

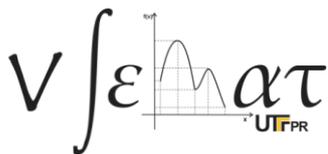
ANAIS
V SEMANA DA MATEMÁTICA
UTFPR TOLEDO

A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Página do Evento:

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/V_semata/index.php

Toledo – PR
Maior - 2017



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e
inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (5: 2017:

Toledo, PR)

Anais da V Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR),
08 a 12 de maio de 2017. / organizado pelo Curso de
Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. -
Toledo, PR, 2017.

207f.

Modo de Acesso: World Wide Web:

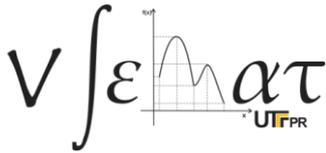
<http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/V_semat/index.php>.

ISSN 2358-4947

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo -
Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

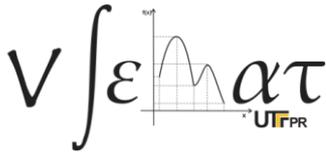
CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo



SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	4
2. HISTÓRICO DO EVENTO	4
3. OBJETIVOS.....	5
4. PÚBLICO-ALVO	5
5. PERÍODO DE REALIZAÇÃO	5
6. PERIODICIDADE DO EVENTO	5
7. REALIZAÇÃO	5
8. COMISSÃO ORGANIZADORA	6
9. COMISSÃO CIENTÍFICA	6
10. COMISSÃO DE PARECERISTAS	6
11. COMISSÃO DE APOIO	7
12. CRONOGRAMA DO EVENTO	8
13. RESUMO DOS TRABALHOS APRESENTADOS	11
14. TRABALHOS COMPLETOS E RESUMOS EXPANDIDOS	13



1. INTRODUÇÃO

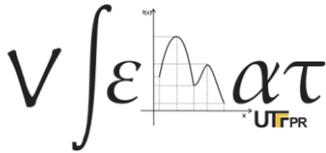
De modo aos nossos acadêmicos assumirem uma conduta crítica e reflexiva em sua atuação profissional, a Semana da Matemática proporcionou espaços de formação diferenciados por meio de palestras, minicursos, atividades artísticas e culturais, entre outras ações, que abordaram temas atuais e relevantes para a formação inicial e continuada do professor de Matemática, e ainda, propiciou a aproximação entre acadêmicos, pesquisadores e professores de matemática, buscando ampliar a relação do curso com as demais instituições de ensino.

Nesse contexto, a V SEMAT proporcionou a troca de saberes e a mobilização dos mesmos, por meio de atividades das quais os saberes matemáticos, os saberes profissionais e os saberes experienciais docentes foram compartilhados com a comunidade participante do evento.

2. HISTÓRICO DO EVENTO

O curso de Licenciatura em Matemática do Câmpus Toledo iniciou-se no segundo semestre de 2011 e realizou no ano de 2013 a primeira Semana da Matemática – I SEMAT, que contou com a presença de 100 participantes. Evento este que proporcionou troca de experiências e integração, além disso, foram apresentadas comunicações científicas, ou seja, um espaço considerado essencial para formação de intelectuais críticos.

Em outubro de 2014 a Semana da Matemática realizou sua segunda edição contando com 126 inscritos. Na terceira edição, realizada em 2015, foram 120 participantes. Na quarta edição, ocorrida em 2016, a participação foi de aproximadamente 100 pessoas, com graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada e da comunidade interna e externa interessadas. Nesta edição, aconteceu o primeiro Sarau da Matemática, cujo objetivo foi a apresentação de atividades artísticas e culturais, bem como da realização de outras atividades com essas características, tais como mágica, dublagem, poesia, teatro, entre outras.



3. OBJETIVOS

A V SEMAT teve como objetivo possibilitar a integração dos saberes (Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Aplicada) além de compartilhar experiências e conhecimentos entre estudantes (de Instituições Públicas e Privadas) e Professores e/ou Pesquisadores do Brasil, especialmente do estado do Paraná e mais especificamente da região oeste, favorecendo a formação continuada para os acadêmicos do curso e mostrando-lhes os caminhos que podem ser percorridos para o desenvolvimento de pesquisas nos mais diferentes campos da Matemática.

O evento também propiciou por meio das apresentações orais a divulgação das pesquisas e trabalhos produzidos pelos acadêmicos e demais participantes, além de, por meio do II Sarau da Matemática, a participação em atividades artísticas e culturais.

4. PÚBLICO-ALVO

Graduandos, pós-graduandos e Profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada.

5. PERÍODO DE REALIZAÇÃO

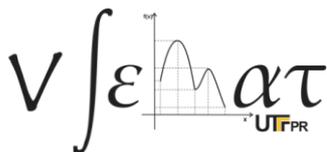
O evento foi realizado entre os dias 08 e 12 maio de 2017.

6. PERIODICIDADE DO EVENTO

Esta foi a V Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

7. REALIZAÇÃO

O evento foi realizado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora do curso de licenciatura em Matemática, nomeada pela portaria nº 143, de 17 de agosto de 2016.



8. COMISSÃO ORGANIZADORA

A Comissão Organizadora do evento (Quadro 1) foi composta por professores – Doutores e Mestres - pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo e por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

Quadro 1 – Componentes da Comissão Organizadora do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE	
Prof. Dr. Rodrigo M. Dias Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenador
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenadora
Profa. Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR - câmpus Toledo	
Profa. Dra. Bárbara W. D. Novaes	UTFPR – câmpus Toledo	
Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira	UTFPR – câmpus Toledo	
Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR - câmpus Toledo	
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araújo	UTFPR - câmpus Toledo	

9. COMISSÃO CIENTÍFICA

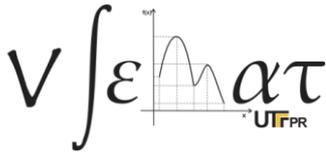
A Comissão Científica do evento (Quadro 2) foi composta por professores pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo.

Quadro 2 – Componentes da Comissão Científica do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE	
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenadora
Prof. Dr. Rodrigo M. Dias Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenador
Profa. Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR - câmpus Toledo	
Profa. Dra. Bárbara W. D. Novaes	UTFPR – câmpus Toledo	
Profa. Karen Carrilho da Silva Lira	UTFPR – câmpus Toledo	
Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR - câmpus Toledo	
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araújo	UTFPR - câmpus Toledo	

10. COMISSÃO DE PARECERISTAS

A Comissão de pareceristas do evento (Quadro 3) foi composta por professores pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo.



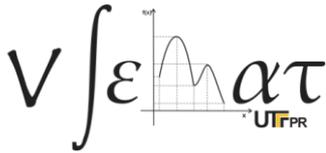
Quadro 3 – Componentes da Comissão de pareceristas do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE
Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia	UTFPR – câmpus Toledo Presidente
Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR - câmpus Toledo
Me. Adriano G. de Santana	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Araceli Ciottin de Marins	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Bárbara W. D. Novaes	UTFPR – câmpus Toledo
Me. Cezar Ricardo de Freitas	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Dione Ines Christ Milani	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Emerson Tortola	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Gustavo Henrique Dalposso	UTFPR – câmpus Toledo
Me. Ivan Jose Coser	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Jahina Fagundes de Assis	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Jacqueline Gabriela Cantú	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Karen Carrilho da Silva Lira	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Larissa Hagedorn Vieira	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Luiz A. Gonçalves Borges	UTFPR – câmpus Toledo
Ma. Marcia Regina Piovesan	UTFPR – câmpus Toledo
Me. Márcio Paulo de Oliveira	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Plinio Lucas Dias Andrade	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Raquel Ribeiro Moreira	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Regiane Slongo Fagundes	UTFPR – câmpus Toledo
Me. Renato Francisco Merli	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Rodrigo M. Dias Andrade	UTFPR – câmpus Toledo
Esp. Rogério Santana Calegari	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Rosangela A. B. Assumpção	UTFPR – câmpus Toledo
Dr. Wilian Francisco de Araujo	UTFPR – câmpus Toledo
Dra. Vanessa Largo	UTFPR – câmpus Toledo

11. COMISSÃO DE APOIO

Quadro 4 – Componentes da Comissão de Apoio

DISCENTES	UNIVERSIDADE
Daiane Maria Seibert	UTFPR – câmpus Toledo
Tais Francini da Silva	UTFPR – câmpus Toledo



12. CRONOGRAMA DO EVENTO

A Figura abaixo apresenta a grade básica da programação do Evento.

Data	Horário	Programação	Local
08/05/2017	18h00 – 19h00	Inscrições e entrega de material	Auditório 1
	19h00 - 20h00	Solenidade de abertura	
	20h00 – 20h30	Coffee break / Lançamento de Livros	
	20h30 - 22h00	Palestra de Abertura	
09/05/2017	19h00 – 20h30	Palestra 1	Auditório 1
	20h30 – 21h00	Coffee break	Corredores
	21h00 – 22h30	Palestra 2/Palestra 3	Auditórios 1 e 2
10/05/2017	14h00 – 15h30	Minicursos	Salas de Aula
	15h30 – 16h00	Coffee break	Corredores
	16h00 – 17h30	Minicursos	Salas de Aula
	19h00 – 20h30	Minicursos	Salas de Aula
	20h30 – 21h00	Coffee break	Corredores
	21h00 – 22h30	Minicursos	Salas de Aula
11/05/2017	19h00 – 20h30	Minicursos	Salas de Aula
	20h30 – 21h00	Coffee break	Corredores
	21h00 – 22h30	Minicursos	Salas de Aula
12/05/2017	19h00– 20h30	Comunicação Oral	Salas de Aula
	20h30 – 23h00	Sarau da Matemática	Ginásio

PALESTRA DE ABERTURA (AUDITÓRIO 1) - Saberes profissionais do educador matemático: a natureza dos saberes para ensinar matemática

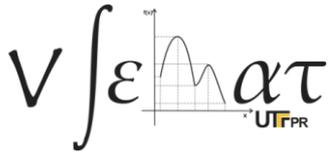
- Profa. Dra. Neuza Bertoni Pinto – Docente Colaboradora junto ao Programa de Pós Graduação - Nível Doutorado - em Educação em Ciência e Matemática – PPGCEM, da Rede Amazônica de Educação em Ciências –REAMEC - UFMT. Pesquisadora do GHEMAT.

PALESTRA 1 (AUDITÓRIO 1) - Educação Matemática Inclusiva

- Prof. Dr. Fábio Alexandre Borges - Universidade Estadual do Paraná/ FECILCAM - Campo Mourão.

PALESTRA 2 (AUDITÓRIO 1) - Derivadas, Integrais e seus avanços

- Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Cornélio Procópio/PR.

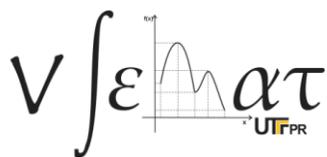


PALESTRA 3 (AUDITÓRIO 2) - Matemática é matemática, ou tem matemática do campo?

- Profa. Dra. Línlya Natássia Sachs Camerlengo de Barbosa - Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Cornélio Procópio/PRMESA REDONDA: Ensinar a Matemática na Contemporaneidade: a questão da indisciplina e do interesse.

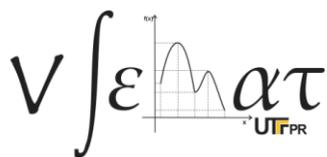
MINICURSOS

Professor	Instituição	Tema	Data	Horário	Vagas
Fernanda Fatima Ratajczyk Turra, Amanda Previatti, Dra. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Dra. Vanessa Largo	UTFPR - Toledo	A - A mala misteriosa e o ensino de Frações	10/05	14hs às 17h30min	30
Dr. Emerson Tortola e Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan	UTFPR - Toledo	A - "E se..." - explorando problemas matemáticos e discutindo suas possibilidades nos anos iniciais do Ensino Fundamental	10/05	14hs às 17h30min	30
Esp. Thiago Rafael Mazzarollo e Esp. Gisele Minozzo dos Santos	UNIOESTE/UFPR e SEED/PR	A - Materiais Didáticos no Ensino de Matemática para Surdos	10/05	14hs às 17h30min	30
Ms. Paulo Henrique Rodrigues	UEL - Londrina	B - Análise de vídeos de sala de aula: o pensamento algébrico	10/05	19hs às 22h30min	30
Dra. Débora Aparecida Francisco Albarez	UTFPR - Cornélio Procópio	B- Funções em Economia para o Ensino Básico	10/05	19hs às 22h30min	30
Dra. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim	UENP - Cornélio Procópio	B - Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias	10/05	19hs às 22h30min	30
Ma. Larissa Hagedorn Vieira	UTFPR - Toledo	B - Cubo Mágico: curiosidades e como montar	10/05	19hs às 22h30min	20
Dr. Gustavo Henrique Dalposso	UTFPR - Toledo	C -Introdução ao programa computacional R	11/05	19hs às 22h30min	20
Dra. Aracéli Marins e Ma. Márcia Piovesan	UTFPR - Toledo	C - Cálculo Diferencial: Aplicações no Ensino Médio	11/05	19hs às 22h30min	30
Dra. Priscila Amara Patricio de Melo	UTFPR - Campo Mourão	C - Aprendizagem de conceitos matemáticos utilizando mapas conceituais	11/05	19hs às 22h30min	30
Me. Vanderlei Martins	UTFPR - Pato Branco	C - Um pouco de Matemática na Sísmica	11/05	19hs às 22h30min	30
Dr. Cleverson Gonçalves dos Santos	UTFPR - Medianeira	C - Progressões de Ordem Superior	11/05	19hs às 22h30min	30



13. RESUMO DOS TRABALHOS APRESENTADOS

	AUTORES	MODALIDADE	TÍTULOS DOS TRABALHOS
1.	Andressa Paola Cordeiro, Wilian Francisco de Araujo	TC	INICIAÇÃO CIENTÍFICA NO ENSINO FUNDAMENTAL? RELATOS DE EXPERIÊNCIA ACERCA DO PROJETO PIC – OBMEP
2.	Edineia dos Santos Brizola Brum	RE	PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM ÁLGEBRA DE LIE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA
3.	Alexandre Welter, Pamela Cristina Santana Becker, Larissa Hagedorn Vieira	TC	O TEOREMA DE PICK APLICADO AO LAGO DE PALOTINA
4.	Vinicius Schaedler Damin, Renato Francisco Merli	TC	AS RELAÇÕES ENTRE A DUPLICAÇÃO DO CUBO E OS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS
5.	Simone Ribeiro, Renato Francisco Merli	TC	UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO APLICATIVO “FRAÇÃO - PASSO A PASSO”
6.	Felipe Hugo Granville, Tiélen Prestes De Lima, Raphael Kenji Kobayashi, Tawine Leticia Azarias da Silva, Emerson Tortola	TC	UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA SOBRE A ÁREA DO CAMPUS DA UTFPR – TOLEDO
7.	Matheus Goncalves Galvan Dobbins e Rodolfo Eduardo Vertuan	TC	ACERCA DO DESPERDÍCIO DE COMIDA NAS ESCOLAS MUNICIPAIS DE TOLEDO-PR: UMA INVESTIGAÇÃO
8.	Simoni Berger, Amilton Luciano Garcia, Rodolfo Eduardo Vertuan	RE	PROJETO INTEGRADOR TIM TIM
9.	Tamara Cantú Maltauro, Letícia Ellen Dal’Canton, Weverton Rodrigo Verica, Luciana Pagliosa Carvalho Guedes, Miguel Angel Uribe-Opazo	TC	ANÁLISE DA VARIABILIDADE ESPACIAL DOS TEORES DE CARBONO (C) EM UMA ÁREA AGRÍCOLA COMERCIAL UTILIZANDO MÉTODOS GEOESTATÍSTICOS

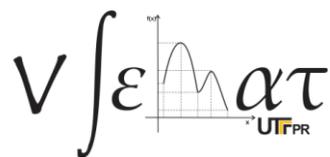


V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

	AUTORES	MODALIDADE	TÍTULOS DOS TRABALHOS
10.	Letícia Ellen Dal' Canton, Edilza Martins da Silva, Tamara Cantú Maltauro, Weverton Rodrigo Verica, Luciana Pagliosa Carvalho Guedes, Miguel Angel Uribe-Opazo	TC	CONSTRUÇÃO DE MAPAS TEMÁTICOS UTILIZANDO DIFERENTES MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO AOS PARÂMETROS DO MODELO GEOESTATÍSTICO
11.	Eduardo Kenji Simo, Suellen Ribeiro Pardo Garcia	TC	ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS EM VARIADOS CONTEXTOS
12.	Bruna Laís Finkler, Renato Francisco Merli	TC	ESCOLHA DE UM CELULAR COM AUXÍLIO DA MATEMÁTICA FUZZY
13.	Maiquiel Schmidt de Oliveira, Camila Nicola Boeri Di Domênico, Andriele da Mota Duarte, Edinara Kessler	TC	ESTUDO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE PATO BRANCO/PR POR MEIO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
14.	Maiquiel Schmidt de Oliveira, Camila Nicola Boeri Di Domênico, Andriele da Mota Duarte, Edinara Kessler	RE	PROJEÇÃO PARA O CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE FRANCISCO BELTRÃO/PR UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
15.	Fernanda Venites Buzinaro, Andressa Paola Cordeiro, Suellen Ribeiro Pardo Garcia	TC	UM RELATO SOBRE AS ATIVIDADES PRÁTICAS SUPERVISIONADAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: MODELAGEM DE UM CIRCUITO RC
16.	Jackson Luis Wille, Anderson Ervino Schwertner, Renato Francisco Merli	TC	APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM: DATAÇÃO POR DECAIMENTO RADIOATIVO
17.	Daiane Maria Seibert, Taís Francini da Silva, Caroline Indiamara Muller, Suellen Ribeiro Pardo Garcia, Rodolfo Eduardo Vertuan	RE	O QUE DE MATEMÁTICA PODE TER EM UMA ABÓBORA? UM RELATO SOBRE O PROJETO INTEGRADOR DO PRIMEIRO SEMESTRE DE 2016
18.	Daniela Carolina Ludvig, Danieli Felichak, Barbara Winiarski Diesel Novaes	RE	CONTRIBUIÇÕES DO PROJETO INTEGRADOR PARA A FORMAÇÃO DE FUTURAS PROFESSORAS DE MATEMÁTICA: MODELANDO UM CHUCHU
19.	Adriana Livi, Adriéli Aline Duarte, Judy	RE	O QUE É O MÉTODO KUMON?



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e
inclusão

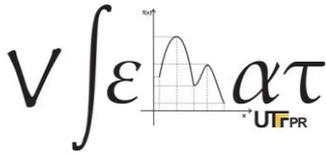
Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

	AUTORES	MODALIDADE	TÍTULOS DOS TRABALHOS
	Marie Schafer, Barbara Winiarski Diesel Novaes		
20.	Luana Edris Finkler, Renato Francisco Merli	TC	ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA SOBRE A PRESENÇA DE ENCAMINHAMENTOS PARA O TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA
21.	Andressa Paola Cordeiro, Leonardo Augusto Cerbarro, Luiz Henrique da Silva Alves, Aline Keryn Pin	TC	ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES SURDOS: ANÁLISE SOBRE AS PRODUÇÕES DE SINAIS MATEMÁTICOS

* TC: Trabalho Completo

* RE: Resumo Expandido

14. TRABALHOS COMPLETOS E RESUMOS EXPANDIDOS



INICIAÇÃO CIENTÍFICA NO ENSINO FUNDAMENTAL?
RELATOS DE EXPERIÊNCIA ACERCA DO PROJETO PIC – OBMEP

Andressa Paola Cordeiro
UTFPR - Toledo
andressap.ha@gmail.com

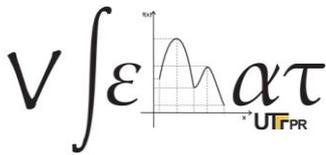
Wilian Francisco de Araujo
UTFPR - Toledo
wilianfrancisco@gmail.com

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP é conhecida por todo o país por suas avaliações escritas anuais. Ela é realizada pelo IMPA – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, com o objetivo de estimular o estudo da matemática, além de revelar talentos nessa área. Sendo sempre uma avaliação aplicada aos alunos de escola pública, no ano de 2017, em sua 13ª edição, alunos de escolas privadas também têm a disponibilidade de participar.

As provas da OBMEP são separadas em duas fases: a primeira consiste de questões de múltipla escolha, e todos os alunos das escolas inscritas têm a possibilidade de participar. A segunda fase corresponde a questões subjetivas, e são aplicadas a alunos com bom desempenho na primeira fase. Dentre estes, os alunos com excelência em seu desempenho recebem medalhas de ouro, prata, bronze ou menções honrosas, sendo distribuídos também prêmios a professores, escolas e secretarias de educação que apresentam resultados significativos dentro da avaliação.

A OBMEP disponibiliza muitos materiais para estudo de Matemática, como provas aplicadas nos anos anteriores e suas soluções, banco de questões, apostilas, vídeos, portais de estudo e discussão de problemas, além de ofertar programas de incentivo ao estudo da Matemática, dentre eles, o PIC Jr., e o PICME. Neste trabalho são feitos relatos de experiência referentes ao primeiro programa, no ano de 2016.

O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) é destinado a alunos medalhistas da OBMEP, mas também abrange alunos com Menção Honrosa. Este programa realiza-se por meio de uma rede de professores em diversos polos, espalhados por todo o país, que



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

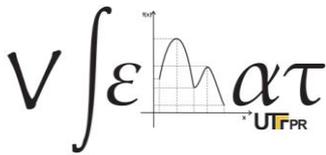
lecionam aulas presenciais direcionadas aos alunos participantes deste programa. Existe também o fórum virtual, onde os alunos podem interagir com “moderadores”, alunos de Licenciatura em Matemática, que propõem atividades e discussões relacionadas à área. Tem como objetivos, segundo a própria OBMEP, no site oficial da Olimpíada, “despertar nos alunos o gosto pela matemática e pela ciência em geral e motivá-los na escolha profissional pelas carreiras científicas e tecnológicas”¹. Ao longo de suas edições, mais de 42 mil alunos tiveram a oportunidade de estudar Matemática pelo PIC Jr. por um ano, com bolsa ofertada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e mais de 2200 alunos participaram como ouvintes.

No portal, os alunos selecionados para participar do PIC Jr. eram organizados em turmas de acordo com seu nível: nível 1, para alunos de 6º e 7º anos, nível 2, para alunos de 8º e 9º ano, e nível 3, para alunos do Ensino Médio. Cada turma era de responsabilidade de um moderador, e tais turmas recebiam nomes para diferenciá-las, nomes estes que faziam referência a importantes matemáticos, como Pitágoras, Peano, Fermat, Fibonacci, Galois e Einstein. O portal desenvolvido para o ano de 2016 foi 11º PIC, disponibilizando também da plataforma Hotel de Hilbert.

As atividades do programa eram separadas em seis ciclos, cada um com duração de quatro semanas, abordando três grandes temas: Aritmética, Contagem e Geometria. Cada ciclo possuía um assunto de estudo diferente em cada um dos grandes temas. Para orientar o trabalho dos moderadores de fórum, a equipe da OBMEP organizava um roteiro de estudos a ser seguido, e disponibilizava-o ao fim do ciclo anterior, incluindo os assuntos a serem tratados e algumas referências (textos, vídeos e livros) para estudo e proposta de atividades.

Ao fim de cada ciclo, a OBMEP realizava uma avaliação virtual que deveria ser respondida no Portal, com prazo de cerca de uma semana para a resolução pelos alunos. Tais provas consistiam de cinco questões, algumas de múltipla escolha, outras dissertativas. A correção das questões de múltipla escolha era feita automaticamente pelo sistema, e as dissertativas deveriam ser corrigidas pelos moderadores, que tinham disponível tanto a resolução como uma relação para a atribuição das notas. Cada questão subjetiva permitia

¹ Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>



ainda ao moderador realizar comentários acerca da resolução do aluno e do desempenho dele.

Na plataforma Hotel de Hilbert, os moderadores eram instruídos a postar atividades referentes a cada grande tema de acordo com o conteúdo referente ao ciclo em questão. Os alunos então tinham disponíveis tais questões para serem resolvidas e compartilhadas na plataforma, além de poderem propor novos problemas aos demais alunos da turma.

Contudo, qualquer moderador ou aluno inscrito no programa tinha acesso a todas as turmas, podendo não só visualizar como participar das discussões, respondendo aos problemas já propostos ou sugerindo outros para resolução, mesmo que não participasse da turma em questão.

Visando melhorar a instrução dos moderadores de fórum com relação aos assuntos tratados nos ciclos e para referências de problemas e exercícios a serem propostos aos alunos, a equipe da OBMEP organizou e enviou os seguintes livros aos alunos de licenciatura: Iniciação à Aritmética (HEFEZ, 2015), Métodos de Contagem e Probabilidade (CARVALHO, 2015), Teorema de Pitágoras e Áreas (WAGNER, 2014), Encontros de Geometria – Parte 1 (CADAR; DUTENHEFNER, 2015), Encontros de Aritmética (DUTENHEFNER; CADAR, 2015), Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2012), Um Círculo Matemático de Moscou, (DORICHENKO, 2011), e Resolução de problemas na sala de aula – Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino da Matemática, (BALDIN; SILVA, 2016). Os cinco primeiros livros podem ser encontrados no site da OBMEP, e estão disponíveis para baixar em formato pdf.

Os moderadores de fórum possuíam acesso não só à relação de alunos cadastrados em sua turma, como também a um relatório de desempenho (notas) e informações quanto ao acesso (frequência, média de tempo, quantidade de acessos) à plataforma. Além disso, disponibilizava-se ao moderador a visualização das provas já realizadas pelos alunos, bem como os comentários feitos nas questões e a possibilidade de correção e reatribuição de nota ao aluno.

Alguns dos problemas propostos no material utilizado no decorrer do projeto já tinham sido trabalhados de alguma forma na Universidade. O exemplo abaixo fora abordado em minicurso realizado na III Semana Acadêmica da Matemática do curso de Licenciatura

em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, no ano de 2015, ministrado pelo professor Wilian Francisco de Araújo, fazendo parte também do livro Iniciação à Aritmética, de Abramo Hefez, e proposto na plataforma Hotel de Hilbert aos alunos do nível 2.

Problema 1 - Aritmética:

Fixe três Algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois Algarismos distintos tomados dentre os Algarismos fixados. Mostre que a soma desses números é igual a 22 vezes a soma dos três Algarismos fixados.

Demonstração:

Primeiramente, precisamos escolher três Algarismos quaisquer não nulos. Sejam eles, então, x , y e z . A primeira informação que se pede trata dos seis números com dois Algarismos distintos formados com x , y e z . São eles:

xy	yx	zx
xz	yz	zy

Observe que cada um dos números acima pode ser escrito da seguinte forma:

$10x + y$	$10y + x$	$10z + x$
$10x + z$	$10y + z$	$10z + y$

Vamos somar esses números:

$$\begin{aligned}
 &xy + xz + yx + yz + zx + zy = \\
 &10x + y + 10x + z + 10y + x + 10y + z + 10z + x + 10z + y = \\
 &20x + 20y + 20z + 2x + 2y + 2z = \\
 &20(x + y + z) + 2(x + y + z) = \\
 &22(x + y + z)
 \end{aligned}$$

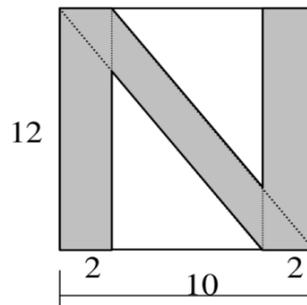
Assim, provamos que a soma desses seis números é igual a 22 vezes a soma dos três Algarismos fixados, x , y e z .

Outro assunto abordado nos ciclos também no Ensino Fundamental e n/o Ensino Superior, é área de triângulos. O problema abaixo foi utilizado na plataforma Hotel de Hilbert, tendo sido retirado do livro Teorema de Pitágoras e Áreas.

Problema 2 – Geometria:

A letra “N” da figura abaixo foi construída a partir de um retângulo de base 10 e altura 12. Calcule sua área.

Figura 1 – Atividade de Geometria: encontrar a área de N.



Fonte: Teorema de Pitágoras e Áreas, de Eduardo Wagner.²

Resolução:

A ideia mais simples é calcular a área do retângulo e subtrair a área dos dois triângulos retângulos vazios. O retângulo tem área $10 \times 12 = 120$ e cada triângulo retângulo tem um cateto igual a 6 e outro igual a x . Uma simples semelhança nos dá

$$\frac{x}{12} = \frac{6}{8}$$

Ou seja, $x = 9$.

Um assunto recorrente no Ensino Médio, também estudado no Ensino Superior e no programa PIC é análise combinatória. O problema abaixo foi adaptado do livro Um Círculo Matemático de Moscou, e fora usado no começo do programa por seu baixo nível de dificuldade e por ajudar os alunos a compreender a ideia principal da análise combinatória.

Problema 3 – Contagem:

Uma turma tem 25 alunos. De quantas maneiras diferentes é possível escolher os grupos a seguir nessa turma, quando o mesmo aluno não pode ser escolhido para mais de um “cargo”?

a) Um monitor e o representante de turma;

² Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila3.pdf>>

- b) Dois monitores;
c) Três monitores.

Resolução:

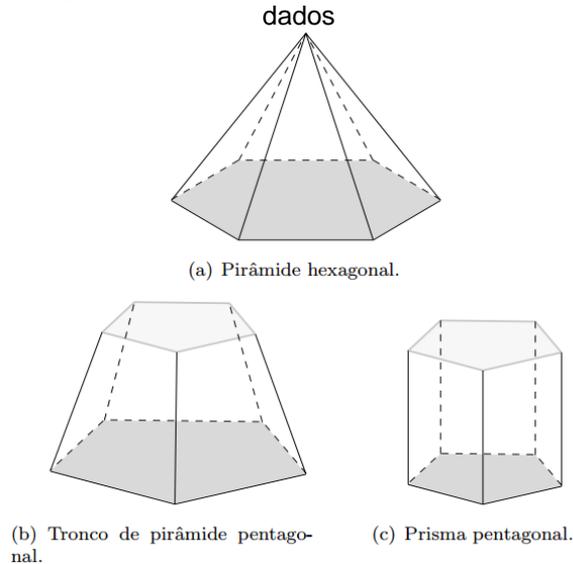
- a) Repare que existem 25 maneiras de escolher um monitor. Para cada uma dessas escolhas, existem 24 maneiras de escolher o representante de turma. Assim, utilizando o Teorema Fundamental da Contagem, obtemos $25 \times 24 = 600$ maneiras diferentes.
- b) Como a ordem de escolha dos alunos nesse caso não importa, temos $C_{25,2} = \frac{25!}{2! \times (25-2)!} = \frac{25!}{2! \times 23!} = \frac{25 \times 24}{2} = 300$ possibilidades de escolha.
- c) Da mesma forma que o item anterior, podemos calcular a quantidade de maneiras da seguinte forma: $C_{25,3} = \frac{25!}{3! \times (25-3)!} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2} = 2300$.

Alguns assuntos, contudo, não foram abordados diretamente em nenhuma disciplina, apesar de oferecerem conhecimentos que levassem a tais entendimentos. Alguns exemplos disso são fenômenos periódicos e permutações circulares. Abaixo, são mostrados dois problemas abordados na plataforma para os alunos; o primeiro foi retirado de um material disponível online no Portal da Matemática e refere-se a permutações circulares, e o segundo foi retirado do livro Encontros de Aritmética, e diz respeito a fenômenos periódicos.

Problema 4 - Contagem:

Para cada um dos sólidos da figura a seguir, calcule o número de maneiras em que podemos colorir suas faces usando um conjunto de 7 cores, de modo que cada face receba uma cor diferente. Em cada caso, assuma que os polígonos que determinam as bases dos sólidos são regulares, e que as faces laterais são triângulos isósceles (no caso da pirâmide hexagonal), trapézios isósceles (no caso do tronco de pirâmide pentagonal) e retângulos (no caso do prisma pentagonal).

Figura 2 – Atividade de contagem: calcular possibilidades de pintar as faces de sólidos geométricos dados



Fonte: Material Teórico – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem: Permutações circulares, de Angelo Papa Neto.³

Resolução:

Observe que cada um dos sólidos possui exatamente 7 faces. Como cada face deve receber uma cor diferente, concluímos que cada cor deve ser usada exatamente uma vez.

Anotação: $PC_n = \frac{n!}{n}$, PC_n é permutação circular.

- a) No caso da pirâmide, devemos inicialmente escolher uma cor para colorir sua base. Isso pode ser feito de 7 maneiras diferentes, já que qualquer uma das cores pode ser usada. Resta, agora, colorir as faces laterais. Como a base da pirâmide é regular, uma forma de pintar as faces laterais é indistinguível de outra que seja obtida rotacionando-se a base. Sendo assim, o número de maneiras diferentes de pintar as faces laterais é $PC_6 = 5! = 120$. Logo, o total de maneiras de pintar a pirâmide é, pelo princípio multiplicativo, igual a $7 \times 120 = 840$.
- b) Como no item anterior, iremos primeiro escolher a cor que será usada na base inferior e, em seguida, aquela que será usada na base superior. Como as bases possuem tamanhos diferentes, a ordem em que escolheremos essas duas cores é

³ Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/2242r0gioudc4.pdf>

relevante. Logo, isso pode ser feito de $7 \times 6 = 42$ maneiras. Também como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais é o número de permutações circulares do conjunto das (cinco) cores restantes, ou seja, $PC_5 = 4! = 24$. Logo (e novamente pelo princípio multiplicativo), o total de maneiras de colorir o tronco é igual a $42 \times 24 = 1008$.

- c) Nesse caso, o tamanho da base inferior é igual ao da base superior. Assim, a ordem em que escolheremos as duas cores que serão usadas nas bases não é relevante. Portanto, o número de maneiras de escolher tais cores passa a ser $\binom{7}{2} = 7 \times \frac{6}{2} = 21$. Para terminar, veja que, como antes, o número de maneiras de colorir as faces laterais com as demais 5 cores é $4! = 24$. Logo, o total de maneiras de colorir o prisma é $21 \times 24 = 504$.

Problema 5 - Aritmética:

Qual é o algarismo da unidade de 2^{2016} ?

Resolução:

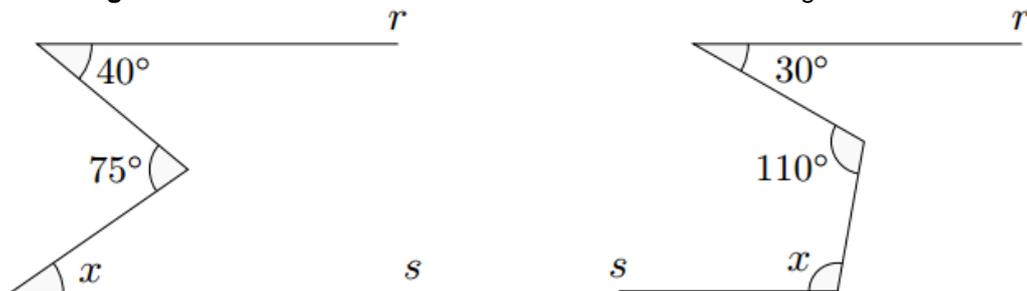
Calculando as primeiras potências de 2 obtemos: $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$. Observando esses números, vemos que os últimos algarismos formam uma sequência periódica: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2 etc., em que os quatro números 2, 4, 8, 6 ficam se repetindo infinitamente. Dividindo 2016 por 4 obtemos quociente 504 e resto 0, de modo que $2016 = 504 \times 4$. Na sequência acima, os expoentes que deixam resto 0 quando divididos por 4 definem potências de 2 com último algarismo 6 ($2^4 = 16$, $2^8 = 256$, etc.). Daí segue que o algarismo da unidade de 2^{2016} é 6.

A graduação abordou também questões referentes a retas paralelas cortadas por transversais, e, mesmo não abordando o “Teorema dos Bicos”, os conteúdos lecionados foram suficientes para a compreensão sobre esse assunto. Assim, o problema abaixo, retirado do livro Encontros de Geometria, aborda um exemplo de conteúdo que não abordando diretamente de determinado assunto, a graduação oferece conhecimentos suficientes para que sua compreensão seja fácil.

Problema 6 – Geometria:

Em cada figura, determine a medida do ângulo x sabendo que as retas r e s são paralelas.

Figura 3 – Atividade de Geometria: encontrar o valor dos ângulos solicitados



Fonte: Encontros de Geometria, de Francisco Dutenhefner e Luciana Cadar.⁴

Resolução:

Na primeira figura se cortarmos o ângulo de 75° com uma reta paralela às retas r e s , percebemos que a soma de $40 + x = 75$, pelos ângulos serem alternos internos. Logo, $x = 35^\circ$.

Na outra figura se também cortarmos o ângulo de 110° em uma paralela das retas r e s , temos que:

$$x + 110 = 180 + 30 \Rightarrow x = 100^\circ$$

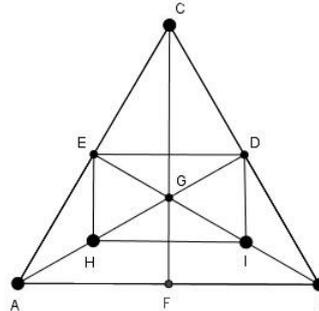
(Resolução feita por um aluno na plataforma Hotel de Hilbert)

Abaixo há um exemplo de questão proposta pela OBMEP na avaliação ao fim de um ciclo, e, a seguir, as respostas de dois alunos, denominados aluno A e aluno B.

Num triângulo equilátero as três cevianas (mediana, altura e bissetriz) relativas a um mesmo vértice coincidem. Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero, seu lado mede $10\sqrt{3}$ cm, \overline{AD} , \overline{BE} e \overline{CF} são suas medianas e H e I são pontos médios dos segmentos \overline{AG} e \overline{BG} , respectivamente. Assim, G é seu baricentro e a altura \overline{CF} é perpendicular ao lado \overline{AB} .

⁴ Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>>

Figura 4 – Atividade de demonstração



Fonte: do autor, semelhante à do problema original.

- Dê uma justificativa para a seguinte afirmação: “O quadrilátero $DEHI$ é um retângulo”.
- Determine a área, em cm^2 , do quadrilátero $DEHI$.

Resolução do aluno A:

- Dado um triângulo ABC e suas medianas AD , BE e CF intersectam no ponto G , em que H e I são pontos médios de AG e BG respectivamente, formamos a base média de AB . Logo traçando uma reta ED (leia: segmento de reta), formaremos dois triângulos congruentes, HIG e EDG , pois eles têm os mesmos ângulos e mesma base. Sendo assim $ED = HI$ e $EH = DI$, portanto, $DEHI$ é um retângulo.

- Como o lado do triângulo tem uma altura $\frac{10\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15 \text{ cm}$, a reta (leia: segmento de reta) $EI = 15 \times \frac{2}{3} = 10 \text{ cm}$ e $IB = 5 \text{ cm}$. Já sabemos que $HI = 5\sqrt{3}$, agora para calcular a altura faremos Pitágoras:

$$(5\sqrt{3})^2 + x^2 = 10^2 \Rightarrow 25 \times 3 + x^2 = 100 \Rightarrow 100 - 75 = x^2 \Rightarrow 25 = x^2$$

Logo a altura é igual a 5 cm , pois o 5 negativo não convém. A área do quadrilátero $DEHI$ é $5\sqrt{3} \times 5 = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Resolução do aluno B:

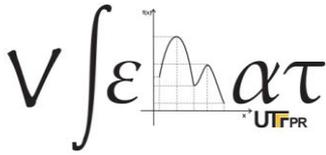
- O quadrilátero $DEHI$ é um retângulo pois, há 4 ângulos de 90° , as medidas $HI = ED$ e $EH = DI$, e ambos são paralelos entre si (HI para ED ...)

b) Primeiramente descobri a medida do CF fazendo a seguinte equação, com base no teorema de pitagoras (leia: Pitágoras):

$$(10\sqrt{3})^2 = (10\sqrt{3/2})^2 + x^2 \Rightarrow 100 \times 3 = 100 \times \frac{3}{4} + x^2$$
$$300 = 75 + x^2 \Rightarrow x^2 = 300 - 75 = 225 \Rightarrow x = \sqrt{225} \Rightarrow x = 15$$

É visível a diferença entre ambas as respostas. Enquanto o aluno A elaborou corretamente toda a demonstração, de acordo com as exigências da OBMEP, o aluno B teve dificuldade em verificar que apenas a imagem mostrada não garante o valor dos ângulos do quadrilátero. Ao analisar o histórico de ambos os alunos, percebe-se o quanto o projeto PIC Jr. ajuda na formação da compreensão de demonstrações e dos métodos matemáticos, pois, enquanto que o aluno B recebeu medalha de bronze no ano anterior ao de sua participação no programa (ou seja, em 2015), sendo este seu primeiro contato com o projeto, o aluno A era medalhista de ouro, tendo participado também na edição de 2014, quando fora classificado por ter recebido medalha de bronze.

O projeto de Iniciação Científica Jr. da OBMEP não é uma oportunidade apenas para os alunos do Ensino Básico, como também para alunos de Licenciatura em Matemática, que, além de manterem contato com diversos estudantes, têm a oportunidade (e obrigação, mas não de forma negativa) de estudar os assuntos a serem abordados nos ciclos, como também propor atividades e corrigir provas, sendo esta última uma oportunidade valiosa, pois possibilita ao graduando analisar respostas dos alunos, identificar dificuldades individuais e até mesmo perceber dificuldades recorrentes a vários alunos, não só realizando análise reflexiva com relação a tais erros como também buscando auxiliar os alunos, buscando sanar suas dúvidas. Projetos como este, desenvolvido pelo IMPA, proporcionam uma rica oportunidade de aprendizado a todos os envolvidos, e ajudam a transformar a educação e a vida de milhares de crianças, jovens e adultos.



REFERÊNCIAS

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

CARVALHO, Paulo. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

WAGNER, Eduardo. **Teorema de Pitágoras e Áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

CADAR, Luciana; DUTENHEFNER, Francisco. **Encontros de Geometria – Parte 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

DUTENHEFNER, Francisco; CADAR, Luciana. **Encontros de Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilya. **A Experiência Russa (Círculos Matemáticos)**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

DORICHENKO, Sergey. **Um Círculo Matemático de Moscou**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

BALDIN, Yuriko Yamamoto; SILVA, Aparecida Francisco da. **Resolução de problemas na sala de aula: Uma proposta da OBMEP para capacitação de professores em estratégias de Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

PAPA NETO, Angelo. Material Teórico – Módulo de Métodos Sofisticados de Contagem: Permutações circulares. Portal da Matemática. Disponível em:
<http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/2242r0gioudc4.pdf>

PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA EM ÁLGEBRA DE LIE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Edineia dos Santos Brizola Brum
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
edineia@alunos.utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Atualmente o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Toledo, apresenta diferentes possibilidades de participação acadêmica, para além das aulas regulares: os alunos podem participar do Centro Acadêmico de Licenciatura em Matemática (CALM); dos projetos de Monitoria, especialmente em disciplinas como Fundamentos da Matemática, Análise Matemática, e outras; do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID); de diferentes projetos de extensão desenvolvidos em épocas específicas; e também de Projetos de Iniciação Científica, por vezes como bolsistas, ou como voluntários.

Dentre essas possibilidades, vislumbramos neste relato de experiência, o Projeto de Iniciação Científica. Projetos desta natureza consistem de oportunidades de desenvolvimento de pesquisa científica pelo acadêmico, sob orientação de um ou mais professores. Muitas vezes, os acadêmicos buscam projetos de pesquisa com bolsa, o que infelizmente tem sido raro em nosso colegiado. Em contrapartida à não oferta de bolsas, é que surgem os Projetos de Iniciação Científica voluntária, como o deste trabalho.

Apresentamos um relato de experiência do projeto intitulado "Um estudo sobre as subálgebras de Lie de $gl(2, \mathbb{R})$, que são transitivas em $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ ", em atividade na UTFPR (Campus Toledo), sob a orientação do Dr. Wilian Francisco de Araujo e da Ms. Jahina Fagundes de Assis Hattori. O projeto consiste de um estudo teórico sobre Álgebra de Lie. Para este estudo, realizamos encontros em forma de seminários semanais, onde discutimos acerca de cada tópico estudado a partir dos materiais (livros e artigos) apontados pelos professores orientadores.

2 INÍCIO DO PROJETO

Após participar de diferentes projetos e programas (Monitoria, PIBID, Projetos de Extensão como o Programa Viver UTFPR, Ciência sem Fronteiras, Gincana da Matemática, entre outros), a Iniciação Científica voluntária surgiu como um novo desafio. O tema "Álgebra de Lie" surgiu como proposta do professor Wilian Francisco de Araujo, que desejava desenvolver um novo trabalho em parceria com a professora Jahina Fagundes de Assis Hattori, ambos do curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente havia dois acadêmicos participando do projeto. E depois, continuamos com apenas um acadêmico e os dois professores orientadores. As atividades iniciaram-se em abril de 2015 e atualmente continuamos desenvolvendo os estudos. Pretendemos encerrar as atividades até o fim do primeiro semestre de 2017.

A proposta inicial era estudar e revisar tópicos de Álgebra Linear, para então abordar tópicos introdutórios da Teoria de Álgebra de Lie. Estudamos tópicos como *Espaço Vetorial*, *Subespaço Vetorial*, *Dependência e Independência Linear*, *Base de um Espaço Vetorial*, *Transformações Lineares*, *Isomorfismos e Automorfismos*, *Matriz de uma Transformação Linear*, *Base de Autovetores*, etc. Portanto, revisamos temas abordados nas disciplinas de Álgebra Linear I e II do curso de Licenciatura em Matemática. E neste ponto, o projeto se mostrou uma possibilidade de revisar conteúdos e associá-los depois com um

assunto que não é trabalhado durante o curso - a Álgebra de Lie.

Durante os primeiros seminários ficou evidente a necessidade de "um interesse particular" pelo tema para que os estudos de fato, trouxessem discussões pertinentes. Não necessariamente era exigida "facilidade", mas empenho e dedicação. Por vezes, ficávamos mais de duas semanas discutindo sobre um mesmo tópico. Mas, com o auxílio dos professores, as dúvidas eram sanadas e avançávamos nos estudos. Assim, pode-se perceber que, muitas vezes estudando para provas durante uma disciplina regular, não há tempo hábil para discutir detalhes sobre os objetos matemáticos e os conceitos abordados, como fizemos nos seminários. Desde o início, a intenção era explicitamente entender o que se estava estudando em detalhes, pois seriam primordiais na discussão do novo assunto. Isso fez toda a diferença para a continuidade do projeto.

3 O TEMA ÁLGEBRA DE LIE

Como encontramos em [1], a Teoria de Lie é atribuída ao matemático norueguês Marius Sophus Lie, que viveu entre 1842 e 1899. Lie teria começado a estudar alguns tipos de transformações geométricas que prometiam ter considerável relevância no estudo subsequente de simetrias. Alguns autores dizem que a Teoria de Lie (Grupos de Lie e Álgebra de Lie) tem provado ser uma das chaves para solucionar muitos problemas relacionados à Geometria e à Equações Diferenciais.

De acordo com [4], uma Álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial g munido de um produto (colchete ou comutador) com as seguintes propriedades: 1) é bilinear; 2) anti-simétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo X pertencente a g (o que implica $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo X, Y pertencentes a g e é equivalente se o corpo de escalares não é de característica dois); e 3) satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todos X, Y, Z pertencentes a g , temos que $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

O espaço \mathbb{R}^3 munido de $[u, v] = u \times v$ (o produto vetorial usual) é uma Álgebra de Lie. Algebricamente durante os seminários verificou-se que: a) $[u, v] = u \times v$ com $u, v \in \mathbb{R}^3$ é bilinear; b) $[u, v] = u \times v$ com $u, v \in \mathbb{R}^3$ é antissimétrico; e c) $[u, v] = u \times v$ com $u, v \in \mathbb{R}^3$ satisfaz a Identidade de Jacobi. Esta verificação era um primeiro exemplo da importância das discussões iniciais sobre Álgebra Linear, por exemplo.

Abordamos no decorrer do projeto, outras definições, além de diferentes exemplos de álgebras e subálgebras de Lie e suas propriedades. Chegamos a encontrar e mostrar novos exemplos e novas demonstrações para pontos que não pareciam tão claros nas leituras feitas de materiais utilizados no estudo. Algo interessante que se percebeu no início dos estudos foi o fato de algumas generalidades algébricas, como morfismos, quociente, e outras, funcionarem da mesma forma como vemos em Álgebra Linear. Por isso, a revisão inicial dos tópicos de Álgebra Linear ajudaram muito no primeiro contato com a nova teoria.

O professor orientador Wilian Francisco de Araujo estudou sobre a Teoria de Lie, e escreveu sua tese de doutorado nesta área. Daí a proposta inicial do tema. Não é um assunto abordado durante nosso curso de Licenciatura em Matemática, mas é um tema possível para proposta de estudo em pós-graduação. Além disso, tendo tempo hábil, pretende-se produzir uma ferramenta em um sistema computacional, a partir de uma proposta na qual a professora Jahina Fagundes de Assis Hattori trabalhou em seu programa de mestrado. Assim, desde o início se configurou um trabalho de equipe abordando o tema de forma teórica. Mas, com o intuito de, ao final, desenvolver também um produto prático, talvez formalizado em um projeto subsequente a este.

4 RESULTADOS DO PROJETO

Além de todas as discussões geradas ao longo dos seminários realizados, temos como resultados diretos deste Projeto de Iniciação Científica, alguns trabalhos apresentados em eventos no decorrer dos últimos semestres. Em abril de 2016, participamos da VIII Jornada de Álgebra, em homenagem aos 70 anos do professor Antonio Paques, em Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Neste evento, apresentamos o pôster intitulado: "Representações Equivalentes e Duais na Álgebra de Lie". O evento contava com a participação de muitos pesquisadores de outros temas em Álgebra, como Álgebra de Hopf. E foi um primeiro contato com a produção de trabalhos mais voltados à área denominada por alguns de "Matemática Pura".

Em outubro de 2016, participamos do IV Encontro de Iniciação Científica (ENDICT), na UTFPR, Campus Toledo, com uma comunicação oral intitulada: "Classificação de Subálgebras de Lie de $gl(2, \mathbb{R})$ ". Desta vez, apresentamos resultados parciais dos estudos realizados até o momento do ENDICT. Um dos objetivos naquele momento era também divulgar o Projeto de Iniciação Científica voluntária para os outros acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

Mais recentemente, estamos indo para a IX Jornada de Álgebra, na Universidade Estadual de Maringá (UEM), em Maringá. O evento está previsto para a primeira semana de maio de 2017. Já estamos inscritos e o trabalho já foi aprovado para apresentação. Apresentaremos novamente um pôster, desta vez com o título: "As subálgebras de Lie de $gl(2, \mathbb{R})$ de dimensão igual a 1, 2 e 3". Sabemos que na UEM, podemos ter mais contato com pesquisadores da Teoria de Grupos e Álgebra de Lie.

Além dos trabalhos apresentados em eventos, é importante citar o fato de o tema Álgebra de Lie ter se tornado o tema de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Os orientadores do projeto se dispuseram a ser orientadores do TCC. E, é perceptível o quanto o Projeto de Iniciação Científica colabora no sentido de deixar as orientações do TCC mais práticas. Muitas dificuldades enfrentadas por outros acadêmicos, não foram vivenciadas, uma vez que, pelo projeto, há contato constante entre orientando e orientadores.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A participação no Projeto de Iniciação Científica voluntária, se mostrou muito produtiva, tanto do ponto de vista quantitativo, quanto qualitativo. Foi possível um estudo mais detalhado de tópicos abordados em aula, no caso da disciplina de Álgebra (cursada durante a vigência do projeto), por exemplo, além de uma boa revisão de Álgebra Linear. Respeitando-se o tempo do acadêmico, principalmente por se tratar de um projeto voluntário, o desenvolvimento do projeto não prejudicou o rendimento acadêmico em aula. Muito pelo contrário, o ritmo de estudo voltou a ser maior e melhor durante os semestres.

O projeto colaborou para uma orientação de TCC muito mais dinâmica do que seria possível na realidade acadêmica de quem trabalha e estuda. Não haveria, por certo, o mesmo tempo dedicado a estes estudos sem a configuração dos seminários no projeto. Além disso, o contato com os orientadores tornou-se mais concreto e frequente, para desenvolvimento de trabalho em conjunto, mas onde cabe ao acadêmico a produção do objeto/trabalho.

A participação em eventos não se mostra importante apenas pela publicação e/ou apresentação de trabalhos, mas também, pela vivência da experiência extracampus, e extra-aula. Pode-se entender mais do que a forma como ocorre este ou aquele tipo de encontro científico. Também tivemos duas experiências diferentes e importantes. Primeiramente, participamos de uma edição anterior da Jornada de Álgebra, em Santa Maria (em 2015), como ouvintes, e daí surgiu a ideia de apresentar um pôster no evento do ano seguinte. Além disso, também encaminhamos trabalho para um outro evento, a XXIV Escola de Álgebra, em 2016, e enfrentamos a situação de a organização não deixar claro se tinha lido o

trabalho e não aceito, ou se não tinha visto a nossa proposta. Mesmo essa experiência foi um importante aprendizado em nível acadêmico, pois se tratava de um evento maior, do qual não tínhamos participado antes.

Acreditamos ser importante divulgar na Semana da Matemática (SEMAT), o que estamos produzindo enquanto projetos voluntários do nosso colegiado. Percebemos que alguns acadêmicos demonstram interesse por projetos de Iniciação Científica mas desconhecem a possibilidade das propostas voluntárias, e também, da disponibilidade dos nossos professores em orientar este tipo de trabalho.

Referências

- [1] BOZA, L. **A historical review of the classifications of Lie Algebras**. Luiz Boza, Eugênio M. Fedriani, Juan Núñez, e Ángel F. Tenorio. Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. 54, No. 2, 2013, Pages 75-99. Published online: December 11, 2013. [traduções do autor].
- [2] BOLDRINI, J. L. **Álgebra linear**. José Luiz Boldrini ... [et al.]. - 3.ed. - São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- [3] CALLIOLI, C. A. **Álgebra linear e aplicações**. Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, Roberto C. F. Costa. - 6.ed.rev. - São Paulo: Atual, 1990.
- [4] SAN MARTIN, L.A.B. **Álgebras de Lie**. 2.ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp. (2010)
- [5] SANTANA, A.J. **Classificação dos grupos de Lie de $Gl(2; \mathbb{R})$ transitivos no plano**. (Notas de Minicurso da XVI Semana Acadêmica de Matemática). Alexandre J. Santana, Wilian F. Araujo e Silvio de O. Barbosa. - Maringá, PR. (2005)

O TEOREMA DE PICK APLICADO AO LAGO DE PALOTINA

Alexandre Welter

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
pocabrascorp@hotmail.com

Pamela Cristina Santana Becker

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
pamela_beker@live.com.pt

Larissa Hagedorn Vieira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
larissavieira@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste em uma explanação sobre o teorema de Pick. A ideia surgiu do Projeto Integrador, o qual consiste num trabalho que relaciona as disciplinas do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo, em que foi desenvolvida uma maquete do Lago de Palotina. Além disso, foi calculada a área visível do lado através do uso do teorema de Pick.

Neste trabalho faremos um breve histórico sobre Georg Pick, uma pequena apresentação do Projeto Integrador, em seguida, apresentaremos o teorema de Pick junto de sua demonstração e, ao final, como exemplo da aplicação do teorema, o cálculo da área do Lago de Palotina.

Este trabalho é baseado nos textos disponíveis em [1], [3] e [2].

2 GEORG PICK

Para essa seção, utilizamos o texto disponível em [2].

Georg Alexandre Pick nasceu na Áustria, no ano de 1859, filho de Adolf Josef Pick e Josefa Schleisinger. Até os onze anos estudou em casa sob tutela de seu pai, após isso foi estudar no Leopoldstaedter Communal Gynasium, onde permaneceu até 1875 quando se qualificou para ingressar na universidade.

Estudou na Universidade de Viena onde se formou em física e matemática. Nessa instituição também conquistou o título de Doutor em Matemática, escrevendo uma tese sobre a classe de integrais abelianas. Em seguida se tornou professor da Universidade Alemã em Praga, onde lecionou principalmente matemática e física.

Foi um renomado matemático, tendo feito parte da Academia Tcheca de Ciências e Artes. Se aposentou em 1929 e foi morar em Viena, mas quando Áustria foi ocupada durante a segunda guerra, acabou partindo para Praga. Em 1942, foi capturado e deportado, sendo enviado para o campo de concentração em Theresienstadt no dia 13 de julho do mesmo ano, onde veio a falecer duas semanas mais tarde.

3 PROJETO INTEGRADOR

O Projeto Integrador, é uma proposta de atividade para os alunos do 3º período do curso de Licenciatura em Matemática na UTFPR - Campus Toledo, que consiste em um roteiro de trabalho envolvendo as disciplinas de Geometria 2, Libras 2, Didática Geral, Fundamentos da Matemática 2, Laboratório de Matemática e Cálculo Integral. Nesse projeto os alunos devem abordar um problema proposto pelos professores deste período.

No segundo semestre de 2016, o problema a ser investigado foi “Qual a área total da parte visível (com água) do lago municipal?”, na qual os grupos deveriam obter uma visão superior do lago, construir uma maquete, glossário com sinais de Libras como o contexto do trabalho, calcular a área visível do lago utilizando cálculo integral e também utilizando conceitos de geometria elementar, ao qual foi usado o teorema de Pick.

4 O TEOREMA DE PICK

Para essa seção, utilizamos os textos disponíveis em [1] e [3].

O Teorema de Pick foi provado por volta de 1899. Este teorema e nos fornece um método para calcular a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede, por meio da contagem do número de seus pontos de fronteira (borda) e do número de seus pontos inteiros. Antes de estudar o teorema precisamos definir alguns conceitos.

Definição 4.1. *Uma rede de pontos no plano consiste de um subconjunto do plano formado pelos pontos (x, y) , onde x e y são números inteiros.*

Definição 4.2. *Seja P um polígono de n lados cujos vértices são pontos da rede, dizemos que (x, y) é um ponto da borda de P se ele pertence ao lado do polígono ou é um de seus vértices.*

Definição 4.3. *Seja P um polígono de n lados cujos vértices são pontos da rede, dizemos que (x, y) é um ponto interior de P se ele pertence interior do polígono P .*

Definição 4.4. *Seja T um triângulo sobre a rede. Chamamos o triângulo de **triângulo fundamental** se ele possui somente os três pontos de vértices e mais nenhum outro ponto (da borda ou no interior).*

Além das definições acima, precisaremos do seguinte lema.

Lema 4.5. *A área do triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$.*

Assim, temos o Teorema de Pick.

Teorema 4.6. *Dado um polígono P no plano cartesiano cujos vértices são pontos de uma rede no plano, então a área do polígono P é dada por:*

$$A_P = \frac{B}{2} + I - 1.$$

onde B é o número de pontos situados sobre a borda do polígono, e I é o número de pontos da rede situados no interior do polígono.

Demonstração:

Um resultado que utilizaremos é que todo polígono com vértices na rede pode ser decomposto em triângulos fundamentais. Para o teorema de Pick precisamos contar o número n de triângulos fundamentais em que o polígono pode ser decomposto, e então multiplicar esse número n pela sua área, que como vimos vale $\frac{1}{2}$.

Seja B o número de pontos sobre o bordo de um polígono P com n lados. Temos então a contribuição em ângulos de $(B - n) \cdot 180^\circ$ dos pontos sobre os lados e de $(n - 2) \cdot 180^\circ$ dos pontos sobre os vértices. Além disso, sendo I o número de pontos internos a P , sua contribuição em ângulos é de $I \cdot 360^\circ$.

Se somarmos as três contribuições em ângulos acima, teremos então a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais justapostos contidos em P , ou seja,

$$(B - n) \cdot 180^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ + I \cdot 360^\circ = (B - 2 + 2I) \cdot 180^\circ.$$

Sendo T o número de triângulos fundamentais contidos nesses polígonos, a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais justapostos contidos em P é dada por $T \cdot 180^\circ$.

Portanto, temos a seguinte situação:

$$(B - 2 + 2I) \cdot 180^\circ = T \cdot 180^\circ,$$

ou seja,

$$T = B - 2 + 2I.$$

Do lema (4.5), temos que a área do polígono P é dada por:

$$A_P = T \cdot \frac{1}{2}.$$

Sabendo que $T = B - 2 + 2I$, segue que a área do polígono P é dada por:

$$A_P = (B - 2 + 2I) \cdot \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$A_P = \frac{B}{2} + I - 1.$$

5 CÁLCULO APROXIMADO DA ÁREA DO LAGO

A Figura 1 mostra a vista aérea do Lago de Palotina, da cidade de Palotina-PR.

Figura 1: Lago de Palotina



Fonte: google.com/maps

Observe que a **Figura 1** está na escala onde 2 *cm* representa 12 *m* em tamanho real. Para aplicarmos a fórmula de Pick à área do Lago de Palotina, necessitamos de uma rede de pontos, para isso utilizamos o programa *Geogebra*, no qual ficamos com o seguinte resultado:

Figura 2: Lago de Palotina na rede de pontos



Fonte: do autor

É importante observar que cada quadrado na nossa rede possui 2 *cm* de lado. Além disso, é importante ressaltar que os dados levantados geram uma aproximação da área do Lago de Palotina.

Assim, o primeiro passo é contar o número de pontos da malha que preenchem o interior da **Figura 2**, que são 47 pontos. O segundo passo é contar o número de pontos sobre a rede, onde encontramos 9 pontos. Logo, a área do lago de Palotina é, aproximadamente, dada por

$$A_P = \frac{1}{2} \cdot 9 + 47 - 1 = 50,5.$$

Assim, encontramos que área do polígono construído referente ao lago de Palotina é 50,5 *cm*². Porém, como foi verificado durante a elaboração do projeto integrador, na escala utilizada nosso triângulo fundamental tem área 2 *cm*² e, em tamanho natural, 2 *cm* representa 12 *m*. Logo, temos que a área calculada é:

$$A_P = 50,5 \cdot 2 \cdot 720000 = 72720000 \text{ cm}^2.$$

Portanto, a área aproximada do lado de Palotina é, aproximadamente, 7272 *m*².

6 CONCLUSÃO

Com o projeto integrador tivemos a oportunidade de articular os conteúdos com várias disciplinas, assim contribuindo para a verificação de que um mesmo problema pode ser abordado de diversas maneiras. Outra contribuição do projeto foi a oportunidade de conhecer o teorema de Pick, que passou a ser o enfoque do trabalho.

Com isso encontramos uma importante ferramenta no teorema de Pick, que propiciou uma nova maneira de calcular a área de polígonos e de aproximar áreas de regiões planas, principalmente em casos

em que nos deparamos com regiões não poligonais, onde há uma certa dificuldade de medir comprimento de seus lados.

Referências

- [1] **O Teorema de Pick.** Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/14606/pdf>. Acesso em 12 de abril de 2017.
- [2] **O Teorema de Pick.** Disponível em <http://docplayer.com.br/28158542-Rodrigo-pereira-carvalho-teorema-de-pick.html>. Acesso em 12 de abril de 2017.
- [3] **O Teorema de Pick: Uma Nova Abordagem Sobre Áreas de Figuras Planas para o Ensino Básico.** Disponível em http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/866/2011_00643_FABRICIO_OLIVEIRA_SOUZA.pdf?sequence=1. Acesso em 12 de abril de 2017.

AS RELAÇÕES ENTRE A DUPLICAÇÃO DO CUBO E OS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Vinícius Schaedler Damin¹
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
vinischaedler@live.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

A matemática foi e continua sendo uma das mais importantes ciências que existem, tendo diversas aplicações em inúmeras áreas, porém, até chegar em seu estado atual foi necessário muito desenvolvimento. As razões que levam ao desenvolvimento podem ser amplamente discutidas, indo desde simples curiosidades até questões e impasses sobre assuntos que perduram discussões até hoje, como por exemplo, a duplicação do cubo, cuja discussão remonta os geômetras gregos, é retomada no período cartesiano e ainda hoje é motivo de polêmicas.

No presente texto, faremos um breve retrospecto histórico sobre o assunto. Vale lembrar que esse problema está inserido no contexto dos três problemas clássicos gregos: a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Segundo alguns historiadores matemáticos (HEATH, 1981a; HEATH, 1981b; ALLMAN, 1889; KNORR, 1993; THOMAS, 1957a; THOMAS, 1957b), não há uma origem exata sobre eles, porém existem lendas sobre como surgiram, datando sua existência do século V a.C.. Na sequência, citamos algumas dessas lendas juntamente com uns poucos métodos utilizados para resolver o problema. É importante notar que para a resolução desses problemas é aceitável somente o uso dos instrumentos euclidianos, ou seja, uma régua não graduada, cuja única função é traçar uma reta entre dois pontos e um compasso², o qual pode traçar circunferências e transportar segmentos, por isso, neste trabalho, será utilizado o software GeoGebra, de modo que seja possível representar algumas construções, a fim de permitir mostrar o passo a passo da construção/demonstração.

¹ Agradecimentos ao CNPq pelo apoio financeiro e concessão de bolsas.

² O compasso euclidiano é diferente do que existe atualmente, pois quando uma de suas hastes se levantava do papel ele desmontava-se, o que tornaria impossível transportar segmentos, todavia esta última função ainda é aceita na resolução dos três problemas gregos.

A régua e compasso se chamam instrumentos euclidianos, pois foram apenas eles que foram utilizados nos *Elementos* de Euclides³ e, a razão para essa restrição foi de ordem pedagógica, ou seja, utilizando circunferências e retas, não era necessária nenhuma explicação adicional, como seria necessário ao utilizar curvas geométricas, cônicas ou construções geométricas, por exemplo, fazendo então, a resolução do problema ficar muito mais simples (SCHUBRING; ROQUE, 2014). Todavia, ainda era possível utilizar os citados acima caso fosse necessário para a resolução do problema.

Na sequência apresentamos a noção de números construtíveis atrelada a construtibilidade/resolução da duplicação do cubo. Por fim, apresentamos nossas conclusões a respeito dessas discussões e apontamos novos caminhos.

A HISTÓRIA POR TRÁS DO PROBLEMA

De acordo com Merli (2016, p. 28),

os escritos aos quais os historiadores tiveram acesso sobre esse problema advêm de relatos de Eratóstenes de Cirene, que viveu no século III a.C. Entre tais escritos está uma de suas obras chamada *Platonicus*, em que apresenta uma solução mecânica ao problema utilizando o mesolábio.

Conforme essa obra, existe uma lenda segundo a qual em 427 a.C. Péricles teria morrido de peste e muitos Atenenses também. E, para tentar resolver esse problema procuraram o oráculo de Apolo em Delos⁴. O oráculo disse que era necessário que dobrassem o volume do cubo que sustentava a estátua do deus Apolo para acabar com a peste, o povo obedeceu e por fim dobraram as medidas do cubo, porém, ao fazerem isso não conseguiram dobrar o volume, mas tornaram seu volume oito vezes maior. Diz a lenda que a verdadeira intenção de Apolo era a de envergonhar os gregos por sua falta de atenção com a matemática, em especial a geometria.

Outra possível lenda diz que o Rei Minos mandou construir um túmulo para seu filho Glauco, porém depois de construído, ele o achou muito pequeno e mandou o refazer de forma que dobrasse de volume. O que foi feito então foi a duplicação de cada aresta do cubo, resultando em um túmulo oito vezes maior e, não duas vezes maior como ordenado.

Em uma linguagem mais atual, podemos enunciar o problema da seguinte maneira: “dada uma aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo, tendo o dobro do volume do primeiro” (MERLI, 2016, p. 28). Inúmeras pessoas, desde os antigos gregos até matemáticos do século XIX tentaram resolver esse problema, mas nunca obtiveram sucesso devido à restrição aos instrumentos euclidianos. “Só a partir dos

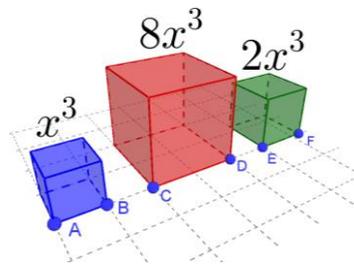
³ Tecnicamente, Euclides nunca deixa explícita a restrição à régua e compasso, porém em *Os Elementos* ele faz uso somente de circunferências e retas.

⁴ Por isso também é chamado de Problema Deliano ou Problema da Cidade de Delos.

trabalhos em álgebra de Ruffini, Abel, e Galois, no século XIX, demonstrou-se que é impossível fazer tal construção” (LUCERO, 2006, p.1-2), porém tais esforços – para resolver um problema que agora é dito como impossível – foram essenciais para o desenvolvimento da matemática em várias áreas, especialmente na geometria, pois através de problemas como esses, novas ideias e formas de analisar informações surgiram.

Utilizando o software GeoGebra é possível ilustrar o problema da duplicação do cubo referente às lendas (Figura 1). O cubo de aresta AB é o que foi desejado dobrar. O cubo de aresta CD é o resultado que obtiveram dobrando as arestas e o cubo de aresta EF era o que procuravam encontrar.

Figura 1 – Cubos referentes às lendas⁵



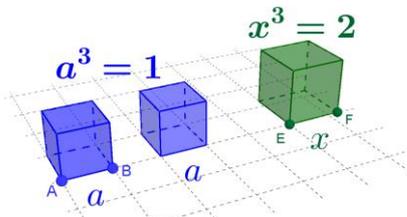
Fonte: Dos autores

Entendendo o contexto histórico podemos discutir mais facilmente sobre o problema em si. Com a álgebra que conhecemos hoje podemos concluir que para duplicar um cubo é necessário achar a $\sqrt[3]{2}$ e multiplicar esse valor pela aresta do cubo dado, obtendo assim a aresta do cubo que tem o dobro do volume. Para chegar neste resultado, primeiro elaboramos uma equação que represente o que se quer do problema, por exemplo:

$$2a^3 = x^3 \quad (1)$$

onde a é aresta do cubo dado e x é aresta do cubo desejado. O número 2 representa que o volume do cubo de aresta x é igual a duas vezes o volume do cubo de aresta a (Figura 2).

Figura 2 – Exemplo da operação (1)



Fonte: Dos autores

Partindo de (1) e extraindo a raiz cúbica dos dois lados, obtemos:

⁵ Todas as imagens desde artigo foram produzidas utilizando o software GeoGebra.

$$\sqrt[3]{2a^3} = x \quad (2)$$

logo, temos que:

$$a\sqrt[3]{2} = x \quad (3)$$

Assim, podemos confirmar que, para criarmos um cubo com o dobro do volume de um cubo de aresta a , simplesmente fazemos a multiplicação $a \cdot \sqrt[3]{2}$. Desse modo, conseguimos o valor da aresta do nosso cubo, ou seja, duas vezes maior. Portanto, o valor de x na figura anterior será de $\sqrt[3]{2}$, pois $a = 1$. Após chegarmos a essa conclusão, descobrimos que tal problema é impossível de ser realizado somente com régua não graduada e compasso, pois $\sqrt[3]{2}$ não pode ser “construído”, como veremos mais adiante. Vejamos, antes disso, as tentativas gregas de solução para esse problema.

AS TENTATIVAS GREGAS DE RESOLUÇÃO

Sabemos que eles não tinham nenhum método para construir a $\sqrt[3]{2}$ diretamente, então para conseguir resolver o problema tiveram que usar de muita criatividade, um dos maiores passos adiantes para a sua resolução se deve a Hipócrates de Quios, um matemático grego do século V a.C que se envolveu diretamente com os três problemas clássicos gregos.

Segundo Heath (1981a, p. 245, tradução nossa), Hipócrates de Quios “descobriu pela primeira vez que, se pudermos encontrar uma maneira de encontrar dois meios proporcionais entre duas retas, o maior deles sendo o dobro do menor, o cubo ficará duplicado; ou seja, o problema foi transformado em algo não menos complexo”⁶. O que ele propôs foi que, achar o valor da aresta do cubo de volume duplicado é igual achar duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2, onde x seria a aresta desejada⁷.

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2} \quad (4)$$

utilizando as duas primeiras razões de (4) vemos que

$$x^2 = y \quad (5)$$

multiplicando os dois lados da igualdade por x , temos

$$x^3 = xy \quad (6)$$

agora utilizando a primeira e terceira razão de (4) obtemos

$$xy = 2 \quad (7)$$

⁶ Original: For a long time all their efforts were vain; then Hippocrates of Chios discovered for the first time that, if we can devise a way of finding two mean proportionals in continued proportion between two straight lines the greater of which is double of the less, the cube will be doubled; that is, one puzzle was turned by him into another not less difficult.

⁷ O número 1 seria a aresta do cubo dado e o número 2 indica que teríamos um cubo com volume dobrado.

substituindo xy no item (6) temos que

$$x^3 = 2 \quad (8)$$

por fim

$$x = \sqrt[3]{2}. \quad (9)$$

Podemos ver que conseguimos exatamente o valor que precisávamos para duplicar um cubo, mas o que Hipócrates de Quios conseguiu ao transformar esta igualdade $x = \sqrt[3]{2}$ em uma proporção?

Ao reduzir o problema da duplicação do cubo para uma simples proporção entre três razões, muitas portas foram abertas para os geômetras gregos, pois o que antes era a tentativa de achar um número não construtível de uma forma inovadora, virou, em sua maior parte, a tentativa de achar essas proporções por meio de construções geométricas e curvas. Porém, eles somente conseguiram isso em construções e curvas⁸ que não podiam ser construídas utilizando somente os instrumentos euclidianos, provando novamente, a impossibilidade de resolver o problema.

Vale ressaltar, que há outras tentativas de se resolver esse problema, como por exemplo, o de Diócles, o qual “[...] apresenta dois métodos para a duplicação do cubo: o primeiro reproduz simplesmente uma forma alternativa ao método das duas parábolas de Menaecmus, enquanto o segundo utiliza uma curva especial, conhecida nos tempos modernos com o nome de cissóide” (KNORR, 1993, p. 234, tradução nossa).

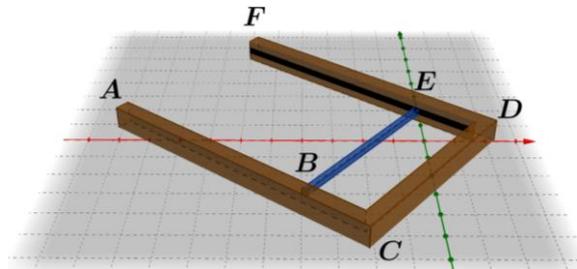
Outro geômetra matemático e filósofo grego que se empenhou em tentar resolver o problema foi Platão, que viveu de 429 a 347 a.C., tendo uma influência enorme no âmbito da matemática, se envolveu com matemáticos e geômetras notáveis, até mesmo outros que tiveram diferentes ideias para a resolução do problema da duplicação do cubo, como, por exemplo, Árquitas e Menecmo (HEATH, 1981a).

“Devido à valorização da matemática teórica, Platão desprezava as construções mecânicas, ao passo que as retas e os círculos, por possuírem propriedades especiais, seriam figuras mais aceitáveis do que as outras” (SCHUBRING; ROQUE, 2014, p. 93). De acordo com Plutarco, Platão teria criticado Árquitas, Eudoxo e Menecmo por terem reduzido o problema da duplicação do cubo a construções mecânicas (SCHUBRING; ROQUE, 2014). Existem então, duas teorias sobre o porquê do nome “máquina de Platão”, a primeira diz que Platão a inventou para provar como era fácil desenvolver soluções desse tipo, mas a teoria mais aceita é que esta solução foi incorretamente atribuída a Platão, pois, como

⁸ Tais construções se chamam “construções mecânicas”, e as curvas de “curvas mecânicas”, pois diferentemente de outras curvas, elas não tinham equação alguma que as definissem.

salienta Heath (1981a, p. 255), “Platão reprovou as soluções mecânicas por estas destruírem a virtuosidade da geometria”. E, portanto, seria de estranhar que ele próprio apresentasse uma solução dentro dos parâmetros que reprovava.

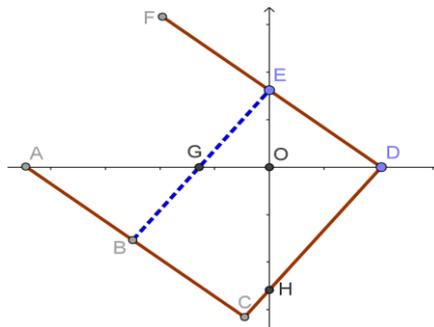
Figura 3 – Modelagem da máquina de Platão



Fonte: Dos autores

A máquina de Platão é formada por partes rígidas, como mostra a Figura 3, de modo que AC é paralelo a FD e perpendicular a CD e BE e de forma que BE pode deslizar livremente entre FD e AC .

Figura 4 – Máquina de Platão sobre o plano cartesiano.



Fonte: Dos autores

Para acharmos as meias proporcionais com essa construção, movemos ela de modo que D fique sobre o eixo das abcissas, E fique sobre o eixo das ordenadas, o segmento BE intersecte o eixo X em G e o segmento CD intersecte o eixo Y em H , como mostra a Figura 4. Com isso teremos que o segmento EO e o segmento DO são as meias proporcionais entre \overline{GO} e \overline{HO} . Para provarmos isso basta ver que os triângulos GOE , EOD e DOH são semelhantes⁹, logo, podemos desenvolver uma proporção entre os catetos deles.

Ao utilizar os triângulos GOE e EOD , temos que:

$$\frac{\overline{GO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{DO}} \quad (10)$$

e ao usarmos os triângulos EOD e DOH , obtemos

⁹ Exemplo para provar a semelhança: $\widehat{GEO} + \widehat{DEO} = 90^\circ$ e, devido a soma dos ângulos internos de um triângulo ser de 180° , $\widehat{EDO} + \widehat{DEO} = 90^\circ$, então $\widehat{GEO} + \widehat{DEO} = \widehat{EDO} + \widehat{DEO}$, por fim $\widehat{GEO} = \widehat{EDO}$. Podemos repetir esses passos para os três triângulos e veremos que todos possuem ângulos iguais, logo, são semelhantes.

$$\frac{\overline{EO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{HO}} \quad (11)$$

por fim, ao transformarmos (10) e (11) em uma igualdade só, tendo que

$$\frac{\overline{GO}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{DO}}{\overline{HO}} \quad (12)$$

com isso provamos que esta construção é capaz de resolver o problema da duplicação do cubo.

A máquina de Platão, contudo, não se restringe à duplicação de um cubo dado, ela é capaz de multiplicar em quantas vezes quisermos o volume de um cubo, ou seja, se desejarmos fazer um cubo com o volume triplicado ou até mesmo dividido por dois, ela nos permite. Para demonstrarmos isso voltamos com a proporção que Hipócrates de Quios desenvolveu

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2} \quad (13)$$

para generalizarmos ela a fim de podermos escolher o valor da aresta do nosso cubo dado a e o valor que queremos multiplicar nosso cubo b , temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{ba} \quad (14)$$

logo

$$x^2 = ay \quad (15)$$

multiplicando os dois membros por x , obtemos

$$x^3 = axy \quad (16)$$

vendo que

$$xy = ba^2 \quad (17)$$

substituímos (17) em (16), resultando em

$$x^3 = aba^2 \quad (18)$$

por fim, temos que

$$x^3 = ba^3 \quad (19)$$

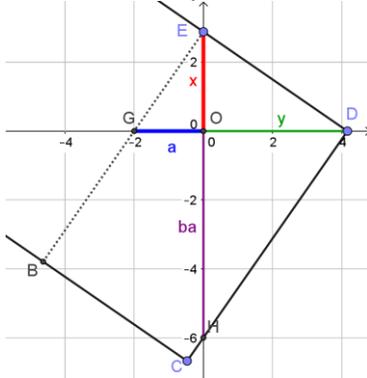
ou seja, o volume de nosso cubo de aresta x será igual o volume do cubo de aresta a vezes b .

Utilizando o software GeoGebra é possível mostrar um exemplo do que acabou de ser descrito. Suponhamos que se queira triplicar o volume de um cubo com aresta $a = 2$, ou seja, $x^3 = 3 * 2^3$. Substituindo $a = 2$ e $b = 3$ na equação (17) temos que

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{3*2} \quad (20)$$

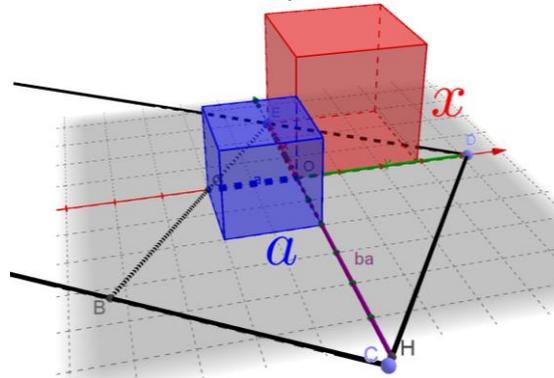
por fim ao computar os valores no GeoGebra é obtido a sua representação no plano cartesiano (Figura 5) e o modelo 3D dela (Figura 6).

Figura 5 – Exemplo da equação¹⁰ (20) conforme a máquina de Platão.



Fonte: Dos autores

Figura 6 – Modelagem 3D da equação (20) conforme a máquina de Platão.



Fonte: Dos autores

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

O conjunto dos números construtíveis consiste em números que podem ser construídos¹¹ somente com o uso régua não graduada e compasso através de um número finito de passos, ou seja, eles podem ser obtidos com um número finito de operações, estas sendo apenas a adição, a subtração, a divisão, a multiplicação e a extração da raiz quadrada da unidade de medida utilizada. Para melhor entendimento sobre a última operação, será demonstrado como ela funciona geometricamente.

Se a é construtível, a raiz quadrada de a também é. Para provarmos isto, será mostrado o método para a construção de raízes de acordo com a Figura 7. Supondo que $AB = a$, primeiramente posicionamos o segmento AB sobre uma reta r e depois construímos nosso segmento unitário $BC = 1$, de modo que C pertença a reta r e não esteja entre A e B . Achamos então o ponto médio O entre A e C e então traçamos uma semicircunferência de raio OC e centro em O . Por fim, traçamos uma reta perpendicular a r passando pelo ponto B e chamamos a intersecção dela com a semicircunferência de D . Podemos ver que ADC é um triângulo retângulo¹², logo, utilizaremos a relação métrica que diz que, a altura de um triângulo retângulo ao quadrado, com a base sendo a hipotenusa, é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (21)$$

como $\overline{BC} = 1$, temos

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB} \quad (22)$$

¹⁰ O valor de x fica igual a aproximadamente 2,884499141.

¹¹ Um número x é construtível se conseguirmos criar um segmento AB com comprimento x .

¹² Pois todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

extraíndo a raiz quadrada dos dois lados obtemos

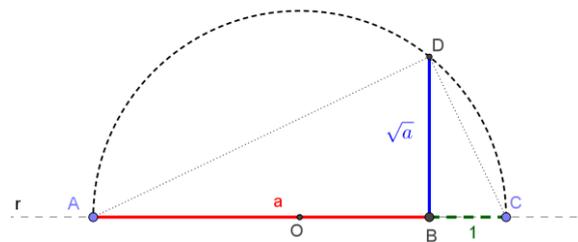
$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}} \quad (23)$$

ou

$$\overline{BD} = \sqrt{a} \quad (24)$$

provando então que se a é construtível, \sqrt{a} também é construtível. Mais ainda, se \sqrt{a} é construtível, $\sqrt{\sqrt{a}}$ também é¹³. No caso geral, qualquer número construtível tem suas raízes com índice de potência de 2 também construtíveis.

Figura 7 – Método para a extração da raiz quadrada.



Fonte: Dos autores

RELAÇÃO ENTRE A DUPLICAÇÃO DO CUBO E OS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Sabendo que as quatro operações básicas quando manejadas com números construtíveis geram números construtíveis, podemos afirmar que todo o conjunto \mathbb{Q}^+ é construtível, pois qualquer número racional pode ser expresso por uma razão de números inteiros e qualquer número inteiro pode ser obtido pela adição ou subtração de um segmento unitário. Mas eles não se limitam somente aos racionais, pois como sabemos que a extração da raiz de um número pertencente ao conjunto dos construtíveis também gera um número construtível, podemos concluir que toda raiz (com índice sendo uma potência de 2) de um número racional gera um número construtível. Logo, Savioli (2007) afirma o seguinte teorema: “Todo número construtível é algébrico (sobre os racionais) e seu grau é uma potência de 2” (SAVIOLI, 2007). Em outras palavras, todo número construtível é a solução positiva de um polinômio com coeficientes racionais e este polinômio pode ter seus membros elevados a qualquer número que seja uma potência de dois¹⁴.

¹³ Podemos provar isso refazendo a construção, simplesmente colocamos \sqrt{a} como sendo AB e o nosso segmento DB nos dará a $\sqrt{\sqrt{a}}$ ou $\sqrt[4]{a}$. Se continuarmos com este processo conseguiremos $\sqrt[8]{a}$, $\sqrt[16]{a}$, $\sqrt[32]{a}$, ...

¹⁴ Por exemplo, apesar de $\sqrt{2}$ ser um número irracional, ela é a solução para o polinômio $x^2 - 2 = 0$ e como tal polinômio tem coeficientes sendo -2 e 1 (pertencem ao conjunto dos racionais) e o grau de sua potência é 2, ou seja, ele obedece o teorema, logo $\sqrt{2}$ é construtível.

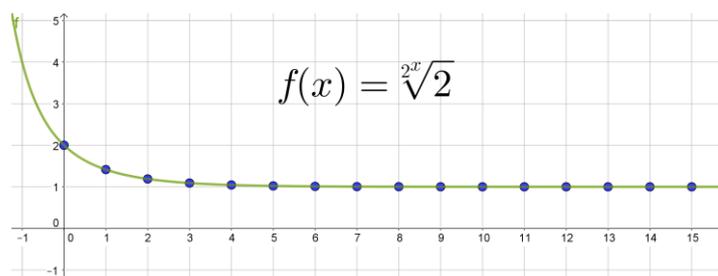
Como já discutido, o que impossibilita a duplicação do cubo é a necessidade de construirmos $\sqrt[3]{2}$, por isso, foram criados instrumentos e curvas que conseguissem achar essa medida, pois se utilizássemos somente régua não graduada e compasso conseguiríamos apenas uma aproximação, mas como poderíamos fazer tal aproximação?

Houve inúmeras ideias inovadoras que partiram de grandes matemáticos para resolver esse problema de modo aproximativo. O método mostrado a seguir é apenas uma maneira extremamente simples e ordinária para se conseguir isso.

Tendo $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ e sabendo que ao multiplicarmos ou dividirmos potências de bases iguais, os expoentes são somados ou subtraídos, respectivamente. Assim, escolhamos potências de base dois e tentamos multiplicá-las ou dividi-las de modo que consigamos no expoente uma razão de $\frac{1}{3}$.

Sabendo que todas as raízes com índices sendo em potência de 2 são construtíveis, temos, por exemplo, que $2^n\sqrt[2]{2}$ é construtível desde que $n \in \mathbb{N}$ (Figura 13).

Figura 13 – Função onde a coordenada y dos pontos representa uma raiz construtível.



Fonte: Dos autores

O pretendido a fazer então é multiplicar os valores das raízes de 2 obtidos a partir de n , afim de se aproximar da $\sqrt[3]{2}$. Para o exemplo a seguir utilizaremos $2^n\sqrt[2]{2}$ com $n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 5$.

Quadro 1 – Dados para a tentativa de aproximação da duplicação do cubo

Substituição de n na raiz	Raiz construtível	Raiz em forma de potência	Substituição da razão com o mmc
$2^1\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[2]{2}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$\frac{16}{2^{32}}$
$2^2\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$\frac{8}{2^{32}}$
$2^3\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[8]{2}$	$2^{\frac{1}{8}}$	$\frac{4}{2^{32}}$
$2^4\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[16]{2}$	$2^{\frac{1}{16}}$	$\frac{2}{2^{32}}$
$2^5\sqrt[2]{2}$	$\sqrt[32]{2}$	$2^{\frac{1}{32}}$	$\frac{1}{2^{32}}$

Fonte: Dos autores

Ao analisarmos somente a $2^{5\sqrt{2}}$, vemos que a razão em seu expoente está $\frac{1}{32}$, para transformarmos¹⁵ em $\frac{1}{3}$, primeiro temos que achar a terça parte de 32, porém, $32 \div 3 = 10,666\dots$

Logo, não há maneira alguma de se somar os numeradores obtidos nos expoentes para conseguir 10,666...¹⁶. Todavia, como queremos somente uma aproximação e o número inteiro mais próximo de 10,666... é 11, devemos multiplicar apenas algumas das potências obtidas. Podemos prosseguir multiplicando $2^2\sqrt{2}$, $2^4\sqrt{2}$ e $2^5\sqrt{2}$

$$2^{\frac{8}{32}} \cdot 2^{\frac{2}{32}} \cdot 2^{\frac{1}{32}} = 2^{\frac{11}{32}} \quad (25)$$

Como $2^{\frac{1}{3}} \cong 1,259921050$ e $2^{\frac{11}{32}} \cong 1,269050957$ vemos que essa aproximação resultou em um erro menor que 0,0092. Se utilizássemos $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 7\}$ poderíamos obter uma aproximação com erro menor que 0,0023, ou seja, quanto maior nosso n menor será o erro obtido, então se $n = \infty$, seria nosso erro 0?

O que se pode afirmar com certeza é que, como um número só é construtível se pode ser criado através de um número finito de movimentos com os instrumentos euclidianos, nunca seria possível obter ter a raiz $2^{\infty}\sqrt{2}$, pois tal construção requer um número infinito de passos, logo, sempre teríamos um erro ao utilizarmos este método, o que prova novamente que tal “solução” não passa de apenas uma aproximação e a duplicação do cubo é um problema impossível de ser solucionado.

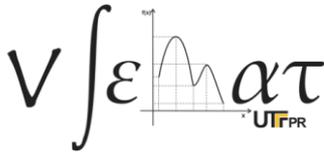
CONCLUSÕES

Nesse artigo, fizemos um breve histórico sobre o problema da duplicação do cubo, bem como apresentamos sua possível origem a partir das lendas do Oráculo de Delos e do rei Minus. Na sequência apresentamos a “solução” atual algébrica e as tentativas dos geômetras gregos para o problema. Em especial mostramos a habilidade de Hipócrates de Quios em reduzir o problema da duplicação a encontrar a solução para as duas meias proporcionais e a construção da possível “Máquina de Platão”.

Em seguida, fizemos uma pequena discussão sobre números construtíveis e provamos que qualquer número construtível tem suas raízes com índice de potência de 2 também construtíveis. Isso nos permitiu mostrar que a solução para o problema da

¹⁵ Ao escrever transformarmos, está querendo-se dizer que tentará ser feito multiplicações de potências de modo que ocorra a mudança desejada em seu expoente.

¹⁶ Isso acontece em todos os resultados possíveis, pois a razão que estará no expoente será sempre de $\frac{1}{2^n}$ com n pertencendo aos naturais, e qualquer potência de 2 ao ser dividida por 3 nunca resultará em um número inteiro.

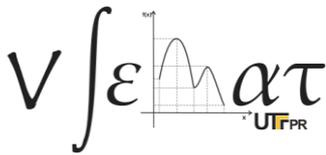


duplicação do cubo não é possível, já que $\sqrt[3]{2}$ não se enquadra nessa categoria e necessitaria de um número infinito de passos para ser alcançado, o que contradiz com a definição de número construtível.

Por fim, vale ressaltar que não foi possível apresentar todas as tentativas gregas de solução para o problema de duplicação do cubo, nem apresentar um cuidadoso histórico sobre os números construtíveis devido às limitações de tamanho do texto, contudo, em outros trabalhos, apresentaremos de forma mais detalhada essas discussões.

REFERÊNCIAS

- ALLMAN, George Johnston. **Greek geometry: from Thales to Euclid**. London: Longmans, Green & CO. Partneroster-Row, 1889.
- EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics**, Volume I: From Thales to Euclid. New York: Dover Publications, 1981a.
- . **A History of Greek Mathematics**, Volume II: From Aristarchus to Diophantus. New York: Dover Publications, 1981b.
- KNORR, Wilbur Richard. **The ancient tradition of geometric problems**. Boston: Birkhäuser, 1993.
- LUCERO, Jorge. **O Problema Deliano**. p.1-2, 8 jan. 2006. Disponível em: <http://www.mat.unb.br/~lucero/origami/Notas_2.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2017.
- MERLI, Renato Francisco. **A distinção cartesiana entre Curvas Geométricas e Curvas Mecânicas**. 2016. 130 p. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Toledo, 2016.
- SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. Números Construtíveis, 2007. In: Semana da Matemática, XXIII, 2007, Londrina, **Anais...** Londrina: UEL. Disponível em: <<http://www.uel.br/eventos/semanadamatematica/semana2007/linkprog/mc3-num-construtivéis.pdf>>. Acesso em: 6 fev. 2017.
- SCHUBRING, Gert; ROQUE, Tatiana. O papel da régua e do compasso nos Elementos de Euclides: uma prática interpretada como regra. **História Unisinos**, [s.l.], v. 18, n. 1, p.92-102, 24 jun. 2014. UNISINOS - Universidade do Vale do Rio Dos Sinos. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.4013/htu.2014.181.09>>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- THOMAS, Ivor. **Greek Mathematics**. Vol. I – from Thales to Euclid. Cambridge: Harvard University Press, 1957a.
- THOMAS, Ivor. **Greek Mathematics**. Vol. II – from Aristharcus to Pappus. Cambridge: Harvard University Press, 1957b.



UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES POR MEIO DO APLICATIVO “FRAÇÃO - PASSO A PASSO”

Simone Ribeiro da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
simone.ribeiro96@hotmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

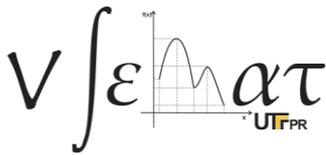
Tendo em vista as possibilidades que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) podem oferecer ao processo de ensino e aprendizagem ao serem utilizadas de modo adequado na sala de aula, isto é, de modo que seu uso realmente propicie aprendizagens, inclusive no ensino de matemática, o presente trabalho traz uma proposta de ensino sobre o conteúdo de Frações a ser desenvolvida com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, a partir do uso do celular, em específico do uso de um aplicativo de cálculo de frações, o chamado “Fração - Passo a Passo”, que pode ser baixado no *Google Play*¹.

A escolha de desenvolver uma proposta de ensino sobre o conteúdo de Frações se deu por reconhecer que este é um conteúdo que os alunos da Educação Básica apresentam muitas dificuldades, tanto no entendimento do significado dos números racionais (na forma fracionária²), quanto das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com esses números. Dessa forma percebeu-se necessário possibilitar uma forma diferente de abordar esse conteúdo, com o intuito de favorecer sua aprendizagem.

Nessa proposta, iremos apresentar como poderíamos utilizar o aplicativo escolhido para trabalhar de modo investigativo com as operações de adição e multiplicação com números fracionários, numa perspectiva de resgate de conteúdo, ou seja, estamos partindo do pressuposto que os alunos já tenham visto o conteúdo de Frações. Assim, este trabalho irá apresentar algumas considerações sobre as TIC no ensino de matemática, os conteúdos de Frações que poderiam ser revisados com o aplicativo, algumas considerações

¹ Utilize o link para baixar: <https://goo.gl/yOKu4c>.

² Utilizaremos ao longo do texto o termo “números fracionários” como simplificação e melhores adequações ao termo “números racionais”, para reforçar a ideia de que estamos trabalhando com a forma fracionária.



necessárias sobre aplicativo, em seguida a proposta de ensino e, por fim, as considerações finais.

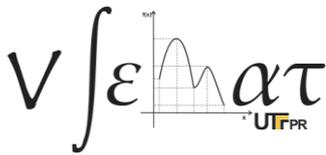
TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Com o passar do tempo novas tecnologias foram, e estão sendo, criadas com o propósito de beneficiar o homem a viver melhor. Não obstante, a escola tende a incorporar essas tecnologias a fim de possibilitar melhores condições de aprendizagem aos alunos. E neste caso, as tecnologias “recentes”, que são caracterizadas como digitais, em particular as de comunicação e informação, passaram a ser investigadas para uso em sala de aula.

Assim, para a incorporação das TIC em sala de aula, faz-se necessário identificar que “o simples acesso à tecnologia, em si, não é o aspecto mais importante, mas sim, a criação de novos ambientes de aprendizagem e de novas dinâmicas sociais a partir do uso dessas novas ferramentas” (MORAES, 1997, p. 5). Dessa forma, introduzir as tecnologias como suporte à aprendizagem, tem sido possível desde que o professor tenha conhecimento sobre elas, e as saiba utilizar com fins pedagógicos. Todavia, para isso, é necessário que o professor esteja disposto a desenvolver um trabalho por meio do uso de tecnologias, que venha a propiciar o envolvimento dos alunos com o conteúdo e favoreça aprendizagem.

É crescente o número de pessoas – pais, alunos, professores e sociedade - que aceitam a presença da tecnologia na sala de aula, como auxílio à aprendizagem. Este fato pode ser analisado como uma consequência positiva das publicações de pesquisas, que muitos educadores e pesquisadores realizaram acerca das possibilidades de ensino por meio do uso da tecnologia (MALTEMPI, 2008). Tais publicações, mais do que informar, levam os educadores a planejarem aulas que utilizem a tecnologia como ferramenta pedagógica, visando a aprendizagem de seus alunos no desenvolvimento de conteúdos de suas disciplinas.

No que diz respeito ao ensino de Matemática, as possibilidades de aprendizagem que as TIC oferecem são muitas, pois permitem a incorporação de algumas das várias tecnologias presentes. Com o computador, por exemplo, é possível fazer uso de softwares gratuitos de geometria interativa, que segundo Brandão e Isotani (2003, p. 168) “auxilia o fazer, permitindo que o aluno vivencie situações-problema e descubra, por si só, relações entre os objetos matemáticos”, fator importante para a aprendizagem na matemática.



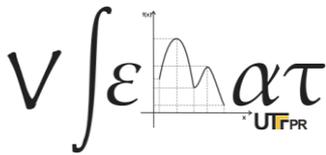
Outro exemplo seriam as práticas com as calculadoras, que apesar de serem menos vivenciadas na escola, ao comparar com o computador, são tecnologias que podem ser utilizadas com fins pedagógicos, pois de acordo com D' Ambrósio (1986, p. 56) “ao contrário do que muitos professores dizem, a calculadora não embota o raciocínio do aluno – todas as pesquisas feitas sobre aprendizagem demonstram isso”. Além do que, conforme o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991 *apud* Lorente, 2007, p.3):

as calculadoras permitem às crianças a exploração de ideias numéricas e de regularidades, a realização de experiências importantes para o desenvolvimento de conceitos e a investigação de aplicações realistas, ao mesmo tempo que colocam a ênfase nos processos de resolução de problemas. O uso inteligente das calculadoras pode aumentar, quer a qualidade do currículo, quer a qualidade da aprendizagem.

Nesse sentido, além do trabalho com o computador e calculadora, outra tecnologia que pode ser exemplo de recurso pedagógico no ensino de matemática é o celular, devido ao potencial para aprendizagem que apresenta, bem como pelo fato da disponibilidade do aparelho entre os alunos. Visto que também, os modelos de celulares atuais trazem consigo vários aplicativos e possibilidade de baixar outros aplicativos, inclusive de forma gratuita, que não pertencem à configuração inicial do celular, de acordo com o desejo do seu usuário. Nesse sentido, Chinellato *et. al* (2016, p. 3) afirmam que “já foi constatado que o uso de aplicativos para fins educacionais está ganhando força nas escolas” e, com essa “disseminação dos *smartphones*, escolas, governos e demais instituições se voltam para potencializar essa tecnologia na melhoria do ensino e da aprendizagem” (SALDANA, 2015).

Porém, sabemos que o celular em sala de aula, para alguns professores não só da disciplina de matemática, é visto como um obstáculo à aprendizagem. Exemplo disso, são os resultados encontrados por Bento e Cavalcante (2013), em uma pesquisa que busca identificar a visão de um grupo de professores sobre o uso do celular em sala de aula. Com a pesquisa, constataram que a maioria dos professores reconheciam o celular como recurso pedagógico, no entanto a maioria deles não permitiam o uso em sala de aula, apresentando entre as justificativas o fato de que os alunos não teriam maturidade para utilizar o aparelho em sala de aula, ou porque não veem o aparelho como percussor para uma situação didática.

Sobre isso, consideramos que a tecnologia em si (o objeto) não será um recurso para a aprendizagem sem a mediação do professor. Quanto o desenvolvimento da consciência do uso do celular em aula pelos alunos, ela só poderá ser desenvolvida quando o celular passar a ser utilizado em sala de aula de forma pedagógica, para que ações que



visem a consciência do seu uso em sala e fora dela, sejam discutidas e realizadas, e o celular passe a ser um aliado no processo de aprendizagem dos alunos. Desse modo, a escola se mostra contribuinte “na formação ética e moral de seus alunos”, pois somente agindo de forma autoritária com “imposição, omissão ou simples proibição” do celular, não trará benefícios a aprendizagem e formação do aluno (ANTONIO, 2010, p. 4).

Desse modo, com vistas a mostrar que seja possível desenvolver um trabalho com o uso do celular, o qual tem como objetivo levar os alunos a desenvolverem processos de aprendizagem por meio do uso pedagógico dessa tecnologia, e logo incentivar o uso de tecnologias como recurso para a aprendizagem, em particular no ensino de Matemática, será apresentada uma proposta de aula para o conteúdo de Frações, para o 6º ano do Ensino Fundamental.

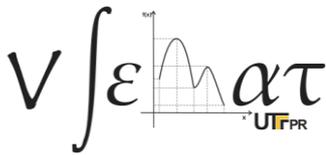
Nesta proposta, o estudo das operações com Frações será trabalhado por meio do uso pedagógico da tecnologia digital móvel – o celular, com a utilização do aplicativo “Fração – passo a passo” disponível para *download* no *Google play*. O objetivo é investigar o conhecimento que eles possuem sobre Frações e as quatro operações envolvendo os números racionais (na forma fracionária), isto é, adição, subtração, multiplicação e divisão.

FRAÇÕES: OBSTÁCULOS DE APRENDIZAGEM

As dificuldades na compreensão dos conceitos de fração, e conseqüentemente no desenvolvimento de operações envolvendo números fracionários pelos alunos da Educação Básica, da segunda fase do Ensino Fundamental, tem levado muitos educadores a desenvolverem pesquisas nesta área, pois, de modo geral, essas dificuldades tendem a acompanhar o aluno em toda a sua trajetória escolar, impossibilitando a compreensão de saberes e conteúdos matemáticos posteriores, que são importantes à sua formação. Em relação a isso, Nunes e Bryant (1997), explicam que:

com as frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às frações sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

A situação apresentada pelos autores acima, preocupam àqueles que buscam em suas práticas favorecer a aprendizagem dos alunos, isto é, que se preocupam em como seus alunos estão lidando com os conhecimentos desenvolvidos em sala de aula. Diante dessa realidade, Cyrino *et. al* (2014, p. 37) apontam que nos últimos anos várias pesquisas



foram realizadas em torno de analisar o ensino e aprendizagem do conceito de Frações. Essas pesquisas buscam identificar os obstáculos enfrentados pelos alunos, bem como se propõem mostrar outras formas de encaminhamento para o conteúdo, de forma a promover o aprendizado pelos alunos.

Em relação a estes obstáculos, alguns autores apresentam que estes decorrem de fatores como: a falta de interesse dos alunos em aprender (MIRANDA; MASSA, 2013), e de fato este aspecto prejudica a aprendizagem de qualquer conhecimento, e a forma como o conteúdo tem sido abordado tradicionalmente pelos professores (CYRINO *et. al*, 2014).

Tomando esses aspectos como referência, vê-se a necessidade de buscar estratégias para alcançar uma perspectiva de aprendizagem com significado, no que se refere ao conteúdo de frações. Nesse sentido, tais estratégias devem garantir ao ensino de frações “estar mais voltado para o significado do que para a representação e os alunos devem ser instigados a construir seu próprio conhecimento” (CYRINO *et. al*, 2014, p. 42).

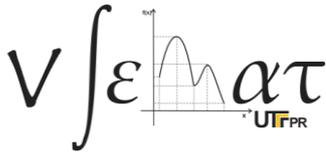
Assim, percebeu-se que o trabalho com as TIC pode ser um fator contribuinte para a motivação dos alunos à aprendizagem de Frações, e mais ainda possibilitar que o processo de estudo deste conteúdo ocorra de modo investigativo.

Dessa forma, a proposta de ensino elaborada, busca possibilitar ao aluno refletir sobre seus processos de aprendizagem, ao estar se envolvendo com operações que envolvam Frações. E, neste caminho, o professor tende a desenvolver um papel de orientador para a aprendizagem e, portanto, o modo como ele interagir com a turma no desenvolvimento das atividades, tem influência sobre os resultados a serem obtidos.

Considera-se que as dificuldades apresentadas pelos alunos quanto a realização de operações com Frações, ocorrem pelo modo arbitrário que lidam com esses números nas operações. Pois, eles muitas vezes desconhecem, ou não compreendem, como proceder quando estão diante de situações matemáticas em que há números fracionários.

Assim, entende-se ser necessário um trabalho significativo, que confira aos alunos dar significado as Frações, frente os vários conceitos que as mesmas podem representar. Do mesmo modo, também é visto ser necessário que os alunos saibam operar corretamente com esses números.

Diante disso, a proposta desenvolvida possibilitará ao aluno estar diante de situações, que o levem a perceber que nem sempre uma fração é uma parte menor que a unidade, ou que são dois números separados por um traço, ou que a fração é um operador que sempre indica uma divisão, e, portanto um resultado menor, promovendo a reflexão



acerca destas concepções equivocadas, que segundo Giménez e Bairral (2015) são incorporadas pelos alunos, quando é desenvolvido o conteúdo de frações próprias, impróprias e mistas, de modo inconsistente.

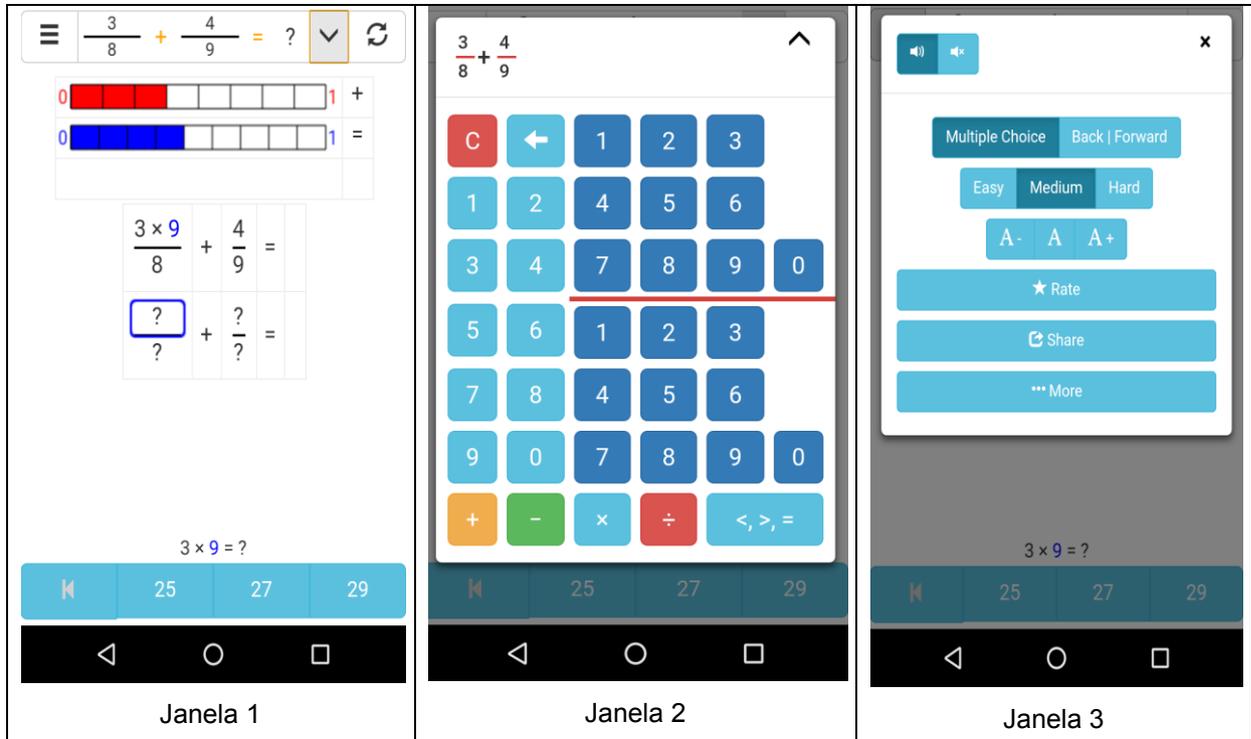
A proposta também abrangerá o estudo de equivalência de frações. Uma vez que, esse conhecimento se faz necessário no momento de realizar operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Assim, será visto a utilização do algoritmo do mínimo múltiplo comum (MMC) para obter frações equivalentes a frações dadas. Além disso, a atividade irá abordar a simplificação de frações, que consiste em tornar uma fração com numeradores e denominadores maiores, em uma fração com numeradores e denominadores menores, isto é, tornar a fração mais simples para ser manipulada.

PROPOSTA DE ENSINO: ESTUDANDO FRAÇÕES A PARTIR DE UM APLICATIVO NO CELULAR

O aplicativo possibilita o desenvolvimento das quatro operações com Frações (divisão, multiplicação, subtração e adição) e ainda traz a possibilidade de comparação por meio de representações geométricas.

A fim de facilitar a explicação sobre o aplicativo, nomeamos algumas das suas janelas, que serão acessadas para o desenvolvimento das atividades, como pode ser visto na Figura 1. Sendo assim, o aplicativo inicia na janela 1 que é a área em que os cálculos são realizados, já trazendo uma operação com números fracionários para ser resolvida. Depois podemos acessar a janela 2 na qual podemos escrever as operações com os números fracionários que queremos. Ainda, o aplicativo oferece uma terceira janela que irá apresentar algumas configurações para o mesmo.

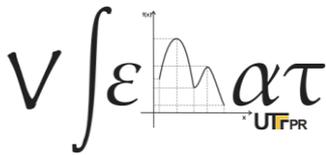
Figura 1: As três janelas do aplicativo



Fonte: Dos autores, 2016

A proposta a ser apresentada, se caracteriza como uma sequência didática para resgate de conteúdo sobre as operações com números fracionários. A sequência estará organizada em dois momentos: o primeiro será sobre a adição com números fracionários e o segundo sobre a multiplicação com números fracionários. Quanto às outras operações, isto é, subtração e divisão com números fracionários, estas não serão apresentadas neste trabalho, pois o número máximo de páginas estabelecido por este evento, não é suficiente para desenvolvê-las. Porém, ressaltamos que as operações de subtração e divisão podem ser desenvolvidas de modo investigativo utilizando o aplicativo, e ainda, que posteriormente almeja-se desenvolver um artigo mais completo, o qual possa abranger atividades com as quatro operações.

Para iniciar as atividades é necessário que os alunos tenham baixado o aplicativo no *Google Play* pelo *link* que deve ser disponibilizado pelo professor com antecedência à aula, para que a aula seja bem aproveitada com o desenvolvimento da atividade, e não para baixar o aplicativo, já que o mesmo pode ser baixado em casa, ou em outros momentos na escola, se caso o aluno não tenha internet em casa.



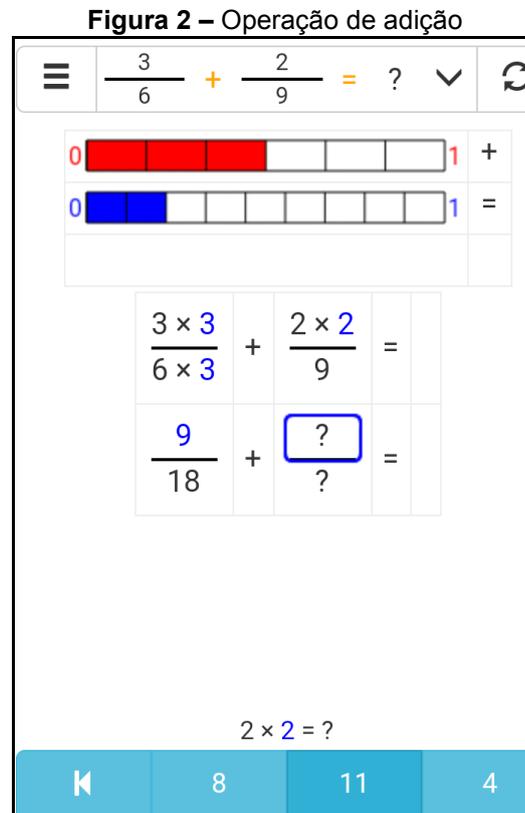
Devido a fatores socioeconômicos e culturais, é possível que nem todos os alunos tenham um aparelho celular. Todavia este fato não impede que a proposta seja desenvolvida, pois neste caso uma alternativa seria o trabalho em grupo, em que o professor necessitará expor algumas regras junto aos alunos para que a atividade possa atingir seu objetivo. Lembramos que essas regras não tem o intuito de coibir a participação e o envolvimento dos alunos dos grupos, sua necessidade se dá visando a participação de todos os integrantes do grupo nas atividades.

Assim, quanto ao aplicativo, para que os alunos possam descobrir como o mesmo funciona e se familiarizar, pode-se pedir que resolvam a primeira operação que aparecer. Normalmente o aplicativo inicia com a mesma operação (uma operação de adição, com nível de dificuldade média). Então todos estarão resolvendo a mesma questão. Caso as questões apresentadas pelo aplicativo sejam diferentes nos celulares dos alunos, pode ser digitado as expressões nos celulares deles, pois neste primeiro momento pode ser interessante que todos pensem como resolver a mesma questão, para posterior discussão.

Quanto ao momento da resolução da questão, salienta-se que o professor esteja à disposição para eventuais dúvidas. Mas, o intuito é que os alunos tentem (e consigam) resolver sozinhos, seguindo as orientações do aplicativo, ou ainda que trabalhem juntos para resolver. Depois que tiverem resolvido, é interessante retomar a operação, para refletir sobre como os cálculos foram feitos. Além disso, estipulamos um tempo máximo de duas aulas para o desenvolvimento dessa proposta.

ADIÇÃO COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Normalmente a primeira operação que aparece na janela do aplicativo, é a de adição, e por estarem no nível de dificuldade médio, as frações terão denominadores diferentes, como pode ser observado na Figura 2.



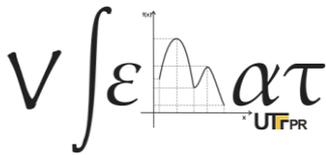
Fonte: Dos autores, 2016.

Em relação à operação trazida pelo aplicativo, que está sendo mostrada na figura, podemos fazer perguntas aos alunos, a fim de que reflitam sobre o que foi necessário para resolver a operação e que operação estavam fazendo, tais como: “Que tipo de operação foi realizada?” e, em seguida “Como vocês resolveram a questão?”.

Com a primeira pergunta, esperamos que os alunos identifiquem qual operação estão trabalhando no aplicativo, e com isso possibilitar que já consigam relacionar a operação de adição, de frações com denominadores diferentes, com a forma de resolvê-la nesse caso.

Além disso, é interessante perguntar o que são aquelas barras quadriculadas na tela. Pois, as mesmas são representações gráficas das frações, e ainda são modificadas através das operações feitas sobre as frações iniciais, dando ao aluno a possibilidade de interpretá-las de uma forma gráfica.

Também poderíamos, perguntar por que o aplicativo sugere que seja multiplicado o numerador da primeira fração por 3, e por que logo em seguida sugere que o denominador também seja multiplicado por 3. Com essas perguntas, esperamos que reflitam e concluam



que não seja possível somar frações com denominadores diferentes, pois não estaria correto somar partes de um inteiro diferente, além de que esta sugestão é dada, pois o aplicativo já conhecia o mínimo múltiplo comum entre os denominadores 6 e 9, e que então seja necessário transformar essas frações, a fim de que tenham um mesmo denominador, e possam ser somadas.

Caso os alunos não consigam concluir que estão multiplicando denominador e numerador por uma mesma constante não arbitrária, porque estão calculando o mínimo múltiplo comum, necessário para obter frações equivalentes às frações iniciais cujos denominadores sejam os mesmos, podemos ainda fazer outras perguntas, a fim de direcioná-los, por exemplo: O que o aplicativo fez? Conseguem perceber algo semelhante com a resolução que vocês aprenderam a fazer nas aulas passadas? Observaram em que transformou-se a primeira fração, que fração é essa em relação a que tínhamos inicialmente?

Adiante, para frisar a importância das frações equivalentes e ao mesmo tempo ressaltar como são obtidas, podemos perguntar como fazemos para obter frações equivalentes a uma fração dada. Quanto à fração do lado direito ao sinal de adição, o aplicativo indicará uma multiplicação por 2 do numerador e denominador, novamente pode ser discutido sobre porque isso é necessário.

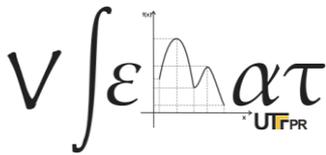
Após terem obtido as frações equivalentes às frações iniciais, cujos denominadores são iguais, podemos perguntar qual foi o passo seguinte para resolver a adição, e em seguida perguntar por que não mexemos nos denominadores dessas frações quando fazemos a soma. Com isso, frisaríamos o cuidado de somarmos frações cuja unidade seja o mesmo inteiro. Além disso, pode-se aproveitar para fazê-los observar a nova representação gráfica para o resultado.

MULTIPLICAÇÃO COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Para esta operação, pediremos para os alunos acessarem a segunda janela, e digitarem o seguinte:

$$\frac{2}{7} \times \frac{5}{2}$$

E do mesmo modo, depois de terem resolvido essa operação, retomaremos o que foi necessário para resolvê-la. Dessa forma, perguntaríamos o que o aplicativo sugeriu que



fosse feito, e o porquê dessa sugestão. E ainda pode ser discutido o porquê de não ser necessário tornar os denominadores iguais quando estamos lidando com a operação de multiplicação. Após isso, podemos perguntar o que é necessário para fazer a operação de multiplicação entre duas frações, a fim de que pela explicação do que foi feito, possam saber como realizar a operação de multiplicação.

Em seguida, podemos fazê-los refletir sobre o resultado final, isto é, perguntado se o resultado final foi $\frac{10}{14}$ ou $\frac{5}{7}$, e se os mesmos são diferentes. Com isso, queremos que percebam que as duas frações são equivalentes, sendo que a primeira foi simplificada de forma a se obter a segunda, uma fração irredutível, ou seja, que não poderá mais ser simplificada. Diante disso, podemos perguntar como é feita a simplificação de frações, tendo como exemplo a simplificação trazida pelo aplicativo.

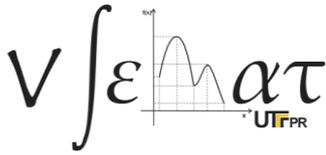
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por entendermos ser necessário buscar meios de favorecer a aprendizagem dos alunos, quando esta não está ocorrendo pelas vias esperadas, é que esta proposta foi pensada. Para tanto, buscamos na tecnologia móvel, que segundo a UNESCO (2014, p. 10) “pode dar apoio à educação”, oferecer um recurso, diferente e de possível acesso, para subsidiar a aprendizagem do conteúdo de Frações.

Assim, tendo visto que o celular é uma tecnologia com várias possibilidades de aplicativos que favorecem a compreensão de conteúdos matemáticos, inclusive aqueles que os alunos possuem maiores dificuldades para compreender, como é o caso do conteúdo da proposta, esperamos que a mesma possa cumprir com a finalidade de promover, por meio de investigação e reflexão, a superação dos obstáculos que os alunos encontram para a compreensão das operações com os números fracionários.

Esta proposta de ensino trouxe uma possibilidade para o resgate de conteúdo envolvendo as operações de adição e multiplicação com números fracionários, a partir do uso do celular de forma pedagógica. Porém, vislumbra-se que utilizando o mesmo aplicativo como recurso à aprendizagem, seja possível trabalhar as operações de subtração e divisão que não foram desenvolvidas neste trabalho, de modo investigativo, sendo necessário para tanto, buscar desenvolver atividades que permitam aos alunos refletirem sobre suas ações e ideias, no momento da resolução das operações.

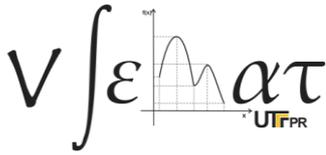
Enfim, além de trazermos uma proposta de ensino que visa possibilitar o resgate de conteúdo das operações de adição e de multiplicação de frações, visto as dificuldades dos



alunos nesse conteúdo, escolhemos utilizar o celular como ferramenta pedagógica, a fim de mostrar que o mesmo pode ser utilizado em sala de aula, de forma investigativa, podendo ser visto como um recurso à aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

- ANTONIO, J. C. Uso pedagógico do telefone móvel (Celular), **Professor Digital**, SBO, 13 jan. 2010. Disponível em: <<https://professordigital.wordpress.com/2010/01/13/uso-pedagogico-do-telefone-movel-celular/>>. Acesso em: 14 abr. 2017.
- BENTO, M. C. M.; CAVALCANTE, R. S. Tecnologias Móveis em Educação: O uso do celular em sala de aula. **ECCOM**, v. 4, n. 7. Jan/Jun 2013.
- BRANDÃO, L. O.; ISOTANI, S. Uma ferramenta para ensino de geometria dinâmica na internet: igeom. In: Workshop sobre informática na escola. Congresso da sociedade brasileira de computação, 9, 2003, Campinas. **Anais...** Rio Grande do Sul: Sociedade Brasileira de Computação, 2003.
- CHINELLATO; T. G.; DOMINGUES, N. S.; ROMANELLO, L. A. O Uso de Aplicativos do Google Play e Atividades Investigativas em Educação Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, X, 2016, São Paulo, **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- CYRINO, M. C. C. T.; GARCIA, T. M. R.; OLIVEIRA, L. M. C. P. de; ROCHA, M. R. **Formação de professores em comunidades de prática: frações e raciocínio proporcional**. Londrina: UEL, 2014.
- D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática**. São Paulo: Summus: Unicamp, 1986.
- GIMÉNEZ, J.; BAIRRAL, M. A. Frações no currículo do Ensino Fundamental conceituação, jogos e atividades lúdicas. v. 2, **Seropédica: GEPEM/EDUR**, 2005.
- LORENTE, F. M. P. Utilizando a calculadora nas aulas de matemática. In: Paraná. Secretária da Educação. **Cadernos PDE**, v. I, 2007. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2007_utfpr_mat_artigo_francisco_manoel_pereira_lorente.pdf> Acesso em: 02 mai. 2017.
- MALTEMPI, M. V. Educação Matemática e Tecnologias Digitais: reflexões sobre a prática e formação docente. **Acta Scientiae**, Canoas, v.10, n.1, p. 59-67, jan./jul. 2008.
- MIRANDA, A. A.; MASSA, L. S. Estudo de Frações no 6º ano do Ensino Fundamental. In: PARANÁ. Secretaria da Educação. **Cadernos PDE**, v. I, 2013. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_artigo_antonio_altair_de_miranda.pdf>. Acesso em: 03 abr. 2017.
- MORAES, M. C. **Subsídios para Fundamentação do Programa Nacional de Informática na Educação**. Secretaria de Educação à Distância, Ministério de Educação e Cultura,



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

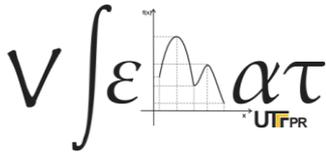
Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

Jan/1997. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/tecnicos/proinfo.pdf>. Acesso em: 03 abr. 2017.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SALDANA, P. **Uso de aplicativos para celular ganha força na escola**. Disponível em: <<http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,uso-de-aplicativos-para-celular-ganha-forca-na-escola,1749345>>. Acesso em: 14 abr. 2017.

UNESCO. **Diretrizes de políticas da Unesco para a aprendizagem móvel**, 2014. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>>. Acesso em: 14 abr. 2017.



**UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA SOBRE A ÁREA DO
CAMPUS TOLEDO DA UTFPR**

Felipe Hugo Granville (CAPES - PIBID)
UTFPR – Campus Toledo
felipe.granville@hotmail.com

Tiélen Prestes De Lima (CAPES - PIBID)
UTFPR – Campus Toledo
tielen.pdl@gmail.com

Raphael Kenji Kobayashi (CAPES - PIBID)
UTFPR – Campus Toledo
kraphakenji@gmail.com

Tawine Leticia Azarias da Silva (CAPES - PIBID)
UTFPR – Campus Toledo
tawaveco@icloud.com

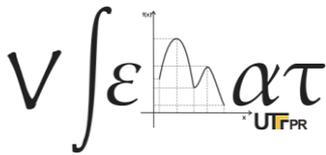
Emerson Tortola (CAPES - PIBID)
UTFPR – Campus Toledo
emersonortola@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Em nosso cotidiano é comum nos depararmos com alguns fenômenos que acabam se tornando inquietações que despertam nosso interesse em compreendê-los. Assim, um estudo sistemático se faz pertinente para analisar estes fenômenos. A matemática pode ser um meio pelo qual realizamos tal análise.

Nesse sentido, a matemática nos serve como instrumento para analisar fenômenos de diferentes naturezas, de modo a subsidiar argumentações associadas a eles. Um dos meios que viabiliza o estudo de fenômenos naturais e sociais, dentre outros, por meio de argumentações matemáticas é a modelagem matemática, entendida por Bassanezi (2009, p. 24) como a “arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

É neste contexto que, neste artigo, investigamos uma situação da realidade, que consiste em calcular a área do terreno da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Toledo. Esta investigação foi motivada pelos estudos que temos



desenvolvido nas disciplinas e atividades associadas ao curso de licenciatura em matemática e pela observação do formato do terreno onde se localiza a universidade.

A ATIVIDADE

Em pesquisas executadas sobre o tema, constatou-se que pouco se fala sobre a área do Campus da UTFPR – TD, sendo que em um documento publicado pela Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional – PROGRAD, consta o seguinte:

O Campus Toledo começou seu funcionamento, provisoriamente, no ano de 2007, em instalações construídas com recursos provenientes do Banco Internacional de Desenvolvimento (BID), e recebeu da Prefeitura Municipal de Toledo uma área de aproximadamente 68m², onde foi construído o primeiro bloco das instalações oficiais do campus (UTFPR, p. 2).

Partindo dessa informação, surgiu uma inquietação, pois, o documento relata que a área que a prefeitura doou a UTFPR é de 68m², o que parece um absurdo, pois existem construções de três blocos com mais de 15 salas por bloco, restaurante universitário, biblioteca, ginásio de esportes, campo de futebol, estacionamento, dentre outros espaços. Nesse sentido, resolvemos estudar a respeito do tema, buscando verificar a informação publicada no site da instituição. Portanto, objetivamos calcular a área total do campus da UTFPR – Campus Toledo. Para isso, contamos com o auxílio do site *Google Maps*, por meio do qual fizemos nossa coleta de dados. A Figura 1 apresenta uma foto do terreno da UTFPR - Campus Toledo.

Figura 1 – Terreno da UTFPR – Campus Toledo



Fonte: Google Maps.

Para o cálculo da área do terreno, consideramos como uma hipótese de simplificação o cálculo de área de uma superfície plana, desconsiderando as irregularidades do terreno, assim como sugerem as imagens obtidas no *site do Google Maps*. Além disso, nos embasamos na escala apresentada pelo *site* para realização das conversões das medidas.

Como decorrência das hipóteses formuladas, que matematizam a situação da realidade, e considerando as características do terreno, particularmente, as que se referem ao seu formato, partimos do pressuposto de que o cálculo de área abaixo de uma curva por meio de integrais é uma possibilidade para resolver o problema enunciado. Para tanto, utilizamos o *software GeoGebra*, no qual inserimos a Figura 1 de maneira que sua escala indicasse, convenientemente, 50 metros, aproximadamente, a cada 50 unidades de medida no *GeoGebra*. Além disso, delimitamos por meio de retas o terreno da UTFPR, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Delimitação do terreno da UTFPR



Fonte: Dos autores.

Consideramos que não é conveniente indicarmos a cerca que delimita o terreno da UTFPR na Avenida Maripá por meio de uma reta como fizemos nos demais lados. Diante disso, foi preciso ajustar tal delimitação a uma curva, de modo que tal ajuste viabilizasse o cálculo da área delimitada abaixo dela. Uma opção que nos pareceu interessante foi ajustar tal cerca a uma função polinomial de segundo grau (função quadrática), sendo que para a determinarmos, escolhemos arbitrariamente 5 pontos que foram inseridos no *GeoGebra* e, a partir desses pontos, utilizamos o Método dos Mínimos Quadrados para realizar o ajuste. Nesse contexto, tomando os pares ordenados indicados na Tabela 1, podemos escrever as matrizes A , X e Y .

Tabela 1 – Pares ordenados para determinação da função polinomial de segundo grau

X	y
7,94	266,64
75,68	258,34
181,05	223
284,23	161,09
332,04	130,05

Fonte: Dos autores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7,94 & 7,94^2 \\ 1 & 75,68 & 75,68^2 \\ 1 & 181,05 & 181,05^2 \\ 1 & 284,23 & 284,23^2 \\ 1 & 332,04 & 332,04^2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 266,64 \\ 258,34 \\ 223 \\ 161,09 \\ 130,05 \end{bmatrix}$$

Buscando encontrar uma função da forma:

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

que melhor se ajuste aos pontos definidos, precisamos resolver o sistema de matrizes $A^T A X = A^T Y$, a partir do qual obtemos:

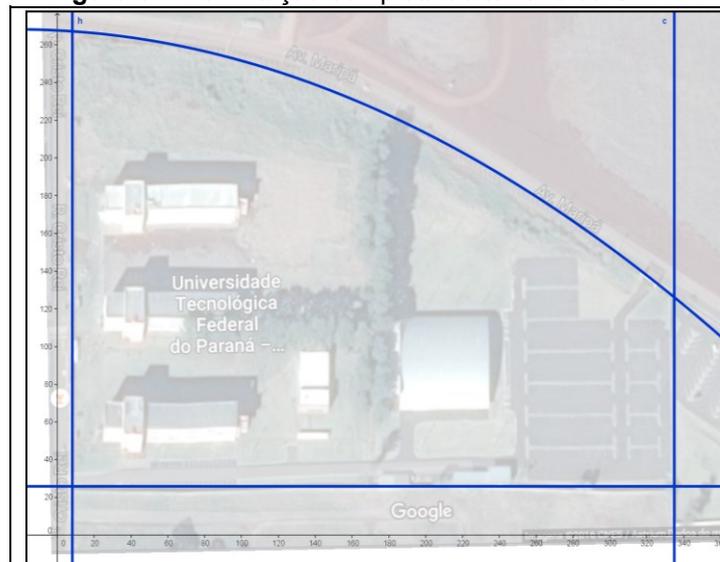
$$\begin{bmatrix} 5 & 880,94 & 229556,863 \\ 880,94 & 229606,863 & 65929157,1249 \\ 229556,863 & 65929157,1249 & 19785678033,329 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1039,12 \\ 151010,855 \\ 36147046,335 \end{bmatrix}$$

Efetuando os cálculos de $A^T A$ e de $A^T Y$, com o auxílio do *software WinMat*, conseguimos determinar os coeficientes $a = 267,6975$; $b = -0,0495$ e $c = -0,001114$; ou seja, a função polinomial de segundo grau que melhor se ajusta aos pontos definidos é indicada pela seguinte equação:

$$f(x) = 267,6975 - 0,0495x - 0,001114x^2.$$

Portanto, como sugere a Figura 3, conseguimos fazer uma “boa” demarcação do terreno da Universidade, assim, nos resta agora utilizarmos os conceitos de Cálculo Integral para determinar qual é a área da região delimitada na Figura 3.

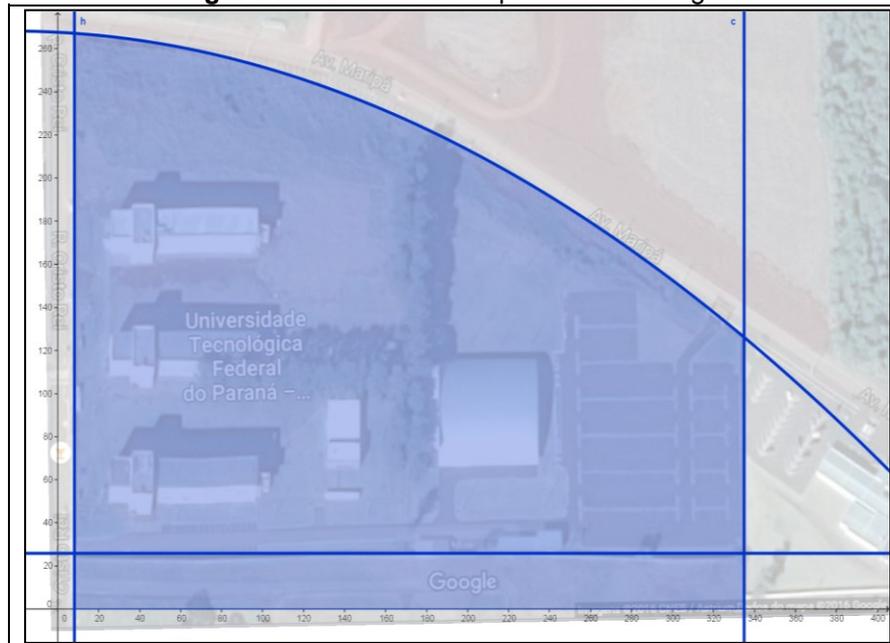
Figura 3 – Delimitação completa do terreno da UTFPR



Fonte: Dos autores.

Para encontrarmos a área total do terreno demarcado, calculamos a integral da função $f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$ que nos indica a área abaixo da curva (Figura 4).

Figura 4 – Área calculada por meio da integral



Fonte: Dos autores.

Sendo,

$$a = 8,27$$

$$b = 335$$

$$f(x) = -0,001114 x^2 - 0,0495 x + 267,6975$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{8,27}^{335} -0,001114 x^2 - 0,0495 x + 267,6975 dx \\ &= \left[\frac{-0,001114 x^3}{3} - \frac{0,0495 x^2}{2} + 267,6975 x \right]_{8,27}^{335} \\ &= \left\{ \left[\frac{-0,001114 (335)^3}{3} - \frac{0,0495 (335)^2}{2} + 267,6975 (335) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{-0,001114 (8,27)^3}{3} - \frac{0,0495 (8,27)^2}{2} + 267,6975 (8,27) \right] \right\} \\ &= 70.728,72226 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

É preciso, contudo, observar que os cálculos efetuados até o momento ainda não condizem com a área que o terreno do campus ocupa, isso porque o valor equivalente a $70.728,72226 \text{ m}^2$ está considerando a área total da região abaixo da curva como mostra a Figura 4, no entanto, temos um retângulo a ser desconsiderado para encontrarmos a área da região demarcada pelas curvas na Figura 3. Este retângulo é delimitado pelas retas $x=8,27$; $x=335$ $y=0$ (eixo x) e $y=25,86$. Então, utilizando conceitos básicos de Geometria, podemos determinar a área deste retângulo, cuja base mede $335 - 8,27$ e altura $25,86$, obtendo assim uma área de $8449,2378 \text{ m}^2$.

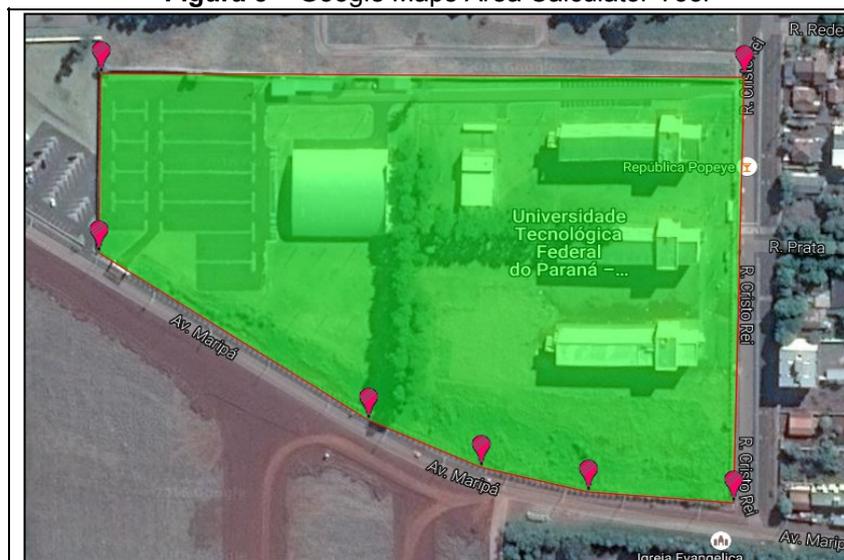
Com isso determinamos a área do terreno da UTFPR – Campus Toledo, calculando:

$$70.728,72226 \text{ m}^2 - 8449,2378 \text{ m}^2 = 62279,48446 \text{ m}^2.$$

VALIDAÇÃO

Para verificarmos os resultados até o momento apresentados, utilizamos um projeto do site *Daftlogic*, intitulado como *Google Maps Area Calculator Tool*¹, que nada mais é que uma calculadora de área do *Google Maps*, como mostra a figura 5.

Figura 5 – Google Maps Area Calculator Tool

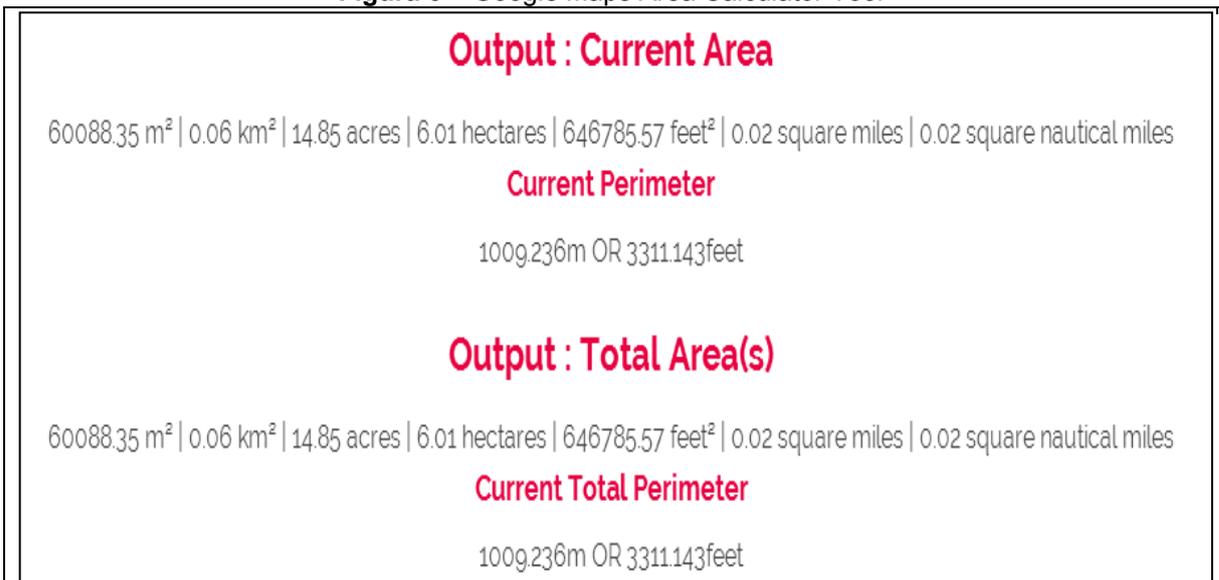


Fonte: Dos autores.

¹ Disponível em: <<https://www.daftlogic.com/projects-google-maps-area-calculator-tool.htm>>. Acesso em: 05 dez. 2016.

Como resultado deste cálculo, o *site* nos retornou que a área da UTFPR – campus Toledo é de $60088,35m^2$, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Google Maps Area Calculator Tool



Fonte: Dos autores².

Com isso, comparando a área que encontramos com a área que o software calculou chegamos a resultados bem próximos, podendo assim validar nosso trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação evidenciou o potencial da modelagem matemática como meio para analisar e interpretar situações da realidade. Nosso objetivo, de calcular a área do terreno da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus Toledo, nos levou a refletir acerca de uma citação de tal área em um documento, que parecia estar equivocada. O desenvolvimento da atividade mostrou que a área apresentada pelo site estava realmente equivocada, e que provavelmente ocorreu um erro de digitação. Talvez ao

² Disponível em: <<https://www.daftlogic.com/projects-google-maps-area-calculator-tool.htm>>. Acesso em: 05 dez. 2016.

invés de 68m^2 a intenção tivesse sido 68.000m^2 o que faria mais sentido, visto que encontramos resultados entre 60.000m^2 e 63.000m^2

O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, portanto, fundamentou nossas argumentações quanto à área do terreno da universidade, sinalizando a possibilidade de discussões que exigem do indivíduo uma visão mais crítica sobre as informações que lhe são apresentadas, reforçando a ideia de que sempre devemos tomar cuidado com as informações que encontramos na internet, mesmo em *sites* que julgamos confiáveis.

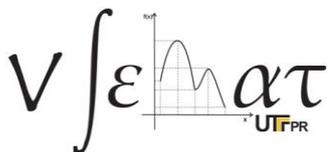
Além disso, o desenvolvimento dessa atividade se deu de maneira diferente da qual nós, acadêmicos, estávamos habituados. A coleta de dados, por exemplo, foi realizada por meio de figuras e elas foram a fonte das informações necessárias para a resolução do problema. A resolução, por sua vez, indicou o quão eficazes podem ser os métodos e os *softwares* matemáticos para a resolução do problema definido na atividade de modelagem matemática, auxiliando na visualização, definição e interpretação do problema e na realização de cálculos. Por fim, podemos citar também a validação, que foi realizada a partir da escala indicada no site *Google Maps* e por meio da calculadora de área do *site*.

Nesse contexto, compreendemos que as tecnologias, quando utilizadas em atividades de modelagem matemática, nos auxiliam não apenas na análise e interpretação do fenômeno, mas na agilidade com que lidamos com as informações, que executamos algoritmos e nos oferecem meios de resolver o problema.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. – 3ª ed. – São Paulo: Contexto, 2006.

UTFPR, **Ciência para o Desenvolvimento Sustentável**. Gráfica e Editora Fática Santos. Disponível em: <<http://www.utfpr.edu.br/estrutura-universitaria/pro-reitorias/prograd/cursos/arquivo/Campus%20Toledo.pdf>>. Acesso em: 05 dez. 2016.



ACERCA DO DESPERDÍCIO DE COMIDA NAS ESCOLAS MUNICIPAIS DE TOLEDO-PR: UMA INVESTIGAÇÃO

Matheus Gonçalves Galvan Dobbins (CAPES – PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
matheusorgadec@hotmail.com

Rodolfo Eduardo Vertuan (CAPES – PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
rodolfovertuan@yahoo.com.br

RESUMO

Nesse trabalho, abordaremos uma situação em que se utiliza a Modelagem Matemática. A situação consiste em investigar quanto de desperdício de comida pode estar acontecendo nas escolas municipais de Toledo-PR, especificamente naquelas em que a Cozinha Social atende, no caso, somente as escolas que possuem ensino integral. Para isso, foi feita uma coleta de dados em uma das seis escolas que são atendidas nessa situação. Diante dos cálculos, pudemos inferir quanto de comida tem sido desperdiçado e quanto, em reais, isso representa.

INTRODUÇÃO

Modelagem Matemática, na perspectiva da Educação Matemática, pode ser entendida como um ambiente de aprendizagem no qual somos convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações cotidianas ou também de outras áreas da realidade (BARBOSA, 2004) que aparentam ter ou apresentam dados quantitativos existentes em determinadas circunstâncias.

Nesse trabalho iremos analisar o desperdício de comida nas escolas municipais de Toledo, usando Modelagem Matemática. Utilizamos como dados apenas as informações coletadas em uma das escolas atendidas pela Cozinha Social.

O município de Toledo, em 2006, implantou a Cozinha Social e os RPs (Restaurantes Populares) e assim extrapolou os limites do assistencialismo puro e simples, passando à implementação de uma política pública de assistência social, garantindo acesso a uma alimentação de qualidade às camadas mais carentes da população. As refeições diárias da Cozinha Social são produzidas em um único local¹. Hoje, a Cozinha Social atende, com refeições (almoço) no período integral, 692 crianças, distribuídas em 6 escolas

¹ Fonte: <https://indicadores.cidadessustentaveis.org.br/br/PR/toledo/boa-pratica/478/cozinha-social-e-restaurantes-populares>

diferentes². Porém, nessa atividade coletamos dados de apenas uma escola municipal de Toledo, onde o autor principal desse trabalho exerce serviços como estagiário. A escola possui quatro turmas de Integral, num total de 95 crianças que são atendidas durante o almoço.

DESENVOLVIMENTO

A coleta de dados se passou antes dos alunos irem para o almoço (a entrada de comida) e depois deles saírem do almoço (as sobras e desperdício). As sobras são o que não é servido, ou seja, a comida que fica dentro das bacias. O desperdício é o que os alunos descartam dos seus pratos. Depois do almoço, as sobras, infelizmente, também são jogadas fora, pois, como é uma comida paga pelo Município e essa comida é somente para os alunos do integral, então não se pode, por exemplo, distribuir marmittas para os necessitados ou até mesmo querer levar para casa. Assim, podemos considerar as sobras e desperdício como o Total Desperdiçado.

Nos próximos cinco quadros, apresentamos os dados obtidos em cinco diferentes dias. Estes dados serão considerados como parâmetros para os cálculos e inferências.

Quadro 1: Coleta dos dados

Segunda-feira (07/11/2016)			
Alimento	Entrada (em gramas)	Sobras (em gramas)	Desperdício (em gramas)
Feijão	12.305	6.860	5.090
Arroz	11.510	4.510	
Carne Moída	15.190	9.900	
Polenta	11.625	4.210	
Pepino	5.435	1.430	
Repolho	2.805	1.675	
Total (em gramas)	58.870	28.585	
Total Desperdiçado (em gramas)		33.675	

Fonte: Os autores

² Fonte: Informações obtidas diretamente da Cozinha Social.

Quadro 2: Coleta dos dados.

Terça-feira (08/11/2016)			
Alimento	Entrada (em gramas)	Sobras (em gramas)	Desperdício (em gramas)
Feijão	12.075	5.430	3.730
Arroz	10.070	3.715	
Carne de Frango Moída	11.895	9.465	
Batata Cozida	9.080	2.965	
Alface	1.370	0.995	
Brócolis	3.745	2.550	
Total (em gramas)	48.235	24.125	
Total Desperdiçado (em gramas)		27.855	

Fonte: Os autores.

Quadro 3: Coleta dos Dados

Quinta-feira (10/11/2016)			
Alimento	Entrada (em gramas)	Sobras (em gramas)	Desperdício (em gramas)
Feijão	11.410	3.955	5.660
Arroz	10.500	3.700	
Carne Moída	14.560	10.725	
Batata Cozida	9.070		
Almerão	1.030		
Alface	1.270		
Total (em gramas)	47.840	18.380	
Total Desperdiçado (em gramas)		24.040	

Fonte: Os autores.

Quadro 4: Coleta dos dados.

Segunda-feira (14/11/2016)			
Alimento	Entrada (em gramas)	Sobras (em gramas)	Desperdiço (em gramas)
Feijão	12.950	7.080	4.070
Arroz	10.475	1.420	
Carne de Frango Moída	13.935	8.430	
Polenta	12.940	3.355	
Alface	1.180	0.555	
Repolho	1.835	1.075	
Total (em gramas)	53.315	21.360	
Total Desperdiçado (em gramas)		25.430	

Fonte: Os autores

Quadro 5: Coleta dos dados

Quinta-feira (17/11/2016)			
Alimento	Entrada (em gramas)	Sobras (em gramas)	Desperdiço (em gramas)
Feijão	12.385	6.110	4.465
Arroz	9.555	2.580	
Carne de Frango	17.205	13.510	
Mandioca	8.355	3.160	
Alface	0.430		
Tomate	4.290		
Total (em gramas)	51.790	25.360	
Total Desperdiçado (em gramas)		29.825	

Fonte: Os autores.

Intentamos calcular quanto, em reais, é desperdiçado em comida nessa escola. Mas para isso precisamos considerar o seguinte:

- A escola possui 95 alunos no período integral
- O gasto com comida é de R\$ 2,50³ por aluno.

A partir dessas informações, podemos afirmar que o gasto diário aproximado, em reais, com comida é de R\$ 237,50.

Agora, podemos calcular quanto desse dinheiro é jogado fora com a comida que é desperdiçada. Para isso, precisamos da média dos desperdícios coletados, de modo a encontrar a porcentagem que é desperdiçada em relação ao total de comida que vem da cozinha social.

Para calcular a média, a fórmula é dada por:

Média = Soma dos termos/Número de termos.

³ Fonte: Informações obtidas diretamente da Cozinha Social.

Quadro 6: Média aritmética dos desperdícios

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira	Segunda-feira	Quinta-feira
Total Desperdiçado (em gramas)	33.675	27.855	24.040	25.430	29.825
Média (em gramas)	28.165				

Fonte: Os autores

Assim, temos que a média aritmética dos desperdícios é de 28.165 gramas.

Em seguida, precisamos calcular a média aritmética do total de comida que a escola recebe, para poder verificar a porcentagem de comida desperdiçada.

Quadro 7: Média aritmética das entradas de comida

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira	Segunda-feira	Quinta-feira
Entrada de Comida (em gramas)	58.870	48.235	47.840	53.315	51.790
Média (em gramas)	52.010				

Fonte: Os autores

Então, temos que a média aritmética da entrada de comida é de 52.010 gramas.

Enfim, a partir desses dados é possível ter uma noção, um valor aproximado, de quanto (em reais) é jogado fora com o desperdício de comida por dia, mês e até ano (no caso de 2016).

Para calcular a porcentagem iremos usar “regra de 3”, tal que 52.010 esteja para 100% e 28.165 esteja para x . Fazendo as contas teremos, em média, $x=54,15\%$ de comida que é desperdiçado por dia, ou seja, mais da metade é desperdiçado!

Agora, podemos ter uma noção do quanto, em reais, é desperdiçado por dia, mês e ano (2016), conforme a quadro 8:

Quadro 8: Entrada e desperdício em reais na escola em particular.

	Por dia	Por mês	Por ano
Entrada de Alimento	R\$ 237,50	R\$ 4.750,00	R\$ 47.500,00
Desperdiçado	R\$ 128,61	R\$ 2.572,13	R\$ 25.721,25

Fonte: Os autores

Afirmamos que estamos considerando o desperdício por mês, contando somente 20 dias de aula. O mesmo vale para o desperdício por ano, 200 dias letivos.

Não podemos afirmar que são esses os valores exatos que são investidos e desperdiçados, até porque estamos lidando com poucos dados. Mas dá para se ter uma

noção de quanto é descartado sem razão alguma e podendo até ser feito algo para não ter esse desperdício de comida e também de dinheiro.

Mas como o título do trabalho enuncia, esse trabalho é sobre o desperdício de comida em todas as escolas municipais de Toledo que são atendidas pela Cozinha Social durante o almoço no período integral. Assim, com todos esses dados encontrados, podemos simular e inferir quanto o Município de Toledo investe e quanto é desperdiçado de comida nas escolas.

Para tal, temos que recorrer a alguns pontos importantes, tais como:

- A cozinha Social atende 6 escolas municipais.
- Nessas 6 escolas, 692 alunos têm acesso ao almoço.
- Temos que em uma escola, ela recebe 52.096 gramas de almoço em média.
- Nessa escola são atendidos 95 alunos dos anos integrais.

Como já sabemos a entrada e o desperdício de uma das escolas, teremos que encontrar o mesmo das outras 5 escolas tomando esta primeira como referência, dada a impossibilidade de visitar a todas.

Temos que 95 alunos são atendidos na escola em particular, assim, nas outras 5, são atendidas 597. Agora, vamos supor que em cada uma dessas 5 escolas são atendidas, em média, 119 alunos do período integral. Com isso, vamos descobrir, em média, quanto de entrada terá em cada escola, da seguinte forma: Se 95 está para 52.010 (entrada em média da escola em particular) e 119 está para x , então fazendo as contas teremos que $x=65.149$ gramas de comida, em média, que cada uma das 5 escolas recebe. Assim, com base nos dados da escola em particular temos que a porcentagem de desperdício é de 54,15%. Enfim, podemos ter uma noção do quanto, em média, é desperdiçado em gramas em cada uma dessas 5 escolas: 35.180 gramas em média.

Os valores, em reais, correspondentes à essas quantidades, podem ser vislumbrados no quadro 9 a seguir.

Quadro 9: Entrada e desperdício em reais das outras 5 escolas

	Por dia	Por mês	Por ano
Entrada de Alimento	R\$ 1.492,50	R\$ 29.850,00	R\$ 298.500,00
Desperdiçado	R\$ 808,19	R\$ 16.163,78	R\$ 161.637,75

Fonte: Os autores

Enfim, podemos ter uma noção do quanto, em reais, pode estar sendo desperdiçado nas 6 escolas municipais que são atendidas pela Cozinha Social:

Quadro 10: Entrada e desperdício em reais das 6 escolas.

	Por dia	Por mês	Por ano
Entrada de Alimento	R\$ 1.730,00	R\$ 34.600,00	R\$ 346.000,00
Desperdiçado	R\$ 936,80	R\$ 18.735,90	R\$ 187.359,00

Fonte: Os autores

Por fim, iremos encontrar uma representação gráfica do quanto se investe todo mês nas escolas e o quanto se desperdiça. Consideraremos o desperdício, em Kg, do mês, com a ajuda do calendário escolar do ano de 2016, ano em que se deu a coleta de dados. Neste caso, serão tomados exatamente os dias efetivos de aula nos 12 meses.

Quadro 11: Relação do quanto se investe e do quanto é desperdiçado em refeição nas Escolas.

Investimento e desperdício de comidas das 6 Escolas Municipais			
Mês	Dias Letivos	Investimento	Desperdício
1	0	R\$ 0,00	R\$ 0,00
2	12	R\$ 20.760,00	R\$ 11.241,60
3	21	R\$ 36.330,00	R\$ 19.672,80
4	19	R\$ 32.870,00	R\$ 17.799,20
5	19	R\$ 32.870,00	R\$ 17.799,20
6	20	R\$ 34.600,00	R\$ 18.736,00
7	10	R\$ 17.300,00	R\$ 9.368,00
8	22	R\$ 38.060,00	R\$ 20.609,60
9	20	R\$ 34.600,00	R\$ 18.736,00
10	17	R\$ 29.410,00	R\$ 15.925,60
11	19	R\$ 32.870,00	R\$ 17.799,20
12	10	R\$ 17.300,00	R\$ 9.368,00
Total	189	R\$ 326.970,00	R\$ 177.055,20

Fonte: Os autores

Notem o tanto que pode ser desperdiçado em refeição nas seis escolas que são atendidas pela Cozinha Social. Essa quantia daria quase para alimentar mais seis escolas com a mesma quantidade média de alunos. Então, umas das soluções seria estudar quais refeições os alunos mais consomem, considerando o envio de quantidades diferentes de refeição a cada dia, dependendo do cardápio, se o dia é chuvoso ou não, sempre

considerando um percentual, pequeno, de sobra de comida, para o caso de os alunos consumirem mais.

Quadro 12: Representação Gráfica do quanto se investe (azul) e desperdiça (laranja) nas Escolas.



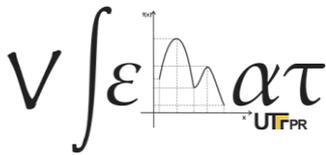
Fonte: Os autores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse é um trabalho que constituiu parte das atividades da disciplina de Modelagem Matemática 1 e teve como objetivo investigar o desperdício de comida que pode ter nas escolas municipais de Toledo do período integral. O intuito do estudo era socializar junto à direção da escola em que se deu a coleta de dados, estes resultados, de modo a possibilitar estudos de como pode-se tentar, pelo menos, fazer algo para diminuir o desperdício na escola.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004.



PROJETO INTEGRADOR TIM TIM

Simoni Berger (CAPES - PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Campus Toledo
simoniberger@hotmail.com.br

Amilton Luciano Garcia (CAPES - PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Campus Toledo
garcia_amilton@hotmail.com

Rodolfo Eduardo Vertuan (CAPES - PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR - Campus Toledo
rodolfovertuan@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O projeto Tim Tim é o projeto integrador referente ao primeiro semestre de 2017. Ele tem como objetivo integrar as disciplinas do terceiro período do curso de licenciatura em matemática da Universidade Tecnológica federal do Paraná. Essas disciplinas são: Didática geral, Fundamentos da matemática 2, Libras 2, Cálculo Integral, Geometria 2 e Laboratório de ensino da Matemática.

A primeira parte do trabalho consiste, dentre outras coisas, na construção de uma réplica de uma taça de vidro, por isso do título do projeto integrador ser Tim Tim. Como segunda parte do trabalho, tivemos a missão de representar essa taça graficamente com o uso de softwares, fazer os cálculos de volume de vidro da taça, utilizando conteúdos do Cálculo Diferencial e Geometria 2, e comparar os resultados desses cálculos com as informações já obtidas por meio de experimentos realizados com a taça. Além disso, deveremos apresentar a relação entre a altura de líquido da taça e o volume de líquido correspondente a esta altura. A partir disso deveremos desenvolver um plano de aula para que o projeto pudesse ser trabalhado em sala de aula, na Educação Básica, de forma a atender as necessidades do nível em que se vislumbra a sua realização. Neste plano de aula, também fomos desafiados a desenvolver atividades para a inclusão de alunos surdos.

Iremos assim, apresentar os métodos utilizados para esta investigação. Gostaríamos de destacar que o projeto ainda está em desenvolvimento, portanto apenas a primeira parte que está pronta será apresentada.

RESUMO

Definido o tema “Tim Tim” pelos professores, nós recebemos uma taça e fomos desafiados a trazer as medidas da taça bem como apresentar o volume de líquido que a taça suporta cheia e a quantidade de vidro utilizada para a construção da mesma. Necessitamos também construir uma réplica da taça, utilizando outro material que não fosse vidro.

Para resolver o problema, utilizamos um paquímetro para medir a taça. Após isso, pesamos a taça para calcularmos a quantidade de vidro utilizada para sua construção e com o auxílio de uma seringa medimos a quantidade de líquido que a mesma suporta cheia.

Para a construção do protótipo, o material escolhido foi o gesso, onde a mesma foi construída com a ajuda de um molde feito pelo grupo.

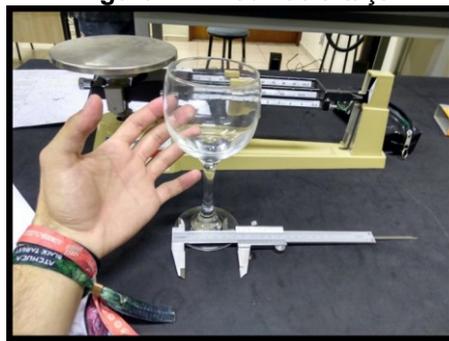
A seguir, detalharemos o desenvolvimento do projeto até o momento.

DESENVOLVIMENTO

CÁLCULO DAS MEDIDAS E VOLUME ATRAVÉS DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

- Circunferência da borda da taça = 80 mm
- Circunferência do meio do bojo da taça = 89 mm
- Circunferência da parte menor do bojo da taça = 55 mm

Figura 1 – Medindo a taça



Fonte: Próprios autores

Para calcular o volume de líquido da taça, utilizamos uma seringa com 5 ml e enchemos a taça contando as vezes que colocamos as 5 ml dentro da taça. No total foram colocadas 77 vezes chegando ao total de 385 ml de líquido que a taça suporta cheia.

Figura 2 – Medindo o volume de líquido



Fonte: Próprios autores

Para a quantidade de vidro utilizada pesamos a taça e calculamos seu volume a partir de seu peso e da densidade do vidro. Assim obtivemos:

Peso = 233,4g ou seja 0,2334 kg

Usando a fórmula para volume

$$\rho = \frac{m}{v} \rightarrow v = \frac{m}{\rho}$$

Densidade do vidro = 2500 kg/m³ → 2,5x10³ kg/m³

$$v = \frac{0,2334}{2,5 \times 10^3} \rightarrow v = 9,336 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^3$$

Figura 3 – Pesando a taça



Fonte – Próprios autores

CONSTRUÇÃO DA RÉPLICA

Na construção da réplica, o material principal que utilizamos foi o gesso. A seguir vamos descrever o passo a passo realizado para sua criação.

Em primeiro momento passamos cola quente ao redor da taça de vidro dada, então após a sua secagem cortamos a cola para retirá-la da taça. Depois, colamos para emendar a parte cortada e obter o molde.

Figura 4 – Molde



Fonte: Próprios autores

Figura 5 – Modelando a taça com gesso



Fonte: Próprios autores

Com o molde em mãos preparamos o gesso e o jogamos dentro do molde para modelarmos a taça. Após o gesso secar, retiramos o molde de cola quente do gesso.

Alguns problemas ocorreram na construção. Um dos problemas foi que o gesso penetrou em algumas imperfeições do molde de cola quente, por isso na retirada a parte da haste da taça quebrou restando apenas a base da taça e o bojo. A base da taça também foi danificada, por isso usamos uma tampa que tivesse a mesma circunferência colocando a peça dentro e preenchendo com gesso para consertar.

Para retirarmos a cola quente do gesso esquentamos a ponta de uma faca cortando assim com mais facilidade a cola quente, então retiramos por partes.

Figura 6 – Consertos 1



Fonte: Próprios autores

Figura 7 – Consertos 2



Fonte: Próprios autores

Para fazer a haste da taça foi usado um caninho com um parafuso para encaixar com a parte do bojo da taça. Passamos então gesso em volta do cano e fizemos consertos com massa corrida. Para isso furamos o bojo com uma parafusadora e colocamos o parafuso dentro. Para fixar bem o cano e o parafuso, usamos Super Bonder e depois revestimos de massa corrida. Para deixá-la reta e lisa passamos várias vezes massa corrida sempre fazendo pequenos consertos até ficar do jeito desejado. Por fim lixamos a taça. Para finalizar passamos 8 mãos de selador e lixamos.

Por conta de todos os consertos feitos na taça, as espessuras da base da taça e da haste ficaram consideravelmente maiores que a taça de vidro original. O protótipo apresenta pequenas imperfeições por conta dos consertos e podem-se observar algumas imperfeições na borda devido ao fato de esfregar ao manuseá-la.

Figura 8 – Resultado final



Fonte: Próprios autores

CONCLUSÃO

O projeto ainda está em desenvolvimento, mas temos aprendido muito através dos desafios que nos foram propostos. Uma das contribuições para nós enquanto futuros professores de matemática é a aprendizagem de meios alternativos para o ensino da matemática de forma que envolva os alunos, mostrando-lhes a matemática presente no cotidiano em coisas que muitas vezes nos passam despercebidas.

Enquanto alunos, ele nos desafia a aplicar a matemática aprendida já pelo grupo para que seja possível a resolução dos problemas propostos. Esta se refere principalmente aos conteúdos de trigonometria e cálculo. Assim, além de podermos aplicar nossos conhecimentos, somos desafiados a buscar mais informações e estudar novos conteúdos.

Outra contribuição importante é o uso de softwares que nos dá a missão de aprendermos a utilizá-los, fato que contribui em nossa formação. Através da criação da réplica, também podemos utilizar materiais manipuláveis e pensar em formas de construí-la, aprimorando assim a criatividade e o trabalho em grupo.

REFERÊNCIAS

FLEMMING, DIVA MARÍLIA. **Cálculo A**: funções, limites, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.



ANÁLISE DA VARIABILIDADE ESPACIAL DOS TEORES DE CARBONO (C) EM UMA ÁREA AGRÍCOLA COMERCIAL UTILIZANDO MÉTODOS GEOESTATÍSTICOS

Tamara Cantú Maltauro
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
tamara_ma02@hotmail.com

Letícia Ellen Dal' Canton
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
leticiacanton@hotmail.com

Weverton Rodrigo Verica
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
wevertonverica@hotmail.com

Luciana Pagliosa Carvalho Guedes
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
Luciana_pagliosa@hotmail.com

Miguel Angel Uribe-Opazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
mopazo@uol.com.br

Resumo. As técnicas geoestatísticas têm sido amplamente utilizadas na agricultura de precisão nos últimos anos, objetivando estudar os atributos químicos e físicos do solo, sendo que estas permitem a identificação da estrutura de variabilidade espacial de dados georreferenciados. O intuito desse trabalho foi descrever a variabilidade espacial do teor de carbono (C) [$g\ dm^{-3}$] do solo, em uma área comercial de 167,35 ha no município de Cascavel, localizado região oeste do Paraná, referentes ao ano safra 2013/2014. Os dados referentes a este atributo apresentaram dependência espacial. O mapa temático obtido pela krigagem ordinária mostrou que a maior parte da área apresentou teores altos de carbono segundo a Cooperativa Central de Pesquisa Agrícola (COODETEC). Em regiões menores nas quais os teores de carbono são inferiores a graduação média (COODETEC), caberia uma correção realizando uma aplicação localizada no solo, adicionando alguma fonte de carbono, como cama de aviário, ou chorume residuário da suinocultura, diminuindo impactos ambientais e proporcionando aumento da produtividade.

Introdução

A Agricultura de Precisão (AP) fundamenta-se no fato de que as áreas agrícolas não são uniformes no espaço. Ao longo das últimas décadas, foram desenvolvidas estratégias

para gerenciar os problemas provenientes da desuniformidade das áreas (MOLIN, AMARAL, COLAÇO, 2015). A AP tem várias formas de abordagem, com o objetivo principal de utilizar estratégias para resolver os problemas da desuniformidade das áreas agrícolas (JUNTOLLI *et al.*, 2013).

A utilização da Agricultura de Precisão constitui-se uma alternativa à agricultura tradicional, na qual a aplicação de insumos é realizada a taxa fixa na área agrícola, provocando impactos ambientais e custos desnecessários ao produtor (BERNARDI *et al.*, 2014).

Sabe-se que produzir mais e reduzir custos são necessidades impostas ao agronegócio brasileiro pela concorrência de mercado. Para que isso seja possível, uma alternativa é realizar o manejo e a aplicação de insumos localizados, isto é, a taxa variável. Mas para que isso seja viável, deve-se analisar a variabilidade espacial dos atributos químicos e físicos do solo, pois, segundo Guedes (2008), tais fatores exercem influência direta no nível de produtividade das culturas.

A adoção desses métodos de gerenciamento agrícola regionalizados fundamenta-se no uso de técnicas geoestatísticas, pois estas permitem mensurar o grau de dependência espacial entre as amostras observadas em uma determinada região e descrever a estrutura de variabilidade espacial da variável georreferenciada em toda a área, gerando assim os mapas temáticos (SOARES, 2014). Dessa forma, a Geoestatística auxilia fortemente nas decisões estratégicas e complexas em relação ao gerenciamento do sistema de produção agrícola e conseqüentemente nos seus efeitos ambientais, contribuindo para um desenvolvimento agrícola sustentável.

A Geoestatística é um conjunto de conceitos e ferramentas, construídos a partir de conceitos básicos da estatística, para o estudo da variabilidade espacial de fenômenos, quando as informações coletadas são georreferenciáveis e apresentam dependência espacial (GUEDES, 2008).

Neste contexto, o intuito deste trabalho é estudar a variabilidade espacial dos teores de carbono (C) considerando métodos geoestatísticos, possibilitando a construção de mapas temáticos dos teores de carbono e conseqüentemente a localização de regiões com necessidade de correção do solo, de modo que possa ser aplicada alguma fonte de carbono

regionalmente, como cama de aviário ou chorume residuário da suinocultura, reduzindo custos e diminuindo o impacto ambiental.

MATERIAIS E MÉTODOS

A coleta de dados do teor de carbono (C) [$g\ dm^{-3}$] foi realizada no ano safra 2013/2014 na região Oeste do Paraná-Brasil, em uma área comercial de 167,35 ha, no município de Cascavel, cuja localização geográfica é, aproximadamente, 24,95° sul de latitude, 53,57 oeste de longitude e altitude média de 650 m. O solo é classificado como Latossolo Vermelho Distroférico típico, com textura argilosa (EMBRAPA, 2006). O clima da região é classificado como temperado mesotérmico e superúmido, tipo climático Cfa (Koeppen) e a temperatura anual média é de 21° C. A análise química do solo foi realizada com amostras de aproximadamente 500 g, que foram encaminhadas ao Laboratório da Cooperativa Central de Pesquisas Agrícolas - COODETEC utilizando o Método Walkley-Black.

Para o referido ano agrícola foi realizada uma amostragem de 102 pontos, considerando a amostragem sistemática centrada com adição de pares de pontos próximos (*lattice plus close pairs*) (DIGGLE e RIBEIRO JR., 2007), sendo que a distância máxima de 141 m entre pontos. Em alguns locais, escolhidos de forma aleatória, a amostragem foi realizada com distâncias menores: 75 m e 50 m entre ponto. Todas as amostras foram georreferenciadas e localizadas com auxílio de um aparelho receptor de sinal com o sistema de posicionamento global (GPS) GEOEXPLORE 3, em um sistema espacial de coordenadas UTM.

Após a análise laboratorial das amostras, realizou-se primeiramente uma análise exploratória dos dados por meio de estatísticas descritivas e de análise gráfica composta pela construção do gráfico Boxplot. Na sequência, realizou-se a análise geoestatística, elaborando gráficos espaciais classificados segundo os quartis (Post-plot) e o gráfico de dispersão do teor de carbono *versus* as coordenadas do eixo X e Y, com o intuito de estudar a tendência direcional dos dados.

Na sequência, foram construídos os semivariograma omnidirecional (conjuntamente com o gráfico de envelope) e direcionais (0°, 45°, 90° e 135°). Para a construção destes semivariogramas utilizou-se o Estimador Clássico de Matheron, com a distância de corte

(*cutoff*) de 50% da distância máxima conforme sugerido por Clark (1979) e com mínimo de 30 pares para o cálculo das semivariâncias, (JOURNEL e HUIJBREGTS, 1978; GUERRA, 1988).

Para modelar um conjunto de dados que apresente estrutura de dependência espacial, será considerado, com base em Uribe-Opazo, Borssoi e Galea (2012), um processo estocástico $Z = \{Z(s_i); s_i \in S\}$, em que S é um subconjunto do espaço euclidiano r -dimensional, IR^r .

Considere que $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$ são observações da variável aleatória sob estudo nas s_i localizações espaciais amostradas, com distribuição gaussiana n -variada com vetor de médias $\mu \mathbf{1}$ e a matriz de covariância Σ , isto é, $Z \sim N_n(\mu \mathbf{1}, \Sigma)$, em que μ é uma constante; $\mathbf{1}$ é um vetor de uns de dimensão $n \times 1$ e Σ , é uma matriz definida positiva, com dimensão $n \times n$, dada por $\Sigma = [\text{Cov}(Z(s_i), Z(s_u))]$. Supondo-se que os dados são descritos pelo modelo $Z(s_i) = \mu(s_i) + \epsilon(s_i)$, em que $\mu(s_i)$ é o termo determinístico e $\epsilon(s_i)$ é o termo estocástico, e ambos dependem do ponto em que s_i em que a variável Z é observada.

A função semivariância $\gamma(h)$ representada por um modelo geoestatístico é dada por $\gamma(h) = \text{Cov}(0) - \text{Cov}(h)$, sendo essa uma equação que relaciona as funções semivariância e a covariância, em que h é a distância entre as observações.

Considerando o modelo linear gaussiano (Z), utilizou-se o método analítico da Máxima Verossimilhança (ML) para estimar os parâmetros efeito pepita (φ_1), contribuição (φ_2), função do alcance (φ_3), alcance (a) e também a média (β). Essa estimação foi realizada considerando os modelos teóricos Exponencial, Gaussiano e Família Mátern com $\kappa = 1, 1,5$ e $2,5$, em que κ é o parâmetro de forma (LANDIM e YAMAMOTO, 2013). Na sequência, foi escolhido o melhor modelo estimado por meio da validação cruzada (CRESSIE e LAHIRI, 1993).

Posteriormente, realizou-se a estimação dos valores do teor de carbono em localizações não amostradas da área em estudo, por meio da krigagem ordinária, na qual se utiliza os valores amostrais dos pontos vizinhos e a informação sobre a estrutura de dependência espacial para estimar os teores de carbono em toda a área.

As rotinas computacionais das análises estatísticas e geoestatísticas foram realizadas no software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2011) utilizando o pacote geoR (RIBEIRO JR. e DIGGLE, 2001).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Realizou-se a análise descritiva referente ao teor de carbono, conforme Tabela 1.

Tabela 1 - Estatísticas descritiva referente ao teor de carbono [$g\ dm^{-3}$].

Medida	Valores calculados
Mínimo	22,99
Mediana	30,78
Média	31,28
Máximo	40,13
CV (%)	12,40

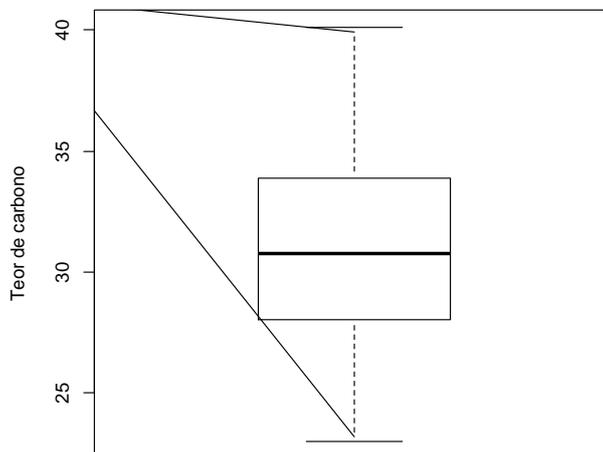
Com auxílio da Tabela 1 tem-se o valor mínimo de carbono foi de 22,99 $g\ dm^{-3}$ enquanto que o valor máximo foi de 40,13 $g\ dm^{-3}$.

A média referente ao teor de carbono dos pontos analisados foi de 31,28 $g\ dm^{-3}$ e a mediana foi de 30,78 $g\ dm^{-3}$, como estes valores estão muito próximos indica a existência de uma simetria dos dados.

No que se refere ao coeficiente de variação o valor obtido foi de 12,40%, segundo Pimentel Gomes (1985), tem-se uma média dispersão dos dados, pois o coeficiente de variação está entre 10 e 20%.

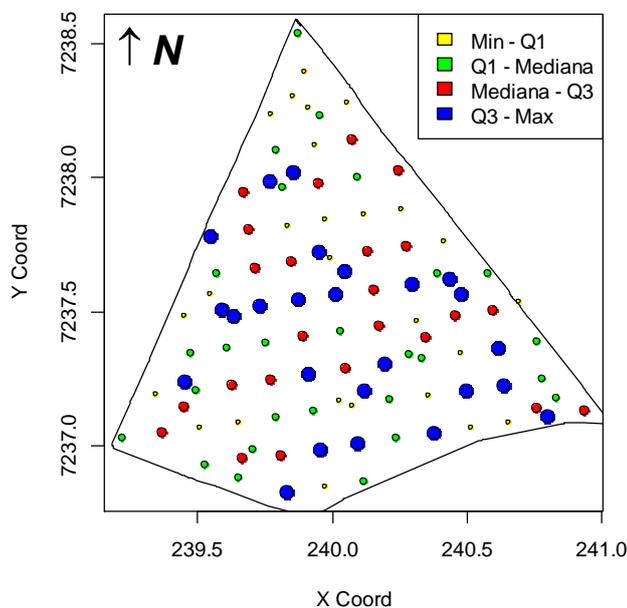
A Figura 1 apresenta o gráfico Boxplot referente aos dados dos teores de carbono. Pode-se observar neste gráfico a ausência de pontos discrepantes, e mais, que a distribuição dos dados assemelha-se a uma simétrica.

Figura 1 - Boxplot referente aos teores de carbono.



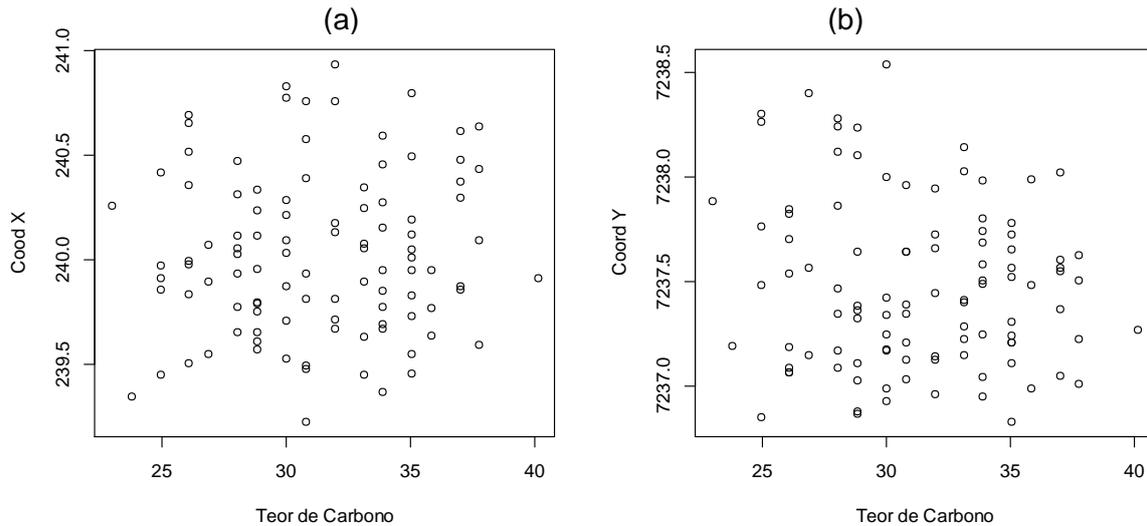
Para verificar a tendência direcional utilizou-se primeiramente o gráfico Post-plot (Figura 2). Por meio deste gráfico observa-se que não existe tendência direcional, pois, em geral, não existe aglomeração de pontos pertencentes ao mesmo intervalo quartílico.

Figura 2 - Post-plot da área em estudo.



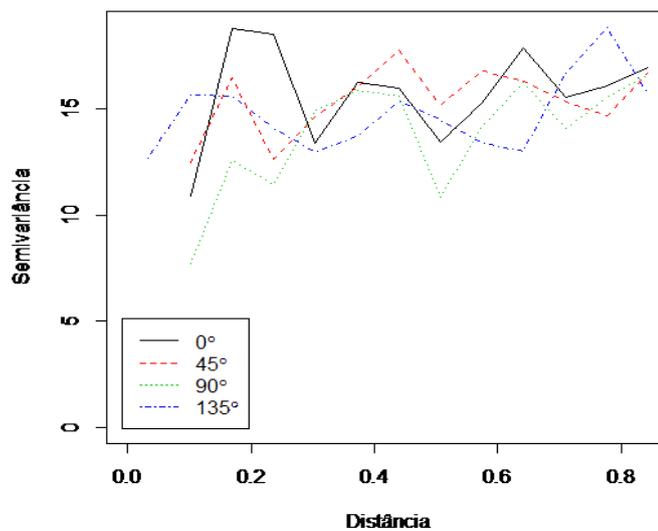
Para reforçar este diagnóstico construíram-se os gráficos de dispersão das coordenadas X e Y com o teor de carbono, na qual é possível notar que não há evidência de tendência direcional, considerando a disposição aleatória dos pontos (Figura 3).

Figura 3 -Gráfico de dispersão das coordenadas (a) X e (b) Y versus teores de carbono.



Analisou-se o padrão da estrutura de dependência espacial em diferentes direções, construindo os semivariogramas direcionais nas direções 0°, 45°, 90° e 135° (Figura 4).

Figura 4 - Semivariograma direcional (0°, 45°, 90°, 135°).

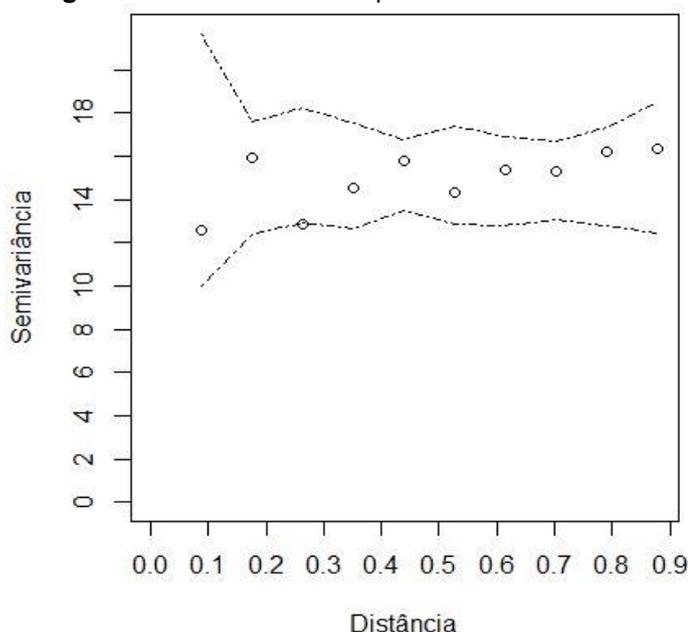


Observa-se pela Figura 4, que a estrutura de dependência espacial é similar nas direções 0°, 45°, 90° e 135° para o teor de carbono, desta forma assume-se que a estrutura

de dependência espacial é isotrópica, ou seja, não existe tendência direcional quanto a continuidade espacial.

A Figura 5 apresenta o semivariograma omnidirecional e o gráfico de envelope para o teor de carbono. O gráfico envelope permite identificar a presença de continuidade e dependência espacial dos dados, quando houver pontos fora do envelope (DIGGLE e RIBEIRO JR., 2007). Por meio deste gráfico, nota-se no intervalo de variação da distância, sendo o máximo valor considerado para a distância dado pelo *cutoff*, que conforme se aumenta a distância entre os pontos, os valores da semivariância também aumentam, além disso, também se percebe a presença de ponto fora do envelope, o que indica a presença de dependência espacial.

Figura 5 - Gráfico de envelope do teor de carbono.



Foram ajustados ao conjunto de dados os modelos teóricos Exponencial, Gaussiano e Família Mátern com $\kappa = 1, 1,5$ e $2,5$, considerando o método de Máxima Verossimilhança (ML). Verificou-se por meio da Validação Cruzada (ISAKS e SRIVASTAVA, 1989) que o modelo que melhor se ajusta aos dados é o Exponencial.

Os valores dos critérios considerados na Validação Cruzada e os parâmetros geoestatísticos estimados para o modelo Exponencial são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Critérios de validação cruzada e parâmetros obtidos para o modelo Exponencial.

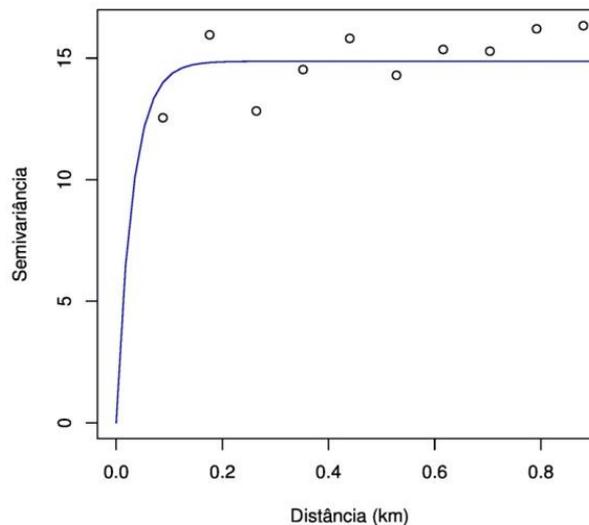
EM	ER	SEM	SER	EA	$\hat{\beta}$	$\hat{\varphi}_1$	$\hat{\varphi}_2$	$\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2$	$\hat{\varphi}_3$	a
-0,005	-0,001	3,886	1,009	339,034	31,244	0	14,870	14,870	0,031	0,093

EM: erro médio; ER: erro médio reduzido, SEM: desvio padrão do erro médio, SER: desvio padrão do erro médio reduzido, EA: erro absoluto, β : média, φ_1 : efeito pepita, φ_2 : contribuição, $\varphi_1 + \varphi_2$: patamar, a : alcance.

Existe uma dependência espacial, porém o raio de dependência espacial é pequeno, sendo de 0,0930 km, equivalentemente a 93 m (Tabela 2) (a maioria dos pares de pontos apresentam distância maior que o raio de dependência espacial) o que implica no surgimento de regiões circulares centradas nos pontos amostrais, fenômeno conhecido como “bull eyes effect”, o que pode ser evidenciado na Figura 7 (MENEZES, *et al.*, 2016).

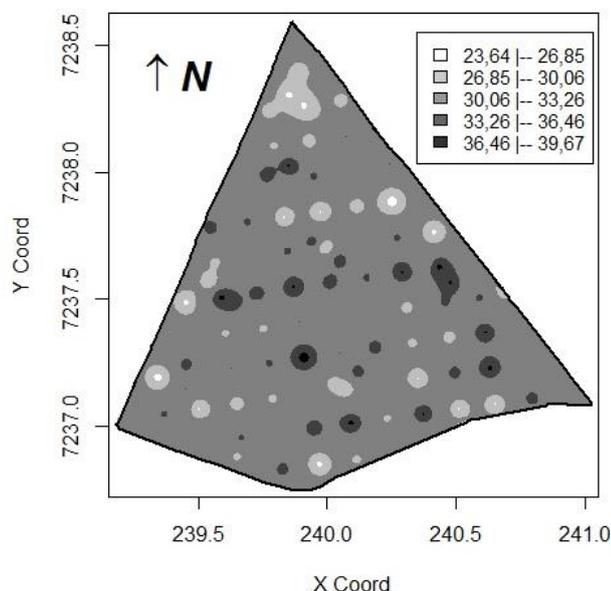
A Figura 6 exibe o semivariograma com o modelo exponencial ajustado aos pontos.

Figura 6 - Modelo exponencial ajustado ao semivariograma experimental pelo método de máxima verossimilhança.



A seguir será apresentado o mapa temático estimado por krigagem ordinária dos teores de carbono em toda a área sob estudo (Figura 7). O mapa temático possibilita realizar a predição espacial do atributo químico.

Figura 7 - Mapa estimado pelo método da krigagem ordinária para os teores de carbono [g dm⁻³].



Por meio da Figura 6 observa-se que a maior parte da área (em torno de 87%), correspondendo a aproximadamente 145 ha apresenta teores de carbono entre 30,06 e 33,26 $g\ dm^{-3}$, sendo que esta classe contém o valor da média (31,28) e este fato também é um resultado do raio de dependência espacial ser pequeno. A primeira e última classe que representam, respectivamente, os menores e maiores teores de carbono apresentados, são verificados em menos de 1% da área, o que não representa nem um hectare da área. Já a segunda e quarta classe, indicam teores de carbono exibidos em 12 e 9 ha, respectivamente. Nota-se que, com exceção da terceira classe, a qual exibe teores altos de carbono, segundo a classificação da COODETEC (LLANILLO, 1989), as demais são contempladas em ilhas pela área, o que sugere possíveis aplicações localizadas alguma fonte de carbono nas regiões cujos teores estão entre 23,64 e 30,06 $g\ dm^{-3}$ para que se possa atingir teores médios desse atributo químico numa proporção ainda maior da área, especialmente mais ao norte desta na qual visualiza-se uma região maior com baixos teores de carbono. O que pode explicar a homogeneidade da área é que ela é um local em que a anos se utiliza a agricultura de precisão.

CONCLUSÃO

Os dados referentes aos teores de carbono na área sob estudo apresentam similaridade.

Os dados apresentam distribuição isotrópica e dependência espacial.

Os métodos geoestatísticos permitiram observar por intermédio do mapa temático construído, que a maior porcentagem da área apresenta teores médios de carbono. As demais porções contempladas em ilhas pela área e sugerem possíveis aplicações localizadas de alguma fonte de carbono, como cama de aviário ou chorume residuário de suinocultura nas regiões cujos teores são inferiores aos teores médios desse atributo químico.

REFERÊNCIAS

BERNARDI, A. C. C.; NAIDE, J. M.; RESENDE, A. V.; BOSSOI, L.H.; INAMASU, R. Y. **Agricultura de precisão: Resultados de um Novo olhar**. Embrapa, Brasília- DF, 2014.

CRESSIE, N.; LAHIRI, S. N. The asymptotic distribution of REML estimators. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 45, n. 2, p. 211-233, 1993.

DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JR., P. J. **Model-based geostatistics**. Springer Series in Statistics, 2007. 230 p.

EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA – EMBRAPA. Centro Nacional de Pesquisa de Solos. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. 2ª ed. Brasília-DF, 2006. 306 p.

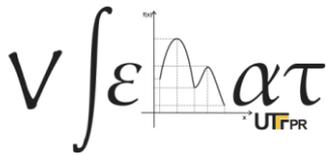
GUEDES, L. P. C. **Otimização de amostragem espacial**. 2008. 143 f. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba - SP.

GUERRA, P. A. G. **Geoestatística operacional**. Brasília: Ministério das Minas e Energia, Departamento de Produção Mineral, 1988. 145 p.

ISAACS, E.; SRIVASTAVA, R. M. **An Introduction to Applied Geostatistics**, New York: Oxford University Press, 1989. 553 p.

JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, CH. J. **Mining geostatistics**. London, Academic Press, 1978. 600 p.

JUNTOLLI, F. V.; SANTOS, R. L. B.; INAMASU, R. Y.; MOLIN, J. P. **Agricultura de precisão: Boletim técnico**. Ministério da agricultura, pecuária e abastecimento. Secretaria de desenvolvimento agropecuário e cooperativismo. Brasília – DF, 2013.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência
e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

LANDIM, P. M. B.; YAMAMOTO, J. K. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. São Paulo-SP: Oficina de Textos, 2013. 215 p.

LLANILLO, R. F. Regionalização do Estado do Paraná. In: SEAB. (Org.). **Manual técnico do subprograma de Manejo e conservação do solo**. 1ª Ed. Curitiba: Secretaria de Estado da Agricultura e do Abastecimento do Paraná, v.1, p.41-50, 1989.

MOLIN, J. P.; AMARAL, L.R.; COLAÇO, A. F. **Agricultura de Precisão**. 1ª ed. São Paulo-SP: Oficina de Textos, 2015.

PIMENTEL GOMES, F. **Curso de Estatística Experimental**. São Paulo-SP: Nobel, 1985. 467 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language na denvironment for statisticalcomputing**. R Foundation for StatisticalComputing, Vienna, Austria. ISBN 3-90051-07-0. Disponível em <<http://www.r-project.org/>>. Acesso em: 06 out. 2015.

RIBEIRO JR., P. J.; DIGGLE, P. J. (2001) **geoR: A package for geostatisticalanalysis**. R-NEWS, v. 1, n. 2, ISSN 1609-3631.

SOARES, A. **Geoestatística para as ciências da terra e do ambiente**. 3ª ed. Lisboa: Press, 2014. 214 p.

URIBE-OPAZO, M. A.; BORSSOI, J. A.; GALEA, M. Influencediagnostics in Gaussianspatial linear models. **JournalofAppliedStatistics**, v. 39, n. 3, p. 615-630, 2012.



CONSTRUÇÃO DE MAPAS TEMÁTICOS UTILIZANDO DIFERENTES MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO AOS PARÂMETROS DO MODELO GEOESTATÍSTICO

Letícia Ellen Dal' Canton
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
leticiacanton@hotmail.com

Edilza Martins da Silva
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
edilza_martins@hotmail.com

Tamara Cantú Maltauro
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
tamara_ma02@hotmail.com

Weverton Rodrigo Verica
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
wevertonverica@hotmail.com

Luciana Pagliosa Carvalho Guedes
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
luciana_pagliosa@hotmail.com

Miguel Angel Uribe-Opazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
mopazo@uol.com.br

Resumo. Considerando a variabilidade espacial dos teores de potássio $cmol\ dm^{-3}$, referentes ao ano safra 2013/2014 para a cultura de soja, coletados em uma área comercial de 167.35 hectares no município de Cascavel, construiu-se os mapas temáticos considerando os métodos de estimação dos parâmetros do modelo geoestatístico de máxima verossimilhança (ML), mínimos quadrados ponderados (WLS1) e mínimos quadrados ordinário (OLS). Pelos resultados obtidos observou-se que os mapas construídos pelos métodos ML e OLS são similares entre si, segundo critério de Exatidão Global. No geral, os mapas apresentam, de acordo com a classificação da Cooperativa Central de Pesquisa Agrícola (COODETEC), teores médios de potássio distribuídos na área em estudo.

INTRODUÇÃO

A Geoestatística é um conjunto de técnicas que, a partir de conceitos básicos da estatística, estuda a variabilidade espacial dos fenômenos quando os seus dados coletados são georreferenciáveis e apresentam dependência espacial (GUEDES, 2008). Nos últimos anos as técnicas geoestatísticas vêm sendo muito utilizadas na Agricultura de Precisão (WENDPAP e URIBE-OPAZO, 2010).

A Agricultura de Precisão (AP) fundamenta-se no fato de que as áreas agrícolas não são uniformes no espaço. Existem várias formas de abordar a AP, mas o objetivo é sempre utilizar estratégias para resolver os problemas da desuniformidade das áreas agrícolas (JUNTOLLI *et al.*, 2013). Utilizar a AP é uma alternativa à agricultura tradicional na qual a aplicação de insumos é realizada a taxa fixa na área agrícola, provocando impactos ambientais e custos desnecessários ao produtor (BERNARDI *et al.*, 2014).

Sabe-se que produzir mais e reduzir custos são necessidades impostas ao agronegócio brasileiro pela concorrência de mercado. Para que isso seja viável, uma possibilidade é realizar a aplicação de insumos e manejo do solo a taxa variável, ou seja, regionalizado. Mas para que isso seja viável, deve-se analisar a variabilidade espacial dos atributos químicos e físicos do solo, pois, de acordo com Guedes (2008), tais fatores influenciam diretamente o nível de produtividade das culturas.

Os métodos de gerenciamento agrícola regionalizados fundamentam-se no uso de técnicas geoestatísticas, pois estas permitem mensurar o grau de dependência espacial entre as amostras observadas em uma determinada região e descrever a estrutura de variabilidade espacial da variável georreferenciada em toda a área, gerando assim os mapas temáticos (SOARES, 2014). Dessa forma, a Geoestatística auxilia fortemente nas decisões estratégicas e complexas, orientando o sistema de produção agrícola e, conseqüentemente, seus efeitos ambientais, contribuindo para um desenvolvimento agrícola sustentável.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é comparar os mapas temáticos dos teores de potássio construídos pelos métodos OLS, WLS1 e ML para o modelo geoestatístico escolhido, para tal será calculado a Exatidão Global que permitirá verificar o grau de similaridade entre os mapas. Em cada mapa, será possível identificar regiões com necessidade de correção do solo, de modo que essa correção possa ser aplicada localmente.

MATERIAIS E MÉTODOS

A coleta de dados referente ao teor de potássio (K) [$cmol\ dm^{-3}$] foi realizada com amostragem de solo no ano safra 2013/2014, em uma área comercial de 167.35 ha, no

município de Cascavel, cuja localização geográfica é 24.95° sul de latitude, 53.57° oeste de longitude e altitude média de 650 m, sendo este município localizado na região Oeste do Paraná-Brasil. O solo é classificado como Latossolo Vermelho Distroférico, com textura argilosa (EMBRAPA, 2006). A temperatura anual média da região é de 21°C e o clima é classificado como temperado mesotérmico e superúmido, tipo climático Cfa (Koeppen). A análise química do referido atributo foi processada pelo laboratório da Cooperativa Central de Pesquisa Agrícola (COODETEC), considerando o método Mehlich I.

Fez-se uma amostragem de 102 pontos na referida área, considerando a amostragem sistemática centrada com adição de pares de pontos próximos (*lattice plus close pairs*) (DIGGLE e RIBEIRO JR., 2007), sendo que a distância mínima entre pontos da grade regular foi de 141 m. Em determinados locais, escolhidos de maneira aleatória, a amostragem foi realizada com distâncias menores: 75 m e 50 m entre pontos. Todas as amostras foram georreferenciadas e localizadas com auxílio de um aparelho receptor de sinal com o sistema de posicionamento global (GPS) GEOEXPLORE 3, em um sistema espacial de coordenadas UTM.

Fez-se uma análise exploratória dos dados por meio de estatísticas descritivas e de análise gráfica (Boxplot). Posteriormente, realizou-se a análise geoestatística, construindo gráficos espaciais classificados segundo os quartis (Post-plot) e o gráfico de dispersão do teor de potássio versus as coordenadas do eixo X e Y, com o intuito de estudar a tendência direcional dos dados.

Para modelar o conjunto de dados que apresente estrutura de dependência espacial, será considerado, com base em Uribe-Opazo, Borssoi e Galea (2012), um processo estocástico $\mathbf{Z} = \{Z(\mathbf{s}_i); \mathbf{s}_i \in S\}$, em que S é um subconjunto do espaço euclidiano r -dimensional, \mathbb{R}^r .

Considere que $Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n)$ são observações da variável aleatória sob estudo em \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, n$, em que \mathbf{s}_i é o vetor r -dimensional com as coordenadas das localizações espaciais amostradas. As observações $Z(\mathbf{s}_i)$ têm distribuição gaussiana n -variada com matriz de covariância Σ e vetor de médias $\mu\mathbf{1}$, isto é, $\mathbf{Z} \sim N_n(\mu\mathbf{1}, \Sigma)$, onde μ é uma constante; $\mathbf{1}$ é um vetor de uns de dimensão $n \times 1$ e Σ é uma matriz definida positiva, com dimensão $n \times n$, dada por $\Sigma = [\text{Cov}(Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_u))]$. Supondo-se que os dados são descritos pelo modelo $Z(\mathbf{s}_i) = \mu(\mathbf{s}_i) + \epsilon(\mathbf{s}_i)$, em que $\mu(\mathbf{s}_i)$ é o termo determinístico e $\epsilon(\mathbf{s}_i)$ é o termo estocástico, e ambos dependem do ponto em que \mathbf{s}_i em que a variável Z é observada.

A função semivariância $\gamma(h)$ representada por um modelo geoestatístico é dada por $\gamma(h) = \text{Cov}(0) - \text{Cov}(h)$, sendo que essa equação relaciona as funções semivariância e a covariância, onde o método h é a distância entre as observações. O semivariograma experimental é o gráfico que apresenta a função semivariância.

Na sequência elaboraram-se os semivariogramas omnidirecional (juntamente com o gráfico de envelope) e direcionais (0° , 45° , 90° e 135°). Para isso, utilizou-se o Estimador Clássico de Matheron, com a distância de corte (*cutoff*) de 50% da distância máxima conforme sugerido por Clark (1979) e com mínimo de 30 pares para o cálculo das semivariâncias (JOURNEL e HUIJBREGTS, 1978; GUERRA, 1988).

Dentre os métodos apresentados na literatura para estimação dos parâmetros do semivariograma experimental, os quais definem a estrutura de dependência espacial, foram utilizados neste trabalho os seguintes métodos para se estimar os parâmetros efeito pepita (ϕ_1), contribuição (ϕ_2), função do alcance (ϕ_3) e alcance (a): mínimos quadrados ordinários (OLS), mínimos quadrados ponderados (WLS1) e máxima verossimilhança (ML). Os métodos OLS e WLS1 diferem no fato que o primeiro não considera no processo de estimação o número de pares de pontos utilizados em cada distância, enquanto o segundo atribui um peso diretamente proporcional ao número de pares. O método ML não considera o semivariograma experimental para estimar os parâmetros, e sim, utiliza os próprios dados do experimento.

Essa estimação foi realizada considerando os modelos teóricos exponencial, gaussiano e família Mátern com $\kappa = 1, 1.5$ e 2.5 , em que κ é o parâmetro de forma (LANDIM e YAMAMOTO, 2013). Na sequência, foi escolhido para cada método o melhor modelo estimado por meio da validação cruzada (CRESSIE e LAHIRI, 1993).

Posteriormente, por meio da krigagem realizou-se a predição espacial da variável em localizações não amostradas e confeccionou-se o mapa temático do teor de potássio considerando os modelos geoestatísticos estimados pelos métodos ML, WLS1 e OLS, com cinco classes de igual amplitude. Os mapas foram comparados pela Exatidão Global, que é uma medida de avaliação utilizada para mensurar a similaridade entre os mapas de referência e modelo, segundo Anderson et al. (2001), seu nível mínimo de precisão é 0.85.

As rotinas computacionais das análises estatísticas e geoestatísticas foram realizadas no *software* R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2011) utilizando o pacote geoR (RIBEIRO JR. e DIGGLE, 2001).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Realizou-se a análise descritiva referente ao teor de potássio (Tabela 1). Por meio desses resultados tem-se que o valor mínimo de potássio observado na área foi de $0.05 \text{ cmol dm}^{-3}$, enquanto que o valor máximo foi de $0.37 \text{ cmol dm}^{-3}$. O teor médio de potássio observado nos pontos amostrados foi de $0.176 \text{ cmol dm}^{-3}$ e uma mediana foi de $0.17 \text{ cmol dm}^{-3}$, como estes valores estão muito próximos tem-se indícios de simetria nos dados.

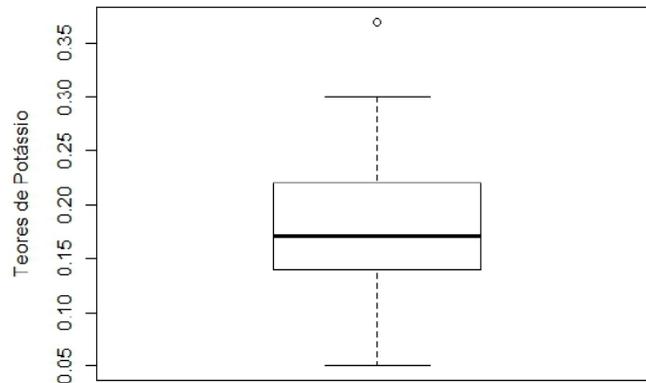
O coeficiente de variação foi de 33.73 %, segundo Pimentel Gomes (1985), esse valor indica uma dispersão muito alta dos dados, pois o coeficiente de variação é superior a 30%, ou seja, os dados são heterogêneos.

Tabela 1 - Estatísticas descritiva referente ao teor de potássio (cmol dm^{-3}).

Medida	Valores calculados
Mínimo	0.05
Mediana	0.17
Média	0.176
Máximo	0.37
CV (%)	33.73

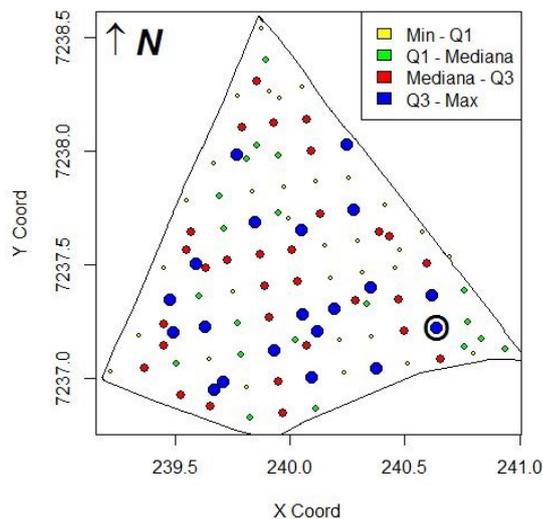
A Figura 1 apresenta o gráfico Boxplot referente aos dados dos teores de potássio. Pode-se observar neste gráfico a existência de um valor discrepante que corresponde ao máximo teor de potássio (Tabela 1).

Figura 1 - Boxplot referente aos teores de potássio (cmol dm^{-3}).



Por meio do gráfico Post-plot (Figura 2) observa-se que, em geral, não existe aglomeração de pontos pertencentes ao mesmo intervalo quartílico, indicando inexistência de tendência direcional. Embora não exista aglomeração de pontos, verifica-se que os pontos cujos teores de potássio são elevados são mais numerosos na região sul da área em estudo. A localização espacial do ponto discrepante também é apresentada na Figura 2.

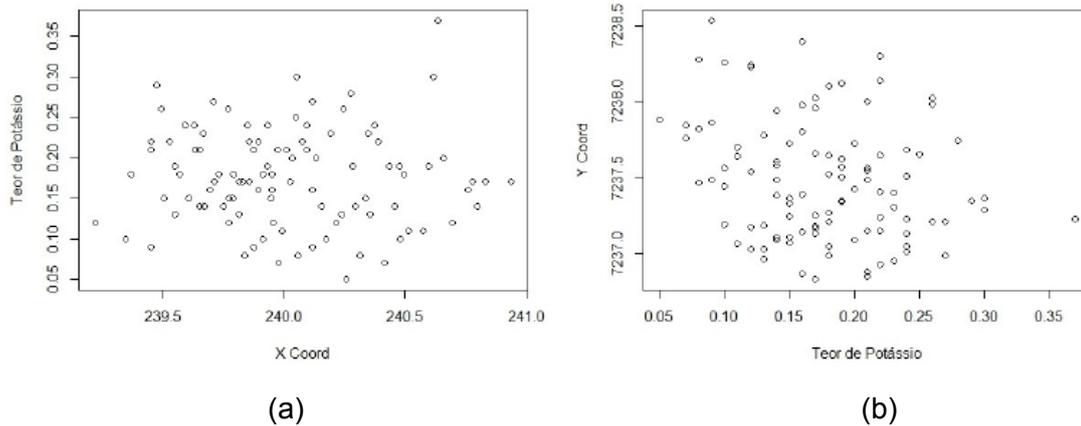
Figura 2 - Post-plot do teor de potássio para a área em estudo.



Objetivando complementar a análise realizada a partir do gráfico Post-plot, pode-se investigar a tendência espacial dos dados nas direções de cada um dos eixos coordenados construindo os gráficos de dispersão das coordenadas X e Y com o teor de potássio. Considerando a disposição aleatória dos pontos (Figura 3), verifica-se que não há evidências de tendência direcional. Observa-se também que o ponto discrepante cujo teor

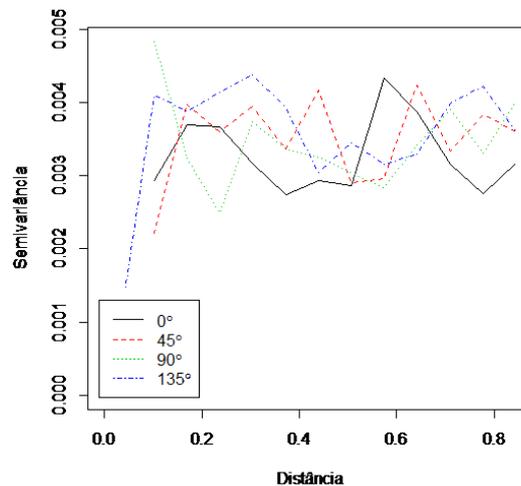
de potássio é de $0.37 \text{ cmol dm}^{-3}$ de coordenadas $x = 240.63 \text{ km}$ e $y = 7237.22 \text{ km}$ (Figura 2) é a que mais se afasta do conjunto de dados.

Figura 3 - Gráfico de dispersão das coordenadas (a) X e (b) Y versus teores de potássio.



Analisou-se o padrão da estrutura de dependência espacial em diferentes direções, construindo os semivariogramas direcionais nas direções 0° , 45° , 90° e 135° (Figura 4).

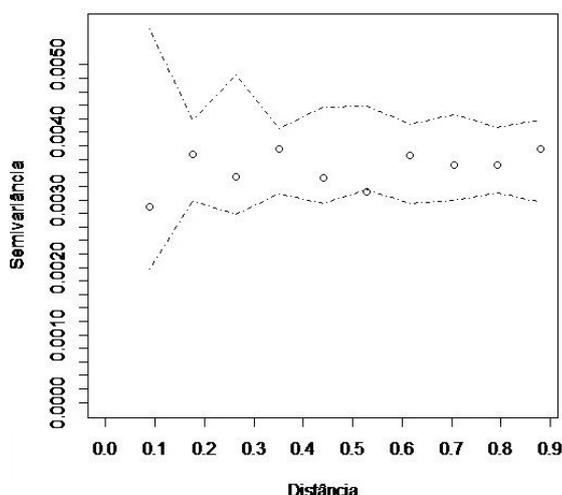
Figura 4 - Semivariograma direcional para o teor de potássio (0° , 45° , 90° , 135°).



Observa-se pela Figura 4, que a estrutura de dependência espacial para o teor de potássio é similar nas direções 0° , 45° , 90° e 135° , desta forma assume-se que a estrutura de dependência espacial é isotrópica, ou seja, não existe tendência direcional quanto à continuidade espacial.

O gráfico envelope (Figura 5) permite identificar a presença de continuidade e dependência espacial dos dados, quando houver pontos fora do envelope (DIGGLE e RIBEIRO JUNIOR, 2007), o que ocorre com esse conjunto de dados.

Figura 5 - Gráfico de envelope do teor de potássio.



Foram ajustados ao conjunto de dados os modelos teóricos Exponencial, Gaussiano e Família Mátern com $\kappa = 1, 1.5$ e 2.5 , considerando o método de Máxima Verossimilhança (ML), Mínimos Quadrados (OLS) e Mínimos Quadrados Ponderados (WLS1). Verificou-se por meio da Validação Cruzada (ISAAKS e SRIVASTAVA, 1989) que o modelo que melhor se ajusta é o Exponencial pelo método ML, o modelo Gaussiano pelo método WLS1 e o modelo Gaussiano pelo método OLS.

Os parâmetros geoestatísticos estimados para o método e seu respectivo modelo são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros estimados obtidos para o modelo Exponencial pelo método ML, o modelo Gaussiano pelo método WLS1 e o modelo Gaussiano pelo método OLS, para o atributo potássio.

Método/ modelo	$\hat{\varphi}_1$	$\hat{\varphi}_2$	$\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2$	$\hat{\varphi}_3$	a
ML/ Exponencial	0	0.0035	0.0035	0.044	0.132

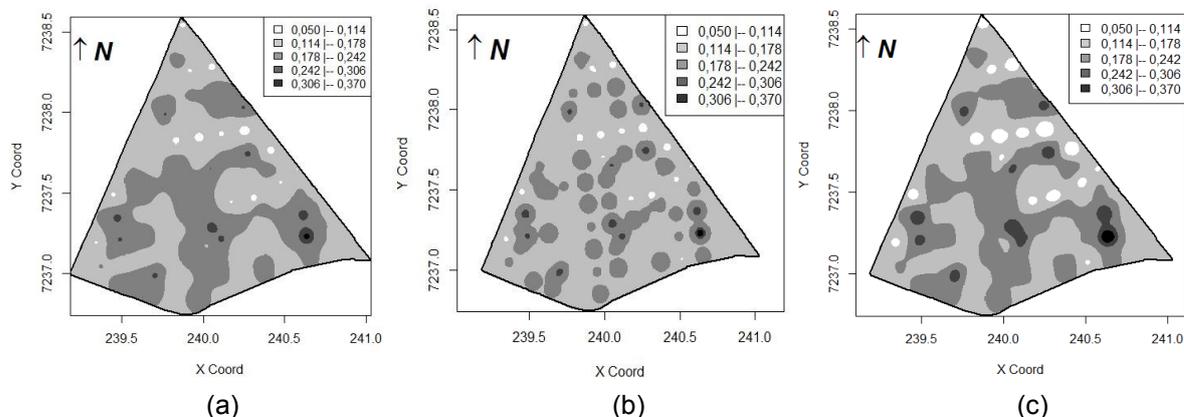
WLS1/ Gaussiano	0	0.0035	0.0035	0.034	0.058
OLS/ Gaussiano	0	0.0035	0.0035	0.061	0.105

φ_1 : efeito pepita, φ_2 : contribuição, $\varphi_1 + \varphi_2$: patamar, a: alcance.

Embora uma dependência espacial, o raio desta é pequeno, variando de 0.058 km a 0.132 km, o que equivale a 58 m a 132 m, respectivamente (Tabela 2). Considerando que a maioria dos pares de pontos apresentam distância maior que o raio de dependência espacial, isso implica no surgimento de regiões circulares centradas nos pontos amostrais, fenômeno conhecido como “*bull eyes effect*” (MENEZES *et al.*, 2016). Este fato fica bem caracterizado na Figura 5-b, a qual apresentou o menor alcance (58 m).

O mapa estimado por krigagem ordinária dos teores de potássio em toda a área considerando os diferentes métodos estudados (ML, WLS1 e OLS) resultou em cinco intervalos de classes distintos de mesma amplitude. O método ML apresentou uma variação de 0.051 a 0.359 $cmol\ dm^{-3}$. Para o método WLS1 os intervalos de classe variaram de 0.051 a 0.368 $cmol\ dm^{-3}$. Por fim, os intervalos de classe do método OLS variaram entre 0.05 a 0.370 $cmol\ dm^{-3}$. Sendo assim, o mínimo e o máximo dos intervalos de classes são obtidos com o método OLS. A Figura 5 apresenta os mapas estimados por krigagem ordinária para o teor de potássio pelos métodos ML (Figura 5-a), WLS1 (Figura 5-b) e OLS (Figura 5-c) com os mesmo intervalos de classes.

Figura 5 - Mapa estimado pelo método da krigagem ordinária para os teores de potássio ($cmoldm^{-3}$) pelo método ML (a), método WLS1 (b) e método OLS (c).

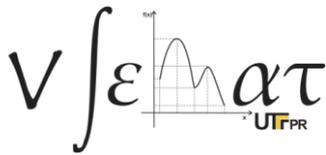


Percebe-se pela Figura 5 que cada método gerou um mapa distinto, quanto à distribuição dos teores de potássio pela área. Embora os mapas estejam com os mesmos intervalos de classes não é possível realizar uma comparação entre os mapas, tendo em vista que os métodos apresentam heurísticas diferentes. Quanto à similaridade entre os mapas obtidos pelo métodos ML (a) e WLS1 (b), obteve-se uma Exatidão Global (EG) de 0.82 indicando, segundo classificação de Anderson *et al.* (2001), que não apresenta similaridade, pois é inferior a 0.85. Considerando os métodos WLS1 (b) e OLS (c), a EG foi de 0.79, logo os mapas gerados por estes métodos não são similares entre si. Já para os métodos ML (a) e OLS (c), a EG foi de 0.88, o que sugere similaridade entre os mapas temáticos obtidos por estes métodos.

Observando os três mapas percebe-se que a classe que varia de 0.114 a 0.178 $cmol\ dm^{-3}$, agrega a média amostral ($0.176\ cmol\ dm^{-3}$) e representa a maior parte da área sob estudo. Deste modo, segundo a classificação da COODETEC (LLANILLO, 1989) para o cultivo de soja, tem-se que a maior porção da área apresenta um médio teor de potássio.

CONCLUSÃO

Conclui-se que os dados referentes aos teores de potássio na área sob estudo indicam similaridade, pois apresentam valores para média e a mediana muito próximos e possui coeficiente de variação muito alto (CV) (PIMENTEL GOMES, 1985). Uma das amostras coletadas exibiu um teor de potássio elevado ($0.37\ cmol\ dm^{-3}$) tendo sido caracterizado como um ponto discrepante, localizado acima do limite superior do gráfico Boxplot (Figura 1).

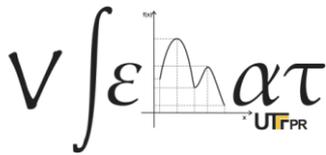


Os dados apresentam distribuição isotrópica, ou seja, não indicam tendência direcional. Pode-se ainda constatar que estes possuem dependência espacial.

Os mapas temáticos obtidos pelos métodos ML, WLS1 e OLS, apresentam diferenças na disposição dos teores de potássio na área de estudo. Verificou-se que os únicos mapas temáticos que apresentam similaridade entre si, segundo classificação de Anderson *et al.* (2001), são àqueles gerados pelos métodos ML e OLS. Pode-se ainda ressaltar que não existe um melhor método para obtenção dos mapas, sendo assim a escolha deste depende do interesse do pesquisador.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, J. F.; HARDY, E. E.; ROACH J. T.; WITMER R. E. A land use and land cover classification system for use with remote sensor data, U.S. Washington, DC: U.S. **Geologic Survey**, 2001. 41 p.
- BERNARDI, A. C. C.; NAIDE, J. M.; RESENDE, A. V.; BOSSOI, L.H.; INAMASU, R. Y. **Agricultura de precisão: Resultados de um Novo olhar**. Embrapa, Brasília- DF, 2014.
- CRESSIE, N.; LAHIRI, S. N. The asymptotic distribution of REML estimators. **Journal of Multivariate Analysis**, v. 45, n. 2, p. 211-233, 1993.
- DIGGLE, P. J.; RIBEIRO JR., P. J. **Model-based geostatistics**. Springer Series in Statistics, 2007. 230 p.
- EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA – EMBRAPA. Centro Nacional de Pesquisa de Solos. **Sistema brasileiro de classificação de solos**. 2ª ed. Brasília-DF, 2006. 306 p.
- GUEDES, L. P. C. **Otimização de amostragem espacial**. 2008. 143 f. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agronômica) - Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Piracicaba - SP.
- GUERRA, P. A. G. **Geoestatística operacional**. Brasília: Ministério das Minas e Energia, Departamento de Produção Mineral, 1988. 145 p.
- JOURNEL, A. G.; HUIJBREGTS, CH. J. **Mining geostatistics**. London, Academic Press, 1978. 600 p.
- JUNTOLLI, F. V.; SANTOS, R. L. B.; INAMASU, R. Y.; MOLIN, J. P. **Agricultura de precisão: Boletim técnico**. Ministério da agricultura, pecuária e abastecimento. Secretaria de desenvolvimento agropecuário e cooperativismo. Brasília – DF, 2013.
- LANDIM, P. M. B.; YAMAMOTO, J. K. **Geoestatística: conceitos e aplicações**. São Paulo-SP: Oficina de Textos, 2013. 215 p.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

LLANILLO, R. F. Regionalização do Estado do Paraná. In: SEAB. (Org.). **Manual técnico do subprograma de manejo e conservação do solo**. 1ª ed. Curitiba: Secretaria de Estado da Agricultura e do Abastecimento do Paraná, v. 1, p. 41-50, 1989.

MENEZES, M.D., SILVA, S.H.G., MELLO, C.R., OWENS, P.R., CURI, N., 2016. Spatial prediction of soil properties in two contrasting physiographic regions in Brazil. **Scientia Agricola**, v. 73, n. 3, p. 274-285, 2016.

PIMENTEL GOMES, F. **Curso de estatística experimental**. São Paulo-SP: Nobel, 1985. 467 p.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. Disponível em <<http://www.r-project.org/>>. Acesso em: 06 out. 2015.

RIBEIRO JR., P. J.; DIGGLE, P. J. (2001) **geoR**: A package for geostatistical analysis. **R-NEWS**, v. 1, n. 2, ISSN 1609-3631.

SOARES, A. **Geoestatística para as ciências da terra e do ambiente**. 3ª ed. Lisboa: Press, 2014. 214 p.

URIBE-OPAZO, M. A.; BORSSOI, J. A.; GALEA, M. Influence diagnostics in Gaussian spatial linear models. **Journal of Applied Statistics**, v. 39, n. 3, p. 615-630, 2012.

WENDPAP, B. G.; URIBE-OPAZO, M. **Análise da variabilidade espacial dos níveis de pH em uma área agrícola comercial utilizando métodos Geoestatísticos**. In: XVI EREMATSUL, 2010. Porto Alegre – RS. Disponível em: <<http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/poster/brunagabriela.pdf>>. Acesso em: 08 abril 2017.

A Análise de Componentes Principais em variados contextos

Eduardo Kenji Simo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
eduardo.simo96@hotmail.com

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
suellenpardo@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Você já coletou ou pensou em coletar dados para realizar uma análise? Se sim, imagino que o principal problema era ter que analisar todas as variáveis coletadas, geralmente um número de variáveis muito alto, certo? Mas esse problema pode ser amenizado através de uma técnica que reduz o número de variáveis com quase nenhuma perda de informação dos dados originais, essa técnica é conhecida como análise de componentes principais (ACP). A ACP tem o papel de facilitar os trabalhos necessários para analisar os dados coletados, pois ela diminui o número de variáveis inicialmente consideradas sem perda significativa de informação. Em alguns casos essa diminuição pode ser importante, resultando em poucas variáveis, mas é preciso atenção nessa redução, pois um número pequeno de variáveis pode significar uma baixa representatividade dos dados originais. Dessa forma, a criticidade e experiência do pesquisador com o problema é muito importante, pois se a redução do número de variáveis for em demasia, a dimensão resultante pode não ter representatividade, e se a redução do número de variáveis não for significativa, o trabalho será similar ao inicial com todas as variáveis originais. O presente trabalho tem o objetivo expor a técnica de análise de componentes principais bem como apresentar algumas aplicações em áreas bem distintas, mostrando sua importância em diversos contextos. O trabalho está dividido em duas seções: a primeira descreve o método da ACP e a segunda seção apresenta três exemplos de aplicações utilizando a técnica.

2 ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

A ACP é uma técnica estatística de análise multivariada introduzida por Karl Pearson em 1901 e descrita no artigo de Hotelling de 1933 (MINGOTTI, 2005). Consiste em explicar a estrutura de variância e covariância da matriz dos dados por meio da construção de combinações lineares das variáveis originais. O conjunto de variáveis originais X_1, X_2, \dots, X_p é substituído por um novo conjunto de variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_k , denominadas componentes principais (CP), no qual as k variáveis são não correlacionadas entre si e $k \leq p$. Embora p componentes principais sejam necessárias para representar a variabilidade total das variáveis originais, em geral, um número pequeno k de componentes consegue explicar boa parte desta variabilidade, sem perda de informação significativa. Assim, com a utilização desta técnica, obtém-se redução no número de variáveis e variáveis não correlacionadas além de auxiliar na interpretação de como as variáveis originais se relacionam (CHAVES, 2012).

Para obtenção das componentes principais, pode-se utilizar tanto a matriz de covariância ($\sum_{p \times p}$) quanto a matriz de correlação ($P_{p \times p}$). Quando alguma transformação é aplicada aos dados, como por exemplo a padronização, pode-se utilizar a matriz de covariância nos dados padronizados, o que é equivalente a utilizar a matriz de correlação das variáveis originais (MINGOTTI, 2005).

2.1 Estimação das componentes principais via matriz de covariância

Seja a matriz de covariância $\sum_{p \times p}$, primeiro encontra-se os autovalores (λ_i) de $\sum_{p \times p}$ e seus respectivos autovetores ortonormalizados (e_i), onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$. Depois realiza-se a combinação

linear dos autovetores ortonormalizados com os vetores das variáveis originais, assim $Y = O'X$, onde $O_{p \times p} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_p]$.

Sequiem algumas definições importantes a respeito do método:

Definição 1:

A j -ésima componente principal da matriz $\sum_{p \times p}$ é definida como:

$$Y_j = e_j'X = e_{j1}X_1 + e_{j2}X_2 + \dots + e_{jp}X_p \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Cada autovalor λ_j representa a variância de uma componente principal Y_j . Como os autovalores estão ordenados em ordem decrescente, a primeira componente é a de maior variabilidade e a p -ésima é a de menor.

Definição 2:

A proporção da variância total de X que é explicada pela j -ésima componente principal é definida como:

$$\frac{\text{Var}[Y_j]}{\text{Variância Total de X}} = \frac{\lambda_j}{\text{Traço}(\sum_{p \times p})} = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

Definição 3:

A proporção da variância total que é explicada pelas k primeiras componentes principais é definida como:

$$\frac{\sum_{j=1}^k \text{Var}[Y_j]}{\text{Variância Total de X}} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\text{Traço}(\sum_{p \times p})} = \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

Caso as k primeiras componentes principais expliquem uma grande parte da variância total do vetor X , pode-se usar apenas o vetor aleatório $(Y_1 Y_2 \dots Y_k)'$. Assim analisa-se o conjunto k -dimensional de variáveis aleatórias, ao invés de um conjunto p -dimensional, com uma perda mínima de informação aceitável sobre a estrutura de variâncias e covariâncias do vetor original X .

É importante ressaltar que, na prática, a matriz de covariância $(\sum_{p \times p})$ é desconhecida e utiliza-se sua estimação que é a matriz de covariância amostral $S_{p \times p}$.

2.2 Estimação das componentes principais via matriz de correlação

A matriz de covariância só é utilizada quando não há muita discrepância entre as variâncias, essa discrepância, normalmente é causada pelas diferentes unidades de medidas das variáveis. Para amenizar esse problema pode-se utilizar a matriz de covariâncias dos dados padronizados ou simplesmente utilizar a matriz de correlação $(P_{p \times p})$. Seja $Z_i = \frac{(X_i - \mu_i)}{\sigma_i}$ os dados padronizados, onde $E(X_i) = \mu_i$ é o vetor de médias da variável X_i e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, p$. O procedimento apresentado é o mesmo definido para a matriz de covariância, calcula-se seus autovalores (λ_i) e seus correspondentes autovetores normalizados (e_i), $i = 1, 2, \dots, p$. A notação dos autovalores e autovetores não será alterada para simplificar a notação.

Como visto anteriormente, a j -ésima componente principal da matriz $P_{p \times p}$ dos dados padronizados é dada por:

$$Y_j = e_j'Z = e_{j1}Z_1 + e_{j2}Z_2 + \dots + e_{jp}Z_p$$

sendo que:

- (a) A variância de Y_j é igual a λ_j , $j = 1, 2, \dots, p$, e a covariância entre Y_j e Y_k é igual a zero, para qualquer $j \neq k$;

(b) A correlação entre a componente Y_j e a variável padronizada Z_i é igual a:

$$r_{Y_j, Z_i} = r_{Y_j, X_i} = e_{ji} \sqrt{\lambda_j}$$

e, conseqüentemente, as variáveis Z_i com os maiores coeficientes na componente principal Y_j são as mais correlacionadas com a componente;

(c) A variância total do vetor aleatório $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p)'$ é igual ao traço da matriz $P_{p \times p}$, que é igual ao valor p , ou seja, o número de variáveis medidas em cada elemento amostra. Portanto, a proporção da variância total explicada pela j -ésima componente principal é igual a $\frac{\lambda_j}{p}$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Na prática, a matriz de correlação ($P_{p \times p}$) é estimada pela matriz de covariância amostral $R_{p \times p}$.

2.3 Determinação do número k de componentes

Utiliza-se um ou mais critérios para determinação do número de variáveis, por exemplo:

Critério 1 (Análise de representatividade em relação à variância total):

Nesse critério, o número de componentes k deve estar dentro da porcentagem γ da variância total, no qual $0 < \gamma < 1$ é um valor pré-determinado pelo pesquisador. Portanto, na prática, busca-se o valor de k , tal que:

$$\frac{\sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i}{\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j} = \gamma$$

Não há um limite definido para o valor de γ e sua escolha deverá ser feita de acordo com a natureza do fenômeno investigado. Em algumas situações é possível alcançar com uma ou duas componentes uma porcentagem acima de 90% ou 95% de explicação de variância total, enquanto que em outras, é necessário um número maior de componentes para tal feito.

Critério 2 (Critério de Kaiser):

Uma outra forma de escolher o número k de componentes principais é o de manter no sistema apenas as componentes relacionadas àqueles autovalores $\hat{\lambda}_i \geq 1$. Este procedimento é conhecido como critério de Kaiser. Pode-se manter no sistema as componentes relacionadas aos autovalores que são números maiores ou iguais a $\hat{\lambda}_m$, definido por:

$$\hat{\lambda}_m = \frac{\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j}{p}$$

e que representa a variância média das variáveis originais X_i , $i = 1, 2, \dots, p$.

Critério 3 (Scree-plot):

Um gráfico que pode auxiliar na escolha do valor k é o *scree-plot*, que mostra os valores numéricos dos autovalores $\hat{\lambda}_i$ de acordo com a respectiva ordem i . Basta observar no gráfico o ponto em que os valores de $\hat{\lambda}_i$ tendem a estabilizar, pois em geral, esse é o ponto a partir do qual os valores $\hat{\lambda}_i$ se aproximam de zero.

Critério 4 (análise da qualidade de aproximação da matriz de covariâncias ou correlação): Para realizar esse critério, precisamos ter as aproximações das matrizes que as k componentes foram extraídas, são elas: $S_{p \times p}$ caso for da matriz de covariâncias ou $R_{p \times p}$ caso for da matriz de correlação, no qual:

$$S_{p \times p} \approx \sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i \hat{e}_i \hat{e}_i'$$

$$R_{p \times p} \approx \sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i \hat{e}_i \hat{e}_i'$$

onde, em cada caso, $(\hat{\lambda}_i, \hat{e}_i)$ representam os respectivos autovetores normalizados de $S_{p \times p}$ e $R_{p \times p}$.

Assim sendo, o valor de k poderia ser escolhido de modo a ter uma aproximação razoável para as matrizes $S_{p \times p}$ ou $R_{p \times p}$. Sendo que os autovalores significativamente maiores que zero representam as parcelas que contribuem para a aproximação dessas matrizes. Vale lembrar que um grau maior de exigência, está, normalmente, ligado a um número maior de k , o que não é desejado no método de componentes principais.

Critério 5 (análise prática das componentes): O mais indicado é escolher as CP que sejam passíveis de interpretação, sendo assim, deve-se fazer a escolha das CP pautada pela sua praticidade, pois é necessário realizar interpretações dessas componentes. A situação ideal é aquela em que as CP de interesse do pesquisador são as de maior explicação relativa à variância total e levam a um valor pequeno de k , mas isso nem sempre acontece.

3 APLICAÇÕES

A ACP tem inúmeras aplicações, nessa seção vamos mostrar três exemplos para esclarecer qual o propósito de realiza-la. Buscamos exemplos em áreas distintas, a primeira dela diz respeito a compressão de imagens digitais, ou seja, a ACP é utilizada para comprimir uma imagem digital coletada na rotina clínica de um hospital, sem que ela perca suas características principais. O segundo exemplo pretende analisar quais as principais características do solo, eliminando as informações redundantes. A caracterização do solo é de grande importância, pois é utilizada para prever produções, fertilidade e erosão. O terceiro exemplo trabalha com os elementos da tabela periódica, com o intuito de classificar os elementos quanto ao seu grupo. O propósito dessa aplicação foi totalmente didático. Os professores tinham dificuldades de ensinar a técnica de ACP, então em um curso de quimiometria, na qual todos os alunos tinham conhecendo da tabela periódica, utilizar a técnica na classificação dos elementos da tabela foi a alternativa encontrada pelo professor.

3.1 ACP na Compressão de Imagens Digitais

O objetivo dessa aplicação foi reduzir a dimensão dos dados das imagens digitais sem perda de informação significativa. A vantagem da ACP nesse contexto foi a compressão de imagem, representação dos dados e redução do cálculo necessário em processamentos subsequentes (SANTO, 2012). Antes de começarmos a falar da aplicação, precisamos citar um método específico que foi utilizado nesse exemplo:

Admitindo um processamento digital, um dado contínuo (analógico) é convertido em uma matriz de elementos simples (pixels) que assume valores discretos (níveis de cinza ou *gray levels*), ou seja:

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, m-2) & f(0, m-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, m-2) & f(1, m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(n-1, 0) & f(n-1, 1) & \dots & f(n-1, m-2) & f(n-1, m-1) \end{vmatrix} \quad (1)$$

Em que os valores de x e y em (x, y) são as coordenadas dos *pixels* na imagem e $f(x, y)$ é o correspondente nível de cinza.

A matriz de covariância, nesse caso, foi modificada para se adequar ao problema, e é dada por:

$$covImg = f(x, y) * f(x, y)^T \quad (2)$$

A ACP de uma imagem digital é feita da seguinte forma:

Passo 1: No modelo computacional de uma imagem digital, em (1), as variáveis X_1, X_2, \dots, X_p são as colunas da imagem. Inicia-se a ACP codificando (corrigindo) a imagem de tal maneira que suas colunas tenham média zero e variâncias unitárias. Isto é usual a fim de evitar que uma ou duas colunas tenham influência nas CP:

$$imagem\ corrigida\ pela\ média = imagem - média\ da\ imagem \quad (3)$$

Passo 2: Calcula-se a matriz de covariâncias $\sum_{p \times p}$, implementada computacionalmente, ou seja:

$$\text{covImagem} = \text{imagem corrigida pela média} * (\text{imagem corrigida pela média})^T \quad (4)$$

Passo 3: Calculam-se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Passo 4: Obtém-se o vetor de características, uma matriz de vetores contendo a lista dos autovetores (colunas da matriz) da matriz de covariância:

$$vc = (av_1, av_2, av_3, \dots, av_n) \quad (5)$$

Passo 5: Obtém-se os dados finais, isto é, uma matriz com todos autovetores (componentes) da matriz de covariância.

$$\text{dados finais} = vc^T * (\text{imagem} - \text{média})^T \quad (6)$$

Passo 6: Obtém-se a imagem original a partir de dados finais sem compressão usando a expressão:

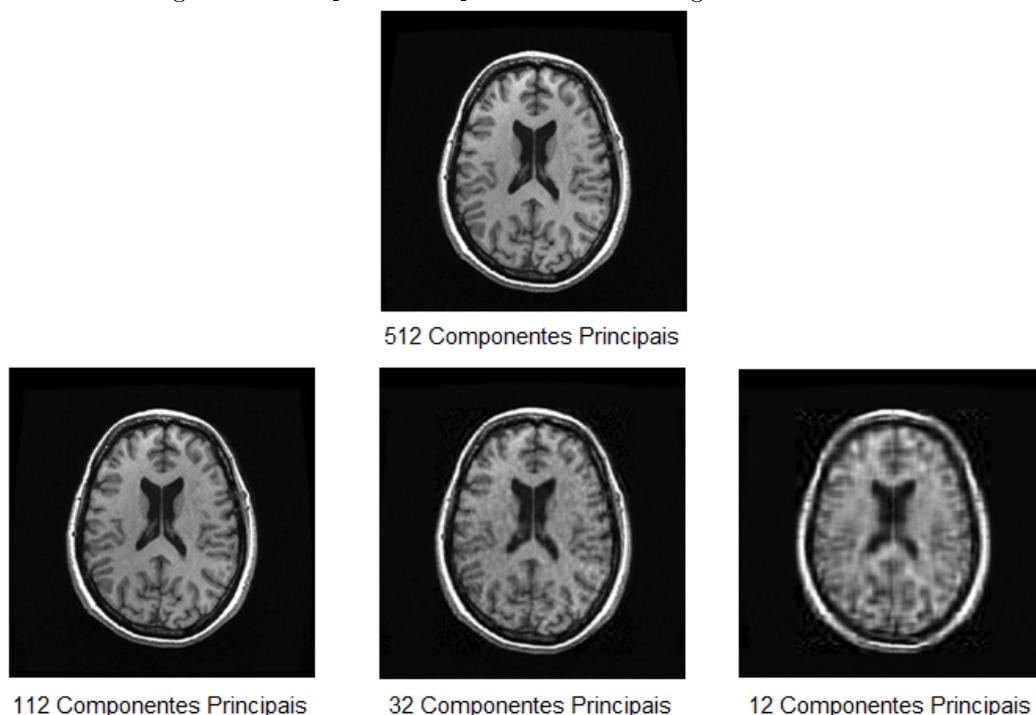
$$\text{Imagem}^T = (vc)^T * \text{dados finais} + \text{média}^T \quad (7)$$

Passo 7: Descartam-se quaisquer componentes que explicam somente uma pequena proporção da variação nos dados para efeito de compressão de imagem. Os descartes têm o efeito de reduzir a quantidade de autovetores do vetor de características e produzir dados finais com uma dimensão menor. A utilização de (7) nessas condições permite a recuperação da imagem original com compressão (SANTO, 2012).

Observa-se que até o passo 5 foram feitas operações a fim de obter a matriz dos autovetores da matriz de covariância, depois disso, no passo 6, o autor coloca que após realizada todas essas operações, retorna-se à imagem original utilizando a expressão (7). No passo 7, o autor descarta as componentes de menor relevância, mantendo assim, as componentes principais da imagem. Com isso, o autor consegue diminuir o espaço de armazenamento da imagem, o que auxilia muito em aplicações clínicas. Ainda, no passo 7, pode-se recuperar a imagem original. A imagem comprimida, obviamente, não terá todos os detalhes que a imagem original possui, porém pode se aproximar muito. Vale ressaltar que, a matriz dos dados, se armazenada, pode-se realizar a ACP quantas vezes forem necessárias sem perder a imagem original.

Segue abaixo a comparação entre as imagens recuperadas a partir de 112, 32 e 12 componentes principais com a imagem original, que possui todas as 512 componentes principais:

Figura 1: Exemplo de compressão de uma imagem usando a ACP



Fonte: Modificada de Santos (2012).

Nota-se que a redução para 112 componentes principais, não gera perda significativa da imagem, as suas características essenciais são mantidas. Passando para 32 componentes principais, nota-se uma mudança mais significativa, mas as características principais da imagem são mantidas. Quando reduzimos para 12 componentes principais, nota-se que alguns traços principais ainda são mantidos, porém é difícil analisar a imagem com precisão, a imagem fica desfocada, mas ainda sim é semelhante a original. O nível de informação mantido na imagem, ou seja, o número de componentes a se considerar, depende do interesse do usuário, por exemplo, em alguns exames, considerar a imagem com 12 componentes é inviável, pois precisa-se de maior nitidez da imagem, em outros exames é perfeitamente possível. A quantidade de componentes principais utilizadas na compressão da imagem influencia a recuperação da imagem original a partir da imagem compactada, pois quanto menor o número de CP maior será a perda de informação da imagem. Entretanto, devido ao tamanho dos arquivos e a quantidade dos mesmos, reduzir o espaço de armazenamento dessas imagens é de fundamental importância.

3.2 ACP na Seleção de Características do Solo

A ACP realizada nessa aplicação tem o objetivo de classificar quais características do solo são as mais significativas em sua textura, pois é a textura do solo que influencia na taxa de infiltração da água, no armazenamento da mesma, na aeração, na facilidade de mecanização e na distribuição de determinados nutrientes (fertilidade do solo) (MAESTRE, et al., 2010). As características do solo avaliadas neste trabalho foram: porcentagem de areia (AREIA); porcentagem de silte (SILTE); porcentagem de argila (ARGILA); densidade da partícula, medida em $Mg\ m^{-3}$ (DENS); porosidade (PORO) e concentração de carbono orgânico (CORG). Essas características formaram o conjunto das seis variáveis observadas no início do experimento. Com a utilização da ACP foi possível reduzir o número de variáveis redundantes da pesquisa, facilitando e agilizando o trabalho. Muitos pesquisadores tendem a avaliar o maior número

de características do solo, mas quando muitas variáveis são utilizadas e grande parte delas tem pouca relevância, ocorre um aumento considerável de trabalho sem ter melhoria na precisão e ainda, torna mais complexa a análise e interpretação dos dados.

Os dados foram coletados de 36 amostras de solo. Cada variável precisava ser padronizada, pois cada uma delas apresenta unidades de medidas diferentes, sendo assim, a matriz utilizada para calcular os autovalores e autovetores foi a matriz de correlação $\sum_{p \times p}$.

A Tabela 1 representa a matriz de correlação e os respectivos p-valores, referentes ao teste de significância da correlação entre duas variáveis. As hipóteses do teste são: $H_0 : P_{p \times p} = I_{p \times p}$ ou $H_a : P_{p \times p} \neq I_{p \times p}$, onde $I_{p \times p}$ é a matriz identidade e $P_{p \times p}$ é a matriz de correlação teórica das p-variáveis. Para testar a hipótese, temos que calcular a estatística T:

$$T = - \left[n - \frac{1}{6} (2p + 11) \right] \left[\sum_{j=1}^p \ln(\hat{\lambda}_j) \right]$$

que sob a hipótese nula e n grande, tem uma distribuição aproximadamente qui-quadrado com $\frac{1}{2}p(p-1)$ graus de liberdade. Assim, rejeitamos a hipótese nula H_0 se o valor de T for maior ou igual ao valor crítico da distribuição qui-quadrado para o nível de significância escolhido para o teste.

Tabela 1: Correlações e seus respectivos valores de significância (p-valor) das cinco características do solo

Variáveis	Variáveis			
	AREIA	SILTE	DENS	PORO
SILTE	0,0062 (0,9712)			
DENS	0,0156 (0,9281)	-0,1207 (0,4830)		
PORO	-0,2401 (0,1584)	-0,3328 (0,0473)	0,4970 (0,0020)	
CORG	-0,5071 (0,0016)	-0,0792 (0,6462)	-0,0368 (0,8313)	0,1565 (0,3620)

Fonte: MAESTRE, et al. (2010).

Nota-se que as variáveis de maior correlação entre si foram: porcentagem de areia (AREIA) com concentração de carbono orgânico (CORG), densidade de partícula (DENS) com porosidade (PORO) e porcentagem de silte (SILTE) com porosidade (PORO). Todas as correlações nas quais o p-valor foi maior que 0,5 foram aceitas consideradas estatisticamente nulas, ou seja, a hipótese nula $H_0 : p = 0$ foi aceita.

A Tabela 2 representa as componentes principais, seus respectivos autovalores e as porcentagens de variância explicada por essas componentes. Vale lembrar que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$.

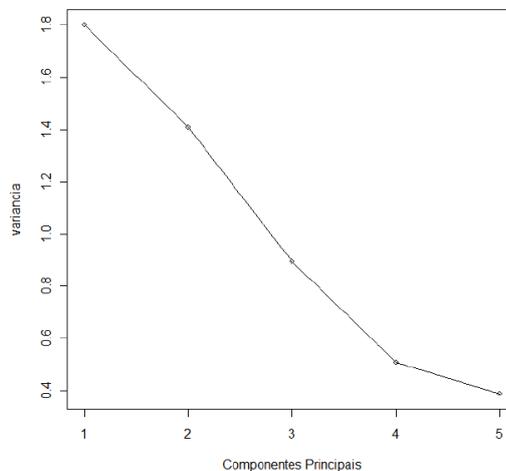
Tabela 2: Estimativas dos autovalores (λ_i), das contribuições percentuais ($\% \lambda_i$) e os autovetores associados aos autovalores obtidos da matriz de correlação, envolvendo as cinco características do solo.

CP	λ_i	$\% \lambda_i$	Autovetores				
			AREIA	SILTE	DENS	PORO	CORG
1	1,8027	36,05	-0,4325	-0,5417	0,3991	0,6024	0,4073
2	1,4078	64,21	0,5417	-0,2621	0,4953	0,2844	0,5582
3	0,8939	82,09	-0,1481	0,8498	0,4926	0,1020	-0,0537
4	0,5088	92,26	0,5554	-0,0197	0,3402	-0,3071	0,6936
5	0,3868	100,00	0,4348	0,2897	-0,4868	0,6719	0,1963

Fonte: MAESTRE, et al. (2010).

Na análise do gráfico scree-plot (figura 2) observa-se que as três primeiras componentes principais são suficientes para explicar boa parte da variabilidade dos dados. No qual as três componentes totalizam 82,09% da variabilidade total dos dados, sendo 36,05% da primeira componente, 28,16% da segunda e 17,88% da terceira. Essas três novas variáveis podem substituir as 6 variáveis originais em análises subsequentes, lembrando que as três novas variáveis são combinações lineares das variáveis originais.

Figura 2: Scree Plot das 5 CP



Fonte: Lyra, Silva e Fragoso (2010).

Os resultados mostram que a primeira componente está mais relacionada às características de SILTE e PORO, a segunda componente está mais relacionada as variáveis AREIA e CORG e a terceira apenas com SILTE.

Nesta aplicação, 50% das variáveis analisadas foram consideradas redundantes diminuindo consideravelmente o trabalho do pesquisador. Obviamente essas três componentes não irão representar a variabilidade total dos dados, mas representam uma proporção alta de variabilidade (82%).

3.3 Aplicação 3: Classificação dos Elementos da Tabela Periódica

Nesta aplicação um professor levou para sala de aula algo que todos os alunos tinham ou já tiveram contato, que é a tabela periódica. Muitas vezes são realizados exemplos que a maioria dos alunos não conhecem o contexto, para que serve, ou seja, o problema não aparece na sua rotina. Assim, como os alunos cursavam quimiometria, todos conheciam a tabela periódica, pois estudam e trabalham com os elementos da mesma quase todos os dias. Posto isso, o objetivo da pesquisa foi observar se os elementos que antes eram semimetais na tabela, foram reclassificados de maneira correta. Foi realizada a coleta dos dados na própria tabela periódica com um total de 88 elementos. Esses elementos passaram pelo processo da ACP para observar quais as características que mais influenciavam em cada um, perante ao seu grupo, que são: metais, ametais e gases nobres.

Antes de 2001 os semimetais eram considerados um grupo na tabela periódica pela União Internacional de Química Pura e Aplicada (UIPAC), depois de 2001, o grupo dos semimetais, que eram formados por germânio, antimônio, polônio, boro, silício, arsênio e telúrio foi abandonado e os elementos boro, silício, arsênio e telúrio foram reclassificados como ametais. Já os elementos germânio, antimônio e polônio foram classificados como metais. Sabendo disso, os alunos coletaram os dados e analisaram em qual grupo cada elemento se encaixaria. Os alunos utilizaram o gráfico dos escores, se basearam onde cada grupo era mais presente e onde cada um dos ex-semimetais melhor se encaixariam. Então concluíram que a UIPAC redefiniu corretamente os elementos do grupo dos semimetais (LYRA, et al., 2010).

Os dados coletados foram os 88 elementos da tabela periódica e as seguintes características foram coletadas de cada elemento: energia ionizada (EI), raio atômico (RA), afinidade eletrônica (AE), eletronegatividade de Pauling (EN), densidade (D), calor específico (CE), entropia padrão (S) e condutividade térmica (CT). Estes foram distribuídos em uma matriz de dados, no qual os elementos foram dispostos nas linhas da matriz e as propriedades (variáveis) nas colunas. Em seguida prosseguiu com a ACP e as 8 variáveis originais passaram a ser representadas pelas 8 componentes principais. Podemos observar na tabela 3 os pesos de cada componente principal:

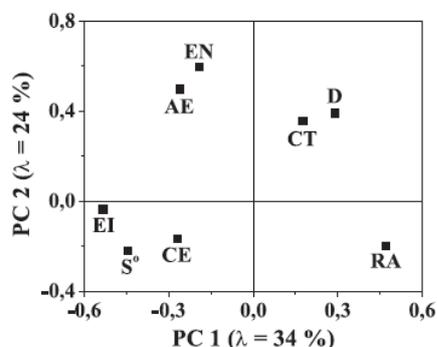
Tabela 3: Variância explicada e acumulada das componentes principais

CP	Variância Explicada (%)	Variância Acumulada (%)
1	33,897	33,897
2	24,237	58,134
3	13,321	71,455
4	9,545	81,000
5	8,542	89,542
6	5,667	95,209
7	3,141	98,350
8	1,650	100,000

Fonte: Lyra, Silva e Fragoso (2010).

Nota-se que a primeira CP representa mais que um terço da variabilidade total dos dados e a soma das duas primeiras CP juntas representam mais da metade da variabilidade total dos dados. Assim, foram utilizadas apenas as duas primeiras componentes principais para determinar os novos grupos dos semimetais. A Figura 3 abaixo apresenta o gráfico dos pesos das duas primeiras componentes principais:

Figura 3: Escores de CP 1 e CP 2 para oito propriedades: primeira energia de ionização (EI), raio atômico (RA), afinidade eletrônica (AE), eletronegatividade de Pauling (EN), densidade (D), calor específico (CE), entropia (S°) e condutividade térmica (CT)



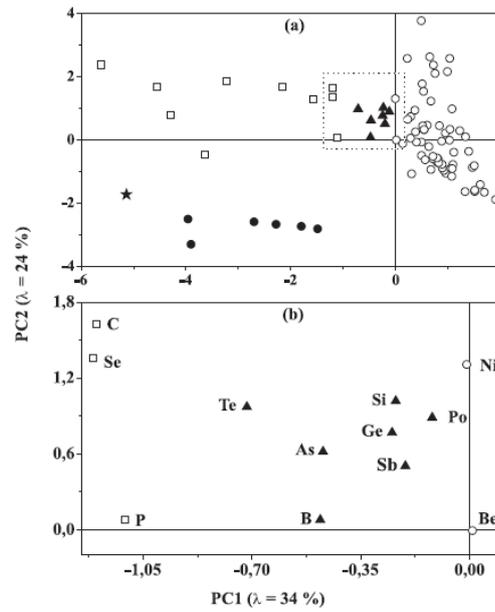
Fonte: Lyra, Silva e Fragoso (2010).

Nesta aplicação foram feitas diversas observações do ponto de vista químico em relação as CP com cada uma das variáveis. Os argumentos levavam a conclusão de que realmente as duas primeiras CP representam muito bem os dados, dessa forma, ficou claro que somente as duas primeiras componentes principais eram necessárias.

Os autores entendem que a ACP é uma técnica de reconhecimento de padrões e não uma técnica de classificação, mas um dos procedimentos que é o gráfico dos escores ilustra a relação entre os elementos. Por exemplo o telúrio, que é um elemento que se encontra mais à esquerda (figura 3b), ou seja, ele é o mais próximo dos ametais, portanto, esse elemento deve ser classificado como ametal. Da mesma forma, acontece com o polônio, que se encontra mais à direita (figura 3b), que pode ser classificado como um metal por se encontra mais perto dos mesmos. Embora essa classificação deve ser realizada por critérios químicos, os resultados da ACP foram coerentes com a decisão da IUPAC. Apenas o silício não teve uma análise muito precisa com a aplicação da técnica, mas como o autor justifica, o silício é muito semelhante a um metal, mesmo sendo classificado como um ametal. É até comum o silício ser tratado como metal, sobretudo na indústria, na física e eletrônica.

A Figura 4, na primeira parte (a) representa os escores das CP1 e CP2 para os 88 elementos químicos, no qual os metais são representados pelas circunferências, os ametais pelos quadrados, os semimetais pelos triângulos, os gases nobres pelos círculos e o hidrogênio pela estrela. Na segunda parte (b) da figura 4, temos uma ampliação da região onde se encontram os semimetais e cada semimetal está com sua sigla. Dessa forma, classifica-se os semimetais em outros grupos apenas observando de qual grupo o elemento está mais próximo.

Figura 4: (a) Gráfico dos escores de CP1 e CP2: \circ metais, \square ametais, \blacktriangle semimetais, \bullet gases nobres e \star hidrogênio. (b) Ampliação da região onde se vê os semimetais: (C) carbono, (Se) selênio, (P) fósforo, (Te) telúrio, (As) arsênio, (B) boro, (Si) silício, (Ge) germânio, (Sb) antimônio, (Po) polônio, (Ni) níquel, (Be) berílio.



Fonte: Lyra, Silva e Fragoso (2010).

Nota-se que mesmo a primeira CP representando 33,9% das informações das variáveis originais, apenas com essa componente, classifica-se todos os semimetais em seus novos grupos (metais e ametais), porém com as duas componentes se tem uma visão mais clara de que um dos semimetais não fosse, por exemplo, um gás nobre.

Nesta aplicação a ACP teve um caráter didático, entretanto, sua utilização foi um facilitador no processo de análise de dados.

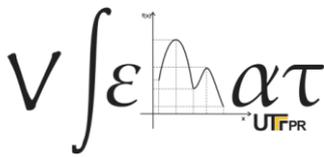
4 CONCLUSÃO

A ACP pode ser realizada em diversas aplicações da análise de dados multivariados, como um mecanismo facilitador na hora de realizar as análises e interpretações dos dados. Cabe ao pesquisador definir se vai usar ou não, e ainda, definir também o número de CP que serão utilizadas, seja baseado na porcentagem que ele deseja que esses novos dados expliquem ou por outro critério que julgar coerente. Nota-se que a ACP pode ser abordada de diferentes formas, por exemplo, na primeira aplicação, o foco era ver o quanto que a imagem comprimida representariam em relação à imagem original, e podemos ver que mesmo reduzindo drasticamente o número de CP, a imagem comprimida era muito semelhante a imagem original. Na segunda aplicação, o autor pretendia diminuir o trabalho realizado durante a análise dos dados, para isso, ele precisou observar quais eram as componentes principais mais influentes nos dados originais, e selecionar uma quantidade de CP que satisfaria suas especificidades. Na terceira aplicação, os autores tinham o objetivo de reclassificar os elementos, que antes eram conhecidos como semimetais, em um novo grupo de elementos, para isso, o gráfico dos scores foi a parte principal da ACP, pois através dele que foi possível reclassificar os elementos. Com esses exemplos, podemos notar que a

ACP pode ser utilizada de diversas formas diferentes e com intúitos diferentes.

Referências

- [1] CHAVES NETO, A.: **Notas de aula: Análise multivariada aplicada à pesquisa**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, (2012).
- [2] LYRA, W.S.; SILVA, E.C.; ARAÚJO, M.C.U.; FRAGOSO, W.D.: **Classificação periódica: um exemplo didático para ensinar análise de componentes principais**. Campina Grande, (2010).
- [3] MAESTRE, M.R.; SARTORIO, S.D.; MARCIANO, C.R.; OLIVEIRA, F.C.; Piedade, S.M.S; LIMA, C.G.: **Aplicação da análise de componentes principais na seleção de características de solo**. São Pedro: Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, (2010).
- [4] MINGOTTI, S. A.: **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1.ed, (2005).
- [5] SANTO, R. E.: **Utilização da Análise de Componentes Principais na compressão de imagens digitais**. São Paulo: Hospital Israelita Albert Einstein, (2012).



ESCOLHA DE UM CELULAR COM AUXÍLIO DA MATEMÁTICA *FUZZY*

Bruna Laís Finkler¹
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
bruna_finkler@hotmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

1. INTRODUÇÃO

O celular se tornou uma ferramenta indispensável no uso cotidiano. Realizamos diversas atividades com ele, desde fazer ligações até salvar e produzir documentos, assistir vídeos, ouvir músicas e ler livros. Até pouco tempo atrás, os celulares apenas realizavam chamadas e as suas baterias duravam bem menos; eram monocromáticos, grandes e pesados. Mas atualmente a indústria disponibiliza uma enorme variedade de modelos, tamanhos e marcas, com diferentes softwares, designs cada vez mais sofisticados, com um número cada vez maior de aplicativos, tudo isso implicando em número cada vez maior e diferente de preços. Com um universo de opções como esse em que vivemos, como é possível escolher apenas um aparelho que se adeque às nossas necessidades?

Esse trabalho tem o objetivo de estudar um modelo matemático que possa ser útil nessa escolha com base nas necessidades e preferências de alguns consumidores, utilizando a matemática *fuzzy*. Para tal modelo nos baseamos nas características de determinados tipos de celulares e em suas respectivas “notas” (estabelecidas com base em uma pesquisa com alguns consumidores), para assim fornecer diferentes graus de satisfação para cada modelo.

O presente texto apresenta uma breve história sobre os celulares, desde a primeira ligação realizada e a primeira noção de celular da história, até a infinidade de opções disponíveis no mercado atualmente. Também faz um breve histórico da matemática *fuzzy*, bem como apresenta alguns conceitos necessários para implementação do modelo matemático.

¹ Agradecemos ao CNPQ pela ajuda financeira e pelas bolsas concedidas.

2. HISTÓRIA DO CELULAR

De acordo com a reportagem *Conheça a Evolução do Telefone Celular*, publicada pelo *O Globo*, a primeira chamada via celular da história foi feita em abril de 1973 por Martin Cooper utilizando o modelo Motorola Dynatac 8000X, cujas especificações técnicas apontavam que ele possuía 33 centímetros de altura, 8,9 cm de espessura, 4,5 cm de largura e pesava 794 gramas. No modo de conversação, sua bateria durava não mais do que uma hora e, em modo de espera, até 8 horas. O aparelho começou a ser comercializado após 10 anos de sua primeira chamada (1984), chegando a custar US\$ 4.000,00 (CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR, [20--]).

No site a *História de Tudo*, em uma de suas reportagens, que trata sobre a História do Celular, é apresentada que, muito antes disso, na década de 40, a austríaca Hedwig Kiesler desenvolvia os mecanismos atualmente utilizados como base para os celulares. Casada com um fabricante de armas nazista, se mudou com o marido para os Estados Unidos durante a Segunda Guerra Mundial, onde descobriu que alguns torpedos haviam sido detidos por inimigos. Pensando nisso, decidiu criar um sistema onde duas pessoas pudessem conversar sem serem interrompidas. Essa foi a primeira noção de celular da história (HISTÓRIA DO CELULAR, [20--]).

Grasel (2014) aponta que em outubro de 1956, a empresa sueca Ericsson criou o Sistema Automático de Telefonia Móvel (MTA), que pesava cerca de 40 kg e foi desenvolvido para ficar dentro do porta-malas de veículos, o que não poderia ainda ser considerado como um celular. Já no início dos anos de 1990, a empresa Motorola lançou o MicroTAC, primeiro modelo flip do mercado, menor e mais leve do que o Motorola Dynatac 8000X, mas que ainda custava muito caro – em média US\$ 3.000,00 (GRASEL, 2014).

Praticamente na mesma época, Nokia e IBM lançaram celulares inovadores. A primeira inseriu as mensagens de texto e um teclado QWERTY² no modelo Nokia 9000 Communicator. Já a IBM foi muito além de seu tempo e desenvolveu, em parceria com a Mitsubishi, o Simon, que tinha sistema operacional e tela touchscreen (CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR, [20--]; GRASEL, 2014). O primeiro aparelho precursor dos celulares foi lançado em 1999 pela empresa canadense *BlackBerry*. Ele era

² QWERTY é o layout de teclado para o alfabeto latino atualmente mais utilizado em computadores e máquinas de escrever. O nome vem das primeiras 6 letras "QWERTY" da primeira linha do teclado.

como um *pager*³ que mandava mensagens e e-mails. O teclado QWERTY se tornou popular entre os consumidores e outras marcas passaram a produzi-lo (CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR, [20--]).

A era dos smartphones começa com o Ericsson R380 no ano de 2000. Ele tinha tela sensível ao toque e acesso à internet. Não satisfeita, a empresa lançou o Ericsson T36, com tecnologia Bluetooth, que permitia o compartilhamento de dados sem fio (GRASEL, 2014).

Em 2002 surgia um dos primeiros celulares com câmera embutida, o Sanyo SCP-5300. A qualidade era obviamente baixa, 640 x 480 pixels. Já a Nokia, em 2005, fabricou o N70, que tinha duas câmeras e lanterna, mas já aceitava alguns aplicativos, além de um tocador de rádio e sintonizador de rádio FM (CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR, [20--]; GRASEL, 2014).

Muitas pessoas dizem que existe um mundo antes do iPhone e outro depois dele, pois as inovações que ele trouxe revolucionaram o mercado de celulares. Por exemplo, como aponta Jordão (2009), o iPhone “não era apenas sensível ao toque, mas trazia a sensibilidade a múltiplos toques, ou seja, você pode comandá-lo utilizando vários dedos”. Steve Jobs conseguiu reinventar o telefone. Em 2007, lançou o iPhone 2G, que ia muito além do conceito de telefone que existia até então. Ele tinha diversas funcionalidades e aplicativos e sua grande aposta era ser todo controlado pelo toque, com teclado embutido no software do aparelho (CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR, [20--]; GRASEL, 2014). A partir daí, modelos novos são fabricados praticamente todo dia, apresentando cada vez mais funcionalidades e os tornando necessários no dia a dia da população (COMO SURTIU O CELULAR, [20--]).

Longe de realizarmos uma compreensão histórica completa e apresentarmos uma linha cronológica da evolução dos celulares, apresentamos nesse tópico alguns indícios de como a evolução de tais equipamentos compromete nossa escolha no momento da compra, já que não basta apenas verificar se ele apenas faz ou não chamadas, mas também verificar uma série de outras características presentes, tais como: valor; marca; design; qualidade da câmera; capacidade de armazenamento (memória); tamanho e qualidade da tela; sistema operacional; peso e resistência a água.

³ Um *pager* é um dispositivo eletrônico usado para falar com pessoas através de uma rede de telecomunicações. Ele precedeu a tecnologia dos celulares e foi muito popular durante os anos de 1980 e 1990, utilizando transmissões de rádio para interligar um centro de controle de chamadas e o destinatário.

Na sequência, para compreendermos um pouco mais sobre como iremos modelar o problema da escolha de um celular por meio de algumas necessidades e preferências, falaremos sobre a matemática *fuzzy*.

3. HISTÓRIA E RELAÇÕES FUZZY

Merli e Almeida (2001, p. 2) argumentam que “lidar com fatores como ambiguidade, incerteza e informações vagas para a resolução de problemas é uma característica do pensamento humano, articulado por meio de conhecimentos prévios e experiências”, e mais, no mundo real, algumas coisas não podem ser classificadas apenas como ‘pertence’ ou ‘não pertence’, princípio básico da lógica aristotélica clássica. Nesse contexto aristotélico, um elemento não pode pertencer parcialmente a um conjunto.

Por exemplo, uma pessoa que mede 1,78 não pode ser considerada simplesmente ‘alta’ ou ‘baixa’, ou ainda nem todo aluno pode ser classificado como ‘bom’ ou ‘ruim’. Esses são exemplos de que certas perguntas não têm apenas as respostas ‘sim’ ou ‘não’. Merli e Almeida (2013) apontam que:

[...] se concordamos que as únicas respostas possíveis são essas, fica evidente que compartilhamos de uma concepção Aristotélica, pois assumimos que há apenas dois graus de certeza: certo/verdadeiro ou errado/falso. Isso é factualmente aceito considerando que em muitas situações, de fato, nos deparamos com esta característica binária dos fenômenos. A televisão é ligada ou desligada; os computadores são ‘binários’; ou é Aristóteles ou não é Aristóteles; enfim, inúmeros são os exemplos que nos remetem a essa lógica dualista. Contudo, muitas experiências humanas podem não ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, certas ou erradas. No meio da completa certeza e completa incerteza do pensamento humano existem graus de certeza e de incerteza inerentes ao próprio pensamento, bem como ao fenômeno sobre o qual pensamos (MERLI; ALMEIDA, 2013, p. 1).

A lógica *fuzzy* tem como objetivo moldar os raciocínios aproximados, os não exatos, ao invés dos precisos. Segundo Kosko (1993), em 1965, Lotfi Askar Zadeh, publicou o artigo *Fuzzy Sets* no *Journal Information and Control*. Esse artigo foi o primeiro a desenvolver o que na lógica *fuzzy* atual chamamos de funções de pertinência de conjuntos *fuzzy*.

O ‘verdadeiro’ e o ‘falso’ são as situações limite, ou seja, as situações precisas. Não é exatamente com isso que essa lógica trabalha, e sim com as situações intermediárias a essas, ao usar palavras como ‘muitos’, ‘poucos’, ‘a maioria’, ‘ocasionalmente’, entre outras. A Figura 1 faz uma comparação da lógica clássica com a lógica *fuzzy* e pode auxiliar no entendimento da última.

Figura 1 – Lógica clássica X Lógica *fuzzy*



Fonte: Dos autores, 2017

Os conjuntos *fuzzy* foram introduzidos por Zadeh em 1965 “com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como ‘aproximadamente’, ‘em torno de’, dentre outros” (BARROS; BASSANEZI, 2006, p. 12). Tendo isso esclarecido, podemos entender que um conjunto *fuzzy* é uma classe de objetos que possuem grau de adesão ou pertinência. Cada objeto deve possuir um grau de pertinência diferente do outro, que varia entre zero (não pertencente) e um (pertence totalmente).

Zadeh formalizou o conceito de conjunto *fuzzy* baseando-se na ideia de que todo conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, chamada função característica. As definições a seguir, bem como sua notação matemática são retiradas de Barros e Bassanezi (2006).

Definição 1. Seja U um conjunto clássico e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Desta forma, \mathcal{X}_A é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, com $\mathcal{X}_A(x) = 1$ indicando que o elemento x está em A , enquanto que $\mathcal{X}_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A .

Merli e Almeida (2012, p. 5) afirmam que,

[...] nos conjuntos crisp ou clássicos, um elemento pode apenas pertencer ou não pertencer a um dado conjunto. Assim, dado um conjunto A e um elemento x , dizemos que $x \in A$ ou que $x \notin A$. Por exemplo, o conjunto A dos números pares. Sabemos que o número $2 \in A$ e que $3 \notin A$.

Porém, há casos em que para algum elemento esta pertinência não está tão bem esclarecida. Nesses casos, a definição de conjuntos *fuzzy* é necessária.

Definição 2. Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto *fuzzy* F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F U : \rightarrow [0,1], \quad (2)$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto *fuzzy* F . O índice F na função de pertinência é usado em analogia à função característica de subconjunto clássico, conforme Definição 1. O valor $\varphi_F(x) \in [0,1]$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto *fuzzy* F ; $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$, indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto *fuzzy* F . Um subconjunto *fuzzy* F é composto de elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. Podemos dizer que um subconjunto *fuzzy* F de U é dado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\} \quad (3)$$

Além dessa compreensão básica de conjunto *fuzzy*, é necessário, para o desenvolvimento da ferramenta de escolha, entender o que é uma Relação *Fuzzy*. De acordo com Barros e Bassanezi (2006, p. 57-58) “a relação será *fuzzy* quando optamos pela teoria dos conjuntos *fuzzy*, e será *crisp* quando usamos a teoria clássica dos conjuntos para conceituar a relação em estudo”.

Definição 3. Uma relação *fuzzy* R sobre um $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto *fuzzy* de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim, uma relação *fuzzy* R é definida por uma função de pertinência $\varphi_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $U_1 \times U_2$, então a relação é chamada de *fuzzy* binária sobre $U_1 \times U_2$.

As formas mais comuns de se representar uma relação *fuzzy* binária em, por exemplo, $X \times Y$, quando X e Y são finitos, são a tabular e a matricial. Sejam $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ e a relação *fuzzy* R sobre $X \times Y$, com função de pertinência dada por $\varphi_R(x_i, y_j) = r_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a representação matricial de R pode ser dada por:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Outro ponto importante de salientar é definição de relação *fuzzy* binária inversa.

Definição 4. Seja R uma relação *fuzzy* binária em $X \times Y$. A relação *fuzzy* binária inversa, R^{-1} , definida em $Y \times X$, tem a função de pertinência $\varphi_{R^{-1}}: Y \times X \rightarrow [0,1]$ dada por $\varphi_{R^{-1}}(y, x) = \varphi_R(x, y)$.

É importante notar que a matriz de R^{-1} coincide com a transposta de R .

Definição 5. Considere R e S duas relações *fuzzy* binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação *fuzzy* binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))]. \quad (5)$$

Esta composição é denominada composição *max-min*. Quando os conjuntos U, V e W são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição *max-min*, é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Distante de ser um manual completo de matemática *fuzzy*, nesta seção, apresentamos apenas algumas definições de conceitos que utilizaremos em nossa modelagem matemática, como por exemplo, função característica, função de pertinência, conjuntos *fuzzy* e relações *fuzzy*. Na sequência, apresentamos o processo de modelagem matemática da escolha de um celular.

4. ESCOLHA DE UM CELULAR

Atualmente, com a quantidade de opções de celulares disponíveis no mercado, passa a ser um desafio escolher um modelo que se adeque às suas necessidades e gostos. Para tanto, pode-se desenvolver uma modelagem *fuzzy* que atenda e satisfaça as escolhas do indivíduo através de pesquisas sobre suas preferências, e, portanto fizemos um levantamento de dados, com base em características subjetivas, para a qualificação de alguns aparelhos.

Vale destacar que o objetivo deste trabalho não foi estabelecer uma técnica aprimorada de amostragem estatística, mas apenas uma simples coleta de dados. As características elencadas por esses indivíduos foram: valor; marca; design; qualidade da câmera; capacidade de armazenamento (memória); tamanho e qualidade da tela; sistema operacional; peso e resistência a água, uma vez que estas são as características mais relevantes e mais procuradas atualmente em um celular. Os modelos disponíveis no

mercado, escolhidos por serem os pertencentes às primeiras pessoas que participaram da pesquisa, são apresentados na Figura 2.

Figura 2 – Modelos de Celulares



Fonte: Retirado dos sites dos fabricantes

O público que estava ao alcance dos pesquisadores para coleta de informações foi uma turma do Ensino Médio (com cerca de 40 alunos) de uma Escola da Rede Pública de Ensino de Toledo. Os participantes deveriam indicar o modelo de celular que possuíam e

depois avaliar e classificar cada característica pontuada na pesquisa no intervalo $[0,1]$ de acordo com seu aparelho, sendo os valores mais próximos de 1 de melhor descrição daquela característica. Após essa etapa, essa pesquisa foi lançada na internet, por meio de um formulário online, onde, novamente, as pessoas deveriam dar uma nota no intervalo $[0,1]$, mas dessa vez de acordo com a coerência para o consumidor sobre as características apresentadas pelo celular. Por exemplo, um celular de valor mais elevado, deveria ter uma nota mais próxima de 0 (zero), uma vez que não é muito bom para o consumidor. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos por meio de uma média aritmética dos valores associados a cada característica.

Tabela 1 – Avaliação dos modelos de celular pelos consumidores (Matriz A)

Celular	Valor	Marca	Design	Câmera	Memória	Tela	S. O.	Peso	R. A.
1	0,45	0,82	0,89	0,91	0,88	0,86	0,82	0,84	0,49
2	0,64	0,72	0,71	0,80	0,75	0,78	0,73	0,67	0,60
3	0,51	0,80	0,77	0,73	0,72	0,73	0,81	0,79	0,32
4	0,80	0,58	0,58	0,58	0,60	0,64	0,60	0,74	0,40
5	0,79	0,47	0,53	0,53	0,59	0,69	0,61	0,64	0,32
6	0,71	0,64	0,61	0,57	0,64	0,78	0,58	0,70	0,48

Fonte: Dos autores, 2017

Na sequência, outras pessoas foram consultadas sobre a importância que cada uma dessas características tem no momento da escolha de um modelo de celular e novamente foi pedido que estabelecessem uma nota no intervalo $[0,1]$. Assim, a Tabela 1 (que pode ser pensada como uma Matriz $A_{(6 \times 9)}$) é uma relação *fuzzy* da avaliação dos modelos de celular pelos consumidores. Outra relação *fuzzy* binária é a matriz de preferência do primeiro consumidor, dada por:

$$C_{1(1 \times 9)} = [0 \ 0,9 \ 0,8 \ 0,5 \ 1,0 \ 0,6 \ 1,0 \ 0 \ 0], \quad (6)$$

onde cada elemento corresponde ao grau da satisfação a cada uma das nove características sugeridas anteriormente: valor; marca; design; qualidade da câmera; capacidade de armazenamento (memória); tamanho e qualidade da tela; sistema operacional; peso e resistência a água.

Utilizando a composição $R \circ S$, da **Definição 5**, realizamos a operação de multiplicação (*min*) entre a matriz $A_{(6 \times 9)}$ e a matriz $C_{1(9 \times 1)}^{-1}$, ou seja, $S_{(6 \times 1)} = A_{(6 \times 9)} \cdot C_{1(9 \times 1)}^{-1}$, obtendo a matriz de satisfação:

$$S_{1(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} 4,12 \\ 3,56 \\ 3,67 \\ 2,86 \\ 2,73 \\ 3,04 \end{bmatrix} \quad (7)$$

E assim, por meio do *max*, sabemos que a melhor escolha para o consumidor 1, atendendo às suas características de escolha é o modelo 1 (iPhone 6).

Ainda é possível normalizar essa matriz (ou seja, utilizamos o elemento de maior valor da matriz e dividimos todos os elementos por ele), para que o resultado fique compreendido dentro do intervalo [0,1]. Nesse caso, temos uma nova matriz:

$$N_{1(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,86 \\ 0,89 \\ 0,69 \\ 0,66 \\ 0,74 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Nessa matriz é mais fácil de perceber que o modelo de celular 1 é realmente a melhor opção para o consumidor C_1 , já que possui grau de satisfação 1,0.

Outro exemplo pode ser o consumidor C_2 , que tem sua matriz de preferência dada por $C_{2(9 \times 1)} = [0,8 \ 0,5 \ 0,2 \ 0,7 \ 1,0 \ 0 \ 0,3 \ 0 \ 0]$. Realizando novamente a composição *max-min* na composição das relações $A_{(6 \times 9)}$ e $C_{2(9 \times 1)}^{-1}$, obtemos a matriz de satisfação:

$$S_{2(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} 4,92 \\ 4,51 \\ 4,62 \\ 3,85 \\ 3,76 \\ 3,78 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Que, normalizada, forma a matriz:

$$N_{2(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,92 \\ 0,94 \\ 0,78 \\ 0,76 \\ 0,77 \end{bmatrix} \quad (10)$$

A matriz N_2 novamente mostra que o modelo de celular 1 é a melhor opção para o consumidor C_2 , pois possui grau de satisfação 1,0.

Enfim, com a relação *fuzzy* binária A estabelecida, basta que seja dada outra relação *fuzzy* binária C_n que descreva o grau de satisfação do consumidor, para que, por meio de uma composição de relações *fuzzy* calculemos a matriz S_n , que fornecerá através do *max*, a escolha do modelo de celular.

5. CONSIDERAÇÕES (MAS NÃO FINAIS)

Neste artigo, buscamos responder à seguinte pergunta: Com um universo de opções de celulares, como esse em que vivemos: como é possível escolher apenas um aparelho que se adeque às nossas necessidades?

Para tanto, buscamos subsídios na matemática *fuzzy* para auxiliar na modelagem. Nesse contexto, inicialmente fizemos um pequeno retrospecto histórico sobre a evolução dos celulares, na sequência apresentamos os conceitos básicos e necessários à nossa modelagem de: conjuntos *fuzzy*, relações *fuzzy* e composições *fuzzy*.

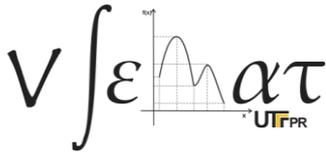
Em seguida, apresentamos os procedimentos metodológicos e a modelagem matemática *fuzzy*, de modo a encontrar um modelo matemático que representasse a solução para o problema inicial. De um modo geral, observando o problema inicial, podemos concluir que o trabalho apresentou resultados condizentes com as preferências do indivíduo.

Enfim, vale salientar, que este é um modelo simplista, adequado as características do grupo ao qual realizamos a enquete. Neste caso, é importante destacar que não houve uma preocupação na escolha de um método de amostragem que representasse de forma satisfatória todo o conjunto de pessoas que realiza a compra de um celular. Podemos dizer que se trata mais de um teste da robustez da matemática *fuzzy* na modelagem matemática de conceitos subjetivos.

Nesse sentido, para que esse modelo *fuzzy* possa melhor representar a 'escolha' de um modelo de celular, seriam necessários realizar outros procedimentos estatísticos, bem como aumentar a quantidade de modelos de celulares. Outro ponto que também pode ser melhorado é o acréscimo de outras características dos aparelhos celulares na avaliação. Além do que, outros tipos de composição *fuzzy* poderiam ser utilizadas para verificar a confiabilidade dos resultados.

REFERÊNCIAS

- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas. SP: Coleção IMECC, 2006.
- COMO SURTIU O CELULAR**, [20--]. Disponível em: <<http://bgjnejr.org/celulares.html>>. Acesso em: 05 mai. 2017.
- CONHEÇA A EVOLUÇÃO DO TELEFONE CELULAR**, [20--]. Disponível em: <http://infograficos.oglobo.globo.com/sociedade/tecnologia/conheca-a-evolucao-do-telefone-celular/o-pioneiro-1704.html#description_text>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- GRASEL, G. F.. **A História dos Telefones Celulares**, 2014. Disponível em: <<https://www.oficinadanet.com.br/post/12671-a-historia-dos-telefones-celulares>>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- HISTÓRIA DO CELULAR**, [20--]. Disponível em: <<http://www.historiadetudo.com/celular>>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- JORDÃO, F. **História: a evolução do celular**, 2009. Disponível em: <<https://www.tecmundo.com.br/celular/2140-historia-a-evolucao-do-celular.htm>>. Acesso em: 04 mai. 2017.
- KOSKO, B.. **Fuzzy Thinking**, Hyperion, New York, 1993.
- MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. Modelos clássico e *fuzzy* na avaliação por conceitos: Um olhar para as diferentes linguagens. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2013, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2013.
- MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. Nem tudo é tão certo como parece ser: a Matemática *Fuzzy* como Linguagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2011, Apucarana. **Anais...** Apucarana: FAP, 2011.
- MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. O(s) modelo(s) populacional(is): clássico e *fuzzy* - Um olhar a partir de Wittgenstein. In: ENCONTRO PARANANENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Toledo. **Anais...** Toledo: UTFPR, 2012.
- ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets**, Information and Control, v. 8, p. 338-353, 1965.



PROJEÇÃO PARA O CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE FRANCISCO BELTRÃO/PR UTILIZANDO O MODELO DE MALTHUS

Maiquiel Schmidt de Oliveira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
msoliveira@utfpr.edu.br

Camila Nicola Boeri Di Domênico
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
camiladomenico@utfpr.edu.br

Andriele da Mota Duarte
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
andriele.duart@gmail.com

Edinara Kessler
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
edinarakessler@hotmail.com

RESUMO: Com o objetivo de analisar o crescimento populacional para o município de Francisco Beltrão, Paraná, foram feitas simulações visando realizar uma projeção da população para os anos de 2020, 2025 e 2030. Para isso, foi utilizado o modelo matemático de Malthus, que se baseia em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Os dados simulados quando comparados aos valores reais da população apresentaram uma boa concordância, com coeficiente de correlação igual a 1, o que indica que o modelo proposto representa de forma satisfatória uma projeção a longo prazo. Nesse sentido, o estudo do crescimento demográfico poderá ser útil para o planejamento e desenvolvimento futuro da cidade.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; crescimento populacional; modelo de Malthus

1 INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, a matemática vem servindo como um instrumento que auxilia na interpretação de fenômenos. O homem, em busca de soluções, desenvolve modelos matemáticos que possam descrever situações reais, podendo estes auxiliar na tomada de decisões.

Os modelos de análise de crescimento populacional existentes podem auxiliar nas gestões governamentais. Realizar uma previsão de qual será a população para determinado período, pode ser determinante para que as necessidades básicas sejam atendidas de maneira satisfatória.

Neste sentido, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são utilizadas para realizar estudos de previsão de populações e em muitos problemas envolvendo modelagem matemática. Dentro delas, destacam-se o modelo de Malthus, que pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional a população total do país naquele instante; o modelo de Verhulst, que introduz a equação de crescimento logístico, onde a população cresce até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar.

Devido a importância regional do município de Francisco Beltrão, localizado no sudoeste do estado do Paraná, decidiu-se realizar um estudo do seu crescimento demográfico através de Equações Diferenciais Ordinárias. Acredita-se que o levantamento possa ser útil para o desenvolvimento futuro da cidade.

Além disso, esse estudo apresenta modelos matemáticos de caráter determinístico e probabilístico para estudar as variações no crescimento populacional em períodos passados e realizar projeções para a população futura. Para isso, essa pesquisa se baseia no modelo desenvolvido por Malthus e na sua aplicabilidade na área da Dinâmica de Populações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelo Malthusiano

Esse modelo se fundamenta na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. As variáveis desse modelo são o t (tempo) e P (número de indivíduos da população).

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt . Dessa forma a população é proporcional ao tamanho da população, como mostra a equação a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Se k é positivo a população aumentará, já se k for negativo a população diminuirá.

Como a equação anterior é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la da seguinte maneira:

$$\int \frac{dP}{dt} = \int k dt \quad (2)$$

$$\ln|P| = kt + C \quad (3)$$

$$|P| = e^{kt+C} \quad (4)$$

$$|P| = e^{kt} e^C \quad (5)$$

$$P = Ae^{kt} \quad (6)$$

onde A é uma constante arbitrária. Pode-se analisar o significado de A da seguinte maneira:

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A \quad (7)$$

A é o valor inicial da função que é a população num tempo 0.

Logo:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (8)$$

Esse modelo é bem simples e válido, mas em contra partida não leva em consideração que pode ocorrer acontecimentos extraordinários que podem fazer com que a população tenha um crescimento ou decréscimo maior que o apresentado pelo modelo.

2.2 Modelo Logístico (Verhulst)

Segundo Stewart (2013), o modelo logístico considera que a população de uma cidade normalmente cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas depois de um certo tempo ela tende a estabilizar e chegar a sua capacidade de suporte, por ter recursos limitados. Sendo $P(t)$ o tamanho da população no instante t , assume-se que:

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \quad (9)$$

Quando P for pequeno, nota-se que a taxa de crescimento populacional inicial está próxima de ser proporcional ao tamanho da população, ou seja, a taxa de crescimento é praticamente constante quando a população estudada for pequena. Ocorre também a diminuição da taxa de crescimento quando a população aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa a capacidade de suporte (população

máxima) K . A expressão mais simples para a taxa de crescimento que considera essas hipóteses é:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (10)$$

Multiplicando por P , encontramos o modelo para o crescimento populacional conhecido como equação diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (11)$$

-Se P for pequeno quando comparado com $K \rightarrow \frac{dP}{dt} \approx kP$;

-Se $P \rightarrow K$ então $\frac{dP}{dt} \rightarrow 0$;

- Se $0 < P < K$ então $\frac{dP}{dt} > 0$;

-Se $P > K$ então $\frac{dP}{dt} < 0$.

A equação logística é separável e podemos resolvê-la da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (12)$$

Integrando:

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K} \right)} = \int k dt \quad (13)$$

Para calcular a integral do lado esquerdo substituímos por:

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K} \right)} = \frac{K}{P(K-P)} \quad (14)$$

Usando frações parciais:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \quad (15)$$

Resolvendo as integrais:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \right) dP = \int k dt \quad (16)$$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \quad (17)$$

$$\ln \left| \frac{K-P}{P} \right| = -kt - C \quad (18)$$

$$\left| \frac{K-P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt} \quad (19)$$

$$\frac{K-P}{P} = A e^{-kt} \quad (20)$$

onde $A = e^{-C}$. Isolando P da equação anterior:

$$\frac{K}{P} - 1 = A e^{-kt} \quad \rightarrow \quad \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + A e^{-kt}} \quad (21)$$

Assim,

$$P = \frac{K}{1 + A e^{-kt}} \quad (22)$$

Podemos encontrar o valor de A usando $t=0$. Se $t=0$, $P = P_0$, assim:

$$\frac{K - P_0}{P_0} = A e^0 = A \quad (23)$$

Logo a solução para a equação logística é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + A e^{-kt}}, \quad \text{onde} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0} \quad (24)$$

O modelo logístico se difere bem do modelo proposto por Malthus, pelo fato que a população com o passar do tempo tenda a uma quantidade limite para o crescimento da mesma, ou seja, é a capacidade limite do ambiente.

3 METODOLOGIA

Neste trabalho o objetivo é fazer uma comparação dos resultados reais obtidos através do IBGE, com os resultados obtidos através do modelo de Malthus, obtendo uma pequena margem de erro.

O modelo de Malthus foi o escolhido para a realização do estudo sobre o crescimento populacional da cidade de Francisco Beltrão. Uma hipótese foi analisada: uma calculando o valor de k utilizando a população de 1980 e 2000 e outra utilizando a taxa média anual de crescimento populacional real.

Na hipótese foi utilizada a população de 1980 e de 2000. O valor de k foi mantido fixo e a população inicial foi considerada nos cálculos, como a população de 1980.

4 RESULTADOS

Na primeira análise realizada obteve-se um modelo que descreveu o crescimento da população dado por:

$$P(t) = 48762e^{0,016000369t} \quad (25)$$

De posse da mesma, foram feitas comparações dos dados simulados aos valores reais, para os anos de 2007, 2010 e 2012, bem como uma projeção para os anos de 2020, 2025 e 2030. Foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 01:

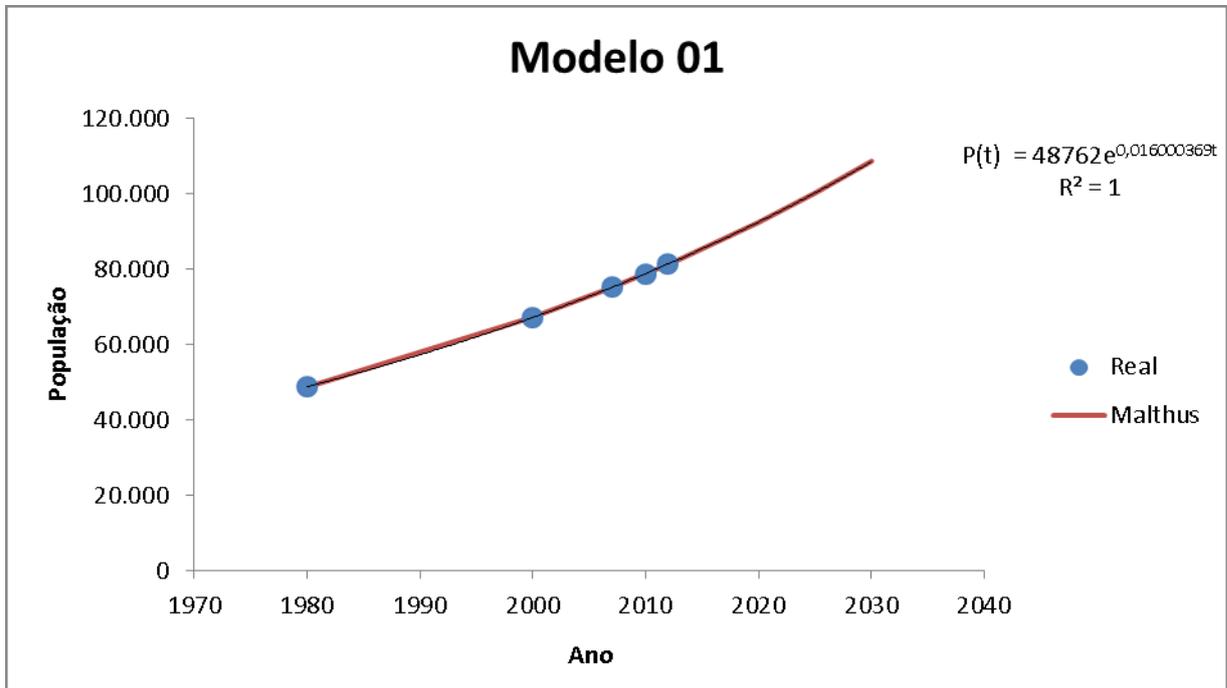
Tabela 01: Tabela dos dados obtidos pelo IBGE e dados obtidos pelo modelo

Ano	População Real	Modelo De Malthus	Erro (%)
1980	48.762	48.762	-
2000	67.132	67.152	0,03
2007	72.409	75.111	3,60
2010	78.957	78.804	0,19
2012	80.727	81.366	0,80
2020	--	92.478	-
2025	--	100.180	-
2030	--	108.544	-

Fonte: Dados do autor, 2016

Analisando-se os valores obtidos, tem-se um erro médio de 1,15%, indicando que os valores calculados estão próximos aos valores reais, como podemos analisar abaixo (Figura 01):

Figura 01: Relação entre os valores da população real com os valores obtidos pelo Modelo 01



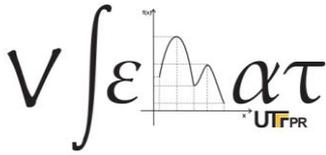
Fonte: Dados do autor, 2016

Na Figura 01 está representada a relação entre os valores da população real com os valores obtidos pelo modelo. Para verificar o grau de correlação entre estes valores, foi calculado o coeficiente de correlação (R^2), onde este foi igual a 1, indicando que os dados possuem uma forte associação.

Esses resultados possibilitam que os órgãos governamentais tenham uma estimativa de qual será a população em determinado período de tempo e possam, com isso, se prevenir para oferecer todos os serviços essenciais à população.

REFERÊNCIAS

STWEART, James. **Cálculo**. Vol. 2. São Paulo: editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.



ESTUDO DO CRESCIMENTO POPULACIONAL DO MUNICÍPIO DE PATO BRANCO/PR POR MEIO DO MODELO DE MALTHUS

Maiquiel Schmidt de Oliveira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
msoliveira@utfpr.edu.br

Camila Nicola Boeri Di Domênico
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
camiladomenico@utfpr.edu.br

Andriele da Mota Duarte
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
andriele.duart@gmail.com

Edinara Kessler
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
edinarakessler@hotmail.com

RESUMO: No século XVIII Thomas Malthus desenvolveu um modelo matemático para estudar o crescimento populacional. O modelo proposto foi uma equação ordinária simples, que pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. Assim surgiu a demografia, o estudo do crescimento das populações que são de extrema importância para auxiliar as gestões governamentais na tomada de decisões. Dessa forma tem-se o objetivo de estudar através do Modelo Malthusiano, o crescimento populacional do município de Pato Branco – PR. Para isso, foram utilizados os dados estatísticos obtidos no Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) dos anos de 1991 até 2016. Após aplicado o Modelo Malthusiano, os resultados obtidos foram comparados com os dados reais para determinar se o Modelo é uma boa ferramenta para prever o crescimento do município e, com isso, realizar uma projeção para a população para os anos de 2020, 2025 e 2030.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Crescimento populacional; Modelagem matemática.

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ferramenta utilizada pelo homem desde os seus primórdios com a intenção de equacionar uma situação real e então a resolver, utilizando a modelagem matemática.

A análise do crescimento populacional é utilizada para fazer uma previsão do crescimento ou decréscimo de uma população através de modelos matemáticos. Essa previsão auxilia Gestões Governamentais na tomada de decisões, no que se

referem à aplicação de recursos financeiros necessários para atender a população do município ou região.

No século XVIII Thomas Malthus desenvolveu um modelo matemático para estudar o crescimento populacional. O modelo proposto foi uma equação ordinária simples, que pode ser resolvida através do método de separação de variáveis (Meira et al., 2014).

Contudo, este trabalho tem por objetivo fazer um estudo da dinâmica populacional para o município de Pato Branco/PR, através do Modelo de Malthus, analisar os métodos de crescimento populacionais já existentes e realizar projeções para a população no futuro do município citado.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Modelo Malthusiano

Esse modelo se fundamenta na suposição de que a população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. As variáveis desse modelo são o t (tempo) e P (número de indivíduos da população).

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt . Dessa forma a população é proporcional ao tamanho da população, como mostra a equação a seguir:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Se k é positivo a população aumentará, já se k for negativo a população diminuirá.

Como a equação anterior é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la da seguinte maneira:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt \quad (2)$$

$$\ln|P| = kt + C \quad (3)$$

$$|P| = e^{kt+C} \quad (4)$$

$$|P| = e^{kt} e^C \quad (5)$$

$$P = Ae^{kt} \quad (6)$$

onde A é uma constante arbitrária. Pode-se analisar o significado de A da seguinte maneira:

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A \quad (7)$$

A é o valor inicial da função que é a população num tempo 0.

Logo:

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (8)$$

Esse modelo é bem simples e válido, mas em contra partida não leva em consideração que pode ocorrer acontecimentos extraordinários que podem fazer com que a população tenha um crescimento ou decrescimento maior que o apresentado pelo modelo.

2.2 Modelo Logístico (Verhulst)

Segundo Stewart (2013), o modelo logístico considera que a população de uma cidade normalmente cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas depois de um certo tempo ela tende a estabilizar e chegar a sua capacidade de suporte, por ter recursos limitados. Sendo $P(t)$ o tamanho da população no instante t , assume-se que:

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \quad (9)$$

Quando P for pequeno, nota-se que a taxa de crescimento populacional inicial está próxima de ser proporcional ao tamanho da população, ou seja, a taxa de crescimento é praticamente constante quando a população estudada for pequena. Ocorre também a diminuição da taxa de crescimento quando a população aumenta e torna-se negativa quando P ultrapassa a capacidade de suporte (população máxima) K . A expressão mais simples para a taxa de crescimento que considera essas hipóteses é:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = k \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (10)$$

Multiplicando por P , encontramos o modelo para o crescimento populacional conhecido como equação diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K} \right) \quad (11)$$

-Se P for pequeno quando comparado com $K \rightarrow \frac{dP}{dt} \approx kP$;

-Se $P \rightarrow K$ então $\frac{dP}{dt} \rightarrow 0$;

- Se $0 < P < K$ então $\frac{dP}{dt} > 0$;

-Se $P > K$ então $\frac{dP}{dt} < 0$.

A equação logística é separável e podemos resolvê-la da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (12)$$

Integrando:

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int k dt \quad (13)$$

Para calcular a integral do lado esquerdo substituímos por:

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{K}{P(K-P)} \quad (14)$$

Usando frações parciais:

$$\frac{K}{P(K-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K-P} \quad (15)$$

Resolvendo as integrais:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right) dP = \int k dt \quad (16)$$

$$\ln|P| - \ln|K-P| = kt + C \quad (17)$$

$$\ln \left| \frac{K-P}{P} \right| = -kt - C \quad (18)$$

$$\left| \frac{K-P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt} \quad (19)$$

$$\frac{K-P}{P} = A e^{-kt} \quad (20)$$

onde $A = e^{-C}$. Isolando P da equação anterior:

$$\frac{K}{P} - 1 = A e^{-kt} \rightarrow \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + A e^{-kt}} \quad (21)$$

Assim,

$$P = \frac{K}{1 + A e^{-kt}} \quad (22)$$

Podemos encontrar o valor de A usando $t=0$. Se $t=0$, $P = P_0$, assim:

$$\frac{K-P_0}{P_0} = A e^0 = A \quad (23)$$

Logo a solução para a equação logística é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + A e^{-kt}}, \quad \text{onde} \quad A = \frac{K - P_0}{P_0} \quad (24)$$

O modelo logístico se difere bem do modelo proposto por Malthus, pelo fato que a população com o passar do tempo tenda a uma quantidade limite para o crescimento da mesma, ou seja, é a capacidade limite do ambiente.

2.3. Estudos de caso

Pugens et. al. (2012) descreveu o crescimento populacional através do modelo matemático de Malthus do município de Osório. Os resultados obtidos pelo autor foram comparados aos dados estatísticos obtidos no IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), no período de 2001 e 2010, sendo que ao comparar os resultados o autor constatou que o Modelo Malthusiano foi válido para o estudo realizado. Os dados obtidos pelo o estudo podem ser observados abaixo (Quadro 1):

Quadro 1 - Tabela dos dados obtidos pelo IBGE e pelos dados obtidos pelo modelo

Ano	População IBGE	População modelo de Malthus
2001	36.131	36.131
2007	39.290	39.439
2010	40.906	41.242

Fonte: Pugens et. al. (2012)

Rocha e Botta (2009) realizaram um estudo sobre a população do município de Adamantina através dos modelos matemáticos propostos por Malthus e Verhulst, os dados obtidos pelo estudo foram comparados aos dados oficiais do SEADE (Sistema Estadual de Análise de Dados), e são mostrados a seguir (Quadro 2):

Quadro 2 - Tabela dos dados da população de Adamantina obtidos pelo SEADE e pelo estudo

Ano	População SEADE	População modelo de Malthus	População modelo de Verhulst
1970	31.776	31.776	31.776
1980	32.036	32.036	32.096
1991	32.088	32.321	32.326
1996	33.000	32.452	32.424
2000	33.457	32.558	32.425
2007	33.289	32.743	32.758

2010		32.822	32.759
2015		32.956	32.900
2020		33.099	33.000

Fonte: Rocha e Botta (2009)

Os autores concluíram que o modelo mais eficiente para a população de Adamantina foi o modelo de Malthus, pois o tempo utilizado no estudo foi curto, para o modelo de Verhulst é possível obter melhores aproximações quando o tempo é longo.

Sousa e Sanches (2011) fizeram um estudo de população do município de Santa Fé do Sul através dos modelos Malthusiano e de Verhulst, os dados obtidos no estudo foram comparados os dados oficiais do IBGE. Os dados obtidos no estudo são apresentados a seguir (Quadro 3):

Quadro 3 - Tabela dos dados da população de Santa Fé do Sul obtidos pelo IBGE e pelo estudo

Ano	População IBGE	População modelo de Malthus	População modelo de Verhulst
2000	26.512	26.512	26.512
2001	26.888	26.772	26.816
2002	27.228	27.035	27.113
2003	27.560	27.301	27.404
2004	28.257	27.569	27.687
2005	28.643	27.840	27.963
2006	29.026	28.114	28.231
2007	27.693	28.390	28.493
2008	28.966	28.669	28.747
2009	29.192	28.951	29.005
2010	29.235	29.235	29.235

Fonte: Sousa e Sanches (2011)

Segundo os autores do estudo o modelo matemático de crescimento populacional que melhor se adequou ao município foi o modelo logístico de Verhulst.

Silva e Sanches (2010) realizaram um estudo sobre a dinâmica populacional da cidade de Ilha Solteira, utilizando os modelos de Malthus e de Verhulst, tendo como referencia os anos de 1990 a 2000 e, ainda, realizaram uma projeção da população para os anos de 2010 e 2020, onde obtiveram os seguintes resultados, conforme é apresentado (Quadro 4):

Quadro 4 - Crescimento Populacional de Ilha Solteira

Ano	População real	Modelo de Malthus	Modelo de Verhulst
1990	21614	21614	21614
1991	21852	21864	21859
1992	22090	22116	22107
1993	22330	22372	22359
1994	22573	22630	22612
1995	22819	22892	22869
1996	23067	23156	23129
1997	23318	23423	23391
1998	23572	23695	23657
1999	23828	23968	23925
2000	24087	24245	24197
2010	-----	27196	27082
2020	-----	30507	30303

Fonte: Silva e Sanches (2010)

3 METODOLOGIA

O trabalho tem por objetivo analisar se o modelo proposto por Malthus é valido para aproximar a população real ao modelo matemático. O estudo foi realizado para o município de Pato Branco – PR e os dados reais foram obtidos através do IBGE.

Foram levadas em consideração várias hipóteses, sendo a que melhor representou os dados foi a que utilizou o valor de k calculado a partir dos anos de 1991 e 2010, onde o ano de 1991 representa a população inicial, com valor de k e da população inicial mantidos fixos.

4 RESULTADOS

Para o estudo do crescimento populacional do município de Pato Branco – PR foi utilizado o modelo matemático de Malthus. Para encontrar o valor de k foram

utilizadas as populações do ano de 1991 e de 2010, obtendo-se o valor de $k = 0,013803191$. Os dados obtidos são descritos a seguir (Tabela 1), utilizando como população inicial (P_0) do ano de 1991 e o valor de k já apresentado:

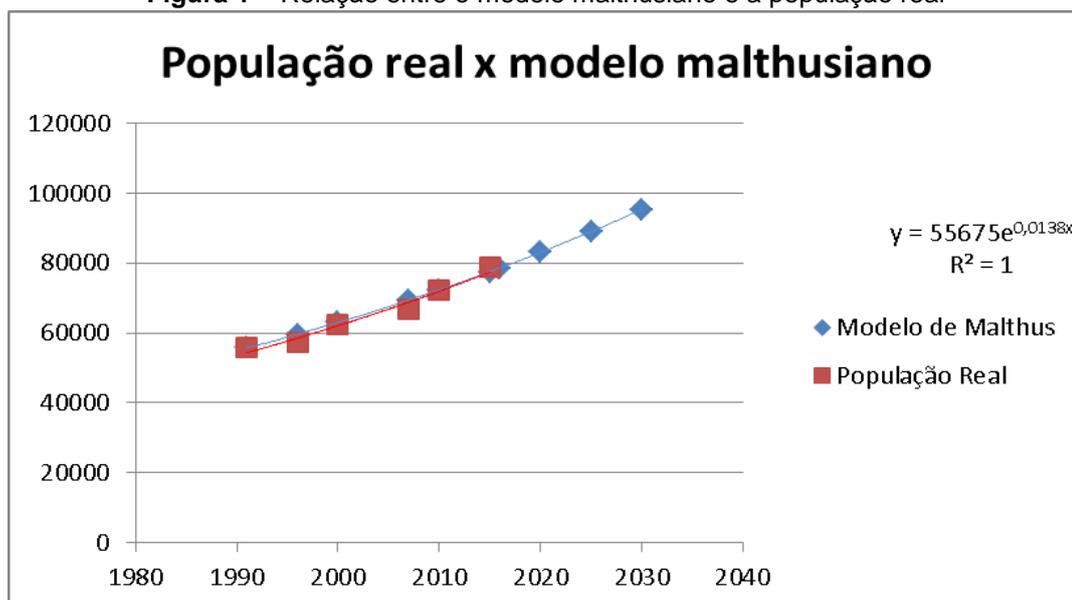
Tabela 1 - Tabela dos dados da população de Pato Branco obtidos pelo IBGE e pelo estudo

Ano	População IBGE	População Modelo de Malthus	Erro Percentual
1991	55.675	55.675	-
1996	57.295	59.653	4,12%
2000	62.234	63.039	1,29%
2007	66.680	69.434	4,13%
2010	72.370	72.370	0%
2016	78.136	78.618	0,62%
2020		83.081	
2025		89.018	
2030		95.378	

Dados (2016) Fonte: do autor

Os dados encontrados mostram que o modelo tem um erro percentual médio de 2,03%, mostrando que os valores calculados a partir do modelo matemático se aproximam dos valores reais da população. A seguir tem-se a relação entre o modelo malthusiano e a população real (Figura 1):

Figura 1 – Relação entre o modelo malthusiano e a população real



Fonte: Dados do autor (2016).

A partir do mesmo podemos verificar que os dados obtidos pelo modelo matemático se aproximam dos dados da população real, mostrando que o modelo utilizado é válido para representar a população do município de Pato Branco. A correlação entre os dados reais e os obtidos pelo método apresentou valor igual a 1, o que mostra a forte relação entre os dados.

5 CONCLUSÕES

Pelo estudo foi possível estimar a população para o município para os anos de 2020, 2025 e 2030. Ao comparar os resultados obtidos com os dados do IBGE podemos ver que o modelo se aproxima a realidade.

Logo, o modelo serve para prever a população da cidade a longo prazo, muito importantes para ajudar a administração da cidade a prever investimentos necessários para comportar a população no município.

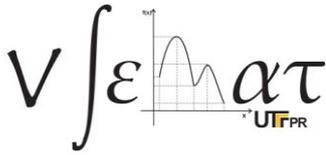
REFERÊNCIAS

MEIRA, J. S. **Modelo Malthusiano aplicado ao crescimento populacional de Manoel Viana/RS**. XV EREMATSUL (Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul), Bagé/RS, 2014.

PUGENS, B. P. et al. Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados do município de Osório. **Revista Modelos**. Osório, vol.2, n.2, p.42-51, 2012.

ROCHA, Naiara Chierici; BOTTA, Vanessa. Dinâmica populacional aplicada à população de Adamantina. **Omnia Exatas**, v.2, n.2, p.56-65, 2009.

SILVA, Aline Jardim da. SANCHES, Luiz Carlos Facundo. Aplicação de Equações Diferenciais no Estudo da Dinâmica Populacional de Ilha Solteira: **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, 33., p.792-793, 2010.

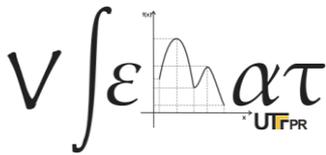


V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência
e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

SOUSA, Felipe dos Santos. SANCHES, Luiz Carlos Facundo. Uso de EDO's no Crescimento Demográfico do Município de Santa Fé do Sul Através dos Modelos de Malthus e Verhulst. **Congresso de Matemática Aplicada e computacional da região do sudeste**, 1., Ilha Solteira. p.483-485, 2011.

STWEART, James. **Cálculo**. Vol. 2. São Paulo: editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.



UM RELATO SOBRE AS ATIVIDADES PRÁTICAS SUPERVISIONADAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: MODELAGEM DE UM CIRCUITO RC

Fernanda Venites Buzinaro (CAPES – PIBID)
UTFPR - Toledo
fernandavbuzinaro@gmail.com

Andressa Paola Cordeiro
UTFPR - Toledo
andressap.ha@gmail.com

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
UTFPR - Toledo
suellenpardo@utfpr.edu.br

O presente trabalho discorre sobre as dificuldades decorrentes de uma atividade proposta na disciplina de Equações Diferenciais Aplicadas, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, campus Toledo.

A atividade proposta como Atividade Prática Supervisionada foi realizada por Andressa Paola Cordeiro e Fernanda Venites Buzinaro. Foram propostas cinco diferentes questões, uma para cada dupla de alunos que cursam a disciplina, sendo que cada questão tratava de uma modelagem diferente com a aplicação dos diferentes métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias discutidos em sala de aula. A atividade a que se propõe esta análise aborda uma modelagem em física, relacionada a um circuito elétrico RC, desenvolvida utilizando a modelagem matemática e as leis da física, para, enfim, encontrar uma equação diferencial que descreve o fenômeno em estudo.

A MODELAGEM MATEMÁTICA

Primeiramente é importante compreendermos do que se trata uma Modelagem Matemática na Educação Matemática. De acordo com Barbosa (*apud* ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), a modelagem é um ambiente de aprendizagem que convida os alunos a indagar e/ou investigar situações oriundas de diversas áreas da realidade, por meio da Matemática. Ela pode ser descrita em três diferentes momentos, expostos no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 – Momentos da Modelagem Matemática

Primeiro Momento	Inicialmente expõe-se o problema aos alunos, analisando dados que serão necessários na análise e no processo de investigação para se encontrar um modelo matemático.
Segundo Momento	Neste momento, o professor impõe aos alunos uma situação-problema, em que, preferencialmente em grupos, os alunos deverão completar a coleta de dados.
Terceiro Momento	Por fim, como responsáveis pela condução da atividade de modelagem, os alunos precisam realizar os procedimentos necessários para se chegar ao objetivo, com o mínimo de intervenção do professor.

Fonte: adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.26)

É importante que, no terceiro momento, o professor consiga conduzir a aula de forma que os próprios alunos busquem por respostas sem a necessidade de se voltarem à figura do professor. Isso proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e desenvolve a autonomia dos alunos na busca da resolução da atividade proposta.

Existem ainda três níveis de modelagem. O primeiro refere-se à atividade de modelagem onde o professor propõe o problema e disponibiliza os dados, também conhecido como tendência da Resolução de Problemas. O segundo nível acontece quando o professor propõe uma ideia para a modelagem e os alunos ficam responsáveis pela busca dos dados necessários para a sua resolução. Finalmente, o último nível é aquele em que os próprios alunos propõem a ideia de uma modelagem relacionado a determinado tema.

A atividade proposta na disciplina de Equações Diferenciais Aplicadas representa uma Resolução de Problemas, primeiro nível da Modelagem Matemática.

A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

O enunciado da atividade é exposto a seguir:

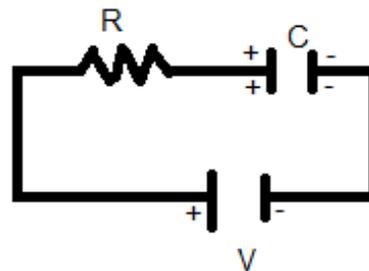
Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito RC no qual a resistência é de 200 ohms e a capacitância é de 10^{-4} farads. Encontre a carga $q(t)$ no capacitor se $q(0)=0$. Encontre também a corrente $i(t)$.

Como no curso de Licenciatura em Matemática não há nenhuma disciplina obrigatória em Física, muitos dos acadêmicos têm dificuldade em assuntos relacionados a esta área do conhecimento. Sentindo esta dificuldade e, visando apresentar um bom trabalho para os demais colegas, buscamos um professor de Física da própria universidade para nos auxiliar. Em poucos minutos a explicação foi dada, de forma atenciosa, clara e objetiva.

Assim, segue a resolução apresentada à professora e aos demais acadêmicos:

Um circuito RC é um circuito elétrico de corrente constante composto por um resistor e um capacitor. O capacitor é responsável pelo acúmulo de cargas elétricas para liberá-las no momento certo e o resistor tem a função de dissipar as cargas elétricas em excesso.

Figura 1 – Circuito RC



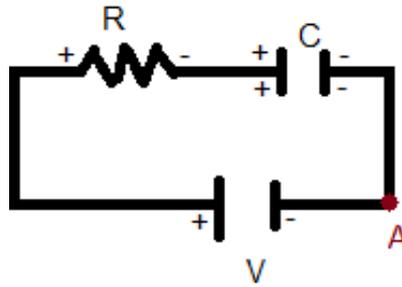
Fonte: das autoras

Na figura acima há uma representação esquemática de um circuito RC simples.

Nas extremidades do resistor, do capacitor e das placas de energia existe uma diferença de potencial (positiva ou negativa). Isso se deve à queda de tensão gerada por cada um desses dispositivos. Sabe-se, pela segunda lei de Kirchhoff (SERWAY; JEWETT JR.; 2004), que a soma das diferenças de potencial para qualquer circuito fechado é nula.

Assim, seja A um ponto ilustrado pela Figura 2:

Figura 2 – Circuito RC e ponto A



Fonte: das autoras

Sabe-se que, partindo do ponto A e atravessando todo o circuito até retornar ao ponto A, a soma de todas as diferenças de potencial será a mesma de A:

Partindo pela esquerda, o potencial V será positivo; indo a R , o potencial será negativo e então, em C , o potencial será novamente negativo. Assim sendo V essa diferença de potencial, teremos que

$$V_A + V - V_R - V_C = V_A \quad (1)$$

Simplificando V_A em ambos os lados obtemos a soma das diferenças de potencial:

$$V - V_R - V_C = 0 \quad (2)$$

Contudo, existem três relações que podem ser usadas nessa igualdade:

- A diferença de potencial no resistor é dada pela corrente (i) multiplicada pelo valor da resistência (R), ou seja,

$$V_R = iR \quad (3)$$

- A carga no capacitor é dada pelo valor da capacitância (C) multiplicado pela diferença de potencial (q) no capacitor. Matematicamente,

$$q = CV_C \Leftrightarrow V_C = \frac{q}{C} \quad (4)$$

onde a expressão encontrada representará, em (2), a diferença de potencial (q) no capacitor.

- O valor da corrente (i) é dado pelo valor da carga com relação ao tempo, ou seja,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (5)$$

“Nesse instante, a diferença de potencial está inteiramente no resistor” (SERWAY; JEWETT JR.; 2004).

Substituindo as relações em (2), obtemos:

$$V - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} = 0 \quad (6)$$

ou seja,

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{1}{C}q = V \quad (7)$$

Como V , C , Q e R são constantes, substituindo os valores dados no problema temos uma equação diferencial linear de primeira ordem que podemos resolver por dois métodos: o método das equações diferenciais separáveis ou o método do fator integrante (ZILL; CULLEN, 2001). Resolvendo a equação diferencial pelo método das equações separáveis, temos:

$$200 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{10^{-4}}q = 100 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} + 50q = 0,5 \Leftrightarrow \frac{dq}{dt} = -50(q - 0,01) \Leftrightarrow \frac{dq}{(q - 0,01)} = -50dt$$

Agora, integrando ambos os lados da igualdade e resolvendo, temos:

$$\int \frac{dq}{(q - 0,01)} = \int -50dt \Leftrightarrow \ln(q - 0,01) = -50t + k$$

onde k é uma constante.

Bastam algumas manipulações algébricas para encontrar a função $q(t)$. Pela definição de logaritmo, segue que:

$$e^{\ln|q-0,01|} = e^{-50t+k} \Leftrightarrow q - 0,01 = k_1 e^{-50t}, \text{ onde } k_1 = e^k.$$

Portanto,

$$q(t) = k_1 e^{-50t} + 0,01 \quad (8)$$

Com a condição inicial dada no problema, ou seja, $q(0)=0$, é possível encontrar a constante k_1 . Assim,

$$q(0) = 0 \Leftrightarrow k_1 e^0 + 0,01 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -0,01$$

Portanto,

$$q(t) = -0,01e^{-50t} + 0,01 \quad (9)$$

Sabendo que $i(t)$ é a taxa de variação da função do capacitor com relação ao tempo, segue que:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (10)$$

Derivando em relação a t e substituindo o valor de k_1 ,

$$i(t) = 0,5e^{-50t} \quad (11)$$

Portanto, temos que $q(t) = -0,01e^{-50t} + 0,01$ e $i(t) = 0,5e^{-50t}$.

A seguir consta a resolução da mesma equação pelo método do fator integrante.

Seja a equação:

$$\frac{dq}{dt} + 50q = 0,5 \quad (12)$$

logo, por definição,

$$\mu(t) = e^{\int 50dt} = e^{50t}$$

A equação diferencial então fica

$$e^{50t} \frac{dq}{dt} + 50e^{50t} q = 0,5e^{50t}$$

Resolvendo,

$$(e^{50t} q)' = \int 0,5e^{50t} dt$$

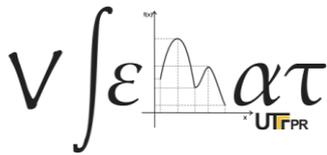
$$e^{50t} q = 0,01e^{50t} + c$$

$$q(t) = 0,01 + ce^{-50t} \quad (13)$$

Observe que os demais passos da resolução não envolvem o método do fator integrante, logo serão aqui omitidos por não haver necessidade de repetição.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se que o problema não é de difícil compreensão, porém o conhecimento de leis e conceitos físicos é fundamental para a resolução do mesmo. Na exposição da resolução do problema em sala de aula, como Atividade Prática Supervisionada, foi perceptível a dificuldade dos demais acadêmicos, inclusive do grupo que apresentou, na explicação do problema. Um de nossos colegas trabalha há anos em um cargo que exige certos conhecimentos na área e, apesar de termos certa dificuldade em expor o conteúdo e

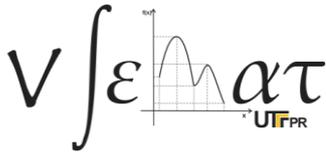


V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

concomitantemente de nos fazermos entender pelos demais, tal colega nos auxiliou, proporcionando uma melhor explanação do assunto.

Nota-se, então, que a maior dificuldade com o problema proposto não se refere à resolução da Equação Diferencial, mas à compreensão dos conhecimentos de Física envolvidos.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

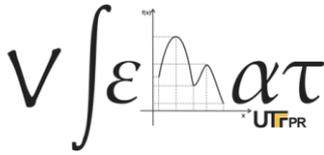
Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

SERWAY, Raymond A.; JEWETT JR., John W. **Princípios de Física: Eletromagnetismo**. v. 3. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. Traduzido por Leonardo Freire de Mello, Tânia M. V. Freire de Mello.



APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM: DATAÇÃO POR DECAIMENTO RADIOATIVO

Jackson Luis Wille
jackson_math@hotmail.com

Anderson Ervino Schwertner
andersonschwertner@hotmail.com

Renato Francisco Merli
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Neste artigo procuramos explicitar e caracterizar matematicamente diversos modelos para datação de matéria orgânica e inorgânica por meio de equações diferenciais. Assim, inicialmente apresentamos um estudo histórico sobre a radioatividade, em seguida falamos brevemente sobre o que é datação, buscamos embasamento teórico adequado, de modo a conhecermos diferentes formas de datação e suas características, concentrando-nos nos processos de datação por emissão de radioatividade, principalmente no método de datação com Carbono-14 empregado em objetos de origem orgânica.

Após apresentação dessa revisão bibliográfica, utilizamos equações diferenciais para encontrar um modelo adequado para datação em materiais orgânicos por meio da quantidade de radioisótopos de Carbono-14 em função do tempo em anos. Trazemos então uma breve aplicação do modelo encontrado questionando qual seria a concentração atual de Carbono-14 presente no osso de *Ishango*, que provavelmente é o mais antigo objeto matemático conhecido.

Utilizando novamente de equações diferenciais de primeira ordem, criamos um modelo geral para o decaimento radioativo para isótopos cuja abundância e meia vida seja conhecida. Em seguida, aplicamos este modelo em isótopos de Potássio-40, Rubídio-87, Tório-232, Urânio-235 e por fim Urânio-238. Devido à grande meia-vida de tais radioisótopos, e sua abundância na crosta terrestre, os processos de datação por decaimento radioativo possibilitam a datação de diversos materiais inorgânicos, inclusive a idade do planeta Terra. Por último, apresentamos uma aplicação do modelo encontrado para o Urânio-235 e questionamos qual seria aproximadamente a quantidade radioisótopos deste elemento no momento da formação da Terra.

RADIOATIVIDADE

Em 1896 o físico francês Henri Becquerel, seguindo os trabalhos de seu pai, verificou que sais de urânio emitiam espectros de fluorescência, assim como radiação semelhante aos dos raios-x impressionando chapas fotográficas. Verificou ainda que outros metais com massas próximas a o do urânio também tinham a mesma propriedade. Denominou-se então este fenômeno de radioatividade (ALVES, 2010; MARTINS, 1990).

Segundo Martins (1990, s.p.), “a radioatividade é um fenômeno pelo qual os núcleos atômicos sofrem transformações e emitem radiações, podendo, nesse processo, formar novos elementos químicos”. Este processo de transformação chama-se de decaimento radioativo. Alves (2010) afirma que cada elemento radioativo decai a uma velocidade que lhe é característica e, para que se pudesse acompanhar a duração de um elemento radioativo, era necessário estabelecer alguma forma de comparação, como por exemplo, quanto tempo leva para que o elemento tenha sua atividade reduzida pela metade. Este tempo foi denominado como meia-vida, sendo definido como sendo o tempo necessário para que a atividade de um elemento radioativo seja reduzida à metade da atividade inicial, o que por sua vez, implica na redução da massa de material radioativo da amostra na mesma proporção. Assim o processo de decaimento radioativo se tornou uma das mais importantes ferramentas para a datação cronológica, se estabelecendo a datação por Carbono-14 como “a mais conhecida e utilizada técnica de datação absoluta em arqueologia” (ALVES, 2010, p. 35).

UM POUCO SOBRE DATAÇÕES

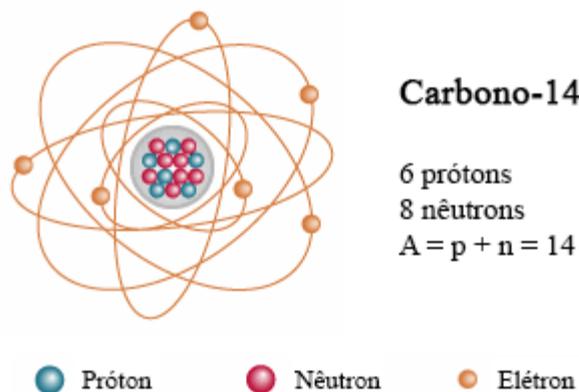
Segundo Alves (2010) as técnicas de datação podem ser classificadas em dois grupos: as relativas e as absolutas. O autor afirma ainda que as “técnicas relativas simplesmente comparam materiais ou objetos entre si, o que permite a mera classificação cronológica dentro de um conjunto estudado” (ALVES, 2010, p. 34). Isto significa que, dado um conjunto de objetos derivados de matéria orgânica, as técnicas de datação relativas auxiliam na determinação de quais destes são mais antigos em relação aos demais. Já os métodos absolutos permitem estimar a idade do material avaliado com relativa segurança, dentro de um intervalo fixo (PEZZO, 2002). No caso específico da datação por Carbono-14, para períodos compreendidos entre 100-40000 anos, a datação costuma ser eficiente (FRANCISCO, LIMA, ARÇARI, 2011; PEZZO, 2002).

Coelho (2001) afirma que o método de datação por Carbono-14 foi desenvolvido por um grupo de cientistas liderados pelo químico Willard F. Libby, em 1949. Segundo este mesmo autor, “o impacto desta descoberta e da utilização desta técnica foi algo imprevisto na arqueologia, permitindo a datação de depósitos independentemente dos artefatos e das sequências estratigráficas” (COELHO, 2001, p. 72).

Segundo Scheel-Ybert:

O carbono-14 é um isótopo radioativo do carbono produzido continuamente na alta atmosfera pela irradiação cósmica do ^{14}N . Com o tempo, os átomos de ^{14}C se desintegram por perda espontânea de radioatividade e se transformam num novo elemento (^{14}N , “K”, ^{40}Ar ou “Ca”). Ao longo do tempo geológico, um equilíbrio dinâmico foi estabelecido entre a velocidade de produção do ^{14}C e sua velocidade de desintegração no estoque global. Este equilíbrio foi rompido com a primeira explosão atômica na atmosfera, devido ao aumento artificial da produção deste elemento. Uma vez formados, os átomos de ^{14}C são incorporados ao CO_2 atmosférico e assimilados no ciclo do carbono dos organismos vivos, da mesma forma que os átomos dos dois isótopos estáveis, ^{12}C e ^{13}C . O conteúdo em ^{14}C nos tecidos orgânicos está em equilíbrio com o conteúdo atmosférico, devido às trocas que se efetuam durante toda a vida do organismo. Quando ele morre, essas trocas deixam de existir e o ^{14}C começa a se desintegrar continuamente, sem ser renovado (SCHHEL-YBERT, 1999, p. 297).

Figura 1 – Átomo de Carbono-14



Fonte: Mundo pré histórico¹

Segundo Alves (2010), Thomas (2013) e Francisco, Lima e Arçari (2011), a vida média, ou ainda meia-vida, do Carbono-14 é de cerca de 5730 anos, ou seja, em 5730 anos, a quantidade de Carbono-14 presente na matéria orgânica cai pela metade. Portanto, através da quantidade de Carbono-14 presente na matéria, podemos determinar a idade do

¹Disponível em: <<https://mundopre-historico.blogspot.com.br>>.

mesmo. Para isso, necessitamos resolver equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem.

MODELO DE DECAIMENTO DO CARBONO-14

A Lei do Decaimento Radioativo afirma que a velocidade de decaimento de um elemento radioativo, como por exemplo, o Carbono-14, é proporcional a quantidade do elemento presente naquele instante (ALVES, 2010).

Portanto, se tomarmos a função $Q = Q(t)$ como sendo a função que determina a quantidade de radioisótopos presentes no material no instante t (em anos), a velocidade de decaimento será dada por $\frac{dQ}{dt}$ e assim, existirá $k \in R^+$, que chamaremos de constante de desintegração, tal que $\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q$.

Notemos que esta equação diferencial ordinária de primeira ordem é válida para modelar o decaimento de qualquer material radioativo. Desta forma, para encontrarmos um modelo geral para o decaimento destes materiais, basta-nos resolver esta equação diferencial e por fim, restringir as soluções para os casos específicos em estudos, através de Problemas de Valor Inicial (PVI).

Através do Método de Variáveis Separáveis, temos que:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q$$

$$\frac{dQ}{Q} = -k \cdot dt$$

Integrando ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int -k \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{Q} dQ = -k \int dt$$

$$\ln|Q| + c_1 = -kt + c_2, \text{ onde } c_1, c_2 \in R$$

$$\ln|Q| = -kt + C, \text{ onde } C = c_1 + c_2$$

Simplificando a equação através da potenciação, obtemos:

$$e^{\ln|Q|} = e^{-kt+C}$$

$$|Q| = e^{-kt+C}$$

$$|Q| = e^{-kt} e^C$$

$$Q = \pm e^C e^{-kt}$$

Como $\pm e^C \in R$, constantes, podemos escrever a equação como:

$$Q = Ae^{-kt}, A \in R$$

Uma vez que já possuímos a forma geral das soluções, restringimo-nos ao caso do decaimento do Carbono-14.

Segundo Alves (2010), a concentração de Carbono-14 em seres vivos é a mesma encontrada na natureza, cerca de 1 ppt (parte por trilhão), isto é,

$$Q(0) = \frac{1}{1000000000000} = 10^{-12}.$$

Destaca também que a meia-vida do Carbono-14 é de cerca de 5730 anos, desta forma, $Q(5730) = \frac{Q(0)}{2}$.

Obtemos então, o seguinte PVI:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q$$

$$Q(0) = 10^{-12}$$

$$Q(5730) = \frac{Q(0)}{2} = \frac{10^{-12}}{2}$$

Como a solução geral da equação diferencial ordinária linear de 1ª ordem $\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q$ é dada por $Q = Ae^{-kt}$, $A \in R$, resta-nos, como base nos valores de $Q(0)$ e $Q(5730)$, determinar os valores de A e k .

$$Q(0) = 10^{-12}$$

$$Ae^{-k \cdot 0} = 10^{-12}$$

$$Ae^0 = 10^{-12}$$

$$A = 10^{-12}$$

Logo $A = 10^{-12}$. Assim, para $Q(5730) = \frac{10^{-12}}{2}$, temos que:

$$Q(5730) = \frac{10^{-12}}{2}$$

$$10^{-12}e^{-k \cdot 5730} = \frac{10^{-12}}{2}$$

$$e^{-k \cdot 5730} = \frac{1}{2}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, obtemos:

$$\ln e^{-k \cdot 5730} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-k \cdot 5730 = \ln 1 - \ln 2$$

$$-k = \frac{0 - \ln 2}{5730}$$

$$k = \frac{\ln 2}{5730}$$

Substituindo os valores encontrados, obtemos:

$$Q = 10^{-12} e^{-\left(\frac{\ln 2}{5730}\right)t}$$

$$Q = 10^{-12} (e^{\ln 2})^{\frac{-t}{5730}}$$

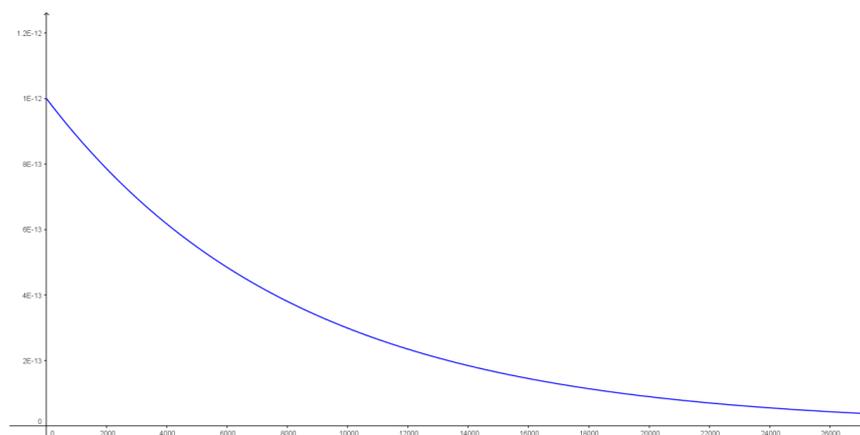
$$Q = 10^{-12} 2^{\frac{-t}{5730}}$$

Uma vez que não faz sentido considerarmos tempos negativos e que, mesmo adotando o ano como unidade de medida padrão, o tempo é uma grandeza contínua, temos que a função que modela a quantidade de Carbono-14 em função do tempo decorrido após a morte do ser vivo é dada por:

$$Q(t) = 10^{-12} 2^{\frac{-t}{5730}}, t > 0$$

Cujo gráfico é reproduzido abaixo:

Figura 2 – Gráfico da função $Q(t)$



Fonte: Dos autores, 2016

O OSSO DE *ISHANGO*: UMA APLICAÇÃO

Talvez o Osso de *Ishango* seja o objeto matemático mais antigo de que se tenha conhecimento, assim como França (2015) afirma em sua dissertação. O artefato trata-se de um osso de babuíno datado de cerca de 19000 a.C., encontrado na República Democrática do Congo pelo geólogo e explorador belga Jean de Heinzelin de Braucourt, em 1960 (PICKOVER, 2011).

O osso contém 29 marcas, todas bem distintas e, acredita-se que tenha sido utilizado como calendário. Contudo, conforme França (2015) não há “explicações para as sequências de marcas do osso de *Ishango*, especialistas tem se dedicado ao estudo dos números de marcas encontradas em cada grupo e estão até hoje intrigados com algumas regularidades numéricas encontradas neste osso”.

Atentemos-nos ao seguinte problema: Qual é a quantidade aproximada de Carbono-14 presente atualmente no Osso de *Ishango*? Com base na revisão bibliográfica, sabe-se que o objeto é datado como sendo de cerca de 19000 a.C., isto é, desde a morte do babuíno até os dias de hoje passaram-se cerca de 21000 anos. Substituindo este valor no modelo encontrado anteriormente, obtemos:

$$Q(t) = 10^{-12} 2^{\frac{-t}{5730}}$$

$$Q(21000) = 10^{-12} 2^{\frac{-21000}{5730}}$$

$$Q(21000) \approx 0,07884037966 \text{ ppt (partes por trilhão)}$$

Isto é, atualmente a concentração de radioisótopos de Carbono-14 no Osso de *Ishango* é de aproximadamente 0,07884 ppt.

MODELO GERAL PARA MÉTODOS DE DATAÇÃO POR DECAIMENTO RADIOATIVO

Pretendemos agora, encontrar uma forma geral para a aplicação em diversos radioisótopos úteis para datação. Para tal efeito, suponhamos que a meia-vida do radioisótopo em questão seja dada por m_v (em anos) e que sua abundância na crosta terrestre seja a (determinada em ppm). Deste modo, teremos o seguinte PVI:

$$\frac{dQ}{dt} = -k \cdot Q, \quad k \in R^+$$

$$Q(0) = a$$

$$Q(m_v) = \frac{a}{2}$$

Como a solução geral da equação diferencial ordinária considerada é dada por $Q(t) = Ae^{-kt}$, $A \in \mathbb{R}$. Assim, nosso problema resume-se a calcular os valores de k e A , considerando o PVI apresentado. Dessa forma, temos que:

$$Q(t) = Ae^{-kt}$$

$$Q(0) = Ae^{-k \cdot 0}$$

$$a = Ae^0$$

$$a = A$$

De modo análogo, obtemos:

$$Q(t) = Ae^{-kt}$$

$$Q(m_v) = ae^{-km_v}$$

$$\frac{a}{2} = ae^{-km_v}$$

$$e^{-km_v} = \frac{1}{2}$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade:

$$\ln e^{-km_v} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-km_v = \ln 1 - \ln 2$$

$$km_v = \ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{m_v}$$

Substituindo as expressões encontradas na solução geral, obtemos:

$$Q(t) = Ae^{-kt}$$

$$Q(t) = ae^{-\frac{\ln 2}{m_v}t}$$

$$Q(t) = a(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{m_v}}$$

$$Q(t) = a \cdot 2^{-\frac{t}{m_v}}$$

Portanto, dadas a meia-vida m_v (anos) e a abundância a do radioisótopo na crosta terrestre (ppm), a Lei de Decaimento Radioativo afirma que a quantidade $Q(t)$ do radioisótopo presente na matéria no instante t (anos) é dado por:

$$Q(t) = a \cdot 2^{-\frac{t}{m_v}}, \quad t > 0.$$

DATAÇÃO POR DECAIMENTO RADIOATIVO DE MATERIAL INORGÂNICO

Dentre os diversos radioisótopos existentes, os mais promissores para aplicações em processos de datação, são: Carbono-14, Potássio-40, Rubídio-87, Tório-232, Urânio-235 e Urânio-238 (ALVES, 2010). Excetuando-se o Carbono-14, todos os demais radioisótopos possuem a capacidade de datar material inorgânico, como rochas e sedimentos minerais, estimar a idade da Terra e do Universo. Isto se dá pela grande meia-vida e abundância destes radioisótopos (ALVES, 2010). Um exemplo é o caso do Urânio, que apesar de ser encontrado em concentrações que variam entre 0,91 e 2 ppm na crosta terrestre, sua abundância é cerca de 500 vezes a do ouro (LIMA, 2008).

Na tabela abaixo, resumimos algumas informações sobre os radioisótopos listados:

Tabela 1 – Relação de radioisótopos úteis para técnicas de datação

Radioisótopos	Meia-vida (anos)	Abundância (ppm)
Potássio-40 (K-40)	1,3*10 ⁹	2,6
Rubídio-87 (Rb-87)	4,9*10 ¹⁰	25,2
Tório-232 (Th-232)	1,4*10 ¹⁰	8
Urânio-235 (U-235)	7,04*10 ⁸	0,01988
Urânio-238 (U-238)	4,5*10 ⁹	2,77998

Fonte: Peixoto (2004); Godoy et al (2011); Maçanita (2007); Lima (2008).

Deste modo, aplicando a fórmula geral de decaimento radioativo encontrado, obtemos os seguintes modelos de decaimento:

Tabela 2 – Relação de radioisótopos e seus respectivos modelos de decaimento radioativo.

Radioisótopos	Modelo de Decaimento Radioativo ($t > 0$)
Potássio-40 (K-40)	$Q_{K40}(t) = 2,6 \cdot 10^{-6} \cdot 2^{\frac{-t}{1,3 \cdot 10^9}}$
Rubídio-87 (Rb-87)	$Q_{Rb87}(t) = 2,52 \cdot 10^{-7} \cdot 2^{\frac{-t}{4,9 \cdot 10^{10}}}$
Tório-232 (Th-232)	$Q_{Th232}(t) = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 2^{\frac{-t}{1,4 \cdot 10^{10}}}$

Urânio-235 (U-235)	$Q_{U235}(t) = 1,988 \cdot 10^{-8} \cdot 2^{\frac{-t}{7,04 \cdot 10^8}}$
Urânio-238 (U-238)	$Q_{U238}(t) = 2,77998 \cdot 10^{-6} \cdot 2^{\frac{-t}{4,5 \cdot 10^9}}$

Fonte: Dos autores, 2016

O URÂNIO-235 E A IDADE DO PLANETA TERRA: UMA APLICAÇÃO

A idade do planeta Terra é estimada em cerca de 4,55 bilhões de anos (Silva, 2009). Desde então diversos isótopos de materiais radioativos sofreram decaimento e tiveram suas quantidades originais (considerando a quantidade de material radioativo presente logo no nascimento do planeta) reduzidas, dentre eles, o radioisótopo do Urânio-235. Sabendo que a abundância atual deste isótopo é de 0,01988 ppm, calculemos uma aproximação (ideal) para a quantidade deste isótopo no momento da formação do planeta Terra.

Em termos matemáticos, sabemos que a meia-vida do Urânio-235 m_v é de $7,04 \cdot 10^8$ anos e que, se Q_U é a função que relaciona o decaimento do Urânio-235 em função do tempo desde o surgimento do planeta, temos que $Q_U(4,55 \cdot 10^9) = 1,988 \cdot 10^{-8}$. Desta forma, se $a \in R^+$ é abundância (ideal) deste radioisótopo no nascimento do planeta, temos que:

$$Q_U(t) = a \cdot 2^{\frac{-t}{7,04 \cdot 10^8}}$$

$$Q_{U235}(4,55 \cdot 10^9) = a \cdot 2^{\frac{-4,55 \cdot 10^9}{7,04 \cdot 10^8}}$$

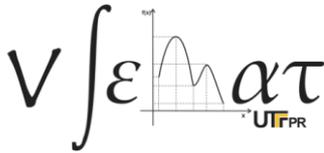
$$1,988 \cdot 10^{-8} = a \cdot 2^{\frac{-4,55 \cdot 10^9}{7,04 \cdot 10^8}}$$

$$a = \frac{1,988 \cdot 10^{-8}}{2^{\frac{-4,55 \cdot 10^9}{7,04 \cdot 10^8}}}$$

$$a \approx 1,996925935217 \cdot 10^{-8} \approx 0,01996926 \text{ ppm}$$

CONCLUSÃO

A datação por decaimento radioativo do Carbono-14 é, sem dúvidas, o método de datação mais utilizado em materiais de origem orgânica (ALVES, 2010). Contudo, conforme salientado anteriormente, este processo é ineficaz para datação de objetos com menos de 100 anos, devido ao decaimento ser muito pequeno, assim como em objetos com mais de



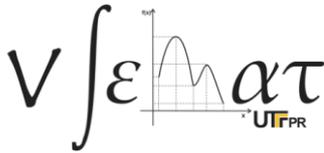
40000 anos (aproximadamente 7 meia-vidas), pelo fato da presença do radioisótopo Carbono-14 ser praticamente nula (FRANCISCO, LIMA, ARÇARI, 2011; PEZZO, 2002).

No intuito de estabelecer processos de datação mais precisos, aplicáveis a um período de tempo maior, e que pudessem ser aplicados a matéria de origem inorgânica, surgem processos de datação que empregam radioisótopos mais abundantes e com longa meia-vida, como por exemplo, o Urânio-238, cuja abundância é de 2,77998 ppm e sua meia-vida é de $4,5 \times 10^9$ (LIMA, 2008). O desenvolvimento de tais processos possibilitou, por exemplo, a datação de rochas, meteoritos e da própria Terra.

Cientes da necessidade de compreender estes novos processos, nos propusemos a criar modelos por meio de resoluções de equações diferenciais que pudessem exprimir, mesmo que de maneira aproximada, o comportamento dos mesmos. Desta forma, além de criar os modelos pretendidos apresentamos também alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais ordinárias em situações que envolvem o decaimento radioativo completando o estudo.

REFERÊNCIAS

- ALVES, W. B. Datação por decaimento radioativo. **Revista eletrônica UNIVAG**. Mato Grosso, n. 5, 2010. Disponível em: <<http://www.periodicos.univag.com.br/index.php/CONNECTIONLINE/article/viewFile/122/373>>. Acesso em: 25 jun. 2016.
- COELHO, J. M. Datação em Arqueologia: Datação por radiocarbono ou carbono-14. In: CRUZ, A. (org.). **Ângulo repositório didático: Ensaio em Arqueologia**. Santarém: Ângulo, 2001. Disponível em: <<http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/>>. Acesso em: 25 jun. 2016.
- FRANÇA, M. A. **Kalah**: um jogo africano de raciocínio matemático. Dissertação (Mestrado Profissional). Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/1425/1/marcoaureliodefranca.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2016.
- FRANCISCO, J. A. S.; LIMA, A. A.; ARÇARI, D. P. Datação por carbono-14. **Revista Gestão em Foco**, São Paulo, v. 1, mar. 2011. Disponível em: <http://www.unifia.edu.br/revista_eletronica/revistas/gestao_foco/artigos/ano2011/gestao_foco_Carbono14.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2016.
- GODOY, Luiz C. et al. Distribuição de K, eU e eTh e avaliação da dose anual de radiação na região do Granito Serra do Carambeí - PR. **Rev. Bras. Geof.**, São Paulo, v. 29, n. 2, p. 359-375, jun. 2011. Disponível em: <<http://www.scielo.br/scielo.php>>. Acesso em: 26 jun. 2016.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

LIMA, Cintia M. **Estudo da solubilidade de compostos de urânio do ciclo do combustível em LPS**. Tese de Doutorado [Programa de Pós-graduação em Física]. PUC-RJ: Rio de Janeiro, 2008.

MAÇANITA, A. Rubídio – Propriedades. In: **E-escola**. Instituto Superior Técnico, Portugal, 2007. Disponível em: <<http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/topico.asp>>. Acesso em: 26 jun. 2016.

MARTINS, R. A. Como Becquerel não descobriu a radioatividade. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 7, p. 27-45, 1990. Disponível em: <<http://files.comuni dades.net>>. Acesso em: 25 jun. 2016.

PEIXOTO, E. M. A. Potássio. **Revista Química Nova na Escola**, São Paulo, v. 19, mai., 2004. Disponível em: <<http://qnesc.s bq.org.br>>. Acesso em: 26 jun. 2016.

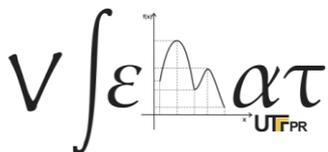
PEZZO, M. Datação por carbono-14. **Revista Univerciência**, São Paulo, v. 1, dez., 2002, p. 4-7. Disponível em: <<http://www.ufscar.br>>. Acesso em: 25 jun. 2016.

PICKOVER, Clifford A. **O Livro da Matemática**. Librero: Holanda, 2011.

SCHEEL-YBERT, R. Considerações sobre o método de datação pelo carbono 14 e alguns comentários sobre datação em sambaquis. **Revista do Museu de Arqueologia e Etnologia**, São Paulo, v. 9, 1999, p. 292-301.

SILVA, R. W. C.; PAULA, B. L. Causa do aquecimento global: antropogênica versus natural. **Terrae didat.**, Campinas, v. 5, n. 1, out., 2009. Disponível em: <<http://ppegeo.igc.usp.br>>. Acesso em: 27 jun. 2016.

THOMAS, L. R. **O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros**. Trabalho de Conclusão de Curso [Licenciatura em Ciências Naturais]. UNB: Brasília, 2013.



O QUE DE MATEMÁTICA PODE TER EM UMA ABÓBORA? UM RELATO SOBRE O PROJETO INTEGRADOR DO PRIMEIRO SEMESTRE DE 2016

Daiane Maria Seibert (CAPES – PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
daiane-seibert1@hotmail.com

Taís Francini da Silva (CAPES – PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
taisfrancini@live.com

Caroline Indiamara Muller
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
caroll.zatti@hotmail.com

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
suellenpardo@utfpr.edu.br

Rodolfo Eduardo Vertuan (CAPES – PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
rodolfovertuan@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O Projeto Integrador (PI) tem, como o próprio nome sugere, a intenção de integrar todas as disciplinas do terceiro período do Curso de Licenciatura em Matemática. As disciplinas são: Didática Geral, Fundamentos da Matemática 2, Geometria 2, Cálculo Integral e Laboratório de Ensino Matemática. Nos Projetos Integradores mais recentes há também Libras 2, mas devido à falta de docente de Libras no primeiro semestre de 2016, momento em que se dá a experiência que relataremos no texto, essa disciplina não constituiu o rol de disciplinas do projeto (PI-2016-1).

Foi definido que o tema do PI seria “frutas e legumes”. A partir daí tínhamos a missão de comprar o alimento que nos foi destinado e realizar medições, para que pudéssemos cortá-lo e lidar com ele. Ficamos responsáveis por investigar uma abóbora (Figura 1).

Figura 1 – A Abóbora original**Fonte:** Próprios Autores

A tarefa seguinte consistia em calcularmos o volume da parte comestível da abóbora utilizando o que fosse preciso e construir uma réplica do nosso alimento. Em seguida, tínhamos que fazer o cálculo do volume por meio de integrais, usando polinômios e/ou trigonometria, comparando o resultado com o cálculo realizado anteriormente, o qual não precisava ter sido feito necessariamente usando esses métodos. Finalmente, tínhamos como atividade construir um plano de ensino onde pudessem ser trabalhados aspectos da experiência realizada no projeto integrador, atendendo as especificidades do nível escolar e sem perder o foco da abordagem empreendida. Para cada grupo de atividades foram estipuladas datas durante o semestre todo, nas quais deveríamos fazer as entregas.

Neste artigo, pretendemos apresentar os encaminhamentos que consideramos na investigação da situação, o que significa, de certo modo, em apresentar o quê de Matemática pode ter em uma abóbora!

MISSÃO DE CALCULAR O VOLUME DA PARTE COMESTÍVEL VIA EXPERIMENTAÇÃO

Antes de fazer o experimento, colocamos a abóbora em uma bacia com gesso para obtermos o molde dela (este processo será descrito no próximo tópico). Após isso, a descascamos e tiramos as sementes, obtendo a parte comestível dela. Usamos um processador para triturar toda a polpa. Como a abóbora estava crua, inferimos que não houve perda significativa.

Depois de trituração colocamos a massa da abóbora em um recipiente cilíndrico e calculamos o volume da abóbora dentro do cilindro. Abaixo, seguem os dados obtidos:

Raio do cilindro: 12 cm

Altura: 9 cm

$$V = 144 \pi \cdot 9$$

$$V = 4071,504079 \text{ cm}^3$$

Sendo este o volume obtido através do experimento feito (Figura 2).

Figura 2 – Processo utilizado para o cálculo, via experimentação, do volume da parte comestível



Fonte: Próprios Autores

MISSÃO DE CONSTRUIR A RÉPLICA DA ABÓBORA

Antes de fazer o experimento, colocamos a abóbora em uma bacia e a cobrimos com gesso para obtermos o molde dela. Após, retiramos todo o bloco de gesso com a abóbora no meio da bacia, então serramos com serrote o bloco de gesso até chegarmos à abóbora, para retirá-la e para que tivéssemos o molde.

Assim que a retiramos, tínhamos o molde de duas partes pronto. Esse molde foi pintado com esmalte sintético para que quando colocássemos o material para a construção da abóbora, esse fosse facilmente retirado da forma de gesso.

Como decidimos fazer a réplica também de gesso, no momento de aplicação do gesso em cada parte usadas técnicas diferentes. Assim que o gesso foi aplicado e fomos efetuar a retirada da réplica houve alguns problemas técnicos, o que danificou um pouco nossa réplica, mas nada que não pudesse ser concertado com esforço e paciência.

Com as duas partes prontas, procedemos à colagem das duas com gesso e restauramos o que ainda estava feio devido aos imprevistos. Deixamos secar por alguns dias e pintamos com tinta guache. Mesmo a colocando em cima de um fogão a lenha, ela não secou totalmente.

Figura 3 – Fazendo a réplica – parte 1



Fonte: Próprios Autores

Figura 4 – Fazendo a réplica – parte 2



Fonte: Próprios Autores

Figura 5 – Fazendo a réplica – parte 3



Fonte: Próprios Autores

CALCULANDO O VOLUME POR INTEGRAIS

Consideramos a hipótese de que a abóbora e sua forma geométrica mais próxima e conhecida para calcular volume é uma elipse, assim desconsiderando a fenda dos gomos que a mesma possui, utilizamos a fim de os resultados se aproximarem.

Por isso, utilizamos a fórmula do volume da elipse para calcular o volume da nossa abóbora. A fórmula do volume da elipse é:

$$V(s) = 2\pi \int_t^{t''} x(t)y(t)y'(t) dt$$

Onde $t'' = \pi$ e $t = 0$, por considerar que a abóbora se encontra nos dois primeiros quadrantes.

Consideramos também que existem duas funções para a parte total e duas funções para a parte oca da abóbora. Essas expressões foram obtidas com ajuda dos professores

fazendo um desenho aproximado da abóbora que utilizamos, e calculando os pontos “x” e “y” de tamanhos aproximados da equação da elipse devido ao seu formato peculiar.

$x = 9\cos(t)$ $y = 12\sin(t)$ para a parte total e para a parte oca $x = 9\cos(t)$ $y = 4\sin(t)$

Melhorando a visão (parte total): $\frac{x}{9} = \cos(t)$, $\frac{y}{12} = \sin(t)$

Utilizando a relação trigonométrica: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Temos: $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{12}\right)^2 = 1$

Sendo assim uma forma acessível de visualização da equação da elipse, sendo o mesmo caso para a parte oca.

Melhorando a visão (parte oca): $\frac{x}{9} = \cos(t)$, $\frac{y}{4} = \sin(t)$

Utilizando a relação trigonométrica: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

Temos: $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

Seguem os cálculos, para o sólido de revolução:

Volume Total

$$V(s) = 2\pi \int_t^{t''} x(t)y(t)y'(t) dt$$

$$V(total) = 2\pi \int_0^\pi 9\cos(t) \cdot 12\sin(t) \cdot 12\sin(t) dt$$

$$V(total) = 2\pi \int_0^\pi 1296\cos^2(t) \cdot \sin(t) dt$$

$$V(total) = 2\pi \cdot 1296 \int_0^\pi \cos^2(t) \cdot \sin(t) dt$$

$$\int \cos^2(t) \cdot \sin(t) dt = - \int u^2 du = \frac{-u^3}{3}$$

$$u = \cos(t)$$

$$du = -\sin(t) dt$$

$$-du = \sin(t) dt$$

$$\frac{-\cos^3(t)}{3} = \frac{-\cos^3\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V(total) = 2\pi \cdot 1296 \cdot \frac{2}{3} = 1728\pi \text{ cm}^3$$

Volume da parte oca

$$V(s) = 2\pi \int_t^{t''} x(t)y(t)y'(t) dt$$

$$V(oco) = \int_0^\pi 9\cos(t) \cdot 4\sin(t) \cdot 4\sin(t) dt$$

$$V(\text{oco}) = 2\pi \int_0^{\pi} 144 \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) dt$$

$$V(\text{oco}) = 2\pi \cdot 144 \int_0^{\pi} \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) dt$$

$$\int \cos^2(t) \cdot \text{sen}(t) dt = - \int u^2 du = \frac{-u^3}{3}$$

$$u = \cos(t)$$

$$du = -\text{sen}(t) dt$$

$$-du = \text{sen}(t) dt$$

$$\frac{-\cos^3(t)}{3} = \frac{-\cos^3\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V(\text{oco}) = 2\pi \cdot 144 \cdot \frac{2}{3} = 192\pi \text{ cm}^3$$

Volume total – Volume da parte oca = Volume da parte comestível da abóbora.

$$1728\pi \text{ cm}^3 - 192\pi \text{ cm}^3 \cong 4823 \text{ cm}^3$$

COMPARAÇÃO ENTRE OS VOLUMES

Se compararmos o volume da abóbora obtido no experimento prático ($V = 4071,504079 \text{ cm}^3$) e o volume da abóbora obtido através de cálculos matemáticos ($V = 4823 \text{ cm}^3$), notaremos que houve uma diferença de 752 cm^3 . É possível explicar que essa diferença ocorreu porque, pelas medidas utilizadas no cálculo via matemática, não consideramos os vãos entre os gomos da abóbora, totalizando assim um volume um pouco superior do anterior (prático).

UMA AULA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Na atividade de elaborar um plano de aula que pudesse ser aplicado em turmas do Ensino Fundamental e que considerasse aspectos do experimento realizado, da investigação empreendida, optamos por considerar o tema “Volume de Sólidos”, tendo como objetivo possibilitar a compreensão da definição de volume e aplicar o cálculo de volume em contextos propostos.

Começando com a história de Arquimedes sobre descobrir o volume da coroa do rei e a forma de como ele é calculado tendo o intuito dos alunos compreenderem a possibilidade de calcular o volume de qualquer objeto e de várias formas, com



questionamentos verificamos o nível de compreensão e assim sabermos o momento certo para complementar o raciocínio com outras formas de calcular o volume de algo, como encher de água se possível, moldar em formas conhecidas entre outras formas. E assim pedir o que eles acham de calcular o volume de uma abóbora, sendo ela toda cheia de gomos, uniforme e ainda com o miolo oco.

Em grupo tem a missão de calcular o volume de um de seus gomos, utilizando o que for necessário, para um experimento prático que será realizado em casa e na próxima aula será discutido as diferentes formas que surgiram de calcular e mostrar com falas e fotos aos demais colegas como foi pensado o cálculo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

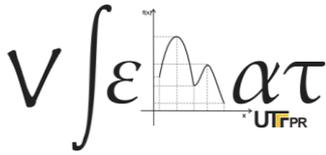
Projeto de integração de disciplinas, onde abre as portas para novos olhares em diversos pontos, tanto quanto em aplicações no dia a dia ou trabalhos complexos, até como trabalhar mesmos temas em diversas perspectivas em diferentes níveis.

Quando desafios são propostos, instigam os alunos a pensarem diferente, saírem de sua zona de conforto, para que haja nova e diferentes aprendizagens mesmo que seja com coisas que os mesmos já conhecem. E é isso que acontece neste projeto, além de quando se integra as disciplinas num só trabalho, se vê como há harmonia na matemática.

Nos faz enxergar que podemos trabalhar diversas coisas em uma graduação, para enriquecimento de conhecimentos, mesmo quando a mesma visa objetivos diferenciados ou focados em apenas um determinado.

REFERÊNCIAS

FLEMMING, DIVA MARÍLIA. **Cálculo A**: funções, limites, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall. 2006.



CONTRIBUIÇÕES DO PROJETO INTEGRADOR PARA A FORMAÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA: MODELANDO UM CHUCHU

Daniela Carolina Ludvig (CAPES - PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo PR
danielaludvig@alunos.utfpr.edu.br

Danieli Felichak (CAPES - PIBID)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo PR
danielifelichak@alunos.utfpr.edu.br

Barbara Winiarski Diesel Novaes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo PR
barbaradiesel@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um relato de experiência do Projeto Integrador do 1/2016¹ que envolveu as disciplinas do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática, Didática Geral, Geometria 2, Fundamentos da Matemática 2, Laboratório de Matemática e Cálculo Integral.

O Projeto foi proposto pelos professores com o objetivo que integrar os conteúdos trabalhados nas disciplinas citadas, além de buscar aproximações entre a matemática científica e matemática escolar. A forma lógico-dedutiva que se organiza a matemática científica nos cursos de licenciatura possui suas limitações para a prática docente. Segundo David e Moreira (2005, p.59):

O estudo que apresentamos procurou mostrar que a abordagem lógico-dedutiva – nos termos em que se organiza a matemática científica – não somente é insuficiente para a sistematização da matemática escolar como é também muitas vezes inadequada. Essa inadequação provém de várias características apontadas no estudo, mas uma das principais está associada ao fato de que a abordagem lógico-dedutiva é profundamente “econômica” na busca da “essência abstrata” dos conceitos e de características gerais das estruturas matemáticas particulares. Isso muitas vezes resulta numa identificação de certas interpretações e construtos associados aos

¹ Participaram do projeto deste semestre os professores: Rodolfo Eduardo Vertuan, Larissa Hagedorn Vieira, Márcia Piovesan, Barbara Winiarski Diesel Novaes, Suellen R. P. Garcia

conceitos ou às estruturas que, do ponto de vista da matemática escolar, é fundamentalmente inconveniente identificar.

Sem desmerecer a importância de se trabalhar a matemática científica na Licenciatura, um grupo de professores do terceiro período, assim como David e Moreira (2005) achou insuficiente somente este tipo de abordagem para a formação dos professores que atuarão na educação básica.

O que defendemos é que nas disciplinas do ensino superior sejam trabalhadas de forma integrada e significativa.

[...] que haja uma discussão mais conceitual e menos política corporativista envolvendo educadores matemáticos e matemáticos, discutindo em conjunto as disciplinas da Licenciatura e construindo outras possibilidades. (SANTOS; LINS, 2016, p. 370)

O projeto integrador é um modo de adquirir conhecimentos matemáticos que vai além de uma simples verificação do professor do quanto o estudante fixou ou não das aulas das disciplinas estudadas, caracterizou-se como uma atividade de modelagem matemática.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012)

Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (p. 12).

Desta forma os professores procuraram objetos que pudessem envolver todas as disciplinas do terceiro semestre e optaram por frutas e legumes as quais foram: abacate, abóbora, moranga, chuchu, mamão, lichia, pêsego e pimentão vermelho (ou amarelo). O problema proposto foi uma investigação de “Qual o volume da parte comumente comestível desse alimento?”.

DESCRIÇÃO DAS ETAPAS DO PROJETO INTEGRADOR

Para a elaboração do Projeto os acadêmicos foram divididos em grupos de três ou quatro, em seguida foi sorteado um alimento para cada grupo, o alimento sorteado para o presente grupo foi chuchu. Foi apresentado um roteiro para a execução do trabalho, onde cada um teria que entregar por escrito e apresentar o resultado na forma de um seminário.

Tendo um aluno escolhido pelos professores por sorteio, e outro escolhido pelo próprio grupo.

Em um primeiro momento foi realizado o experimento prático, utilizando o Princípio de Arquimedes para a medição de densidade de sólidos irregulares. Tal princípio diz que um objeto total ou parcialmente mergulhado em qualquer líquido sofre uma força que é igual ao peso do volume do líquido deslocado pelo objeto, ou seja, podemos medir o volume de um objeto qualquer o mergulhando em água e medindo a variação do volume (Volume final – volume inicial). Realizamos este experimento com o chuchu e seu volume foi de 500 cm³. Por problemas abaixo relatado tivemos que fazer novas medições no qual obtivemos 300cm³ (figura 1).

Figura 1 – 2º Medição do volume do chuchu pelo princípio de Arquimedes



Fonte: do autor

Também foram realizadas as medições necessárias e tirado fotos do alimento para que não necessitasse do alimento físico no decorrer da investigação.

No segundo momento o grupo deveria construir um protótipo assemelhado ao máximo do alimento original. O grande vilão do trabalho “Como construir um chuchu?”, foram pensadas inúmeras formas como: biscuit, argila, arame, colagem de papel “Mas como retirar o chuchu de dentro de todos esses métodos?”. Após muito pensar uma das autoras teve a ideia de cortar o fundo de uma garrafa PET e inserir o chuchu e logo em seguida esquentar o plástico na boca do fogão, pois com o auxílio do fogo o plástico fica mais maleável e toma a forma do chuchu, com uma faca foram feitas aberturas nas laterais para sua retirada. Depois o molde foi revestido com jornal (figura 2), colado com cola e água, pois não seria possível pintar o plástico e assim pintado de verde com tinta guache. Infelizmente as cores do protótipo e do chuchu ficaram desiguais, pois não foi pensado na pintura.

Para ver se isso funcionava foram comprados outros chuchus e realizados testes. Depois de várias tentativas e erros, observou-se que com o auxílio da faca poderíamos realmente cortar a garrafa PET e assim retirar o chuchu sem haver danos no molde, e também que depois de realizado o processo com o calor o alimento perdia um pouco de sua densidade.

O chuchu murchou um pouco pelo tempo utilizado nos testes, pois o mesmo foi comprado no começo e utilizado no experimento prático, assim não foi possível trocar. Como na construção do protótipo foi necessário esquentar o chuchu, percebemos que o mesmo acabou murchando mais, logo foi necessário outra medição de volume pelo princípio de Arquimedes e assim constatamos que o alimento obteve uma diferença de 200 ml no seu volume.

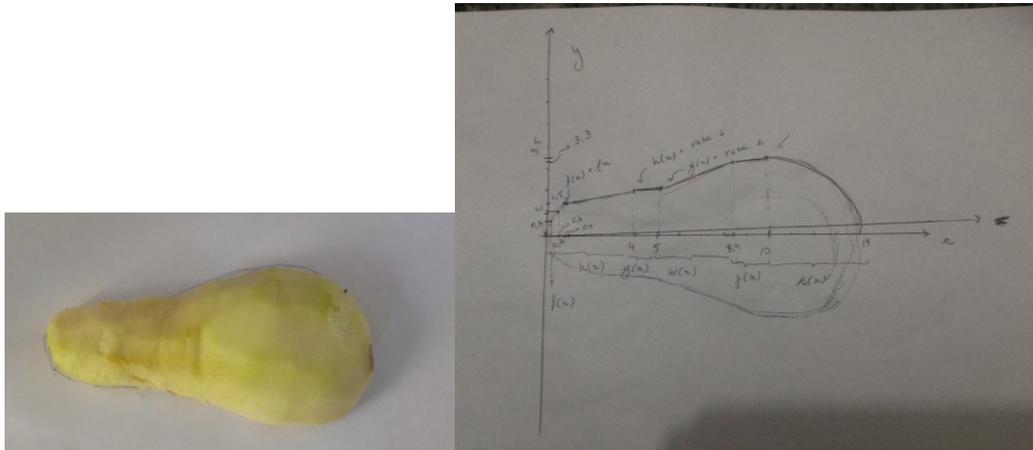
Figura 2 – Comparação do protótipo com o chuchu original



Fonte: do autor

Para o cálculo das integrais o chuchu foi cortado ao meio e tirado suas medidas em um papel. Em seguida, para realizar um esboço inicial mais próximo possível, traçamos um plano cartesiano no centro do desenho e, marcamos alguns pontos com uma régua. As duas etapas estão representadas na Figura 3.

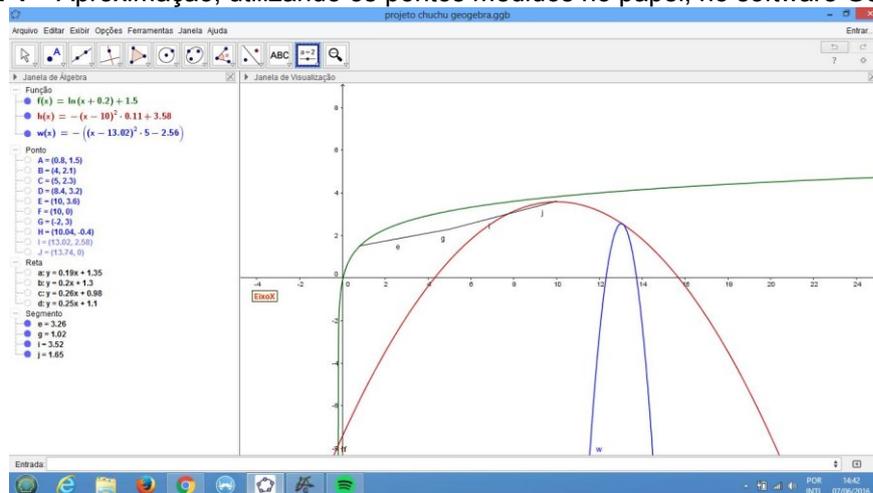
Figura 3 – Medição e contorno do chuchu



Fonte: do autor

Com os pontos determinados anteriormente, foi possível, com o auxílio do software Geogebra, obter as funções de cada intervalo para o cálculo das integrais (figura 4).

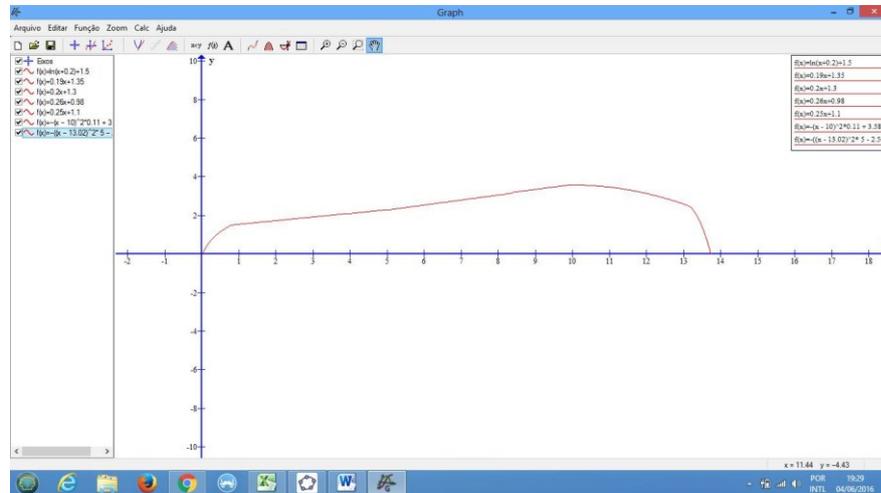
Figura 4 – Aproximação, utilizando os pontos medidos no papel, no software Geogebra



Fonte: do autor

Como não conseguimos deixar as funções apenas nos intervalos desejados no software Geogebra, utilizamos o software Graph e assim obtemos a forma do contorno parecido com o do chuchu (figura 5).

Figura 5 – Contorno no software Graph, representando os intervalos desejados



Fonte: do autor

Os intervalos e funções encontradas com o auxílio do software Graph foram:

$$f(x)=\ln(x+0.2)+1.5; [0,0.8]$$

$$h(x)=0.19x+1.25; [0.8,3.9]$$

$$g(x)=0.2x+1.3; [3.9,5]$$

$$w(x)=0.25x+1.1; [5,8.4]$$

$$j(x)=0.26x+0.98; [8.4,10]$$

$$k(x)=-(x-10)^2*0.11+3.58; [10.04,13.02]$$

$$d(x)=-(x-13.02)^2*5-2.56; [13.02,13.74]$$

Pelas funções e intervalos acima citados e utilizando a fórmula de volume dos sólidos de revolução encontramos uma fórmula aproximada para calcular o volume do sólido de revolução irregular, ou seja, a parte comestível do chuchu, nosso modelo (figura 5).

Figura 5 – Fórmula de volume dos sólidos de revolução

Fonte: do autor

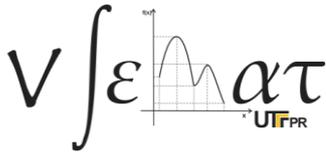
Comparando os resultados do segundo experimento (Figura 1) com o resultado do cálculo das integrais², observamos que os valores foram muito próximos sendo 300ml e 319.6095 cm³.

A última etapa foi a confecção do plano de aula, adaptando a situação para uma aula de matemática da educação básica. Foi pensado em utilizar o princípio de Arquimedes para trabalhar volume na 3 série do ensino médio. Primeiramente foi explicado o que é volume e como resolver matematicamente o volume do cilindro, cone e esfera. Logo após foi pensado em fazer uma atividade prática na sala de aula com o princípio de Arquimedes aplicado no presente trabalho utilizando também um chuchu. Foi necessário um recipiente com marcações com uma quantidade x de água e um chuchu. Primeiramente foi colocado a água e marcado o valor com um canetão, depois inserimos o chuchu dentro da vasilha e marcamos o deslocamento da água. E observamos junto com os alunos que o deslocamento da água é o volume do chuchu. Logo após fizemos medições no chuchu e realizamos os cálculos de volume e em seguida comparamos os resultados.

CONCLUSÃO

Com a realização desse Projeto Integrador além de associarmos as matérias envolvidas obtivemos uma melhor fixação dos conteúdos. Um dos integrantes do trabalho ainda não estava matriculado na matéria de Cálculo Integral e por meio deste conseguiu ter uma noção intuitiva do conteúdo a ser estudado. No desenvolvimento do projeto todos os integrantes foram essenciais em cada uma das etapas.

² Não iremos desenvolver os cálculos do volume neste trabalho em função da limitação do número de páginas.



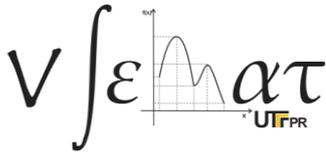
A defesa da metodologia do projeto integrador se dá na medida em que, os futuros professores, passaram pela experiência de fazer um modelo físico do chuchu; achar um método para verificar se os cálculos estavam corretos; decidir sobre qual software era mais adequado para encontrar as funções e intervalos que melhor se aproximasse da curva do chuchu; encontrar o software mais adequado para realizar o cálculo do volume da parte comestível do chuchu; fazer um plano de aula para aplicação na educação básica; comunicar os resultados para uma banca; trabalhar em equipe, entre outros. A articulação entre as disciplinas de matemática e educação matemática possibilitou experiências com a construção de conhecimentos elementares e científicos, fundamentais para o trabalho profissional.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto. 2012.

DAVID, M. M. S.; MOREIRA, P. C. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, jan /fev /mar /abr. 2005.

SANTOS, J. R. V.; LINS, R. C. Uma discussão a respeito da(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.



O QUE É O MÉTODO KUMON?

Adriana Livi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
adrianalivi@gmail.com

Adriéli Aline Duarte
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
adri.alineduarte@hotmail.com

Judy Marie Schafer
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
marie_judy@hotmail.com

Barbara Winiarski Diesel Novaes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
barbaraw@utfpr.edu.br

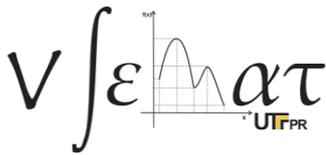
INTRODUÇÃO

Criado pelo professor Toru Kumon (1914-1995) no Japão, inicialmente para melhorar as notas baixas de seu filho que cursava a 2ª série no ano de 1954. Toru Kumon foi motivado pelo desejo de desenvolver o potencial e a autonomia de uma criança, já que seu filho ao alcançar a 6ª série já estudava conteúdos de matemática correspondentes aos de nível superior, mesmo realizando seus estudos diários sem o acompanhamento do pai (KUMON, 1998).

O método se difundiu na cidade natal rapidamente, por isso foi sistematizado e organizado, de forma linear e objetiva, e logo alcançou o mundo todo. Atualmente o Kumon está em 49 países e atende mais de 4 milhões de alunos, entre crianças e adultos (KUMON INSTITUTO, 2016).

O presente trabalho tem por objetivo apresentar as principais características do método Kumon fazendo aproximações com teorias de aprendizagem.

O método tem como objetivo fazer com que toda pessoa passe a gostar de Matemática e tenha a capacidade de dominar a Matemática do Ensino Médio, obtendo o máximo de desempenho em menor tempo e com o menor esforço. Para alcançar esses objetivos cada aluno inicia os estudos no nível em que domina o conteúdo, pois nesse ponto



ele sente prazer em realizar as tarefas e, assim, de forma gradual consegue avançar nos conteúdos de acordo com sua capacidade e habilidade (KUMON, 1998).

Conforme o método da matemática foi sendo aplicado, Toru Kumon percebeu que a maioria dos alunos apresentava dificuldade na interpretação dos problemas, por isso viu a necessidade de criar um curso da Língua Pátria. Este é baseado principalmente na interpretação de textos, parte fundamental para a resolução de problemas matemáticos (KUMON, 1998).

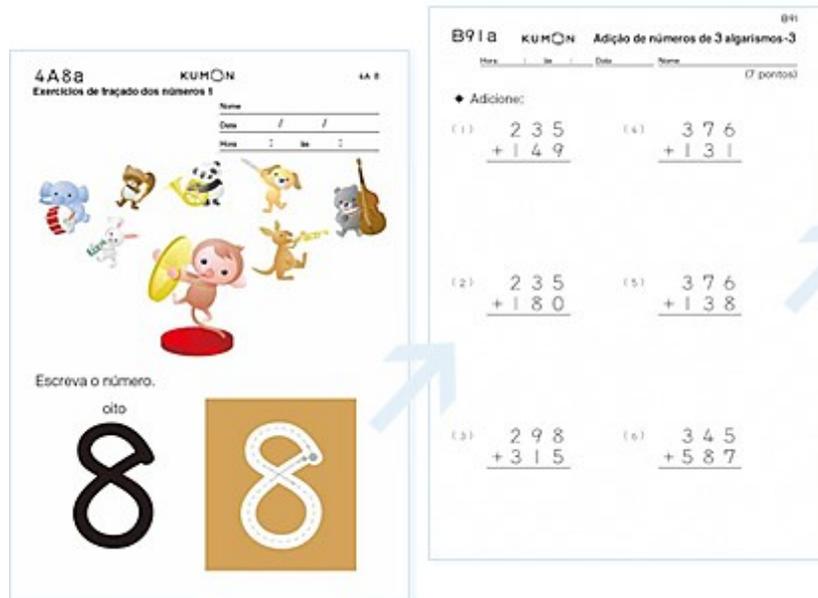
A memorização e a repetição dos mesmos cálculos não são bem vistas por alguns estudiosos da educação, já outros se referem à memória como um músculo, que melhora ao ser exercitado. Na segunda hipótese que o método Kumon fundamenta seus princípios, pois utiliza a ideia que as repetições servem para fixar a matéria estudada e remover os obstáculos no caminho do aprendizado, para assim alcançar as equações o mais rápido possível e com a mente adequadamente treinada (SOISTAK; PINHEIRO, 2009; KUMON, 1998).

O material didático e educativo do Kumon é composto por conteúdos do ensino pré-escolar até o ensino superior, dividido em vários níveis, os estágios. Os estágios iniciais do curso de matemática servem para desenvolver no aluno a capacidade de raciocínio rápido com as operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão), adquirir essas habilidades requer a memorização e a repetição (SOISTAK; PINHEIRO, 2009) conforme figura 1.

Ao matricular um aluno no método Kumon aplica-se um teste diagnóstico com conteúdos de sua série escolar, onde há tempo e número de acertos estipulados para cada teste. Se o aluno não consegue resolver facilmente o teste referente à sua série aplica-se um abaixo a esta, até encontrar o ponto do material em que o aluno consegue fazer bem, ou seja, no ponto em que se encontra a capacidade de concentração do aluno e suas habilidades matemáticas (VALINO, 2010).

Quando um aluno inicia o estudo pelo método ele começa por um conteúdo relativamente “fácil” e por isso consegue tirar muitas notas 100 (a nota máxima) e isso serve de motivação, principalmente para os alunos que sentiam dificuldade na escola. Essa motivação inicial é extremamente importante por incutir no aluno o prazer de estudar e melhorar sua autoconfiança (RÖMER, 2001).

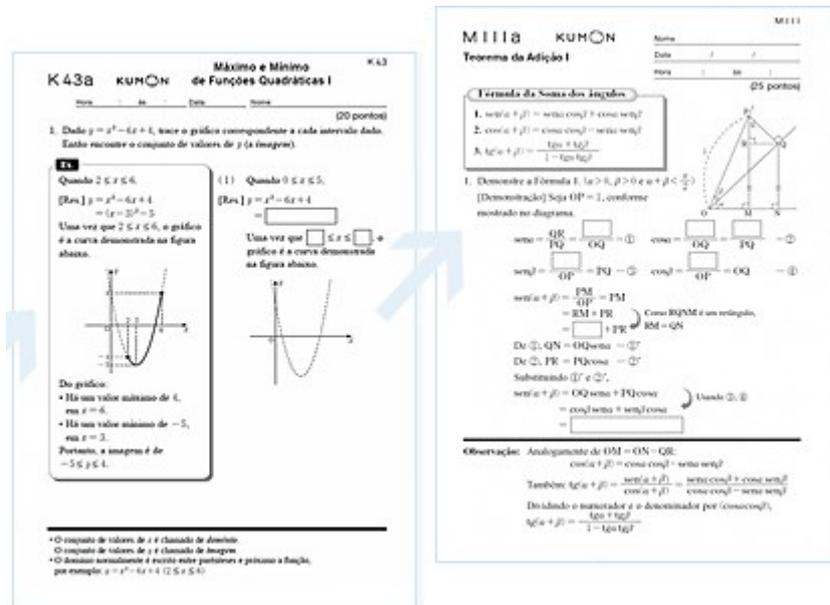
Figura 1 – Exemplo de material de matemática utilizado nas séries iniciais



Fonte: KUMON INSTITUTO, 2016.

Neste método o aluno leva tarefas para fazer em casa diariamente com tempo de estudo entre 20 e 40 minutos. Na unidade estuda duas vezes por semana, com aula de uma hora, onde corrige os erros das tarefas de casa e também faz uma tarefa em sala, para os orientadores observarem como está resolvendo. O aluno deve sempre marcar o tempo das tarefas, esta é uma forma de desenvolver a concentração e o ritmo (RÖMER, 2001). Na figura 2 apresentamos um exemplo de material para o Ensino Médio.

Figura 2 – Exemplo de material de matemática utilizado no ensino médio

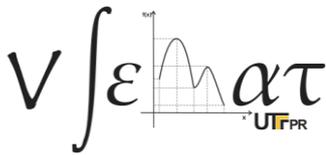


Fonte: KUMON INSTITUTO, 2016.

APROXIMAÇÕES ENTRE AS TEORIAS DE APRENDIZAGEM E MÉTODO KUMON

Segundo Toru Kumon (1998), a falta de aprendizagem de um aluno ocorre por quatro motivos: o método de ensino ou estudo inadequado, complexo de inferioridade, problemas no ambiente de estudo, e por último as diferenças de capacidade intelectual. Toru Kumon diz que para reduzir as diferenças individuais na aprendizagem e desenvolver o potencial da criança o ideal é iniciar uma educação precoce, pois a infância é a fase mais propícia para o desenvolvimento intelectual e não gera efeitos colaterais quando realizada de forma natural e de acordo com a capacidade da criança.

Para aumentar a aprendizagem o método propõe ao aluno o estudo diário, a realização de um material de acordo com sua capacidade, de forma individual e de acordo com seu próprio ritmo. Além de sempre motivar tanto os alunos como os pais para conseguir alcançar o objetivo de ser aluno adiantado (além de sua série escolar) e depois ser concluinte do curso de matemática (KUMON, 1998).



A Teoria Comportamental de Skinner afirma que a aprendizagem seria definida pelo aumento da frequência de uma resposta pela ocorrência de contingências de reforço e em alguns aspectos se aproxima bastante do Método Kumon. O processo instrucional segundo uma abordagem skinneriana afirma que numa situação de aprendizagem, a partir das respostas dos sujeitos e a partir do reforço estabelecido para essa resposta, é que vamos analisar a probabilidade daquela resposta ocorrer novamente, e, assim, controlar o comportamento. Para Skinner, aprendizagem ocorre devido ao reforço na presença das contingências de reforço. O importante é saber arranjar situações de maneira que as respostas dadas pelo sujeito sejam reforçadas e tenham sua probabilidade de ocorrência aumentada. Algumas pesquisas evidenciam que, muitas vezes, a ausência de reforço mostra melhores resultados que qualquer reforço. E que estudantes mais criativos e independentes tendem a sair-se mal em programas de instrução programada (MOREIRA, 2011).

Nas unidades do Kumon os alunos são motivados de diferentes formas, através da atribuição de notas 100 em cada página quando conseguem acertar tudo ou então corrigir os erros que tiveram, algumas unidades colocam estrelas na tarefa do dia em que os alunos conseguem acertar tudo e por isso podem ganhar um adesivo. Outras unidades possuem um sistema de pontos, onde cada tarefa “estrela” vale um ponto e ao juntar determinado número de pontos os alunos podem trocar por materiais personalizados. Estes são alguns exemplos dos reforços positivos utilizados diariamente com os alunos, a fim de motivá-los a continuar seus estudos diários, característica marcante da teoria comportamental.

Porém, se pensarmos em um método criado em 1954 e que ainda é amplamente utilizado em uma rede de franquias significativa no Brasil, será que os professores que orientam as aulas não mesclam suas abordagens com teorias cognitivas?

Toru Kumon reforçava a ideia de que todo tipo de aluno e em toda idade pode aprender com o método, e isso pode ser relacionado com a famosa frase de Jerome Bruner “é possível ensinar qualquer assunto, de uma maneira honesta, a qualquer criança em qualquer estágio de desenvolvimento”. A forma honesta de ensinar no caso do Kumon é a forma simples e gradual de mostrar os conhecimentos. Bruner também enfatizou a aprendizagem pela descoberta, pois segundo ele para aprender, ou seja, formar sistemas de codificação genéricos é necessário a descoberta das relações, isso só pode ser feito de forma individual, assim como acontece no Kumon (LEFRANÇOIS, 2012; KUMON, 1998).

Outro ponto bastante importante do método é o incentivo dado para o aluno tornar-se adiantado em relação a sua série escolar, pois nesse momento o aluno passa a aprender com os exemplos e de forma autodidata. Os alunos que alcançam esse ponto conseguem superar seus limites e por isso sentem-se mais encorajados a avançar cada vez mais, segundo Toru Kumon esse é o objetivo, ter habilidades suficientes para aprender algo que está além do que o aluno sabe (RÖMER, 2001).

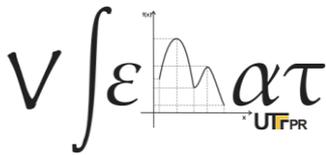
Pode-se relacionar esse ponto com a ideia de aprendizagem defendida por Vygotski, de que o desenvolvimento da criança é provocado pelo fato do conteúdo exigir dela a utilização de capacidades que ainda não estão completamente formadas, ou seja, que ainda estão na “zona de desenvolvimento próximo” (ZDP). O conceito ZDP é utilizado por Vygotski para representar o potencial de aprendizagem que uma criança possui, o que a criança inicialmente só pode resolver se for mediada, seja por alguma pessoa ou algum referencial como, no caso do Kumon, os exemplos contidos no material, mas que depois consegue realizar de forma independente (LEFRANÇOIS, 2012).

Vygotski também diz que “ensinar a uma criança aquilo que é incapaz de aprender é tão inútil como ensinar-lhe a fazer o que é capaz de realizar por si mesma”. De forma semelhante o método Kumon tem mostrado que a criança gosta de estudar – desde que lhe sejam dados assuntos adequados à sua capacidade, mas passa a detestar os estudos quando é obrigada a enfrentar conteúdos acima de sua capacidade. A necessidade de estudar conteúdos acima da capacidade do aluno ocorre com frequência nas aulas coletivas tradicionais (LEFRANÇOIS, 2012; RÖMER, 2001).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do artigo foi apresentar o método Kumon e relacioná-lo com algumas teorias de aprendizagem. O que ficou mais evidente com a teoria comportamental de Skinner, pois privilegia as técnicas de cálculo e a auto-instrução. As relações com a teoria de Bruner e Vygotski poderia ser considerada uma interpretação pessoal do grupo, de acordo com as experiências de uma das autoras com o Método Kumon na atualidade.

Para refletir sobre o método, é preciso considerar “o que é exigido do aluno sobre matemática na escola e como os professores ensinam”? Se a escola



privilegiar que o aluno faça cálculos rapidamente, resolva problemas muito parecidos, faça listas repetitivas de exercícios e problemas, o método Kumon pode funcionar.

No entanto, em um mundo que exige indivíduos criativos, críticos, colaborativos, que precisam tomar decisões a todo o momento, amplamente influenciados pela tecnologia, que lugar teria uma formação matemática que enfatiza a destreza, memória e repetição?

REFERÊNCIAS

KUMON, Toru. **Estudo gostoso de matemática: o segredo do método kumon**. 5. ed. São Paulo: Kumon Instituto de Educação, 1998.

KUMON INSTITUTO de Educação Ltda, 2016. Disponível em: <<https://www.kumon.com.br/>>. Acesso em: 11 maio 2016.

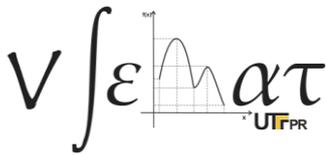
LEFRANÇOIS, Guy. R. **Teorias da aprendizagem**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

RÖMER, Célia M. Tavares. **Desmistificação da Matemática: em busca da concretização dos seus conteúdos básicos; do Ensino Fundamental ao Ensino Médio**. 2001. 40 f. Monografia (Especialista em Docência do Ensino Superior) – Universidade Cândido Mendes. Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <<http://www.avm.edu.br/monopdf/8/CELIA%20MARIA%20TAVARES%20ROMER.pdf>>. Acesso em: 11 maio 2016.

MOREIRA, Marco Antônio. **Teorias de Aprendizagem**. 2 ed, ampl. – São Paulo: EPU, 2011.

SOISTAK, Maria Marilei; PINHEIRO, Nilcéia A. M. **Memorização: atual ou ultrapassada no ensino-aprendizagem da matemática?** Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009 p. 971- 983. Disponível em: <>. Acesso em: 12 maio 2016.

VALINO, Jéssica P. **O aprendizado de crianças em matemática pelo método Kumon: um estudo de casos**. 2010 Disponível em: <http://www.crc.uem.br/pedagogia/documentos/tcc_2010/jessica_valino.pdf>. Acesso em: 11 maio 2016.



ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA SOBRE A PRESENÇA DE ENCAMINHAMENTOS PARA O TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA

Luana Edris Finkler¹
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
luanafinkler@hotmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Cada dia mais os pesquisadores da área de Educação Matemática Inclusiva têm investigado maneiras de ajudar professores a lidar com alunos com algum tipo de necessidade específica. E um dos principais materiais de apoio ao professor é o livro didático. Esse material é fundamental na orientação das aulas e, portanto, se torna indispensável olhar para ele de forma sistemática e cuidadosa.

Neste texto, procuramos analisar alguns livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental – anos iniciais, em específico, o 4º e 5º anos, com um olhar para o que aparece em relação a propostas de ensino de matemática para alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA). A questão que nos norteia é: os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental – anos iniciais, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, possuem algum tipo de atividade e/ou encaminhamento para trabalhar com alunos que possuem Transtorno de Espectro Autista (TEA)?

Com a pergunta delimitada, buscamos nas próximas seções: apresentar o Transtorno do Espectro Autista (TEA) com os elementos que a definem, suas principais dificuldades e o que pode ser feito; em seguida descrever e apresentar as principais características de um livro didático; na sequência trazer os resultados da coleta de dados e apresentar uma discussão em torno disso e, por fim, fazer nossas conclusões a respeito do trabalho elaborado.

¹ Agradecemos ao CNPQ pela ajuda financeira e pelas bolsas concedidas.

TRANSTORNO DO ESPECTRO AUTISTA (TEA)

O autismo, segundo Belisário Filho (2010, p. 12) é explicado e descrito como um “conjunto de transtornos qualitativos de funções envolvidas no desenvolvimento humano”. Além disso, “as manifestações desse transtorno variam imensamente a depender do nível de desenvolvimento e idade” (BELISÁRIO FILHO, 2010, p. 15).

Os sinais geralmente começam a aparecer na infância, trazendo preocupações para os pais. O nome autista diz muito sobre a suas características, uma criança autista enxerga o mundo de fora para si, não se reconhece como si mesmo, e também não reconhece os outros. As crianças com esse tipo de transtorno têm dificuldades de comunicação e,

[...] os prejuízos na comunicação e na linguagem podem ser manifestados como mutismo, atraso na aquisição, ecolalia, inversão pronominal, simplificação sintática, rigidez semântica, peculiaridades prosódicas, preferência por funções imperativas, literalidade na interpretação, entre outras (BELISÁRIO FILHO, 2010, p. 32).

Possuem também muitas dificuldades na socialização, não conseguindo interagir com os outros como as outras crianças normalmente fazem.

Diversos comportamentos podem apontar alguns desses transtornos, tais como: a criança não olha nos olhos; não demonstra sentimentos; gosta muito de rotinas e dificilmente consegue mudá-las; tem fascinação por movimentos repetitivos, principalmente circulares; dificuldade de contato visual; irritação com alguns tipos de barulhos; dentre vários outros comportamentos (BELISÁRIO FILHO, 2010). Para que o ensino seja efetivo para alunos com TEA, ele deve ser dinâmico, com materiais manipuláveis, linguagem simples, instigando os interesses. O cuidado com o ambiente também é importante para que ele não interfira negativamente no trabalho, por exemplo, em uma sala de aula com um ventilador fazendo um barulho repetido e constante, levará o aluno a se concentrar nesse ruído.

Dentro do espectro autista existem diferentes sintomas entre as crianças, como por exemplo: falta de interação social, deficiência em comportamentos não verbais, pouco interesse em fazer amizades, rejeição a atitudes de afeto, entre outras (GARCIA, 2013, p. 17). Há casos em que esses sintomas não são a “falta de”, mas o “excesso de”, como por exemplo, aqueles que são extremamente inteligentes em uma determinada área, principalmente na matemática.

O ensino para esses alunos, além dos conteúdos curriculares já previstos, precisa também ser voltado para o alargamento da relação entre professor-aluno e, aluno-aluno, ou seja, deve existir uma melhoria nas relações sociais, pois como aponta Garcia (2013, p. 28)

“a maior característica do autista é a falta de interação social e como sabemos um dos fatores mais importantes para uma educação bem sucedida é a relação professor-aluno”.

Nesse contexto, os livros didáticos são essenciais para direcionar a prática pedagógica do professor em sala de aula e, por esse motivo, discutiremos um pouco mais sobre suas características e possibilidades.

SOBRE LIVROS DIDÁTICOS

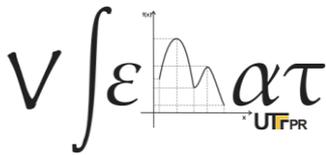
Os livros didáticos são uma importante ferramenta para os professores e alunos. A educação básica pública brasileira dispõe de livros gratuitos, fornecidos pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático), que:

[...] tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores. [...] O programa é executado em ciclos trienais alternados. [...] À exceção dos livros consumíveis, os livros distribuídos deverão ser conservados e devolvidos para utilização por outros alunos por um período de três anos (BRASIL, 20--).

Ao abordar uma reflexão sobre o livro didático, o guia de livro didático do Programa Nacional do Livro Didático de 2016 aponta algumas das funções desses livros, das quais podemos destacar: favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes; consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos; propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades, que contribuam para aumentar sua autonomia (BRASIL, 2015, p. 19).

A escolha do livro didático a ser utilizado na escola deve ser feita pelos professores. O ato de escolher o livro é muito importante e deve ser feito de forma muito cuidadosa. Segundo Salla (2012) “erros conceituais, preconceitos, inconsistências metodológicas, problemas em aspectos gráficos e falta de adequação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são alguns dos critérios já avaliados pelo MEC”. Salla (2012) também considera como recomendação na escolha de um livro didático “[...] olhar os manuais dos professores, que acompanham o material didático e trazem diversas orientações”.

Ainda sobre a importância da escolha do livro didático, o guia de livros didáticos fornecido pelo governo destaca que “[...] os alunos têm direito a receber um bom livro didático. Eles devem encontrar, nesse recurso, apoio para a sua aprendizagem, para a superação de suas dificuldades e para avançar com autonomia na busca pelo conhecimento” (BRASIL, 2012, p. 9).



O livro didático é um rico instrumento para ser utilizado em sala, que pode nortear o trabalho do professor, auxiliá-lo em termo de conteúdos, e também ajudar o aluno em sua aprendizagem. Segundo Costa e Allevato (2010, p. 72),

o livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos.

Por ser um ótimo recurso, os professores, muitas vezes com dificuldades, acabam por utilizar apenas esses livros para ministrarem suas aulas.

Cabe à escola, em particular ao professor, a condução do processo de ensino e o acompanhamento da aprendizagem dos alunos. Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui ao livro um papel destacado entre os recursos didáticos que podem ser utilizados (BRASIL, 2015, p.18).

Mas, apesar de o livro didático ser um ótimo auxílio, deve ser apenas um dos recursos utilizados, devendo o professor buscar outros meios para uso em sala de aula, adequando-se ao contexto da turma e as especificidades de cada aluno. Sobre isso, o guia de livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático de 2016 traz que “é preciso levar em consideração as especificidades sociais e culturais da comunidade em que o livro é utilizado, para que o seu papel na formação integral do aluno seja mais efetivo” (BRASIL, 2015, p.20).

Considerando todos esses fatos, é importante que os livros didáticos sejam desenvolvidos com qualidade, pensando em todos os alunos, ou seja, ele deve atender alunos com ou sem algum tipo de necessidade específica.

ALGUMAS DISCUSSÕES

As escolas municipais de Toledo, com base nos documentos apontados na seção anterior, dão autonomia aos seus professores para que possam escolher seus livros didáticos. Nesse contexto, escolhemos uma escola municipal como fonte de nossa pesquisa, a partir do acesso que um dos autores deste trabalho possui por ter realizado o estágio na referida escola. Assim, analisamos os dois livros didáticos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental anos iniciais que tratam sobre matemática, intitulados Projeto Coopera: matemática: 4º ano e Projeto Coopera: matemática: 5º ano, das autoras Eliane Reame e Priscila Montenegro. Esses livros fazem parte do conjunto de livros aprovados pelo PNLD de 2016.

Inicialmente fizemos uma prévia avaliação dos sumários dos livros com o intuito de encontrar algum tipo de *palavra-chave* que apontasse para o tema. Nada foi encontrado. Na sequência, passamos a olhar para cada Unidade do livro, folha a folha, procurando atividades e/ou indícios delas que pudessem mostrar sugestões para utilizar com alunos TEA. Também não encontramos nada relacionado à educação inclusiva para alunos com algum TEA. Vale ressaltar que no âmbito da Educação Especial, especificamente na inclusão de pessoas com deficiência visual, o próprio Ministério da Educação aponta ao dizer que “são distribuídas obras didáticas em Braille de língua portuguesa, matemática, ciências, história, geografia e dicionários em braille” (BRASIL, 20--). Além disso, há um grande incentivo na produção de tais materiais via Instituto Benjamin Constant, cuja data de criação já ultrapassa um século e que possui uma infraestrutura adequada para elaboração e produção de materiais voltados à inclusão visual.

Como não encontramos indicadores de atividades nos livros didáticos dos alunos, observamos também o manual do professor. No final dos livros didáticos do professor, onde contém dicas para os professores a respeito do seu trabalho, também não encontramos nada relacionado ao trabalho com alunos TEA. Em conversa informal com algumas professoras, descobrimos que existem livros de apoio (que não são os didáticos) para o professor, para o trabalho com alunos autistas, porém não são de fácil acesso, nem sempre são gratuitos e o município não disponibiliza aos professores.

O guia do livro didático do PNLN de 2016 cita que “entre os desafios a serem enfrentados pelo nosso país, está o de garantir, a todos, o direito à educação com qualidade social” (BRASIL, 2015, p.9). Nesse contexto, devemos considerar que, segundo a atual Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional 9394/96, no capítulo V art. 58:

Entende-se por educação especial, para os efeitos desta Lei, a modalidade de educação escolar oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para educandos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotação (BRASIL, 1996).

Se a educação especial deve ser oferecida na rede regular de ensino, entendemos que os livros didáticos oferecidos devem também conter explicações e atividades adequadas para alunos, para se realizar uma educação inclusiva de qualidade, e não segregada, onde esses alunos com necessidades específicas precisam de atividades diferenciadas para se ter uma educação de qualidade. Por exemplo, uma atividade que envolva o ensino de frações pode ser desenvolvida com a utilização de materiais manipuláveis, como o Material Dourado, a Escala Cuisenaire ou ainda o Ábaco de Frações;

que são instrumentos que permitem ao aluno TEA uma melhoria na interação com os colegas e com o professor, além de permitir que ele foque no material, não se dispersando.

Assim, podemos vislumbrar a elaboração e produção de livros didáticos que permitam ao professor experienciar novas formas de ensinar aos alunos TEA, de modo que as atividades favoreçam principalmente a socialização e a interação, mas também a manipulação dos objetos matemáticos ampliando a aprendizagem.

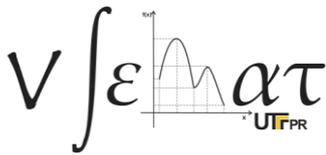
CONCLUSÕES

Diante de nossa pergunta inicial: os livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental – anos iniciais, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, possuem algum tipo de atividade e/ou encaminhamento para trabalhar com alunos que possuem Transtorno de Espectro Autista (TEA)?, e dos livros analisados em uma escola municipal de Toledo, chegamos à conclusão de que eles não apresentam nenhum tipo de atividade e/ou encaminhamento para trabalhar com matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A partir dos seguintes elementos: a conclusão apontada acima, sabermos que a educação básica é direito de todos - sem discriminações e considerando todos os fatos e documentos discutidos nas seções anteriores, nos perguntamos por que os livros didáticos não trazem nada para alunos autistas e/ou alunos com algum tipo de necessidade específica? Podemos intuir que, os estudos sobre educação inclusiva, mesmo que aparecendo em livros não didáticos (como artigos, dissertações e teses) de forma significativa e também na formação inicial e continuada, ainda precisam ser disseminados, principalmente nos livros didáticos, que são os principais orientadores dos professores nas escolas.

Talvez um dos problemas enfrentados no momento de tentar incluir algum tipo de atividade e/ou encaminhamento *em massa*, ou seja, para todos os alunos de uma sala, sem exceção, seja exatamente aquilo que a educação inclusiva procura abolir: o ensino massificado e igualitário. Como aponta Azevedo (2013, p. 140):

[...] se todos são tratados igualmente pelo Estado (direito igual), a desigualdade permanece. Caso o “direito igual” prevaleça, os que, por contingências sociais, culturais e econômicas, tiverem menos oportunidades de estudos e de aquisição de conhecimento, continuarão a receber desigualmente conteúdos e capital cultural, internalizando menos dispositivos (*habitus*) relacionados à ciência e ao saber. Dessa forma, se a escola (ação educacional de Estado) for indiferente às diferenças e tratar



igualmente os desiguais, o *status quo* de desigualdade e iniquidade não será posto em questão.

Nesse âmbito, devemos compreender que cada aluno é diferente do outro e o professor precisa conhecer sua necessidade específica para, a partir dela, elaborar atividades que sejam adequadas a ele. Assim, pensar em *atividades gerais* ou *atividades modelo* não faz sentido em um livro didático, contudo, os autores deste trabalho entendem que existe a possibilidade de se acrescentar atividades e/ou encaminhamentos pensados em inclusão de modo que tais atividades tenham sugestões de adaptações aos professores que irão utilizá-las.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, M. L. N. de. Igualdade e equidade: qual é a medida da justiça social? **Avaliação (Campinas)**, Sorocaba, v. 18, n. 1, p. 129-150, mar. 2013. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/aval/v18n1/08.pdf>>. Acesso em: 22 abr. 2017.

BELISÁRIO FILHO, J. F. **A educação Especial na Perspectiva da Inclusão Escolar:** transtornos globais de desenvolvimento. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2010.

BRASIL. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2013: Matemática, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2012.

BRASIL. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2016: Matemática, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2015.

BRASIL. **Lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 19 abr. 2017.

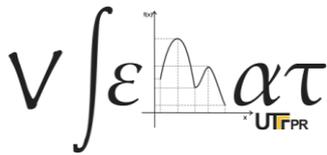
BRASIL. **Ministério da Educação**, [20--]. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao>>. Acesso em: 19 abr. 2017.

COSTA, Manoel dos S.; ALLEVATO, Norma S. G., **Livro Didático de Matemática:** Análise de Professoras Polivalentes em Relação ao Ensino de Geometria, Santa Maria, 2010.

GARCIA, G. **O Ensino de Matemática para Crianças Portadoras de Autismo.** Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso. Faculdade de Pará de Minas, 2013.

REAME, Eliane; MONTENEGRO, Priscila, **Projeto Coopera:** matemática, 4º ano: ensino fundamental: anos iniciais, São Paulo: Saraiva, 2014.

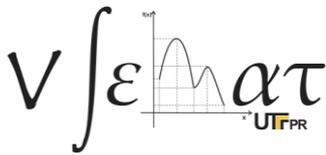
REAME, Eliane; MONTENEGRO, Priscila, **Projeto Coopera:** matemática, 5º ano: ensino fundamental: anos iniciais, São Paulo: Saraiva, 2014.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

SALLA, F. **PNLD 2013**: como escolher livros com critério, 2012. Disponível em:
<<https://novaescola.org.br/conteudo/1833/pnld-2013-como-escolher-livros-com-criterio>>.
Acesso em: 19 abr. 2017.



ENSINO DE MATEMÁTICA PARA ESTUDANTES SURDOS: ANÁLISE SOBRE AS PRODUÇÕES DE SINAIS MATEMÁTICOS

Andressa Paola Cordeiro
UTFPR - Toledo
adressap.ha@gmail.com

Leonardo Augusto Cerbarro
UTFPR - Toledo
leocerbarro@hotmail.com

Luiz Henrique da Silva Alves (CAPES – PIBID)
UTFPR - Toledo
henrique_lh94@gmail.com

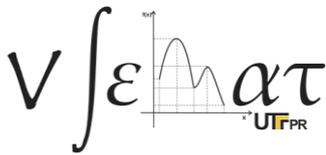
Aline Keryn Pin
UTFPR - Toledo
alinepin@utfpr.edu.br

Este artigo apresenta o relato de experiência no qual foi desenvolvido um Glossário em Libras com sinais matemáticos para o ensino de matemática para estudantes surdos. O glossário em Libras fez parte da atividade “Projeto Integrador”, desenvolvido no 3º período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Para isso, serão contextualizados os temas: história da educação dos surdos e diferenças culturais e linguísticas da Pessoa Surda.

BREVE EXPLANAÇÃO SOBRE A HISTÓRIA DOS SURDOS

As pessoas surdas por muito tempo foram excluídas da sociedade e dos ambientes educacionais, por se acreditar que estas, por não falarem, não eram dotadas de pensamento. Contudo, registros do desenvolvimento da educação voltada aos surdos datados do século XVI, mostram que o monge beneditino espanhol Pedro Ponce de León, ensinou surdos por meio do uso de gestos e de um alfabeto manual datilológico usado para soletração de palavras.

Honora (2014, p. 51) apresenta que a criação do alfabeto manual por León teve por objetivo “suprir uma ausência que existia na comunicação oral”. A autora ainda relata que “Ponce de León teve inúmeros alunos com Surdez e seu trabalho foi reconhecido em toda a



Europa por ter alunos com conhecimento em Matemática, História e Filosofia. Pedro Ponce de León é considerado o primeiro professor de Surdos na história”.

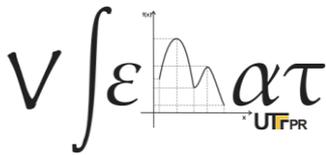
No Século XVIII, na França, o abade Charles Michel de L’Eppe, criou a primeira instituição pública de educação para pessoas surdas, e, defensor da Língua de Sinais, foi considerado o “Pai dos Surdos”. Segundo Andreis-Witkoski (2015), Michel de L’Eppe revolucionou a educação dos surdos ao observar que aqueles que viviam nas ruas se comunicavam de forma peculiar, e, ao estudar esta forma de comunicação, desenvolveu sinais metódicos combinados da gramática francesa usada oralmente e da Língua de Sinais empregada na França na época. Destaca-se que L’Eppe não se preocupou apenas com o ensino de surdos pertencentes à nobreza, como também de indivíduos das mais variadas posições sociais.

Neste mesmo período histórico, na Alemanha, se difundia a filosofia oralista, criada pelo alemão Samuel Heinicke, que propunha uma metodologia totalmente contrária à utilização da língua de sinais. Tal concepção percebia os surdos como deficientes que precisavam de “reparo”, e difundia a necessidade da verbalização e da leitura labial.

“Os dois caminhos opostos de metodologia na área de educação dos surdos seguiram paralelamente. O que fazia uso da Língua de Sinais fomentava o desenvolvimento dos sujeitos surdos, por meio de sua língua e cultura, que resultava na aquisição de uma formação qualificada; já os orientados pelo método oralista permaneciam aprisionados a um padrão de normalidade inventado, pelo qual eram obrigados a oralizar, sendo proibidos de utilizar a Língua de Sinais.” (ANDREIS-WITKOSKI, 2015, p. 34).

A utilização das duas metodologias continuou até que, em 1880, fora realizado o Congresso de Milão, na Itália, visando definir qual seria a melhor metodologia para a educação dos surdos: o oralismo, a Língua de Sinais ou a utilização em conjunto dos métodos. Apesar do avanço demonstrado no uso da metodologia de L’Eppe, ficou decidido optar-se pela concepção oralista, pois acreditava-se ser a melhor metodologia empregada para a educação dos surdos, tornando o uso das Línguas de Sinais expressamente proibido.

Conforme Andreis-Witkoski (2015, p. 55), “o povo surdo, descontente com a falta de qualidade do ensino, seguia a tendência mundial da década de 1990 quando vários outros grupos reivindicavam seus direitos de equidade educacional”. Neste contexto o desenvolvimento da educação dos surdos por meio da metodologia bilíngue avançou, conquistando espaço em discussões e lutas por políticas públicas. É importante saber que o bilinguismo, ou seja, ensino da Língua de Sinais e da língua majoritária do país em sua



modalidade escrita passou a ser empregado, integrando de forma mais eficaz os surdos na sociedade.

COMPREENDENDO OS SURDOS: DIFERENÇAS CULTURAIS E LINGUÍSTICAS

O professor, ao atuar com alunos surdos, precisa considerar as diferenças culturais e linguísticas vivenciadas por esses sujeitos. Segundo Strobel (2008), a cultura surda refere-se ao modo como o sujeito surdo compreende e modifica o mundo, a fim de torná-lo acessível e ajustado às suas percepções visuais, contribuindo para a definição da identidade surda de cada sujeito.

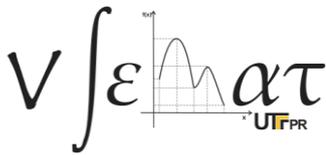
O convívio das crianças surdas com outros surdos mais velhos e da mesma idade contribui para o seu desenvolvimento por meio da língua de sinais, assim como para o fortalecimento de sua identidade, ou seja, a forma de ver a si mesmo, é construída a partir das representações da cultura que vê em seus semelhantes. A cultura surda exprime valores e crenças que muitas vezes se originaram e foram transmitidas pelos surdos mais velhos, inspirados em seu passado, suas dificuldades, suas vitórias e conquistas.

Outro aspecto importante que precisa ser considerado pelos professores que atuam com alunos surdos é a questão linguística, ou seja, a utilização da Língua Brasileira de Sinais – Libras, reconhecida oficialmente por meio da Lei de nº 10.436, de 24 de abril de 2002, e regulamentada pelo Decreto nº 5.626, de 22 de dezembro de 2005.

A Língua de Sinais, língua natural dos surdos, é mais do que essencial para a comunicação dessas pessoas, pois por meio da mesma, os surdos tornam-se participantes ativos da sociedade, o que lhes possibilita interagir, expressar-se, aprender e apreender o mundo, fazendo parte dele. A Libras distingue-se das línguas orais por ser uma visomotora, ou seja, visual-espacial, pois o processo de comunicação ocorre por meio do enunciador utilizando o espaço e a sinalização para comunicar algo e é percebida pelo receptor através da visão.

Ao considerar as diferenças culturais e linguísticas o professor ao planejar sua aula, utilizará de estratégias e metodologias que agregam a questão visual e a língua, possibilitando assim ao aluno surdo uma maior compreensão dos conteúdos.

O DESENVOLVIMENTO DO GLOSSÁRIO EM LIBRAS DE SINAIS MATEMÁTICOS



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

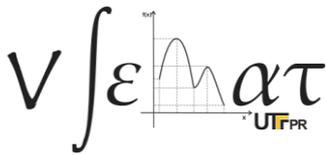
Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, oferece o curso de Licenciatura em Matemática, com duração de 4 anos, organizados em 8 semestres. As disciplinas de Libras I e Libras II são obrigatórias, conforme previsto no decreto nº 5626/05, e com duração de um semestre cada. Em apenas dois semestres não é possível se ter uma plena compreensão da Língua de Sinais, mas estas aulas viabilizam a comunicação com sujeitos surdos em conversas simples e com sinais reduzidos. Apesar disso, não se deve desconsiderar a importância de tais disciplinas, uma vez que não se aborda apenas a Língua de Sinais em si, como também são estudadas a história da educação dos surdos, como já abordado aqui, a cultura e identidade desse povo e um conhecimento geral sobre esses indivíduos, buscando promover a compreensão e o respeito com relação às suas especificidades.

Uma importante atividade realizada no curso de Matemática, introduzida há poucos semestres, foi denominada Projeto Integrador, que visa o desenvolvimento por parte dos acadêmicos de determinada atividade, elaborada pelos professores de forma a unir todas as disciplinas de certo período num único trabalho. Assim, no segundo semestre de 2016, durante o segundo Projeto Integrador desenvolvido, propôs-se aliar as disciplinas de Libras II, Cálculo Integral, Geometria II, Laboratório de Ensino de Matemática, Fundamentos de Matemática e Didática Geral.

O projeto consistia em analisar um lago municipal da cidade de Toledo ou de cidades vizinhas, construir uma maquete proporcional ao original, calcular a área e o perímetro deste lago, desenvolver uma ideia de atividade semelhante a ser desenvolvida em sala de aula na Educação Básica e analisar os conteúdos matemáticos envolvidos, e criar um vídeo em forma de glossário em Libras com conceitos e sinais relacionados ao trabalho, o qual poderá ser usado, por exemplo, por professores que ministrarão conteúdos relacionados a estes sinais para integração e participação dos surdos em suas aulas.

Atendo-se apenas à parte que envolve a disciplina de Libras, foi necessária uma ampla pesquisa com relação a conceitos voltados a conteúdos matemáticos. Com boa parte do trabalho encaminhado, e já com ideias de como realizar todo o projeto, a primeira etapa para a criação e desenvolvimento do glossário foi criar uma lista de palavras que poderiam integrar o glossário, desde que estivessem de alguma forma relacionadas e vinculadas com o trabalho em questão. A segunda etapa vinculou-se à pesquisa dos sinais em Libras das



palavras contidas na lista. Contudo, muitas precisaram ser omitidas do glossário, em vista da impossibilidade de se encontrar seus respectivos sinais.

Dessa forma, de um total de aproximadamente 50 palavras, o glossário final foi construído com apenas 32 palavras relacionadas indiretamente à Matemática e somente 13 palavras diretamente relacionadas a esta área do conhecimento. O que se pode concluir por meio das pesquisas é que sinais de operações básicas, como adição, subtração, multiplicação e divisão são localizados facilmente em livros ou em sites especializados, já potenciação, radiciação e expressão aritmética foram encontrados apenas em vídeos, e conceitos de derivadas e integrais são exemplos que não foram abordados no glossário, visto que não foram encontrados seus respectivos sinais.

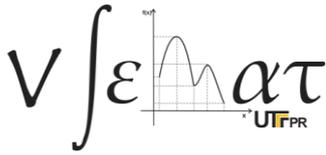
A terceira etapa da elaboração do glossário, seguido do estudo dos sinais encontrados, foi a gravação em vídeo dos sinais pelos acadêmicos participantes do trabalho. Muitas tentativas foram necessárias para que não houvesse problemas com sombra ou claridade, e até mesmo para acertar o ângulo da câmera, visto que nenhum dos integrantes do grupo conhecia de fotografia ou filmagem, sendo necessária inclusive a improvisação de um tripé.

Por fim, a última etapa foi composta pela edição dos vídeos e pela criação de um glossário possível de ser impresso, através de capturas de imagens dos vídeos. Os conceitos foram organizados em ordem alfabética, e não por “assunto”. Portanto, não só um vídeo foi elaborado para o estudo por parte de professores e demais pessoas interessadas em aprender um pouco sobre a Língua de Sinais, como também uma espécie de apostila, que pode ser facilmente consultada em sala de aula, caso seja necessário pelo professor, como uma forma de complementar o glossário em vídeo.

Os sinais relacionados à Matemática usados no glossário elaborado para o Projeto Integrador foram retirados dos vídeos da professora Zanúbia Dada, no canal de vídeos YouTube¹. Eles são de acesso gratuito e de fácil compreensão e, além destes, já existem vários outros vídeos nesse canal que se constituem como ótimo material de estudo para professores, intérpretes, alunos surdos e demais interessados.

Os principais objetivos do glossário com sinais relacionados ao conteúdo trabalhado no Projeto Integrador, sinais matemáticos como expressão aritmética e fração, assim como outros sinais, por exemplo Libras e aprender, eram o estudo dos sinais e a elaboração de um material que facilitasse a interação entre professor e aluno surdo, visto que muitos

¹ Sinalário de Matemática, disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=CK2q-Nskapo>>., e Sinais de Matemática em Libras, disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=jIAqxylo23U>>.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

licenciandos e licenciados podem se confrontar com situações de salas de aula com alunos surdos.

As disciplinas de Libras do curso de Licenciatura em Matemática proporcionam aos licenciandos a compreensão da importância de se considerar diferentes culturas e linguísticas. O Projeto Integrador, portanto, abrangendo a disciplina de Libras II, constitui-se de uma atividade que proporciona aos acadêmicos não só a possibilidade de aprender uma quantidade maior de sinais daqueles estudados em sala, como também de refletir sobre metodologias e estratégias para se ensinar Matemática a estudantes surdos, assim como possibilitar o diálogo entre professor e aluno surdo.

A seguir estão alguns exemplos de sinais pertencentes ao glossário produzido. A Figura 1 mostra sinais indiretamente relacionados ao ensino de Matemática em sala de aula, e a Figura 2 aborda sinais de conteúdos matemáticos. Repare que, para facilitar a compreensão do leitor, consta também uma breve definição de cada um dos termos utilizados. Esta exigência foi posta para que não houvesse confusão entre sinal e significado abordados, visto que muitos sinais podem significar diferentes coisas, assim como acontece com as palavras no Português.

Figura 1 – Conceitos relacionados indiretamente com o ensino da Matemática na Libras

Aprender:

Adquirir o conhecimento de; reter a memória; estudar; decorar.



Distância:

Espaço que separa duas coisas ou pessoas; espaço entre duas épocas; intervalo; separação; afastamento.



Conteúdo (disciplina, matéria):

Conjunto de assuntos com o mesmo tema.



Libras:

Língua Brasileira de Sinais, língua materna dos surdos brasileiros.



Fonte: dos autores

Figura 2 – Conceitos relacionados diretamente com o ensino da Matemática na Libras

Fração:

Representação numérica indicativa do quociente de dois números



Potência:

Produto de n fatores iguais; o resultado da potenciação.



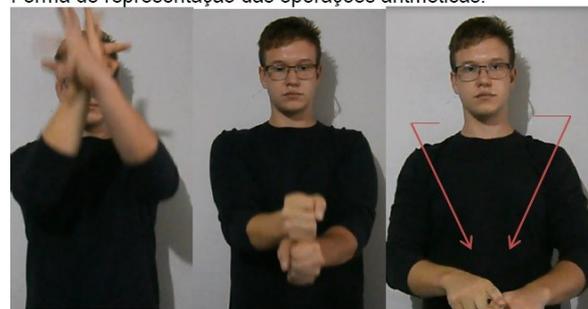
Polinômio:

Expressão algébrica formada por operações entre monômios.



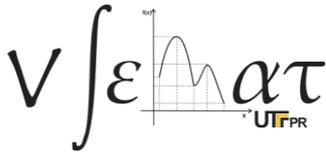
Expressão aritmética:

Forma de representação das operações aritméticas.



Fonte: dos autores

CONSIDERAÇÕES FINAIS



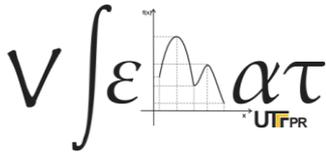
V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

Diferenças linguísticas e culturais existem entre pessoas de todo o mundo. Com ouvintes e surdos, essas diferenças também existem, contudo não devem ser encaradas como uma impossibilidade para a comunicação entre essas pessoas. Acima de tudo, o respeito à diferença deve acontecer em quaisquer situações.

As aulas de Libras no curso de Licenciatura em Matemática, como discutido anteriormente, proporcionam o conhecimento da cultura surda, a estrutura linguística desse povo e o processo histórico, não só dos surdos como um todo, mas também do desenvolvimento do pensamento e compreensão da sociedade com relação a essas pessoas.

As discussões propostas nas aulas de Libras e no Projeto Integrador são de grande importância para a formação do acadêmico como cidadão, e do aluno de licenciatura como futuro professor. Saber respeitar as diferenças e compreender as particularidades dos demais são características essenciais a todo sujeito que deseja viver bem em sociedade, sabendo se integrar com todos à sua volta.



V Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão

Toledo, 08 a 12 de maio de 2017

REFERÊNCIAS

ANDREIS-WITKOSKI, Sílvia. **Introdução à LIBRAS**: língua, história e cultura. Curitiba: UTFPR, 2015.

BRASIL (País). **Decreto Nº 5.626**. Regulamenta a Lei nº 10.436, de 24 de abril de 2002, que dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – Libras, e o art. 18 da Lei nº 10.098 de 19 de dezembro de 2000. Publicada no Diário Oficial da União em 22/12/2005.

HONORA, Márcia. **Inclusão Educacional de alunos com Surdez**: concepção e alfabetização – ensino fundamental, 1º ciclo. São Paulo: Cortez, 2014.

STROBEL, Karin. **As imagens do outro sobre a cultura surda**. Florianópolis: UFSC, 2008.