838   | 5,8203   |
| 2          | 6,1071      | 7,5784  | 6,3772   | 6,3993   | 6,3773   |
| 3          | 6,85        | 7,7821  | 6,9337   | 6,9925   | 6,9344   |
| 4          | 7,2214      | 7,9912  | 7,4822   | 7,5574   | 7,4832   |
| 5          | 7,5714      | 8,206   | 8,0148   | 8,0899   | 8,0159   |
| 6          | 8,6643      | 8,4265  | 8,5246   | 8,5873   | 8,5255   |
| 7          | 9,0286      | 8,653   | 9,0058   | 9,0484   | 9,0064   |
| 8          | 9,4929      | 8,8855  | 9,454    | 9,4728   | 9,4544   |
| 9          | 10,6929     | 9,1243  | 9,8666   | 9,8611   | 9,8666   |
| 10         | 10,4857     | 9,3695  | 10,2421  | 10,2144  | 10,2418  |
| 11         | 10,4929     | 9,6213  | 10,5804  | 10,5345  | 10,5798  |
| 12         | 11,0071     | 9,8799  | 10,8823  | 10,8233  | 10,8815  |
| 13         | 11,0143     | 10,1454 | 11,1496  | 11,0829  | 11,1486  |
| 14         | 11,1        | 10,4181 | 11,3845  | 11,3156  | 11,3835  |
| 15         | 11,5286     | 10,698  | 11,5896  | 11,5235  | 11,5887  |
| 16         | 11,3857     | 10,9855 | 11,7677  | 11,7088  | 11,7669  |
| 17         | 11,9571     | 11,2808 | 11,9217  | 11,8737  | 11,921   |
| 18         | 12,0214     | 11,5839 | 12,0541  | 12,0201  | 12,0536  |
| 19         | 11,9929     | 11,8952 | 12,1676  | 12,1499  | 12,1674  |
| 20         | 12,05       | 12,2149 | 12,2647  | 12,2648  | 12,2648  |
| 21         | 12,3857     | 12,5432 | 12,3475  | 12,3665  | 12,3478  |
| 22         | 12,3929     | 12,8803 | 12,4178  | 12,4562  | 12,4184  |
| 23         | 12,9143     | 13,2264 | 12,4776  | 12,5354  | 12,4784  |
| 24         | 12,65       | 13,5819 | 12,5282  | 12,6052  | 12,5293  |
| 25         | 12,5857     | 13,9469 | 12,5711  | 12,6667  | 12,5725  |

**Fonte:** Autor, 2025

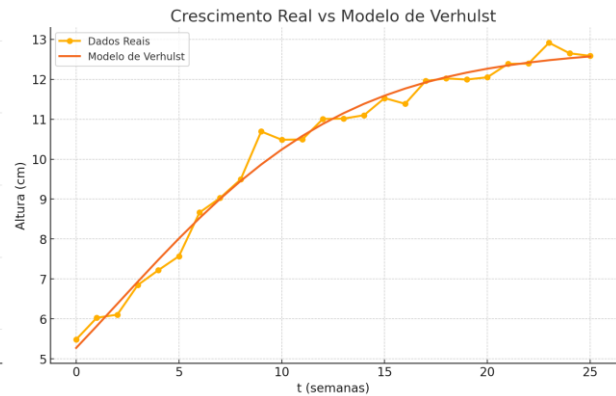
A partir dos valores obtidos em cada modelo, as Figuras 1, 2, 3 e 4 mostram as comparações individuais entre os dados reais e cada um dos modelos ajustados enquanto a Figura 5 em um único gráfico traz os dois modelos em comparação com os dados reais.

**Figura 1**



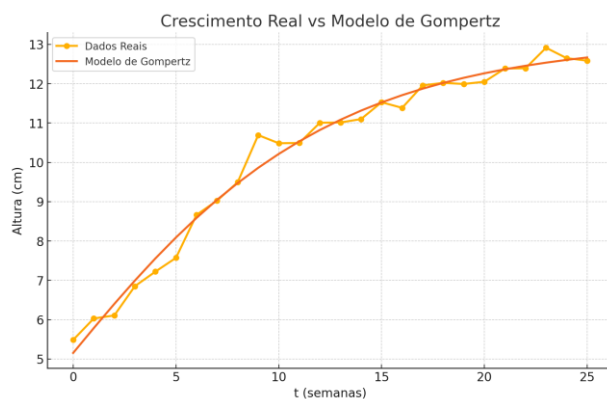
Fonte: Autores (2025)

**Figura 2**



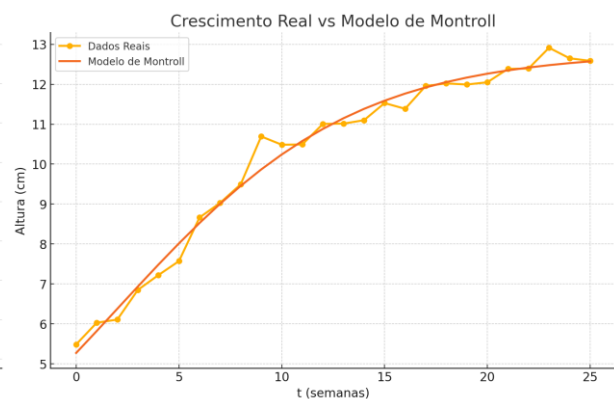
Fonte: Autores (2025)

**Figura 3**



Fonte: Autores (2025)

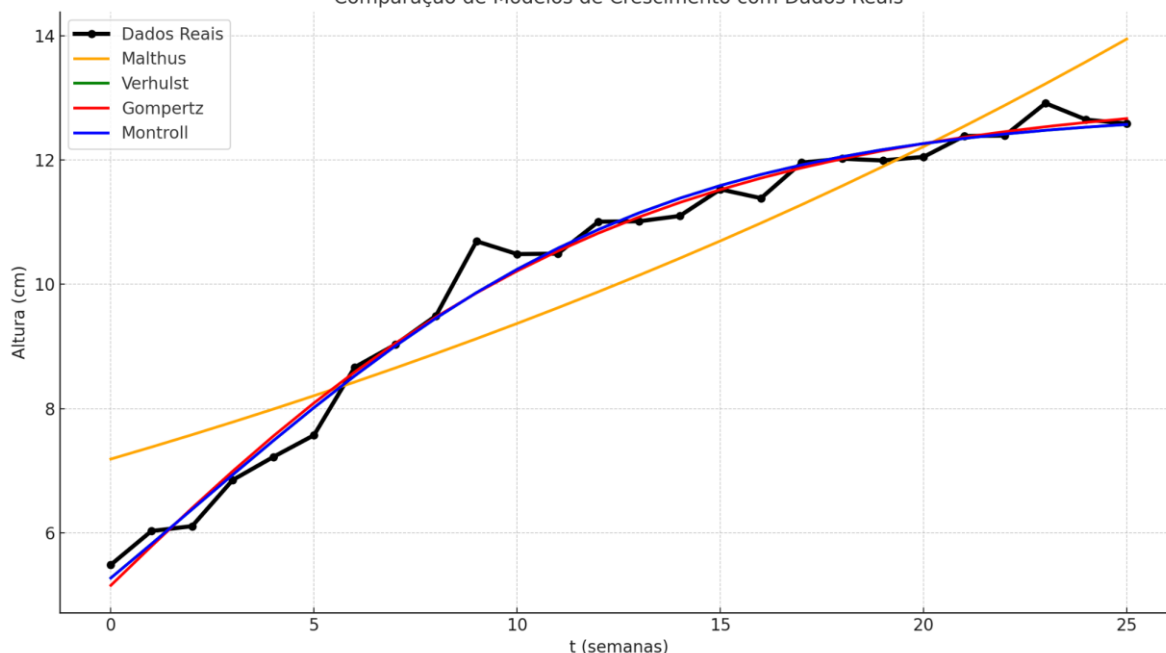
**Figura 4**



Fonte: Autores (2025)

**Figura 5**

Comparação de Modelos de Crescimento com Dados Reais



Fonte: Autores, 2025

Observa-se que, com exceção do modelo de Malthus, os modelos descrevem de forma satisfatória o comportamento de crescimento das plantas ao longo das semanas, apresentando um padrão de curva sigmoideal, característico de processos biológicos limitados por fatores ambientais. Nos primeiros períodos (semanas iniciais), o crescimento é mais acentuado, seguido por uma desaceleração nas semanas finais, à medida que as plantas se aproximam de um limite de crescimento natural.

Para avaliar quantitativamente o desempenho de cada modelo, foi calculado o erro quadrático médio (RMSE). O RMSE é uma métrica que expressa o desvio médio entre os valores previstos pelo modelo e os dados reais, em unidades da variável medida (neste caso, centímetros de altura). A fórmula para o cálculo do RMSE é a seguinte:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - p_i)^2}$$

Onde:

- $n$  é o número de amostras
- $y_i$  é o valor observado para a amostra  $i$
- $p_i$  é o valor previsto pelo modelo para a amostra  $i$

Quanto menor o valor do RMSE, melhor é o ajuste do modelo aos dados reais. Os valores de RMSE obtidos para cada modelo foram:

**Tabela 1:** Valores de RMSE obtidos para cada modelo.

| Modelo   | RMSE (cm) |
|----------|-----------|
| Malthus  | 0.8963    |
| Verhulst | 0.2598    |
| Gompertz | 0.2671    |
| Montroll | 0.2598    |

Após o ajuste dos modelos matemáticos aos dados reais do crescimento das rosas-do-deserto, foi possível comparar o comportamento de cada equação frente às observações coletadas ao longo das semanas. O gráfico da Figura 5 apresenta visualmente essa comparação, onde se destacam os diferentes padrões de ajuste de cada modelo.

O modelo exponencial de Malthus, como esperado, não apresentou bom desempenho na representação dos dados. Isso ocorre porque o crescimento das plantas, naturalmente, não é ilimitado: há restrições ambientais e fisiológicas que impõem um teto de desenvolvimento. Este resultado se confirma pelo valor do RMSE obtido, que foi de 0,8963, o mais elevado entre os modelos testados.

Por outro lado, os modelos de Verhulst, Gompertz e Montroll, que levam em conta a limitação ambiental, apresentaram ajustes bastante satisfatórios. O RMSE para o modelo logístico de Verhulst foi de 0,2598, o mesmo valor encontrado para o modelo de Montroll (0,2598), enquanto o modelo de Gompertz apresentou um RMSE levemente superior, de 0,2671.

Observando as curvas ajustadas, percebe-se que tanto Verhulst quanto Montroll acompanharam de maneira bastante fiel o comportamento real de crescimento das plantas ao longo do tempo. O modelo de Gompertz, embora também tenha descrito bem o padrão, mostrou uma leve subestimação das alturas finais em relação às observações reais.

Esses resultados indicam que, para o conjunto de dados analisado — referente ao crescimento de rosas-do-deserto cultivadas sem adubação —, os modelos de Verhulst e Montroll foram os que melhor representaram o comportamento de crescimento observado. Ambos conseguiram captar o padrão de desaceleração progressiva no ganho de altura, típico de sistemas biológicos que se aproximam de uma capacidade de suporte.

## 5 Conclusões

A modelagem matemática, como demonstrado neste estudo, configura-se como uma ferramenta essencial para a análise e previsão de fenômenos biológicos complexos, em particular o crescimento de plantas. A aplicação dos modelos de Malthus, Verhulst, Gompertz e Montroll permitiu descrever de forma quantitativa o desenvolvimento da rosa-do-deserto (*Adenium obesum*), evidenciando desde padrões de crescimento exponencial até comportamentos sigmoidais típicos de sistemas sujeitos a restrições ambientais.

Os resultados obtidos indicam que os modelos de Verhulst, Montroll e de Gompertz apresentaram desempenho superior na representação da dinâmica de crescimento observada, capturando tanto a fase inicial de expansão acelerada quanto a posterior desaceleração, à medida que a planta se aproximava de sua capacidade máxima. O modelo de Gompertz, fundamentado em uma taxa de inibição logarítmica, mostrou-se eficaz em descrever a transição progressiva entre essas fases. Já o modelo de Montroll, por sua formulação flexível, permitiu que o ponto de inflexão ocorresse em diferentes estágios do desenvolvimento, ajustando-se de maneira particularmente precisa aos dados experimentais.

A análise comparativa, baseada no erro quadrático médio (RMSE), revelou que os modelos de Verhulst e Montroll obtiveram os melhores ajustes (RMSE = 0,2598), seguidos pelo modelo de Gompertz (RMSE = 0,2671). Em contraste, o modelo de Malthus, por não considerar limitações ambientais, apresentou o pior desempenho (RMSE = 0,8963), reforçando sua inadequação para sistemas de crescimento limitado.

Essa análise não apenas valida a aplicabilidade desses modelos em contextos biológicos, mas também ressalta a importância da seleção criteriosa de abordagens matemáticas conforme as particularidades do fenômeno estudado.

Por fim, este trabalho destaca a complementaridade entre modelos matemáticos distintos na descrição de um mesmo fenômeno, demonstrando que diferentes abordagens podem oferecer perspectivas valiosas para a compreensão de sistemas dinâmicos. Futuros estudos poderiam explorar a influência de variáveis externas, como adubação e condições climáticas controladas, bem como testar a aplicação desses modelos em outras espécies vegetais, ampliando assim o escopo de aplicação dessas ferramentas matemáticas.

## REFERÊNCIAS

SILVA, Dianne do Araújo; CARDOSO, Wilson Vagner da Silva: **A Evolução dos modelos matemáticos para dinâmicas populacionais**. Macapá - Amapá . 2011. Disponível em:

<https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/tcc-2011-Dianne-da-Silva.pdf> . Acesso em 22 jun. 2025.

NASCIMENTO, Adriane do. **Introdução à dinâmicas de crescimento populacionais.** Maringá -PR. 2012. Disponível em: <http://www.dfi.uem.br/fisicaold/site.dfi.uem.br/wp-content/uploads/2016/12/ADRIANE-DO-NASCIMENTO.pdf> . Acesso em: 22 jun. 2025.

PEÇANHA S. et al. Efeito de diferentes substratos na germinação e crescimento de *Adenium obesum*. Vita et Sanitas, Trindade - GO v. 14, n.1, 2020. Disponível em: <https://unigoyazes.edu.br/revistas/index.php/VitaetSanitas/article/view/199/218>. Acesso em: 29 jun. 2025.

NUNES, Claudinéia Ferreira; PEREIRA, Marlon Cristian Toledo: **Produção de mudas e plantio de rosas-do-deserto.** Janaúba-MG. 2021. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/51486/2/Produ%C3%A7%C3%A3o%20de%20mudas%20e%20plantio%20de%20rosa-do-deserto.pdf> Acesso em: 29 jun. 2025.