

ANAIS
VI SEMANA DA MATEMÁTICA
UTFPR TOLEDO

Ser professor que ensina matemática em uma era tecnológica

Página do Evento:

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/VI_semat/

Toledo – PR
Maior - 2018

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (6: 2018: Toledo, PR)

Anais da VI Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR), 07 a 11 de maio de 2018. / organizado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. - Toledo, PR, 2018.

115 f.

Modo de Acesso: World Wide Web:
<http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/VI_semat/>.
ISSN 2358-4947

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo - Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	4
2. HISTÓRICO DO EVENTO	4
3. OBJETIVOS	5
4. PÚBLICO-ALVO	6
5. PERÍODO DE REALIZAÇÃO	6
6. PERIODICIDADE DO EVENTO	6
7. REALIZAÇÃO	6
8. COMISSÃO ORGANIZADORA	6
9. COMISSÃO DE APOIO	7
10. COMISSÃO CIENTÍFICA	7
11. COMISSÃO DE PARECERISTAS	8
12. CRONOGRAMA DO EVENTO	8
13. OFICINAS	11
14. AUTORES E TÍTULOS DOS TRABALHOS APRESENTADOS	18
15. TRABALHOS COMPLETOS E RESUMOS EXPANDIDOS	20

1. INTRODUÇÃO

De modo aos nossos acadêmicos assumirem uma conduta crítica e reflexiva em sua atuação profissional, a Semana da Matemática proporcionou espaços de formação diferenciados por meio de palestras, minicursos, atividades artísticas e culturais, entre outras ações, que abordaram temas atuais e relevantes para a formação inicial e continuada do professor de Matemática, e ainda, propiciou a aproximação entre acadêmicos, pesquisadores e professores de matemática, buscando ampliar a relação do curso com as demais instituições de ensino.

Nesse contexto, a VI SEMAT proporcionou a troca de saberes e a mobilização dos mesmos, por meio de atividades das quais os saberes matemáticos, os saberes profissionais e os saberes experienciais docentes foram compartilhados com a comunidade participante do evento.

2. HISTÓRICO DO EVENTO

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) surgiu no ano de 2013 com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da instituição proponente, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura.

A SEMAT já está em sua sexta edição, indicando uma consolidação na realização do evento, sendo esperado, principalmente, pelos acadêmicos do curso e docentes da região. A cada ano contamos com a participação de mais alunos e docentes de instituições da região de Toledo, como é o caso de instituições de Assis Chateaubriand, Cascavel, Foz do Iguaçu, Francisco Beltrão, Palotina, Pato Branco, etc.

Vários temas já foram discutidos e abordados nas semanas da matemática anteriores:

-
- “A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão” (V SEMAT – 2017);
 - “A Matemática na Harmonia da Natureza” (IV SEMAT – 2016);
 - “A matemática e seus caminhos: vencendo limites” (III SEMAT – 2015);
 - “Matemática em foco: integrando saberes, compartilhando experiências” (II SEMAT – 2014); e
 - “Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática” (I SEMAT – 2013).

Levando em consideração o contexto tecnológico em que vivemos e as características de nossa instituição, primeira universidade tecnológica do país, pensamos ser pertinente abordar na VI SEMAT a temática: “Ser professor que ensina matemática em uma era tecnológica”.

3. OBJETIVOS

A VI SEMAT teve como objetivo complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da instituição. Além disso, teve como propósito preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Ensino Médio, bem como formar professores e pesquisadores com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada, Matemática Pura e Estatística. Configurou-se também como uma oportunidade para acadêmicos, pós-graduandos, professores e pesquisadores engajarem-se em atividades de pesquisa e na divulgação de seus trabalhos.

O evento também propiciou, por meio das apresentações orais, a divulgação das pesquisas e trabalhos produzidos pelos acadêmicos e demais participantes. Além disso, a terceira edição do Sarau da Matemática viabilizou a participação dos docentes e acadêmicos em atividades artísticas e culturais.

4. PÚBLICO-ALVO

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

5. PERÍODO DE REALIZAÇÃO

O evento foi realizado entre os dias 07 e 11 maio de 2018.

6. PERIODICIDADE DO EVENTO

Esta foi a VI Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

7. REALIZAÇÃO

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pela portaria nº 143, de 17 de agosto de 2016.

8. COMISSÃO ORGANIZADORA

A Comissão Organizadora do evento (Quadro 1) foi composta por professores – Doutores e Mestres - pertencentes ao quadro docente da UTFPR, Câmpus Toledo e por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

Quadro 1 – Componentes da Comissão Organizadora do Evento

COMPONENTES	UNIVERSIDADE	
Prof. Dr. Emerson Tortola	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenadores
Profa. Ma. Jahina F. A. Hattori	UTFPR – câmpus Toledo	
Profa. Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR - câmpus Toledo	
Prof. Me. Ivan José Coser	UTFPR – câmpus Toledo	
Prof. Dr. Plinio L. D. Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	

Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR - câmpus Toledo
Prof. Dra. Vanessa Largo	UTFPR - câmpus Toledo

9. COMISSÃO DE APOIO

A Comissão de Apoio do evento (Quadro 2) foi composta por professores pertencentes ao quadro docente da UTFPR, Câmpus Toledo, e por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

Quadro 2 – Componentes da Comissão de Apoio

COMPONENTES	UNIVERSIDADE
Profa. Ma. Márcia Regina Piovesan	UTFPR – câmpus Toledo
Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira	UTFPR – câmpus Toledo
Daiane Maria Seibert	UTFPR – câmpus Toledo
Danieli Felichak	UTFPR – câmpus Toledo
Raphael Fernando de Melo	UTFPR – câmpus Toledo
Taís Francine da Silva	UTFPR – câmpus Toledo
Tawine Leticia Azarias	UTFPR – câmpus Toledo
Vitória FenilliVidaletti	UTFPR – câmpus Toledo
Marco Aurélio Tavares Amaral	UTFPR – câmpus Toledo
José Rodrigues dos Santos	UTFPR – câmpus Toledo
Patrícia Cristina Silva Amaral	UTFPR – câmpus Toledo

10. COMISSÃO CIENTÍFICA

A Comissão Científica do evento (Quadro 3) foi composta por professores pertencentes ao quadro docente da UTFPR, Câmpus Toledo.

Quadro 3 – Componentes da Comissão Científica do Evento

COMPONENTES	UNIVERSIDADE	
Prof. Dr. Plínio L. D. Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	Coordenadores
Profa. Dra. Vanessa Largo	UTFPR – câmpus Toledo	
Profa. Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR - câmpus Toledo	
Prof. Dr. Emerson Tortola	UTFPR – câmpus Toledo	
Prof. Me. Ivan José Coser	UTFPR – câmpus Toledo	
Profa. Ma. Jahina F. A. Hattori	UTFPR – câmpus Toledo	
Prof. Me. Loreci Zanardini	UTFPR - câmpus Toledo	
Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR - câmpus Toledo	

11. COMISSÃO DE PARECERISTAS

A Comissão de pareceristas do evento (Quadro 4) foi composta por professores pertencentes ao quadro docente da UTFPR, Câmpus Toledo e por professores externos.

Quadro 4 – Componentes da Comissão de pareceristas do Evento

COMPONENTES	UNIVERSIDADE	
Dr. Plinio L. D. Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	Presidente
Ma. Aline Keryn Pyn	UTFPR – câmpus Toledo	
Ma. Ana Paula Zanim	UEM – câmpus Maringá	
Dra. Araceli Ciottin de Marins	UTFPR – câmpus Toledo	
Dra. Daniela Trentin Nava	UTFPR – câmpus Toledo	
Dr. Diego Fogaça Carvalho	Unopar – unidade Londrina	
Dr. Fábio Alexandre Borges	Unespar – câmpus Campo Mourão	
Dr. Gustavo Henrique Dalposso	UTFPR – câmpus Toledo	
Ma. Heloisa Cristina da Silva	UTFPR – câmpus Toledo	
Me. Ivan Jose Coser	UTFPR – câmpus Toledo	
Ma. Jahina Fagundes de Assis	UTFPR – câmpus Toledo	
Dra. Jocelaine Cargnelutti	UTFPR – câmpus Toledo	
Me. Julio Cezar R. de Oliveira	SEED – Toledo	
Ma. Karen Carrilho da Silva Lira	UTFPR – câmpus Toledo	
Ma. Larissa Hagedorn Vieira	UTFPR – câmpus Pato Branco	
Me. Leandro Antunes	UTFPR – câmpus Toledo	
Ma. Marcia Regina Piovesan	UTFPR – câmpus Toledo	
Dra. Regiane Slongo Fagundes	UTFPR – câmpus Toledo	
Me. Renato Francisco Merli	UTFPR – câmpus Toledo	
Dr. Robson Willians Vinciguerra	UTFPR – câmpus Toledo	
Dr. Rodrigo M. Dias Andrade	UTFPR – câmpus Toledo	
Dra. Suellen Ribeiro P. Garcia	UTFPR – câmpus Toledo	
Dra. Veridiana Rezende	Unespar – câmpus Campo Mourão	
Dr. Wilian Francisco de Araujo	UTFPR – câmpus Toledo	

12. CRONOGRAMA DO EVENTO

A Tabela abaixo apresenta a grade básica da programação do Evento.

Data	Horário	Programação	Local
07/05/2018	18h00 - 19h00	Inscrições e entrega de material	Auditório 1
	19h00 - 20h00	Solenidade de abertura	

	20h00 - 21h30	Palestra de abertura	
	21h30 - 22h00	Lançamento de livro / Coffee break	
08/05/2018	19h00 - 20h30	Oficinas - Grupo 1	Salas de Aula
	20h30 - 21h00	Coffee break	Corredores
09/05/2018	21h00 - 22h30	Oficinas - Grupo 1	Salas de Aula
	08h30 - 10h00	Oficinas - Grupo 2	Salas de Aula
	10h00 - 10h30	Coffee break	Corredores
	10h30 - 12h00	Oficinas - Grupo 2	Salas de Aula
	13h30 - 15h00	Oficinas - Grupo 3	Salas de Aula
	15h00 - 15h30	Coffee break	Corredores
10/05/2018	15h30 - 17h00	Oficinas - Grupo 3	Salas de Aula
	19h00 - 21h00	Mesa de discussão	Auditório 1
	21h00 - 21h30	Coffee break	
	19h00 - 20h30	Oficinas - Grupo 4	Salas de Aula
11/05/2018	20h30 - 21h00	Coffee break	Corredores
	21h00 - 22h30	Oficinas - Grupo 4	Salas de Aula
11/05/2018	19h00 - 20h00	Comunicações orais	Salas de Aula
	20h00 - 23h00	III Sarau da Matemática	Ginásio

PALESTRA DE ABERTURA (AUDITÓRIO 1) – Ser professor que ensina Matemática em uma era tecnológica.

- **Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba** – Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro. Coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). Desenvolve pesquisas nas áreas de EaD online, Modelagem, Tecnologias Digitais, Vídeos e Metodologia de Pesquisa Qualitativa.

Download da apresentação:

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/VI_semat/UTFPR-ToledoV1.pdf

MESA DE DISCUSSÃO (AUDITÓRIO 1) – Práticas de pesquisa em Matemática e o uso da tecnologia

- **Prof. Dr. Rogério Martins Gomes** – Professor Titular da carreira de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG).

Resumo: O estudo de aspectos qualitativos sobre problemas mistos envolvendo equações diferenciais parciais tem sido objeto de estudos de vários pesquisadores em Matemática. Nesta área de pesquisa, a qual trata-se de uma subárea da Análise Matemática, estuda-se, entre outros aspectos, a existência e unicidade de solução e também fatos relativos ao comportamento de tais soluções. Quando as equações envolvidas descrevem aspectos de interesse em áreas aplicadas os problemas podem tornar-se mais interessantes de serem estudados. O desenvolvimento tecnológico dos últimos anos tem impulsionado significativamente o estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais. O principal objetivo desta palestra é mostrar, com um exemplo simples, que é fundamental o estudo de aspectos teóricos relativos a esta classe de problemas.

- **Prof. Dr. André Vicente** – Professor adjunto da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste-Cascavel).

Resumo: Aprendizado de máquina é um ramo da Ciência da Computação relacionado a criação de programas que propicia aos computadores a habilidade de aprender sem serem explicitamente programados. Nesta palestra serão apresentados os fundamentos básicos de Aprendizado de Máquina, com destaque para redes neurais artificiais. Além disso, serão apresentados alguns aspectos matemáticos que envolvem os algoritmos e técnicas de aprendizagem, bem como alguns dos principais desafios de pesquisa dentro da área.

- **Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas** – Professor da Universidade Estadual do Paraná (Unespar-Apucarana) e membro do Instituto GeoGebra de São Paulo. Atualmente é formador de professores na Unespar, coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática e coordena um projeto de formação de professores, intitulado: Curso de GeoGebra (atualmente na 13ª edição), com uma equipe formada por 90 profissionais de educação matemática de vários estados do Brasil.

Resumo: TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PERSPECTIVAS DE PRÁTICA E DE PESQUISA. Nessa apresentação discuto o tema tecnologia a partir de uma perspectiva sociotécnica e suas implicações para as ações docentes em sua prática educativa e, também, as implicações na produção de novos conhecimentos via pesquisa em Educação Matemática.

13. OFICINAS

Professor	Instituição	Tema	Data	Horário
Adriana Helena Borsoi	UTFPR – Londrina	Um Software de Videoanálise como Recurso Educacional Digital no Ensino de Matemática	08/05	19hs às 22h30min
Sheila R. Oro	UTFPR – Francisco Beltrão	Análise Estatística de Dados usando o R Studio	08/05	19hs às 22h30min
Loreni A. Ferreira Baldini	SEED – Apucarana	Práticas de Ensino Exploratório da Matemática na Educação Básica	08/05	19hs às 22h30min
Sérgio C. Dantas	UNESPAR – Apucarana	Construções Aritméticas e Geométricas com o comando Sequência do Geogebra	08/05	19hs às 22h30min
Luiz Carlos Scheitt	UTFPR – Pato Branco	Matemática Financeira utilizando HP – 12c	08/05	19hs às 22h30min
Loreni A. Ferreira Baldini	SEED – Apucarana	Práticas de Ensino Exploratório da Matemática na Educação Básica	09/05	08h30min às 12hs
Janecler A. A. Colombo, Cintia C. Bernardi e Klara G. Lusitani	UTFPR – Pato Branco	Jogos e Resolução de Problemas como Estratégia Metodológica para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais	09/05	08h30min às 12hs
Dorisvaldo R. da Silva	UNIOESTE – Cascavel	Tecnologias Assistivas para o Ensino de Matemática	09/05	13h30min às 17hs
Bárbara N. Palharini	UENP – Cornélio Procopio	Utilizando Modelagem Matemática em Sala de Aula	09/05	13h30min às 17hs
Louvane R. Bringmann	SEED – Toledo	Possibilidades Pedagógicas de Aplicativos para	10/05	19hs às

		Celulares nas Aulas de Matemática		22h30min
Marideisa Ita Refosco	SEED – Toledo	Materiais Didáticos para o Ensino do SND e Operações Elementares	10/05	19hs às 22h30min
Larissa H. Vieira	UTFPR – Pato Branco	Introdução a Módulos	10/05	19hs às 22h30min
Adriano G. de Santana	UTFPR – Toledo	Resolvendo Problemas por meio do Software Maxima	10/05	19hs às 22h30min
Rogério M. Gomes	CEFET – Belo Horizonte	Redes Neurais Artificiais	10/05	19hs às 22h30min
Márcia R. Piovesan e Marco A. R. Amaral	UTFPR – Toledo	A Arte de Construir Diagonais em Polígonos	10/05	19hs às 22h30min

Possibilidades Pedagógicas de aplicativos de celulares nas aulas de Matemática

Profa. Ma. Louvane Rosigler Bringmann, SEED – Toledo - louvane@seed.pr.gov.br

Resumo: O objetivo geral deste minicurso é explorar algumas possibilidades pedagógicas do uso do celular na sala de aula. A proposta consiste em articular a Resolução de Problemas e as Mídias Tecnológicas no ensino de Matemática. De maneira mais específica, propor atividades que envolvam os aplicativos de celular: QR-Code e Stop Motion.

Práticas de Ensino Exploratório da Matemática na Educação Básica

Profa. Dra. Loreni Aparecida Ferreira Baldini, SEED – Apucarana - loreni.baldini@gmail.com

Resumo: O Ensino Exploratório de Matemática defende que a aprendizagem decorre do trabalho realizado a partir de tarefas que não possuem uma estratégia ou procedimento imediato de resolução. Advoga, que tais tarefas precisam ser pensadas e resolvidas pelo professor antes de sua proposição em sala. Sobre esse aspecto é destacado que quando acontece o planejamento pelo professor, aumenta-se as chances de favorecer o envolvimento dos estudantes na aula, na elaboração de métodos próprios para resolver a tarefa e a produção de significados. Esse minicurso tem como objetivo discutir as práticas do professor, no Ensino Exploratório, que visam promover ou manter discussões produtivas em sala de aula: antecipar, propor a tarefa, monitorar, selecionar e sequenciar, discutir as resoluções e sistematizar as aprendizagens. Almeja-se que professores e futuros professores compreendam a importância de desenvolver aulas nessa perspectiva de ensino para viabilizar a constituição do conhecimento matemático por parte do aluno com a mediação do professor.

Resolvendo Problemas por meio do Software Maxima

Prof. Me. Adriano Gomes de Santana, UTFPR – Toledo - adrianosantana@utfpr.edu.br

Resumo: Ao se deparar pela primeira vez com a comunidade acadêmica, o calouro de graduação quase sempre sofre o impacto ao se deparar com conceitos e conteúdos novos, totalmente distintos do ensino médio, logo nas primeiras disciplinas do curso escolhi. Para as ciências exatas, é comum que este impacto ocorra em disciplinas como cálculo diferencial e integral, geometria analítica e álgebra linear. São nestas disciplinas

que o aluno conhece os conceitos de limite, derivadas e integrais de funções, álgebra de vetores, espaços vetoriais e transformações lineares.

Muitas vezes os livros didáticos utilizados nas disciplinas de cálculo, geometria analítica e álgebra linear são preenchidos dos mais diversos métodos de resolução de problemas e exemplos previamente estruturados, mas que dificilmente o estudante de deparará em um contexto real. Embora tais métodos e exemplos sejam importantes para o desenvolvimento intelectual do aluno, seu desenvolvimento pleno só é alcançado quando os conceitos teóricos são aliados ao desenvolvimento prático de sua formação.

A abordagem prática dos conceitos estudados nas disciplinas de cálculo diferencial e integral, geometria analítica e álgebra linear podem ser trabalhados desde as primeiras semanas de aulas com o auxílio da tecnologia. Softwares como MatLab, Mathematica e o Maxima, classificados como CAS (Computer Algebra System - Sistema de Computação Algébrica), são capazes de manipular expressões simbólicas e numérica de modo que possam resolver certas integrais, derivadas, equações polinomiais, equações diferenciais, sistemas lineares e não lineares de modo exato, possibilitando trabalhar com problemas mais complexos e com mais variáveis de forma rápida, algo inviável pelo método de lápis e papel no tempo limitado de uma aula.

Diferentemente do MatLab e do Mathematica, o Maxima (Lê-se: “Macysma”) é um software livre registrado sobre a licença GNU General Public License (GPL). Assim sendo, além de ser gratuito, o código fonte aberto do software reuni diversos entusiastas da computação de da matemática que desenvolvem ferramentas e reportam erros ao grupo que mantém o projeto. Para um melhor trabalho com o software, o Maxima possui uma interfase gráfica chamada wxMaxima.

Neste minicurso pretendemos serão apresentadas as principais ferramentas do Maxima utilizando sua interfase gráfica. Dentre tais ferramentas pretende-se trabalhar a resolução de diversos problemas das disciplinas de cálculo diferencial e integral, geometria analítica e álgebra linear envolvendo funções, limites, derivadas, integral, séries de potências, vetores, matrizes, equações polinomiais, equações diferenciais, curvas paramétricas, números complexos, métodos numéricos e gráficos. O objetivo deste minicurso é que o aluno veja a tecnologia, não apenas como uma ferramenta de resolver problemas, mas como algo que venha a lhe auxiliar em seus estudos, seja pela verificação de resultados ou na geração de imagem e equações para trabalhos acadêmicos.

Materiais didáticos para o ensino do SND e operações elementares

Profa. Ma. Marideisa Ita Refosco, SEED – Toledo - profdeisa@hotmail.com

Resumo: O eixo de Números e Operações é parte essencial do currículo de Matemática na Educação Básica e, não raramente, alunos das escolas brasileiras apresentam dificuldades com operações elementares.

Neste minicurso apresentaremos alguns recursos para o ensino do Sistema de Numeração Decimal e operações elementares. Organizaremos sequências didáticas para o ensino do SND, com o uso de materiais e recursos que favoreçam agrupamentos e trocas, sempre acompanhadas de registro gráfico específico. Na sequência, de forma breve, discutiremos o uso de alguns materiais para operações básicas.

A organização do trabalho compreende atividades em grupos. No primeiro momento será proposta uma brincadeira de roda com a turma toda para trabalhar agrupamentos, numa atividade conhecida como “sozinho, rodinha, corrente”. Após faremos as representações dos agrupamentos feitos na brincadeira com o uso de palitos de fósforo e caixas. Simultaneamente ao uso das caixinhas e palitos, procede-se o registro no “ábaco de papel” para posterior formalização do algoritmo de mudanças de bases. Ainda mostraremos o uso de cartões coloridos e o ábaco aberto como recursos possíveis de serem utilizados para os “jogos do nunca” na construção de agrupamentos não decimais, bem como do “ábaco de dedos”. Posteriormente, faremos agrupamentos decimais com a formalização do SND, acrescentando o material dourado e o cartaz de pregas. Após esta formalização, analisaremos o emprego de alguns materiais utilizados para o ensino das operações elementares.

Análise estatística de dados usando o RStudio

Profa. Dra. Sheila Regina Oro, UTFPR – Francisco Beltrão - profdeisa@hotmail.com

Resumo: Este minicurso visa dar aos participantes uma introdução ao sistema estatístico R para estudantes de graduação e pesquisadores. O objetivo principal é apresentar o ambiente de trabalho RStudio, com ênfase na compreensão de princípios básicos da linguagem, da estrutura e a forma de operar o programa para a realização de análises estatísticas de conjuntos de dados. O objetivo específico é ensinar os participantes a: iniciar, salvar e concluir uma sessão no R; instalar pacotes específicos para determinadas situações; importar arquivos de dados (.csv e .xls); obter estatísticas descritivas para uma ou mais variáveis; gerar gráficos exploratórios de análise de dados; aplicar testes de hipóteses para inferências sobre uma ou mais variáveis.

Introdução à Módulos

Profa. Ma. Larissa Hagedorn Vieira, UTFPR – Pato Branco - larissavieira@utfpr.edu.br

Resumo: O objetivo deste minicurso é explicar para os alunos que os conceitos teóricos da Álgebra já são usados por eles desde a época escolar. Porém, na disciplina de Álgebra esses conceitos são vistos de outra maneira, mais formal. O principal tópico discutido é a estrutura chamada módulo, que requer conhecimento sobre outras estruturas, a saber de grupos e anéis. A operação de um escalar real por uma matriz de ordem qualquer com entradas reais, na qual os alunos do Ensino Médio estudam, pode ser entendida dentro do contexto da teoria de módulos. A partir deste exemplo, o minicurso busca construir e exemplificar as estruturas, para definir módulo.

A arte de construir diagonais em polígonos

Profa. Ma. Marcia Regina Piovesan, UTFPR – Toledo - marciapiovesan@utfpr.edu.br

Marco Aurélio Tavares Amaral, UTFPR – Toledo - marco.2017@alunos.utfpr.edu.br

Raphael Kenji Kobayashi, UTFPR – Toledo - rkobayashi@alunos.utfpr.edu.br

Resumo: O ensino da matemática esteve por muito tempo vinculado a simples memorização de macetes e fórmulas, tornando uma disciplina que em si já é complexa, objeto de desinteresse dos alunos. Entretanto, dada a relevância de sua presença na matriz curricular da educação básica, sobretudo por ser presente em quase todos os dias da semana na vida dos estudantes, torna-se algo necessário de ser inserido no aprendizado, para que se alcance o objetivo da formação escolar. Dessa forma, quando se trabalha com possibilidades lúdicas no contexto do ensino da matemática, pode-se ter expectativas de melhor aproveitamento dos estudantes. Nesta breve abordagem prática-teórica, relataremos a importância do lúdico no processo de ensino, além de demonstrar a usabilidade da construção de diagonais em polígonos como estratégia para resolver situações desafiadoras envolvendo a geometria. A construção de diagonais em um material concreto permite o aluno criar reflexões e investigações matemáticas, possibilitando ao educador a flexibilidade de se trabalhar vários conteúdos utilizando o material como um atrativo para que o aluno possa, além de participar, ter um contato físico, permitindo um auto investigação por parte do aluno.

Redes Neurais Artificiais

Prof. Dr. Rogério Martins Gomes, CEFET - Belo Horizonte -
gomes.rogerio@gmail.com

Resumo: Fundamentos das redes neurais artificiais: aprendizado, associação, generalização, abstração, robustez; estruturas de interconexão; tipos de aprendizado: supervisionado e não supervisionado; perceptron, algoritmo de mínimos quadrados, algoritmo de retro-propagação de erros, estudo de casos selecionados envolvendo projeto, implementação, treinamento e avaliação de redes neurais artificiais utilizando ferramentas para simulação computacional, e.g., MATLAB ou similares.

14. AUTORES E TÍTULOS DOS TRABALHOS APRESENTADOS

Página	AUTORES	MODALIDADE	TÍTULOS DOS TRABALHOS
15	Andressa P. Cordeiro, Larissa H. Vieira e Wilian F. de Araujo	RE	Relações entre estruturas de R-módulos e R-R bimódulos
20	Caroline C. de Souza e Renato F. Merli	RE	Um relato de experiência com jogos no contexto de um clube da matemática
30	Eduardo K. Simo, Suellen R. P. Garcia	TC	Análise de componentes principais em dados de instrumentação de barragem de concreto
42	Gustavo H. Zanette e Emerson Tortola	TC	Um relato sobre a organização do laboratório de ensino de matemática da UTFPR – câmpus Toledo
51	José A. de Souza e Adriano G. de Santana	RE	Teste probabilístico de primalidade: Uma apresentação alternativa para a demonstração do teste de Miller
59	José L. L. Lavaqui e Renato F. Merli	TC	Um exemplo de novas padronagens de tecidos a partir de relações fuzzy e o uso do Matlab
70	José M. Ramos e Bárbara W. D. Novaes	RE	Frações equivalentes em livros didáticos de tempos passados: primeiros estudos
76	Milena Kozima, Augusto C. Becker e Regiane S. Fagundes	RE	Hábito de leitura no curso tecnologia em processos químicos
84	Paulo A. Fantinel e Regiane S. Fagundes	RE	Controle estatístico de processo na filetagem de tilápias: um estudo de caso
90	Simone Ribeiro e Larissa H. Vieira	RE	Normas usuais no \mathbb{R}^n
94	Thalisson W. R. Amâncio, Tuanny K. C. de Souza e Bárbara W. D. Novaes	RE	Nossa primeira experiência com a história da educação matemática: organização física do GHEMATPR
100	Vinícius F. Vasconcelos e Adriano G. de Santana	TC	Introdução aos números ordinais e números cardinais

Página	AUTORES	MODALIDADE	TÍTULOS DOS TRABALHOS
-----	Jahina F. de A. Hattori, Renato F. Merli, Caio J. K. Koyama e William K. P. Kamimura	PO	Uma experiência do clube da matemática realizada no âmbito do ensino médio

- * TC: Trabalho Completo
- * RE: Resumo Expandido
- * PO: Pôster

15. TRABALHOS COMPLETOS E RESUMOS EXPANDIDOS

Relações entre estruturas de R -módulos e R - R bimódulos

Andressa Paola Cordeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
andressap.ha@gmail.com

Larissa Hagedorn Vieira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
larissavieira@utfpr.edu.br

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
wilianfrancisco@gmail.com

1 Introdução

O presente trabalho foi desenvolvido a partir da seguinte dúvida surgida por meio do estudo teórico do livro Algebra, de Thomas Hungerford, para a Iniciação Científica desenvolvida na área de Álgebra de Hopf: qual a diferença entre R -módulos e R - R bimódulos? Tal questionamento originou-se por parte da acadêmica que desenvolve seus estudos sob a orientação da segunda autora e co-orientação do terceiro autor deste trabalho. O estudo em conjunto com tais professores vem mostrando resultados positivos no que tange ao entendimento do assunto abordado, e culminará na elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso da acadêmica. Desta forma, trazemos a seguir os resultados deste estudo, utilizando-nos de definições e exemplos necessários para um melhor entendimento acerca do que é abordado, tomando como base o livro anteriormente citado.

2 R -módulos

Definição

Seja R um anel. Um R -**módulo** (à esquerda) é um grupo abeliano aditivo A junto com uma função $R \times A \rightarrow A$ (a imagem de (r, a) sendo denotada por ra) tal que, $\forall r, s \in R$ e $a, b \in A$:

- $r(a + b) = ra + rb$;
- $(r + s)a = ra + sa$;
- $r(sa) = (rs)a$.

Se R possui um elemento identidade 1_R e

- $1_R a = a, \forall a \in A$,

então A é dito um **R -módulo unitário**. Se R é um anel de divisão, então um R -módulo unitário é chamado um **espaço vetorial** (à esquerda).

Analogamente se define um R -módulo à direita, onde os elementos do anel R são operados à direita dos elementos do grupo A . Se um anel é um R -módulo à esquerda e um R -módulo à direita para o mesmo anel R , dizemos simplesmente que A é um R -módulo.

Exemplo

Se R é um anel não unitário, todo grupo abeliano A pode ser considerado um R -módulo com a estrutura de módulo trivial definida por $ra = 0, \forall r \in R$ e $a \in A$. Se, contudo, R for um anel unitário, não seria satisfeita a condição $ra = a$, para $r = 1_R$.

Demonstração. Seja R um anel não unitário, e A um grupo abeliano qualquer, onde $ra = 0$. Tomando $a, a' \in A$ e $r, r' \in R$, temos:

- $r(a + a') = 0 = 0 + 0 = ra + ra'$;
- $(r + r')a = 0 = 0 + 0 = ra + r'a$;
- $(rr')a = 0 = r0 = r(r'a)$.

De forma análoga, faz-se com os elementos de R à direita. Portanto, as condições da definição são satisfeitas, e temos provado que A é um R -módulo com a estrutura de módulo trivial, qualquer que seja A . □

Exemplo

Todo grupo abeliano aditivo G é um \mathbb{Z} -módulo unitário, com $na = a + a + \dots + a$, n vezes, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $a \in G$.

Demonstração. Seja G um grupo abeliano e \mathbb{Z} o anel dos números inteiros, e a operação entre elementos de G e \mathbb{Z} como dada. Perceba que, para $a, b \in G$ e $m, n \in \mathbb{Z}$,

- $m(a + b) = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{m \text{ vezes}} + \underbrace{(b + b + \dots + b)}_{m \text{ vezes}} = ma + mb$;
- $ma + na = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{m \text{ vezes}} + \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n \text{ vezes}} = (m + n)a$
- $m(na) = m \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{(a + a + \dots + a) + (a + a + \dots + a) + \dots + (a + a + \dots + a)}_{m \text{ vezes}} = (mn)a$
- Como $1_{\mathbb{Z}} = 1$, tem-se que $1_{\mathbb{Z}}a = 1a = a$.

Analogamente se mostra tais propriedades com os elementos de \mathbb{Z} operados à direita dos elementos de G . Portanto, pela definição, G é um \mathbb{Z} -módulo. □

Exemplo

Se R é um anel comutativo e M é um R -módulo à esquerda, então M é também um R -módulo à direita, com a operação $m * r = rm, \forall m \in M$ e $\forall r \in R$.

Demonstração. De fato, se M é um R -módulo unitário à esquerda, temos que M é um grupo abeliano. Vamos mostrar agora que são satisfeitas as condições dadas na definição. Repare que, $\forall r, r_1, r_2 \in R$ e $\forall m, m_1, m_2 \in M$,

- Da primeira condição da definição e por R ser comutativo,

$$(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m = mr_1 + mr_2 = m(r_1 + r_2);$$

- Da segunda condição da definição e por R ser comutativo,

$$r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 = m_1r + m_2r = (m_1 + m_2)r;$$

- Da terceira condição da definição e por R ser comutativo,

$$m(r_1 r_2) = (r_1 r_2)m = (r_2 r_1)m = r_2(r_1 m) = (r_1 m)r_2 = (m r_1)r_2.$$

Temos portanto que, como todas as condições da definição são satisfeitas, se R é comutativo e M é um R -módulo à esquerda, então M é também um R -módulo à direita, considerando a operação dada. \square

3 R-S bimódulo

Definição

Sejam R e S anéis. Um grupo abeliano A é dito ser um R - S **bimódulo** se A for um R -módulo à esquerda, um S -módulo à direita, e ainda valer

$$r(as) = (ra)s, \forall a \in A, r \in R, s \in S.$$

Exemplo

Todo anel R é um R - R bimódulo.

Demonstração. Por definição, todo anel é um grupo abeliano se considerarmos sua primeira operação, e segue da própria definição de anel que as condições para R ser um R -módulo são satisfeitas. Ainda, como sua segunda operação é associativa, é ainda satisfeita a condição para R ser um R - R bimódulo. \square

4 Relações entre R-módulos e R-R bimódulos

A seguir, destacamos algumas relações existentes entre R -módulos e R - R bimódulos:

1. Se um grupo G juntamente com uma operação qualquer é um R - R bimódulo, então G é um R -módulo.

Demonstração. De fato, por definição, temos que G é um R -módulo à esquerda e um R -módulo à direita, logo, G é simplesmente dito um R -módulo. \square

2. Se G é um R -módulo e $ra = ar$, então G é um R - R bimódulo.

Demonstração. De fato, tal afirmação é verdadeira, pois $\forall r, s \in R$ e $a \in G$,

$$r(as) = r(sa) = (rs)a = a(rs) = (ar)s = (ra)s.$$

Portanto, é satisfeita a condição para G ser um R - R bimódulo. \square

3. Um grupo G ser um R -módulo (à direita e à esquerda) não implica que G é um R - R bimódulo.

Contra-exemplo.

Afim de mostrar isto, daremos um contra-exemplo. Tomemos $G = (M_n(\mathbb{R}), +)$, com a operação usual de adição de matrizes, e $R = (M_n(\mathbb{R}), +, \times)$ o anel das matrizes $n \times n$, $n \geq 2$ com as operações de adição e multiplicação usuais, ou seja, $m_1 \times m_2 = m_1 m_2$. Considere conhecido que G é grupo abeliano aditivo e que R é anel.

Observe que, pelo fato de as propriedades distributiva e associativa da multiplicação serem válidas para matrizes, as condições para G ser um R -módulo à esquerda, com a operação usual de multiplicação de matrizes, são satisfeitas.

Considere agora a função $*$ dada por $g_1 * m_1 = m_1^T g_1, \forall g_1 \in G$ e $m_1 \in R$, em que m_1^T representa a matriz transposta de m_1 . Vamos mostrar que, com a função $*$, G é um R -módulo à direita. Observe que as seguintes propriedades são satisfeitas, $\forall m_1, m_2 \in R$ e $g_1, g_2 \in G$:

- distributividade à direita com relação aos elementos de G :

$$(g_1 + g_2) * m_1 = m_1^T (g_1 + g_2) = m_1^T g_1 + m_1^T g_2 = g_1 * m_1 + g_2 * m_1$$

- distributividade à direita com relação aos elementos de R :

$$g_1 * (m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)^T g_1 = (m_1^T + m_2^T) g_1 = m_1^T g_1 + m_2^T g_1 = g_1 * m_1 + g_1 * m_2$$

- associatividade com relação aos elementos de R :

$$\begin{aligned} (g_1 * m_1) * m_2 &= (m_1^T g_1) * m_2 = m_2^T (m_1^T g_1) = (m_2^T m_1^T) g_1 = (m_1 m_2)^T g_1 \\ &= g_1 * (m_1 m_2) \end{aligned}$$

Por, de fato, serem válidas todas as propriedades acima, tem-se mostrado que, com a função $*$, G é um R -módulo à direita. Verifiquemos agora que G não é um R - R -bimódulo. Para que isso ocorra, ao menos uma das três propriedades abaixo não deve ser satisfeita:

- G ser um R -módulo à esquerda;
- G ser um R -módulo à direita;
- $\forall g_1 \in G$ e $m_1, m_2 \in R$, valer $m_1(g_1 * m_2) = (m_1 g_1) * m_2$.

As duas primeiras propriedades foram verificadas anteriormente, no primeiro caso, com a operação usual de multiplicação de matrizes, e no segundo, com a operação $*$ já definida. Mostremos então que a terceira propriedade não é verdade. Desenvolvendo ambos os lados da igualdade isoladamente, temos

$$m_1(g_1 * m_2) = m_1(m_2^T g_1) = (m_1 m_2^T) g_1$$

e

$$(m_1 g_1) * m_2 = m_2^T (m_1 g_1) = (m_2^T m_1) g_1$$

Repare que a igualdade $(m_1 m_2^T) g_1 = (m_2^T m_1) g_1$ só é verdadeira se a comutatividade da operação usual de multiplicação de matrizes for válida, o que não ocorre. Portanto, G não é um R - R -bimódulo. \square

5 Resultados

Por meio deste trabalho, pudemos perceber que, apesar de não serem evidentes, existem distinções entre R -módulos e R - R bimódulos que são fundamentais de serem percebidas para um melhor entendimento acerca do assunto. Estes estudos foram ainda submetidos à avaliação da organização da X Jornada de Álgebra, evento que aconteceu em abril de 2018, tendo sido aprovado para apresentação no formato de pôster. Este reconhecimento dos estudos realizados por meio da aceitação da divulgação dos mesmos em diferentes eventos é muito importante para a comunicação de resultados e o incentivo ao aprofundamento dos conteúdos e à continuidade do projeto.

Referências

- [1] HUNGERFORD, T.: **Algebra**. Springer. (1974), 169-203.

UM RELATO DE EXPERIÊNCIA COM JOGOS NO CONTEXTO DE UM CLUBE DA MATEMÁTICA

Caroline Cristina de Souza
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
carolinesouza.2000@alunos.utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Atualmente vivemos um momento de mudança em relação a educação no país, seja nos cortes do orçamento ou nas mudanças curriculares, como por exemplo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Ensino Médio Integral. Tais mudanças pretendem incentivar o aluno a permanecer mais tempo na escola. Nesse contexto, para que o aluno não fique “preso” apenas às salas de aula, projetos extraclasse como o Clube da Matemática são importantes formas de criar espaços de discussão para além do horário regular.

Assim, este artigo pretende apresentar um relato de experiência sobre algumas atividades que foram desenvolvidas em uma Escola Municipal da cidade de Toledo – Paraná, no âmbito do Clube da Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. De acordo com Oliveira e Cedro (2015, p. 19), o Clube de Matemática pode ser caracterizado como:

[...] um espaço de aprendizagem dos estudantes [...] e, concomitantemente, como espaço de formação docente. Ele é organizado tomando como premissa a ludicidade, como forma de motivar as crianças à apropriação dos conhecimentos matemáticos, e as ações e reflexões coletivas dos sujeitos, de modo a possibilitar o compartilhamento de ideias e de saberes entre os pares.

Foram selecionadas duas atividades aplicadas dentro de uma perspectiva metodológica de uso de Jogos. A primeira atividade foi o jogo NUNCA DEZ e a segunda atividade foi o jogo MATHDICE. Na sequência, apresentamos nossa perspectiva de uso de jogos em sala de aula, em seguida apresentamos e discutimos nossas atividades e, por fim, fazemos nossas conclusões.

JOGOS EM SALA DE AULA

A história de quando surgiram os jogos é um assunto muito vago, pois não existem muitos relatos e vestígios, mas em algumas pesquisas é possível ter uma breve ideia de como os jogos começaram a ser praticados na sala de aula.

Na antiguidade, segundo Almeida e Casarin (2002), com o objetivo de unir a família, as crianças participavam dos mesmos jogos e brincadeiras dos adultos. Estas relações eram observadas sobre dois enfoques, uma parte da sociedade aceitava, vendo-as como meio de crescimento social, já a outra parte era contrária, pois as identificavam aos prazeres carnavais, ao vício e ao azar.

A partir do século XII, os jogos eram disputados por dinheiro, sendo um atrativo a imoralidade. Para os moralistas da época o que devia ser preservado era a disciplina e a racionalidade dos costumes, fazendo com que quase fossem extintos principalmente da escola. Os humanistas do renascimento perceberam as possibilidades educativas dos jogos e passaram a utilizá-los. Os jogos foram divididos entre “bons” e “maus”, os maus foram proibidos e os bons passaram a ser utilizados para preservar a moralidade (WAJSKOP, 1995, p. 63).

Os jesuítas que perceberam a importância dos jogos para fins educativos, introduziram-no em seus programas escolares, porém antes fizeram algumas modificações. Os jogos ruins passaram a ser jogos disciplinados, divertidos e controlados, tornando-se jogos educativos, e os jogos bons, foram admitidos e recomendados, sendo considerados a partir de então como meios de educação tão estimáveis quanto os estudos (ARIÈS, 1981, p. 12).

Do século XII até o século XVII os mesmos jogos configuraram a vida social das crianças e dos adultos que pertenciam à elite. Esses jogos eram um dos principais meios para estreitar laços coletivos e unir as pessoas que eram da alta sociedade, com exceção dos cavaleiros que tinham seus próprios jogos privados e que não se misturavam aos demais membros da sociedade (ARIÈS, 1981).

Nos dois séculos posteriores, por meio do incentivo dos jesuítas ocorreu a popularização dos jogos educativos, que se tornaram veículo de divulgação e doutrinação popular, utilizados para o desempenho de papéis e a difusão de ideias.

A escola, por sua vez, apesar de estar intimamente ligada às crianças, apresenta-se historicamente alheia à presença do lúdico em atividades propostas por seus professores. A

revolução industrial, segundo Carvalho (1996, p.17), veio a efetivar esta dicotomia entre o brincar e a escola, pois no mundo do trabalho não há tempo nem espaço para o lúdico, já que este não é produtivo e não precisa ser valorizado. Nesta época, a escola passou a ser responsável pela formação da mão-de-obra necessária para as indústrias e, o brincar, não se "encaixava" nos modelos de produção, sendo então excluído das salas de aula.

Entretanto no início do século XX, com o advento da pedagogia moderna, a educação passou por mudanças conceituais e estruturais significativas para o educando, pois este passou a ser considerado como centro do processo de ensino e aprendizagem e o professor passou a ser um mediador entre o conhecimento e o educando. O processo pedagógico viu-se apoiado em novas propostas curriculares. Assim a didática escolar fundamentou-se em atividades lúdicas através de jogos e materiais concretos, os quais passaram a ser considerados um instrumento importante à prática docente e um elemento facilitador da aprendizagem.

Nesse contexto, Grando (2004, p. 18) destaca que “o jogo apresenta-se como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade da criança, dentre outras, de ‘movimento’, ação”. Na mesma linha, Miguel (2005, p. 390) afirma que

[...] o jogo exige o desenvolvimento da capacidade de atuar sozinho e em grupo, criando e obedecendo a regras, agindo e reagindo a estímulos próprios da ação. Como o jogo implica em ação, ao participar de um, a criança passa por uma etapa de desenvolvimento, adaptação e reconhecimento, e de desenvolvimento paulatino da noção de trabalho cooperativo – tão importante para a ação educativa na escola.

A utilização dos jogos em sala de aula e fora dela é uma possível alternativa para a melhoria da atenção dos alunos, pois propor “atividades lúdicas em sala de aula é importante porque elas podem colaborar com o desenvolvimento dos estudantes, estimulando, por exemplo, a imaginação” (ROSOLEN; SILVA, 2011, p. 1).

Sobre a utilização de jogos em sala de aula e fora dela, Grando afirma que

[...] o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio para o desenvolvimento do pensamento abstrato (GRANDO, 2004. p 18).

Quando o professor planeja levar um jogo (que em sua concepção inicial é apenas um jogo comercial), ele tem o papel de transformar esse jogo tradicional em um jogo pedagógico, ou seja, de tal modo que proporcione aprendizado. Para tal transformação, é preciso que o professor faça um plano de ensino que esteja vinculado ao projeto pedagógico

da escola. O objetivo deve ser definido por meio de uma proposta que desencadeie uma atividade de jogo. Nesse sentido, “o jogo transposto para o ensino passa a ser definido como jogo pedagógico” (GRANDO, 2004, p. 14).

Dentro do planejamento feito pelo professor, alguns critérios a respeito dos jogos escolhidos por ele devem ser avaliados. Dentre estes critérios, consideramos como mais importante que os jogos devam ser planejados para dois ou mais jogadores, ou seja, o jogo deve ser uma atividade essencialmente coletiva. Além disso, deve ter um objetivo a ser alcançado, de modo que se torne competitivo e ao mesmo tempo fundamental para a introdução e/ou retomada de conteúdos. E mais, no decorrer do jogo, os jogadores devem ter oportunidades para assumir papéis opostos e cooperativos, percebendo a importância de cada jogada e tendo consciência de que o jogo só acontece se ambos cumprirem com todas as regras que devem ser preestabelecidas (KAMII; KRULIK, *apud* SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p.11).

Além do mais, ao pensar em um determinado jogo, é extremamente importante que, antes de levá-lo para os alunos, o professor tenha total domínio do material. Esse domínio é fundamental para que o jogo se torne um facilitador. Se o professor levar um jogo do qual não possua muito conhecimento e, assim, não consiga explicar o jogo de forma que os alunos se interessem por ele, as chances de que o jogo não seja uma metodologia efetiva e ativa, no processo de ensino, são muito grandes.

Grando (2004) faz menção a educadores que apresentam planejamentos deficientes na elaboração e aplicação de jogos em sala de aula. Afirma que, alguns professores

[...] tentam utilizar jogos em sala de aula sem, no entanto, entender como dar encaminhamento ao trabalho depois do jogo em si. Também, nem sempre dispõe de subsídios que os auxiliem a explorar as possibilidades dos jogos e avaliar os efeitos dos mesmos em relação ao processo ensino-aprendizagem da Matemática (GRANDO, 2004, p. 14).

Assim, quando não é planejado de forma correta, o jogo passa a se tornar um obstáculo para o processo de ensino e de aprendizagem, perdendo assim seu objetivo: criar um ambiente propício para o aprendizado dos alunos. Dentro dessa perspectiva, a noção comum de que a ideia de jogo está associada a um material concreto, que muitas vezes utilizamos em sala de aula como um instrumento motivador para as aulas de Matemática, perde o sentido.

De acordo com Itacarambi (2013, p. 19),

[...] o jogo pode ser o elo entre o conhecimento do aluno e o conhecimento escolar. Neste sentido consideramos que é preciso proporcionar à criança

um instrumental, por meio de jogos, de modo que ela assimile as realidades intelectuais e as integre em sua forma de pensar e interpretar as mesmas.

Nas aulas de matemática, o uso de jogos sugere uma transformação significativa nos processos de ensino e aprendizagem, contrapondo o modelo tradicional de ensino. Porém, o objetivo dos jogos ou das atividades lúdicas, diferente do que muitos pensam não se resume apenas a facilitar que o aluno memorize o assunto abordado, mas sim, induzi-lo ao raciocínio, à reflexão, ao pensamento e, conseqüentemente à construção do seu conhecimento.

A utilização dos jogos lúdicos¹ auxilia o aluno durante a construção de novas estruturas mentais, pois este recurso permite que ele experimente vivências nas áreas cognitiva, afetiva e psicomotora. Trata-se de um instrumento importante para o professor mediar o processo da aprendizagem de uma forma mais atraente e dinâmica, observando os interesses e necessidades dos alunos; possibilitando assim, avanços qualitativos no processo de ensino e aprendizagem (ANCINELO; CALDEIRA, 2006, p. 1).

Grando (2004, p. 14) confirma que além da dificuldade de encontrar um jogo matemático adequado aos alunos, em muitos casos os educadores tentam utilizar jogos sem, no entanto, entender como seria possível dar um encaminhamento ao trabalho depois do jogo em si. Também, nem sempre dispõe de recursos que os auxiliem a explorar as possibilidades dos jogos e avaliar os efeitos dos mesmos em relação ao processo de ensino da Matemática.

Pensando nestes e em outros obstáculos, focamos este trabalho na sugestão de alguns jogos a serem utilizados em diferentes momentos do ensino de sistema de numeração decimal e das quatro operações fundamentais da matemática, pois entendemos que os jogos sugeridos estimulam o raciocínio na utilização das quatro operações e facilitam o entendimento do que é cada agrupamento das unidades no sistema de numeração decimal.

Esses jogos podem abrir caminhos para educadores que procuram por ideias para enriquecer suas aulas, permitindo que “o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento” (PARANÁ, 2008, p. 59).

¹Entendemos lúdico como tudo que for referente a um jogo que pretende ser criativo, divertido e proporcionar a aprendizagem.

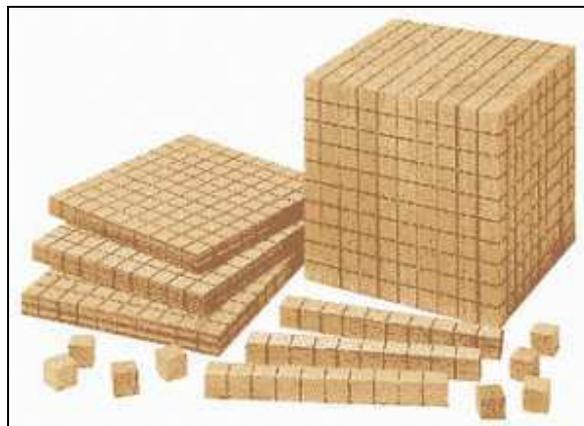
RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA

Com o intuito de auxiliar professores em possíveis atividades utilizando jogos em salas de aula e no contexto do Clube da Matemática, mostraremos dois jogos que foram trabalhados em uma turma de 10 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, em que cada aula teve duração de uma hora e meia. Esses jogos dizem respeito ao aprendizado do sistema de numeração decimal e das quatro operações fundamentais da matemática. A seguir apresentamos cada um deles, descrevendo os materiais utilizados, quais os objetivos e como pode ser trabalhado em sala de aula.

JOGO 1

Para a prática do primeiro jogo foi utilizado o Material Dourado, composto de: um cubo representando o milhar; 10 placas representando as centenas; 100 barras representando as dezenas; 500 cubinhos representando as unidades, todos feitos de madeira, conforme a Figura 1 a seguir.

Figura 1 - Material Dourado



Fonte: Gonçalves (2015)²

O objetivo é fazer com que o aluno aprenda o sistema de numeração decimal de uma maneira mais fácil, pois a visualização do Material Dourado permite que o aluno possa entender como ocorre a formação de cada agrupamento decimal, visando também a interação entre os alunos que executaram o jogo em grupo.

² GONÇALVES, Júlia Eugênia. **Aplicação do Material Dourado Montessoriano em Sala de Aula.** Disponível em: <<http://www.edupp.com.br/2015/05/aplicacao-do-material-dourado-montessoriano-em-sala-de-aula/>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

O jogo foi trabalhado da seguinte maneira: 1) no primeiro momento, dividimos os alunos em 5 grupos de 3 alunos cada, dando a cada grupo um Material Dourado e dois dados de 6 lados; 2) no segundo momento, explicamos como funcionaria o jogo. Cada aluno do grupo teria que lançar dois dados, o resultado da soma desses dados seria a quantidade de cubinhos individuais que o aluno deveria pegar. Quando o grupo atingisse a soma de 10 cubinhos, deveria trocar por uma barra, que representa a dezena. Quando o grupo atingisse a soma de 10 barras, deveria trocar por uma placa que representa uma centena. Quando o grupo atingisse 100 placas, deveria trocar por um cubo que representa o milhar.

O primeiro grupo que atingisse o cubo de milhar ganharia o jogo.

Em outra aula, foi utilizado o Material Dourado novamente com uma dinâmica um pouco diferente. O jogo funcionava da mesma forma como exposto anteriormente, porém ao invés do resultado dos dados lançados serem somados, foram multiplicados, pois o objetivo era que os alunos praticassem a tabuada de uma forma mais lúdica.

Jogo 2

Para a prática do segundo jogo foi utilizado o *Mathdice*, composto de: um dado de 12 lados (dodecaedro) e 5 dados de 6 lados, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Mathdice



Fonte: Ludopedia³

³ **MATH DICE.** Disponível em: <<https://www.ludopedia.com.br/jogo/math-dice>>. Acesso em: 02 abr. 2018.

O objetivo foi fazer com que o aluno estimulasse o raciocínio encontrando maneiras de achar as possíveis respostas, utilizando das quatro operações fundamentais da matemática.

O jogo (Figura 3) foi trabalhado da seguinte maneira: fizemos um círculo com os alunos, cada um deles teve a oportunidade de jogar os dados. Primeiro, o aluno da vez jogava o dodecaedro obtendo o “número alvo”. Em seguida, o aluno jogava os outros cinco dados normais (de 6 faces). Os números obtidos nesses dados deveriam ser utilizados para chegar ao “número alvo” obtido no dodecaedro. Para conseguir obter o resultado, os alunos precisavam fazer uso das quatro operações fundamentais da matemática (não necessariamente precisavam utilizar todas as operações para chegar à solução, podendo repeti-las. A única regra era que o número obtido em cada dado deve ser utilizado apenas uma vez).

Figura 3 - Jogo Mathdice



Fonte: Dos Autores

O número obtido pelo dodecaedro (número 7, conforme a Figura 3) é a resposta que os alunos deveriam encontrar utilizando os números obtidos pelos outros dados (1, 1, 1, 2, 6, de acordo com a Figura 3). Por exemplo:

$$6 + 2 = 8, 8 - 1 = 7, 7 \times 1 = 7, \frac{7}{1} = 7.$$

Observe que utilizamos as operações e não repetimos os números (o número 1 (um) se repete pelo fato de constar em três dados). Não jogamos esse jogo com intuito de ganhar, mas sim de descobrir mais de uma forma de encontrar a mesma resposta,

objetivando que os alunos pensassem como uma equipe, de modo a solucionar diversos tipos de problemas colaborativamente.

DISCUSSÕES FINAIS

O jogo, como ferramenta pedagógica, desafia os alunos, permitindo a apresentação dos conteúdos de modo atrativo, e estimulando a criatividade na elaboração de estratégias e reforçando a persistência na busca de uma solução, “motivada pela vontade de ganhar a partida. Além disso, ele simula situações que exigem soluções pontuais e imediatas, levando o aluno ao planejamento de ações” (ITACARAMBI, 2013, p. 15).

A elaboração de estratégias está vinculada a aprendizagem da Matemática, pois elas possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar (PARANÁ, 2008, p. 45), o que de certo modo, supera o ensino baseado somente no desenvolvimento de habilidades, como por exemplo, calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios.

Assim, considerando a importância assumida pelos jogos no ensino de matemática e considerando a importância do estudo de sistema de numeração decimal e o uso das quatro operações fundamentais da matemática na Educação Básica, esse trabalho apresentou alguns jogos elaborados e aplicados no âmbito do Clube da Matemática. Intenta-se que esse relato possa contribuir para que outros professores de matemática possam utilizar os jogos aqui descritos na sala de aula regular ou em outros contextos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Damiana Machado; CASARIN, Melânia de Melo. A Importância do Brincar para a Construção do Conhecimento na Educação Infantil. **Cadernos de Educação Especial**, Santa Maria, vol. 1, n.19, 2002. Disponível em: <<http://coralx.ufsm.br/revce/ceesp/2002/01/a6.htm>>. Acesso em: 04 de abril. 2018.
- ANCINELO, Patrícia Raffim; CALDEIRA, Leila Palma. O papel dos jogos lúdicos na educação contemporânea. In: JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 12, 2006, Santa Maria, **Anais...**Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2006. Disponível em: <<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/pedagogia/O%20PAP>>

EL%20DOS%20JOGOS%20L%C3%9ADICOS%20NA%20EDUCA%C3%87%C3%83O%20CONTEMPOR%C3%82NEA.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2018.

ARIÈS, Philippe. **História Social da Criança e da Família**. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

CARVALHO, Nazaré Cristina. Lúdico: Sujeito proibido de entrar na escola. **Motrivivência**, Florianópolis, n. 9, p. 300-307, jan. 1996. ISSN 2175-8042. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/motrivivencia/article/view/5849>>. Acesso em: 04 abr. 2018.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **O Jogo como Recurso Pedagógico**: para trabalhar matemática na escola básica. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2013.

MIGUEL, José Carlos. O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. In: PINHO, Sheila Zambello de; SAGLIETTI, José Roberto Corrêa (Org.). **Núcleo de Ensino**, PROGRAD – UNESP, São Paulo: Editora UNESP, 2005, v. 1, p. 375 – 394.

OLIVEIRA, D. C. de; CEDRO, W. L. Clube de Matemática: a singularidade na organização do ensino pelos professores de Goiânia. In: CEDRO, W. L. (org.). **Clube de Matemática: vivências, experiências e reflexões**. 1. Ed. Curitiba, PR: CRV, 2015.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

ROSOLEN, Camila; SILVA, Marcia Cristina Nagy. Jogos: uma maneira divertida de resolver divisões. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, XI., 2011, Apucarana, **Anais...** Apucarana, 2011.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano** (Série Cadernos do Mathema – Ensino Fundamental). Vol.2, Porto Alegre: Artmed, 2007.

WAJSKOP, Gisela. O brincar na educação infantil. **Caderno de Pesquisa**, São Paulo, n. 92, fev., 1995.

Análise de Componentes Principais em Dados de Instrumentação de Barragem de Concreto

Eduardo Kenji Simo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
eduardo.simo96@hotmail.com

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
suellenpardo@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

A técnica análise de componentes principais (ACP) é uma ferramenta da análise multivariada, utilizada para redimensionar os dados, reduzindo o número de variáveis. Além disso, a aplicação da técnica pode facilitar a interpretação de como as variáveis se relacionam. Assim, a aplicação da técnica facilita a leitura e contribui para um melhor entendimento do problema, diminuindo o trabalho do pesquisador (SANTO, 2012).

A ACP é indicada para situações em que os dados originais são correlacionados entre si, assim a redução no número de variáveis é mais significativa. O pesquisador é que decide quantas componentes considerar, que serão as novas variáveis, combinações lineares das variáveis originais. De fato, o pesquisador avalia qual proporção de variabilidade dos dados originais deve ser explicada pela novas variáveis, escolhendo entre parcimônia ou maior variabilidade explicada.

Na literatura, encontram-se muitas aplicações da técnica em diferentes contextos, por exemplo, Santo (2012) utiliza a ACP para realizar a compressão de imagens digitais, a fim de reduzir o espaço de armazenamento das imagens sem perder características importantes que viabilizam os diagnósticos.

A ACP também pode ser utilizada para classificar quais características do solo são as mais significativas em sua textura, pois a textura do solo influencia na taxa de infiltração e armazenamento da água, na aeração, na facilidade de mecanização e na distribuição de determinados nutrientes no solo (MAESTRE, et al., 2010).

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a aplicação da técnica análise de componentes principais em dados reais da instrumentação de uma barragem de concreto. Os dados são de 14 variáveis que são leituras de 7 sensores do instrumento pêndulo direto e invertido, instalado em um bloco de concreto. Após a aplicação da técnica, as 14 variáveis originais foram redimensionadas para 3 componentes principais. Mesmo após considerável redução do número de variáveis a serem consideradas em análises estatísticas futuras, a representatividade da variabilidade total dos dados originais foi de aproximadamente 85%, evidenciando que a utilização da técnica é apropriada.

2 A TÉCNICA DE ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

2.1 Conceitos Importantes

Se faz necessária a definição de alguns conceitos importantes que são utilizados na aplicação da ACP, como as definições de correlação, matriz de correlação e o teorema da decomposição espectral. As definições a seguir foram retiradas do livro da Mingoti (2005).

Correlação: O coeficiente de correlação entre a i -ésima variável X_i e a j -ésima variável X_j do vetor X é dada por

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

onde $-1 < \rho < 1 \forall i = 1, 2, \dots, p$. Quando $i = j$ tem-se $\rho_{ii} = 1$. Logo, a correlação é uma medida mais adequada para medir o grau de relacionamento linear entre duas variáveis. A interpretação é feita da seguinte maneira: quanto mais próximo de 1, indica-se que existe um relacionamento linear positivo entre as variáveis (crescimento), quanto mais próximo de -1, indica-se que existe um relacionamento linear negativo (decréscimo) e, por fim, quanto mais próximo de zero, indica-se um não relacionamento linear entre as variáveis. É importante ressaltar que essa medida é adimensional o que é interessante quando se trabalha com variáveis de unidades de medidas diferentes.

Matriz de correlação: A matriz de correlação do vetor aleatório X é dada por:

$$P_{p \times p} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, seja a mesma matriz considerada no exemplo da matriz de covariâncias $\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, então $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$ e $\rho_{12} = \rho_{21} = \frac{-2}{\sqrt{8 \times 5}} = -0,3162$; logo $P_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -0,3162 \\ -0,3162 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema da Decomposição Espectral: Este teorema relaciona a matriz de covariâncias com seus autovalores e autovetores. Este teorema da álgebra linear é de fundamental importância em estatística multivariada. Seja $\Sigma_{p \times p}$ uma matriz de covariâncias, então existe uma matriz ortogonal $O_{p \times p}$, isto é, $O'O = OO' = I_{p \times p}$, tal que:

$$O'\Sigma O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} = \Lambda$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ são autovalores ordenados em ordem crescente da matriz $\Sigma_{p \times p}$. A matriz $\Sigma_{p \times p}$ é semelhante à matriz $\Lambda_{p \times p}$, o que implica:

i) $|\Sigma_{p \times p}| = |\Lambda_{p \times p}| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$

ii) $\text{traço}(\Sigma_{p \times p}) = \text{traço}(\Lambda_{p \times p}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$

A i -ésima coluna da matriz $O_{p \times p}$ é o autovetor normalizado e_i correspondente ao autovalor λ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, que é denotado por:

$$e_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \\ e_{i2} \\ \vdots \\ e_{ip} \end{bmatrix}$$

então a matriz O é dada por $O = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_p]$ e pelo teorema da decomposição espectral tem-se a igualdade

$$\Sigma_{p \times p} = O\Lambda O' = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i e_i'$$

com e_i unitário e os autovetores dois a dois ortogonais, ou seja, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ (\langle, \rangle denota produto interno), pela ortogonalidade da matriz $O_{p \times p}$.

Na próxima seção, apresenta-se como são obtidas as novas variáveis, as componentes principais, que são combinações lineares das variáveis originais.

2.2 Estimação das componentes principais via matriz de correlação

Para obtenção das componentes principais, pode-se utilizar tanto a matriz de covariância ($\sum_{p \times p}$) quanto a matriz de correlação ($P_{p \times p}$). Quando alguma transformação é aplicada aos dados, como por exemplo a padronização¹, pode-se utilizar a matriz de covariância nos dados padronizados, o que é equivalente a utilizar a matriz de correlação das variáveis originais (MINGOTI, 2005).

A matriz de covariância só é utilizada quando não há muita discrepância entre as variâncias. Essa discrepância, normalmente é causada pelas diferentes unidades de medidas das variáveis. Para amenizar esse problema pode-se utilizar a matriz de covariâncias dos dados padronizados ou simplesmente utilizar a matriz de correlação ($P_{p \times p}$). O procedimento apresentado é o mesmo definido para a matriz de covariância, calcula-se seus autovalores (λ_i) e seus correspondentes autovetores normalizados (e_i), $i = 1, 2, \dots, p$.

A j -ésima componente principal da matriz $P_{p \times p}$ dos dados padronizados é dada por:

$$Y_j = e_j' Z = e_{j1} Z_1 + e_{j2} Z_2 + \dots + e_{jp} Z_p \quad (1)$$

sendo que:

- A variância de Y_j é igual a λ_j , $j = 1, 2, \dots, p$, e a covariância entre Y_j e Y_k é igual a zero, para qualquer $j \neq k$;
- A correlação entre a componente Y_j e a variável padronizada Z_i é igual a:

$$r_{Y_j, Z_i} = r_{Y_j, X_i} = e_{ji} \sqrt{\lambda_j}$$

e, conseqüentemente, as variáveis Z_i com os maiores coeficientes na componente principal Y_j são as mais correlacionadas com a componente;

- A variância total do vetor aleatório $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_p)'$ é igual ao traço da matriz $P_{p \times p}$, que é igual ao valor p , ou seja, o número de variáveis medidas em cada elemento amostra. Portanto, a proporção da variância total explicada pela j -ésima componente principal é igual a $\frac{\lambda_j}{p}$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Na prática, a matriz de correlação ($P_{p \times p}$) é estimada pela matriz de correlação amostral $R_{p \times p}$.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Barragem de Itaipu e Dados da Instrumentação

A Usina Hidrelétrica de Itaipu fica localizada no Rio Paraná, nas cidades de Foz do Iguaçu, no Brasil, e Ciudad del Este, no Paraguai, e é administrada pelos dois países. Foi construída entre os anos de 1975 e 1984 e está em atividade até os dias de hoje. Tem 7919 metros de extensão e altura máxima de 196 metros, equivalente a um prédio de 65 andares. A usina tem uma potência de geração de 14000 MW, líder brasileira e vice-líder mundial na capacidade de geração de energia, em 2016 produziu mais de 100 milhões de kWh, determinando um novo recorde mundial de produção anual.

¹Essa padronização é dada por: $Z_i = \frac{(X_i - \mu_i)}{\sigma_i}$, onde $E(X_i) = \mu_i$ é o vetor de médias da variável X_i e $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, \dots, p$.

As principais componentes da usina são: Dique lateral direito; Vertedor; Barragem lateral direita; Barragem principal e tomada d'água; Casa de força; Barragem na margem esquerda; Barragem lateral esquerda; Dique lateral esquerdo; Dique complementar de Hernandarias; Subestações seccionadoras; Obras para navegação (terminais e conexões terrestres, eclusas, canais, elevadores, e seus similares) (ITAIPU BINACIONAL, 2010). Mais detalhes veja a Figura 1.



Figura 1: Planta da Barragem.

Fonte: ITAIPU Binacional (2017).

A Itaipu têm o auxílio de 2.400 instrumentos (1.358 no concreto, 881 nas fundações e 161 para geodesia), sendo 270 automatizados, e 5.295 drenos (949 no concreto e 4.346 nas fundações) para acompanhar o desempenho das estruturas de concreto e fundações (ITAIPU BINACIONAL, 2010).

Na Figura 2 são representadas as instrumentações de um bloco chave da barragem principal. Um bloco-chave é um bloco altamente instrumentado estrategicamente, por ser considerado mais relevante mediante aspectos de engenharia.

Este trabalho utilizou a base de dados do Sistema de Gestão de Medições (GSM) da barragem de Itaipu, disponibilizada pelo Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens (CEASB). O conjunto de dados é composto pelos valores mensurados pelos sensores dos pêndulos direto e invertido instalados ao longo do bloco F19/20 da barragem de concreto e esses valores foram aferidos manualmente pelos técnicos e engenheiros de Itaipu. Tais instrumentos mensuram os deslocamentos horizontais (relativos) do bloco de concreto.

O pêndulo direto possui vários sensores que vão da crista da barragem até o contato concreto-rocha. Segundo Silveira (2003 apud GARCIA, 2016, p.22), este instrumento é utilizado na medição dos deslocamentos horizontais da crista da barragem, que são afetados pelas seguintes grandezas físicas:

- Deflexão da estrutura de concreto;
- Rotação da base da estrutura, devido à deformabilidade da fundação;
- Influências térmicas ambientais.

As medições de deslocamento desses pêndulos são relativos, pois eles são instalados em vários pontos da estrutura.

Os pêndulos invertidos são instalados na fundação da barragem, em um ponto suficientemente profundo para ser considerado ponto fixo e vão até o contato concreto-rocha. Estes pêndulos calculam

os deslocamentos horizontais da base da barragem em relação a pontos profundos da fundação (ITAIPU BINACIONAL, 2010).

As leituras consideradas foram entre janeiro de 2000 até junho de 2015 com periodicidade mensal, ou seja, dispõe-se de uma amostra de 186 observações ($n = 186$). Existem 7 sensores dos pêndulos, 6 sensores do pêndulo direto (COF17, COF18, COF19, COF20, COF21 e COF22) dispostos ao longo da estrutura do bloco e, 1 sensor do pêndulo invertido (COF23) localizado na base do bloco. Assim, tem-se 14 variáveis, pois os deslocamentos são na direção x, ou seja, no sentido do fluxo (direção montante-jusante) e, na direção y, perpendicular ao fluxo (margem direita-esquerda). Portanto, a amostra é uma matriz de dimensão 186x14.

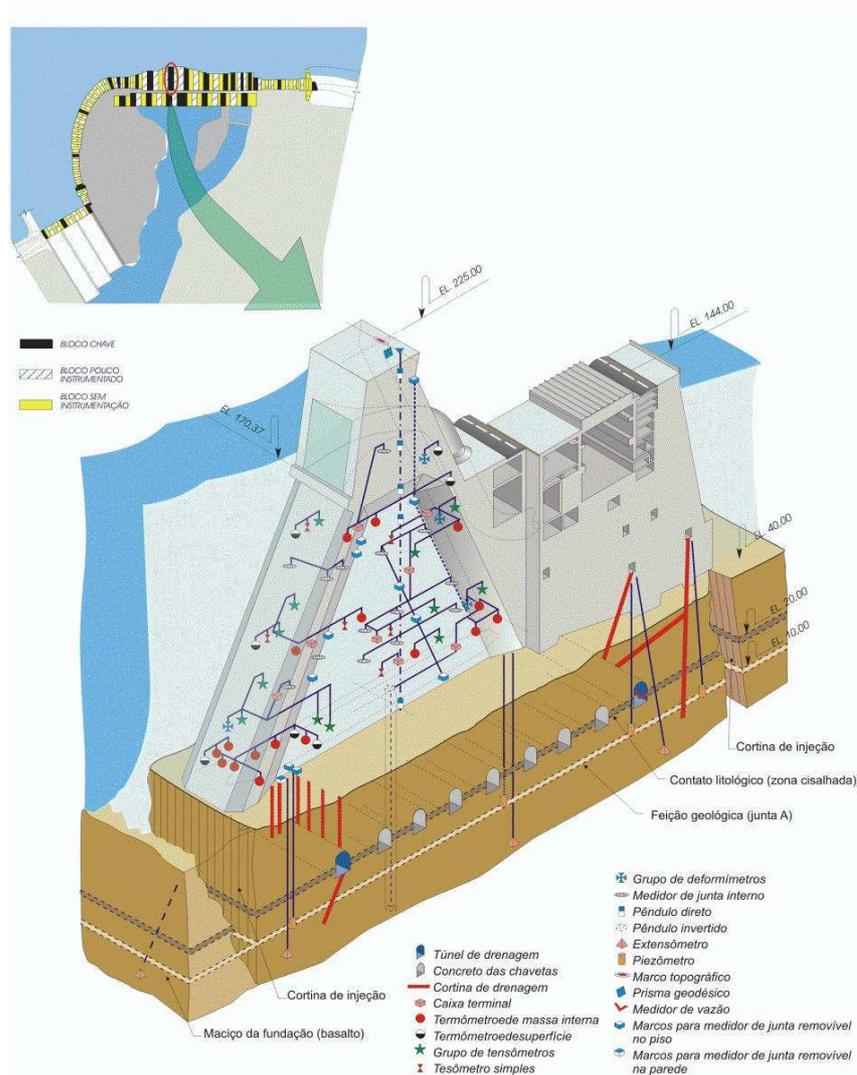


Figura 2: Representação de um Bloco Chave da Barragem Principal e sua Instrumentação.

Fonte: ITAIPU Binacional (2010).

3.2 Resultados da Aplicação nos Dados da Usina Hidrelétrica de Itaipu

A ACP foi aplicada nas 14 variáveis que são referentes a 7 sensores dos pêndulos direto e invertido: COF17X, COF17Y, COF18X, COF18Y, COF19X, COF19Y, COF20X, COF20Y, COF21X, COF21Y, COF22X, COF22Y, COF23X e COF23Y.

A Tabela 1 mostra as médias, medianas, desvio padrão, valores mínimos e máximos das 14 variáveis. Nota-se que a variável COF22X registram os maiores movimentos da barragem, já as variáveis COF18Y e COF21Y registram os menores movimentos da barragem. As maiores dispersões entre os dados são da variável COF21X, e as menores são da variável COF23Y.

Tabela 1: Estatística Descritiva da Variáveis

Variável	Média	Mediana	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
COF17X	2,12	2,15	0,30	1,20	2,80
COF17Y	2,19	2,20	0,27	1,60	2,80
COF18X	3,01	3,05	0,78	1,10	4,50
COF18Y	0,88	0,90	0,23	0,50	1,60
COF19X	5,24	5,25	1,21	2,40	7,30
COF19Y	-0,84	-0,90	0,40	-2,00	0,10
COF20X	7,75	7,80	1,31	4,40	10,10
COF20Y	-1,24	-1,2	0,42	-2,30	-0,30
COF21X	10,24	10,30	1,37	6,50	12,70
COF21Y	-0,79	-0,90	0,41	-1,60	0,10
COF22X	15,21	15,35	1,64	11,10	18,30
COF22Y	-1,97	-2,00	0,24	-2,40	-1,00
COF23X	3,72	3,70	0,23	3,20	4,30
COF23Y	1,86	1,90	0,14	1,40	2,20

As Figuras 3 e 4 apresentam gráficos box-plot. Por conveniência foi decidido separar o gráfico box-plot em dois, pois, utilizando apenas um gráfico, a leitura do mesmo estava difícil, devido a algumas variáveis terem amplitudes pequenas. Dessa forma, separou-se os gráficos observando as médias das variáveis.

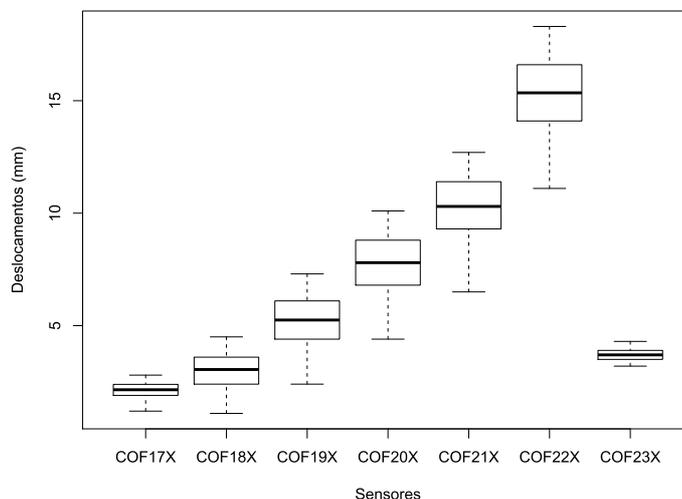


Figura 3: Gráfico box-plot

Fonte: O autor (2017).

Na figura 3, pode-se notar que todas as variáveis são referentes aos sensores com deslocamento na direção x. A variável com maior amplitude é a COF22X, seguida das variáveis COF21X, COF20X, COF19X, COF18X e COF17X nesta mesma ordem, todas essas variáveis representam os deslocamentos dos pêndulos direto. A variável de menor amplitude é a COF23X, que representa o deslocamento do pêndulo invertido.

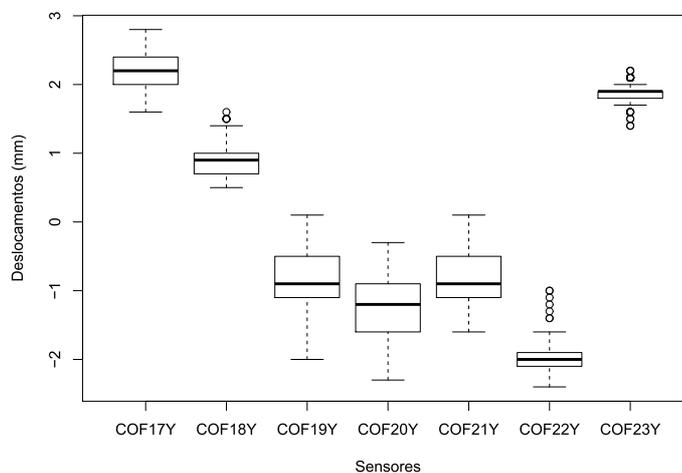


Figura 4: Gráfico box-plot

Fonte: O autor (2017).

Na figura 4, pode-se notar que todas as variáveis são referentes aos sensores com deslocamento na direção y. Com auxílio do gráfico, é possível notar que as variáveis COF18Y, COF22Y e COF23Y possuem outliers (pontos discrepantes). As variáveis com maior amplitude são COF19Y, COF20Y e COF21Y (em ordem decrescente), e a variável com menor amplitude é a COF23Y, que representa o deslocamento do pêndulo invertido.

A Tabela 2 apresenta os cinco primeiros autovetores associados aos cinco primeiros autovalores em ordem decrescente. Os escalares dos autovetores representam os pesos das variáveis originais em cada

uma das componentes principais. Quanto maior o valor numérico referente à variável, mais importante ela é na componente principal. Apresenta-se apenas as cinco primeiras componentes principais, as demais componentes não são exibidas na Tabela 2 por apresentarem pesos muito pequeno.

Tabela 2: Autovetores da Matriz de Correlação

Variável	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4	CP 5
1	-0,301	-0,113	0,013	-0,215	0,889
2	-0,087	0,353	-0,438	-0,055	-0,034
3	-0,375	-0,046	0,131	-0,138	-0,078
4	-0,237	-0,193	-0,452	-0,094	-0,123
5	-0,378	0,033	0,099	-0,073	-0,148
6	0,107	-0,441	-0,154	0,143	0,099
7	-0,384	0,006	0,081	-0,074	-0,078
8	0,147	-0,438	-0,079	0,118	0,096
9	-0,382	0,013	0,064	-0,050	-0,129
10	-0,052	-0,479	0,049	0,026	-0,055
11	-0,378	-0,071	0,048	-0,021	-0,132
12	-0,121	-0,265	-0,560	0,054	-0,171
13	-0,046	0,360	-0,436	0,269	0,266
14	-0,267	0,019	0,167	0,894	0,061

Nota-se que a primeira CP está mais relacionada com a terceira, quinta, sétima, nona, décima primeira e décima quarta variáveis originais, ou seja, mais relacionada com as variáveis COF18X, COF19X, COF20X, COF21X, COF22X e COF23Y. Nota-se que são todos sensores do pêndulo direto cujos deslocamentos são na direção x, ou seja, na direção do fluxo do reservatório. A segunda CP está mais relacionada com a sexta, oitava e décima variáveis originais, ou seja, com as variáveis COF19Y, COF20Y e COF21Y, sensores do pêndulo direto cujos deslocamentos são na direção y, ou seja, na direção normal ao fluxo do reservatório. A terceira CP está mais relacionada com a segunda, quarta, décima segunda e décima terceira variáveis originais, ou seja, com as variáveis COF17Y, COF18Y, COF22Y e COF23X, ou seja, deslocamentos na direção y dos sensores do pêndulo direto e sensor do pêndulo invertido cujo deslocamento é na direção x. A quarta e quinta CP estão mais relacionadas, respectivamente, pela última (COF23Y) e primeira (COF17X) variável original. Considera-se desnecessária a inclusão de duas outras componentes por critério de parcimônia, assim a primeira variável COF17X, ou seja, o sensor do pêndulo direto cujo deslocamento é na direção x e a última variável COF23Y, o sensor do pêndulo invertido cujo deslocamento é na direção y, são consideradas como relevantes na primeira componente principal. Esta escolha de considerar apenas as três primeiras componentes se justifica novamente a seguir, pelos critérios de proporção de variância explicada pelas componentes e também pelo critério de Kaiser.

A Tabela 3 representa cada autovalor das dez primeiras componentes principais, bem como a variância explicada e acumulada de cada uma das componentes apresentadas.

Percebe-se que as três primeiras CP tem um valor considerável de variância explicada das variáveis originais, em que elas representam 47,00%, 28,08% e 10,61% respectivamente, e juntas somam um total de 85,70% de variância explicada das variáveis originais. Portanto, a técnica se mostra eficiente por reduzir o número de variáveis de um trabalho posterior de análise de dados, ou seja, antes o pesquisador precisava analisar 14 variáveis originais, agora é possível analisar apenas três variáveis que são as três componentes principais que representam bem a variabilidade dos dados. Para definir o número

de CP adequado pode-se utilizar também o critério de Kaiser, no qual todas as componentes principais referentes aos autovalores λ menores ou iguais a 1 são descartadas. Utiliza-se o gráfico *Scree-plot* (Figura 5) para auxiliar nessa decisão.

Tabela 3: Autovalores, variância explicada e variância acumulada associadas às componentes principais

CP	λ_i	% Explicada	% Acumulada
1	6,58	47,00	47,00
2	3,93	28,08	75,08
3	1,48	10,61	85,70
4	0,58	4,16	89,86
5	0,39	2,83	92,70
6	0,31	2,25	94,95
7	0,26	1,86	96,82
8	0,19	1,40	98,23
9	0,09	0,68	98,92
10	0,07	0,53	99,45

Pela tabela 3 é possível notar que apenas as três primeiras componentes principais tem valor de λ maior que 1. Assim, pelo critério de Kaiser, apenas essas componentes seriam utilizadas e as demais seriam descartadas.

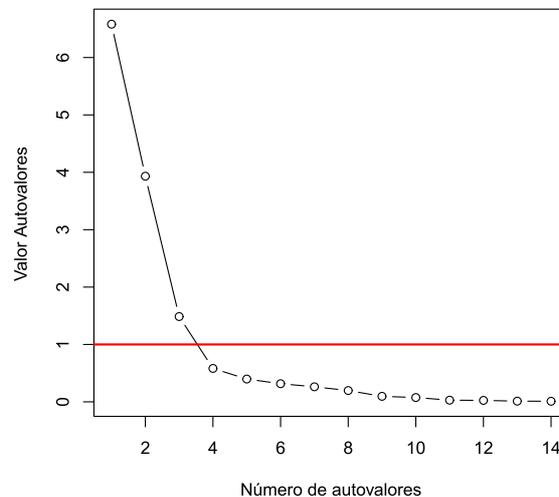


Figura 5: Gráfico Scree-plot

Fonte: O autor (2017).

O gráfico scree-plot também auxiliou na decisão do número de componentes a serem utilizadas, pois ao plotar os pontos para este gráfico e traçar uma reta onde os valores dos λ são 1, a visualização de quantas são as componentes é facilitada.

Portanto, das 14 variáveis originais, apenas três componentes principais foram consideradas mediante todos esses critérios. As componentes são dadas pelas seguintes combinações lineares:

$$CP_j = [v_j]' * [Z] = e_{j1}Z_1 + \dots + e_{j14}Z_{14}$$

onde $[v_j]$ é o autovetor normalizado e $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma_i}$, ou seja, as componentes principais são combinações lineares das variáveis padronizadas. Sejam

$$Z = \begin{bmatrix} zCOF17X \\ zCOF17Y \\ zCOF18X \\ zCOF18Y \\ zCOF19X \\ zCOF19Y \\ zCOF20X \\ zCOF20Y \\ zCOF21X \\ zCOF21Y \\ zCOF22X \\ zCOF22Y \\ zCOF23X \\ zCOF23Y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_1 = \begin{bmatrix} -0,301 \\ -0,087 \\ -0,375 \\ -0,237 \\ -0,377 \\ 0,106 \\ -0,384 \\ 0,146 \\ -0,381 \\ -0,052 \\ -0,378 \\ -0,131 \\ -0,046 \\ -0,266 \end{bmatrix} \quad (2)$$

então a primeira componente principal $CP_1 = [v_1]' * [Z]$ é dada por

$$CP_1 = -0,301 * zCOF17X - 0,087 * zCOF17Y - 0,375 * zCOF18X - 0,237 * zCOF18Y - 0,377 * zCOF19X + 0,106 * zCOF19Y - 0,384 * zCOF20X + 0,146 * zCOF20Y - 0,381 * zCOF21X - 0,052 * zCOF21Y - 0,378 * zCOF22X - 0,131 * zCOF22Y - 0,046 * zCOF23X - 0,266 * zCOF23Y.$$

Seja

$$v_2 = \begin{bmatrix} -0,112 \\ 0,352 \\ -0,046 \\ -0,192 \\ 0,033 \\ -0,441 \\ 0,006 \\ -0,438 \\ 0,013 \\ -0,479 \\ -0,071 \\ -0,264 \\ 0,360 \\ 0,019 \end{bmatrix} \quad (3)$$

a segunda componente principal $CP_2 = [v_2]' * [Z]$ é dada por

$$CP_2 = -0,112 * zCOF17X + 0,352 * zCOF17Y - 0,046 * zCOF18X - 0,192 * zCOF18Y + 0,033 * zCOF19X - 0,441 * zCOF19Y + 0,006 * zCOF20X - 0,438 * zCOF20Y + 0,013 * zCOF21X - 0,479 * zCOF21Y - 0,071 * zCOF22X - 0,264 * zCOF22Y + 0,360 * zCOF23X + 0,019 * zCOF23Y$$

E, por fim, seja

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0,012 \\ -0,438 \\ 0,130 \\ -0,452 \\ 0,098 \\ -0,153 \\ 0,081 \\ -0,078 \\ 0,064 \\ 0,048 \\ 0,047 \\ -0,560 \\ -0,435 \\ 0,166 \end{bmatrix} \quad (4)$$

a terceira componente principal $CP_3 = [v_3]' * [Z]$ é dada por

$$CP_3 = 0,012 * zCOF17X - 0,438 * zCOF17Y + 0,130 * zCOF18X - 0,452 * zCOF18Y + 0,098 * zCOF19X - 0,153 * zCOF19Y + 0,081 * zCOF20X - 0,078 * zCOF20Y + 0,064 * zCOF21X + 0,048 * zCOF21Y + 0,047 * zCOF22X - 0,560 * zCOF22Y - 0,435 * zCOF23X + 0,166 * zCOF23Y.$$

x

Portanto, com a aplicação da técnica foi possível reduzir um número de 14 variáveis originais a serem monitoradas para um número de 3 novas variáveis que representam 85% da variabilidade total das variáveis originais. Após definidas essas 3 novas variáveis, o monitoramento pode ser realizado de várias maneiras como, por exemplo, a construção das cartas de controle multivariado. Em geral, quando as variáveis são altamente correlacionadas entre si, o uso direto de gráficos de controle multivariados convencionais levam ao aumento das taxas de falsos alarmes, ou seja, nessa aplicação seria inviável trabalhar com as 14 variáveis originais, porém, com as 3 novas variáveis não correlacionadas é possível. A aplicação da técnica nesse contexto é imprescindível como um pré-tratamento dos dados para a análise posterior (SIMO, 2017).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise de componentes principais é uma técnica extremamente útil quando se trabalha com dados cujas variáveis são correlacionadas. Neste caso, é possível redimensionar os dados, diminuindo o número de variáveis para futuras análises, sem perda considerável de representatividade.

Na aplicação aos dados dos sensores dos pêndulos haviam 14 variáveis originais. Com a utilização da análise de componentes principais, utilizando os critérios de variância explicada e de Kaiser, apenas 3 componentes principais foram consideradas para representar as variáveis originais. As três componentes juntas representam 85% da variabilidade total das variáveis originais, mostrando a eficiência da técnica e a redução considerável no número de variáveis.

Como trabalhos futuros, as três componentes consideradas podem ser variáveis dependentes em modelos de regressão cujas variáveis independentes poderiam ser nível do reservatório e temperatura, por exemplo. Pois essas variáveis de condições ambientes influenciam a movimentação dos blocos. Outro possível trabalho seria utilizar as componentes principais em cartas de controle multivariadas.

Referências

- [1] GARCIA, S.R.P.; **MODELAGEM E PREVISÃO DE DESLOCAMENTOS EM BARRAGENS DE CONCRETO: APLICAÇÃO A DADOS DE INSTRUMENTAÇÃO DA**

- USINA HIDRELÉTRICA DE ITAIPU..** 2016. Tese (Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- [2] ITAIPU BINACIONAL. **Barragem**, 2010. Disponível em: <<https://www.itaipu.gov.br/energia/barragem>>. Acesso em: 09 nov. 2017.
- [3] ITAIPU BINACIONAL. **Documentos Oficiais**, 2010. Disponível em: <<https://www.itaipu.gov.br/institucional/documentos-oficiais>>. Acesso em: 09 nov. 2017.
- [4] ITAIPU BINACIONAL. **Instrumentação**, 2010. Disponível em: <<https://www.itaipu.gov.br/energia/instrumentacao>>. Acesso em: 09 nov. 2017.
- [5] MAESTRE, M.R.; SARTORIO, S.D.; MARCIANO, C.R.; OLIVEIRA, F.C.; PIEDADE, S.M.S; LIMA, C.G.: **Aplicação da análise de componentes principais na seleção de características de solo**. São Pedro, 2010.
- [6] MINGOTI, S.A.; **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada: uma abordagem aplicada**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 1 ed. 2005.
- [7] SANTO, R. E.; **Utilização da Análise de Componentes Principais na compressão de imagens digitais**. São Paulo, 2012.
- [8] SIMO, E.K.; **As Potencialidades da Técnica de Estatística Multivariada Análise de Componentes Principais**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo.

UM RELATO SOBRE A ORGANIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UTFPR – CÂMPUS TOLEDO

Gustavo Henrique Zanette
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
ghenrique35@gmail.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
emersontortola@utfpr.edu.br

RESUMO

Este artigo relata a experiência de um estagiário na organização e manutenção do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo. O estágio foi realizado no período de novembro de 2017 a abril de 2018 e suas funções contemplavam, entre outras tarefas, a organização e manutenção do ambiente, a catalogação de materiais didáticos e a supervisão de seu uso. Algumas estratégias foram adotadas nesse período, como a alteração da disposição dos móveis e materiais e a implementação de um sistema eletrônico para catalogação e empréstimo de livros. O teste e a implementação de estratégias serviram como ponto de partida para reflexões a respeito da manutenção de um LEM, indicando a necessidade de pensar o espaço de modo a tornar-se atrativo e agradável àqueles que o utilizam. Essa organização e a manutenção dessa organização viabilizou o entendimento e compreensões a respeito do LEM tanto como espaço, quanto como possibilidade para a prática pedagógica.

Palavras-chave: Educação Matemática. Laboratório de Ensino de Matemática. Organização e Manutenção.

INTRODUÇÃO

A criação de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) não é uma realidade de todas instituições de ensino. Além disso, muitas das instituições que conquistaram essa criação enfrentam dificuldades que dizem respeito à sua utilização e manutenção, seja no que diz respeito à organização do espaço, seja na compra e reposição de materiais.

Um dos principais motivos que levam a tais dificuldades é a falta de reconhecimento e incentivo dos órgãos governamentais com relação ao LEM. Outro motivo, contudo, consequência do primeiro, é a falta de um profissional responsável por preservar esse local.

Em novembro de 2017, a coordenação do curso de matemática, junto a UTFPR –

Câmpus Toledo, conseguiu uma vaga de estágio para auxiliar na conservação e manutenção do LEM. Este artigo foca no trabalho realizado pelo estagiário que ocupou tal vaga – primeiro autor deste texto –, relatando sua experiência na organização do LEM da instituição. Nesse período foram pensadas e testadas várias estratégias a fim de otimizar o espaço do LEM e organizar as atividades que nele são desenvolvidas. Algumas deram certo, outras nem tanto, por isso consideramos válido compartilhar essa experiência no sentido de elencar algumas orientações e/ou sugestões utilizadas por nós para a organização e manutenção do LEM.

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA (LEM)

Como o próprio nome diz, o LEM – Laboratório de Ensino de Matemática – é, em primeiro lugar, um ambiente de trabalho, “[...] propício para estimular no aluno o gosto pela matemática, a perseverança na busca de soluções e a confiança em sua capacidade de aprender e fazer matemática” (SILVA, 2004, p.3). Em outras palavras, o LEM não é uma sala de aula comum e, assim sendo, precisa ser construído de uma forma que atraia o aluno a ter vontade de estudar, de realizar investigações, de aprender matemática.

Por outro lado, para Corradini (2014), a construção e disseminação do conhecimento depende de um ambiente que favoreça o ensino e a aprendizagem, o que, de acordo com a autora, depende do desempenho do professor. Ou seja, é de responsabilidade do professor proporcionar um conjunto de ferramentas – não apenas físicas, mas teóricas, culturais, etc. – que dê subsídios para o envolvimento dos alunos como corresponsáveis pela construção de seu conhecimento.

Nessa perspectiva, ambiente não deve ser entendido exclusivamente como um espaço físico, mas no sentido colocado por Skovsmose (2000) quando trata de “ambiente de aprendizagem”, ou seja, refere-se a todas as condições disponibilizadas aos alunos, desde o espaço físico, os materiais, até a prática pedagógica utilizada pelo professor. Desta forma, o entendimento de LEM deve ir além de uma referência à uma sala ou depósito de materiais didáticos, deve considerar uma mudança de atitudes, tanto por parte do aluno, quanto do professor, que deve se dedicar à criação de situações pedagógicas desafiadoras, nas quais o aluno é convidado a fazer investigações, questionamentos, reflexões e a aprender

(LORENZATO, 2012).

Para Kowaltowski (2011), a qualidade do ambiente depende da qualidade dos seus componentes e a qualidade das relações humanas desenvolvidas nesse ambiente é a mais importante. Nesse sentido, a conquista de um espaço para a construção do LEM é um começo e não um fim, depois de estabelecido as preocupações em relação ao LEM vão em direção à sua manutenção, à organização do espaço, à dinâmica de uso. Mediante essa preocupação, a coordenação do curso de licenciatura em matemática, junto à direção, da UTFPR – Câmpus Toledo conseguiu realizar a contratação de um estagiário para auxiliar no exercício de tais funções, cuja experiência colocamos em discussão neste artigo.

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA DA UTFPR – CÂMPUS TOLEDO

O LEM da UTFPR – Câmpus Toledo (Figura 1) está organizado em uma sala na qual os acadêmicos do curso de licenciatura em matemática da instituição têm livre acesso. Ele é composto por uma diversidade de materiais didáticos, tanto produzidos industrialmente, quanto confeccionados pelos próprios alunos e docentes em disciplinas e/ou projetos. Livros, materiais montessorianos, sólidos em acrílico, jogos, materiais de consumo entre outras ferramentas são exemplos de materiais que estão disponíveis para uso dos docentes e alunos nas atividades acadêmicas. Além disso, dispõe de alguns computadores que estão disponíveis para uso dos alunos, bem como de mesas grandes que permitem a organização e o trabalho em grupos.

Figura 1 – Laboratório de Ensino de Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo



Fonte: <http://lemutfprmatematica.wixsite.com/lem-matematica-pt>.

Por ser equipado de tal maneira, o LEM é diariamente utilizado pelos alunos para realizarem seus estudos, trabalhos, e outros. o que, de certa forma, estimula o convívio social entre os alunos do curso, permitindo o compartilhamento de experiências e a criação e desenvolvimento de grupos de estudo, promovendo um companheirismo na realização de suas atividades.

Além disso, o LEM é utilizado como sala de reuniões de projetos e/ou programas como o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) e as Oficinas de Matemática – que são realizadas semestralmente na instituição e ofertadas aos alunos da Educação Básica; como espaço para orientação de alunos – de iniciação científica, trabalhos de conclusão de curso, de projetos e/ou programas, e outros; e, ainda, como sala de aula por algumas disciplinas, como as de Estágio Supervisionado na Educação Básica, Modelagem Matemática e a própria disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática, ou seja, disciplinas em que são realizados, principalmente, trabalhos e discussões em grupo.

A ORGANIZAÇÃO DO LEM DA UTFPR – CÂMPUS TOLEDO

Por se tratar de um ambiente em que muitos alunos e docentes do curso passam boa parte de seu tempo, espera-se que assim como qualquer LEM, o da UTFPR – Câmpus Toledo, seja também um local agradável e bem organizado. Dessa forma, o ambiente do LEM foi pensado e organizado de forma a favorecer suas características estruturais, funcionais e visuais. Isto é, foi pensada a disposição das mesas, cadeiras, armários,

bancadas, computadores e demais materiais de modo a facilitar e regularizar o seu uso e de maneira que o local ficasse atrativo aos olhos de quem o vê e, principalmente, àqueles que convivem nesse espaço diariamente.

Outro cuidado tomado foi que as mudanças fossem realizadas de modo a não interferir nas atividades acadêmicas, portanto as mudanças em sua estrutura, principalmente, foram realizadas no período de recesso escolar.

De fato, tal organização não foi simples, o LEM possui muitos materiais e o livre acesso a esses materiais torna a tarefa difícil, talvez mais ainda que organizar, de manter a organização. Além disso, não há um manual que descreve como organizar um LEM – quem dera existisse –, há apenas algumas orientações teóricas que fornecem algumas sugestões e fornecem exemplos de atividades que são ou podem ser desenvolvidas em um LEM. Dessa forma várias estratégias foram pensadas e testadas, algumas com sucesso e outras nem tanto.

Nossas ações foram realizadas com base nas orientações dos docentes que utilizam o LEM com mais frequência: organização dos móveis e materiais, catalogação dos livros e materiais didáticos, revisão e supervisão das normas de uso do LEM. Para facilitar a apresentação de tais ações, as organizamos segundo dois aspectos: a organização do ambiente e a organização dos materiais didáticos, os quais foram realizadas por nós e, agora, apresentamos na forma de orientações e/ou sugestões.

ORGANIZAÇÃO DO AMBIENTE

Quando pensamos a organização do ambiente, levamos em conta, entre outros aspectos, a iluminação, a acessibilidade, a limpeza e a ludicidade.

- **Iluminação**

As condições de estudo devem ser favoráveis e agradáveis. Para isso, prezamos por um ambiente claro e arejado, ou seja, é aconselhável que janelas e portas sejam mantidas abertas, luzes em bom estado de funcionamento, para que possam ser ligadas sempre que sejam necessárias.

- **Acessibilidade**

Os objetos posicionados dentro do ambiente precisam estar bem-dispostos, isto é, espaçados e de fácil acesso. Além disso, essa disposição deve favorecer a locomoção no ambiente, ou seja, os seus usuários devem ter liberdade para se locomover sem invadir o espaço dos outros e conhecer ou ter orientações a respeito de onde encontrar os materiais que deseja. Nesse momento é preciso repensar a localização e, talvez, até a quantidade de mesas, cadeiras, armários, sendo necessário algumas vezes dispensar um ou outro.

- **Limpeza**

O ambiente precisa estar limpo. Após a realização de quaisquer trabalhos deve-se observar o lixo produzido e jogá-lo em local apropriado, as lixeiras. Por isso lixeiras são objetos indispensáveis a um LEM, pelo menos uma para lixo reciclável em seu interior e uma para lixo orgânico no seu exterior – a fim de preservar um odor limpo e agradável no seu interior. Ainda com relação às lixeiras é preciso sempre supervisioná-las, evitando deixá-las sobrecarregadas de lixo.

- **Ludicidade**

Como dito antes, um Laboratório de Ensino de Matemática não é uma sala de aula comum, é um lugar onde a criatividade deve explorada e incentivada. Logo, o seu ambiente precisa ter elementos que prezem pela ludicidade, pois, mesmo que se tenha um ambiente bem planejado e funcional, se o que o aluno enxerga são apenas quatro paredes, um quadro branco e alguns armários, ele não verá diferença entre esse ambiente e a sala de aula. E como isso pode ajudar a despertar sua criatividade?

Por isso, ao organizar o ambiente, evitamos deixar o ambiente monocromático e com todos os materiais guardados. Alguns cartazes coloridos foram espalhados no ambiente – nas paredes, no mural; banners de pesquisas e trabalhos realizados por alunos foram deixados à mostra; e alguns exemplares de materiais didáticos foram deixados em exposição sobre as bancadas ou pendurados nas paredes.

ORGANIZAÇÃO DOS MATERIAIS DIDÁTICOS

Os materiais didáticos de um LEM não se limitam a papéis, canetas e esquadros. Os materiais didáticos e a forma como são organizados constituem o laboratório e dão vida a esse espaço de aprendizagem. Nesse sentido, é importante prezar por sua conservação e manutenção, estar atento às suas necessidades e explorar suas possibilidades.

- **Conservação e manutenção**

É preciso cuidar do material didático que há disponível no LEM, pois não é tão simples adquirir novos materiais. Nesse sentido é importante pensar onde colocar ou guardar cada material, evitando sua danificação ou perda. Vale a pena, inclusive, manter um controle de onde estão disponíveis os materiais, para facilitar seu acesso.

Como se trata de um laboratório de livre acesso aos alunos e docentes do curso, manter a organização dos materiais torna-se mais difícil. Há sempre algum material em uso, sempre há pessoas estudando no ambiente, consultando um livro, então há a necessidade de se estabelecer normas de uso. Essas normas devem estar fixadas em um mural ou parede, em lugar visível a todos.

Mas, além desse livre acesso permitir que os alunos usem o material disponível no LEM, permite também seu uso em estágios, projetos fora da instituição, desde que se tenha a devida autorização dos docentes. Nesse sentido, é preciso ter também um controle de empréstimos dos materiais. Uma lista de retirada e de devolução pode ser suficiente para manter esse controle. pode-se também utilizar um sistema de empréstimos, como o software BibLivre, no qual realizamos o cadastro de todos os títulos que constam em nosso acervo. A ideia é que em pouco tempo esse sistema substitua a lista, e tenhamos acesso de forma rápida e prática sob a responsabilidade de quem está determinado material.

- **Necessidades**

Um LEM não se limita às necessidades básicas de uma sala de aula comum, não podemos limitar suas necessidades a folhas A4, canetas, giz e um quadro. Como se trata de um ambiente criativo, precisamos de materiais que possam tornar ideias possíveis. As necessidades são amplas e estão sempre mudando, conforme a demanda de cada turma, grupo, ou até mesmo, de tendências metodológicas.

No caso do LEM da UTFPR Câmpus Toledo, os materiais didáticos disponíveis

devem suprir as necessidades de uso nos estágios, oficinas de matemática e projetos promovidos pela coordenação do curso de licenciatura em matemática. Dessa forma, o uso de materiais é frequente, por isso devemos sempre ter em mãos uma lista atualizada de itens necessários, para que, quando surgir a oportunidade, eles possam ser comprados.

- **Possibilidades**

As possibilidades de uso do LEM são muitas, vão até onde nossa criatividade nos permite. Ter disponíveis materiais didáticos e manter sua organização é fundamental para seu bom funcionamento e pode incentivar a materialização de novas ideias. É interessante que os materiais confeccionados pelos alunos fiquem em exposição e sirvam de exemplo e/ou motivação para a produção de novos materiais. Sugere-se inclusive a produção de um acervo, com instruções para uso, sugestões de encaminhamentos para a aula, discussões matemáticas e possíveis questionamentos para orientar a investigação e desenvolvimento da atividade por meio do material.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A vivência dessa experiência desencadeou o conhecimento e compreensões de questões antes não pensadas como a visão e o entendimento do que é um LEM, de que este não se trata apenas de um ambiente ou depósito de materiais, mas se configura como uma prática pedagógica que se difere do ensino expositivo. Requer mudanças de atitudes tanto dos alunos, quanto dos professores, uma vez que as aulas, nessa perspectiva, devem prezar pela realização de explorações, observações, testes e verificações, isto é, a aula deve se tornar mais investigativa, uma vez que o material didático não ensina por si só.

Dessa forma, a organização do LEM deve prezar por essas características, mantendo um ambiente agradável para permanecer e frequentar. Acreditamos que após as mudanças realizadas o ambiente do LEM da UTFPR – Câmpus Toledo, tornou-se mais atrativo, espaçoso e mais limpo visualmente, muitos docentes e alunos que usam o LEM confirmaram isso. Claro que nem todas as mudanças deram certo e precisaram ser revistas, afinal, organização é diferente de utilidade e, por isso, vários usuários sugeriram algumas modificações, como a localização de objetos ou disposição dos móveis, o que nos indica o

ânimo que provocamos nos seus usuários ao promover a organização do LEM. Notamos, inclusive, uma preocupação com relação à sua utilização e cuidado para não desorganizar o ambiente.

Vale salientar que o trabalho ainda não terminou e devido à sua frequente utilização há muito ainda a se fazer pelo LEM, mas já podemos sentir uma satisfação de ter realizado um bom trabalho, de ter deixado esse ambiente um pouco mais organizado e atrativo. Precisamos agora prezar por manter e/ou melhorar a organização.

REFERÊNCIAS

CORRADINI, S. N. **Ambiente escolar influencia aprendizagem docente e discente**. Disponível em: <<https://direcionalescolas.com.br/ambiente-escolar-influencia-aprendizagem-docente-e-discente/>>. Acesso em: 06 abr. 2018.

KOWALTOWSKI, D. C. C. K. **Arquitetura escolar**: o projeto do ambiente de ensino. São Paulo: Oficina de Textos, 2011.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2012.

SILVA, R. C. O papel do laboratório no ensino de matemática. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2004. **Anais...** Recife: UFPE, 2004.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

Teste probabilístico de primalidade: Uma apresentação alternativa para a demonstração do Teste de Miller

Jose Augusto de Souza
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Toledo
jose_augustodesouza@hotmail.com

Adriano Gomes de Santana
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Toledo
adrianosantana@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Um número $p \in \mathbb{Z}$ é primo se, e somente se seus únicos divisores positivos são 1 e o próprio $|p|$. Sabe-se que existem infinitos números primos em \mathbb{Z} , encontrar números primos possui sua principal aplicação dentro da criptografia ([2], 2008). O algoritmo de criptografia RSA é um método que utiliza números primos, pois além de seus parâmetros exigir dois números primos p e q suficientemente grandes, o problema matemático envolvido em sua segurança é equivalente a fatorar o número composto pq em seus fatores primos.

Para trabalhar com números primos, primeiro é necessário encontrá-los, para isso existem métodos matemáticos. O crivo de Eratóstenes é o mais antigo dos métodos para encontrar números primos, e não envolve nenhuma fórmula explícita. Eratóstenes nasceu por volta de 284 a. C. na Grécia. É importante lembrar que crivo significa peneira.

Nicômaco em sua *Aritmética*, publicada por volta de 100 d. C., introduz o crivo de Eratóstenes da seguinte maneira: tomamos os números ímpares misturados de maneira indiscriminada e, por esse método, como se fosse pelo uso de um instrumento ou peneira, separamos os primos ou indecomponíveis dos secundários ou compostos. Portanto o crivo funciona como uma peneira que só deixa passar os números primos ([1], 2009).

O crivo determina todos os primos até um certo $n \in \mathbb{N}$ previamente escolhido. Para realizar o crivo, devemos listar os números ímpares até n , em seguida riscamos todos os múltiplos de 3 maiores que ele, em seguida procuramos o menor número da lista diferente de 3 que não tenha sido riscado, no caso o 5, e riscamos todos os múltiplos dele maiores que ele, e assim por diante até chegar em \sqrt{n} , os números que restarem serão números primos.

Determinar se um número é primo não é equivalente ao problema de fatoração. Existem métodos que conseguem verificar se um número é primo ou composto mesmo que não obtenha a fatoração desse número no caso composto. Dois desses métodos são o Teste de Fermat e o Teste de Miller. Este último, embora não verifique que um número é primo com 100% de precisão, a probabilidade de se obter um número primo com esse teste pode ser controlada. Métodos como o Teste de Miller são denominados algoritmos de primalidade probabilísticos.

Neste trabalho apresentaremos uma demonstração alternativa ao teorema do Teste de Miller. Nesta demonstração buscaremos simplificá-la, separando alguns resultados utilizados em forma de lema. Para isso apresentaremos algumas definições e resultados necessários antes de apresentar a demonstração deste teorema.

2 ARITMÉTICA MODULAR

Definição 1. Sejam $n, a, b \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Dizemos que a e b são **congruentes módulo n** e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

se $a - b$ é múltiplo de n .

Teorema 2. Dados $n, a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se a e b possuem o mesmo resto na divisão por n .

Prova: (\Rightarrow) Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a - b = nk$ com $k \in \mathbb{Z}$. Digamos que $b = nq + r$ com $0 \leq r < |n|$, então $a = nk + nq + r = n(k + q) + r$ com $0 \leq r < |n|$. Logo, a e b deixam o mesmo resto r na divisão por n .

(\Leftarrow) Seja $r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < |n|$ tal que $a = nq_1 + r$ e $b = nq_2 + r$, então $a - b = nq_1 + r - nq_2 - r = n(q_1 - q_2)$, logo $a \equiv b \pmod{n}$. c.q.d.

Teorema 3. Dados $n, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$. Então valem as seguintes propriedades:

i. $a + c \equiv b + d \pmod{n}$;

ii. $ac \equiv bd \pmod{n}$;

iii. Para todo $k \in \mathbb{N}$, $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Prova:

i. Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ onde $a - b = nk_1$ e $c - d = nk_2$. Somando as duas igualdades temos $a - b + c - d = nk_1 + nk_2$, então $(a + c) - (b + d) = n(k_1 + k_2)$. Logo $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

ii. Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ onde $a - b = nk_1$ e $c - d = nk_2$. Assim $a = b + nk_1$ e $c = d + nk_2$. Logo

$$ac = (b + nk_1)(d + nk_2) = bd + bnk_2 + nk_1d + n^2k_1k_2 = bd + n(bk_2 + dk_1 + nk_1k_2) = bd + nk$$

Temos então que $ac - bd = nk$ com $k \in \mathbb{Z}$, logo $ac \equiv bd \pmod{n}$.

iii. Se $k = 1$, temos que $a^1 \equiv b^1 \pmod{n}$. Suponha que para algum $m \in \mathbb{N}$, temos que $a^m \equiv b^m \pmod{n}$. Sabemos que $a \equiv b \pmod{n}$ e $a^m \equiv b^m \pmod{n}$, então pelo item anterior

$$a^m \cdot a \equiv b^m \cdot b \pmod{n}$$

$$a^{m+1} \equiv b^{m+1} \pmod{n}$$

c.q.d.

A definição de congruência módulo n é uma relação de equivalência, isto é, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \equiv a \pmod{n}$, se $a \equiv b \pmod{n}$ então $b \equiv a \pmod{n}$ e se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$ então $a \equiv c \pmod{n}$. Isso nos permite definir classe de equivalência e conjunto quociente por esta relação como segue.

Definição 4. Dado $n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$, definimos a **classe de congruência** de um inteiro a como

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{n}\}.$$

Definimos ainda o **conjunto quociente** módulo n como

$$\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

Dados $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ definimos a adição e multiplicação de \bar{a} com \bar{b} por $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ e $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$. Embora essas definições dependam dos representantes a e b das classes de equivalência, o resultado final não dependerá. A prova disso pode ser vista em [1].

Proposição 1. *Se p é um primo ímpar e k um natural, então $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ possui um gerador, isto é, existe $g \in \mathbb{Z}_{p^k}^*$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}_{p^k}^*$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = g^i$.*

Proposição 2. *Seja p um número primo. Se $d|p-1$, então \mathbb{Z}_p^* possui exatamente $\phi(d)$ elementos de ordem d . Em particular, \mathbb{Z}_p^* possui $\phi(p-1) \neq 0$ geradores.*

A prova das proposições 1 e 2 podem ser consultadas em [3].

Teorema 5. *(Pequeno Teorema de Fermat) Se p é primo, então para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.*

Prova: Se $n = 1$, então temos que $1^p = 1 \equiv 1 \pmod{n}$. Suponha que para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $k^p \equiv k \pmod{n}$. Temos então que

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} k^i$$

$$(k+1)^p = k^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} k^i$$

$$(k+1)^p = k^p + 1 + nq.$$

Logo $(k+1)^p = k^p + 1 + nq \equiv k^p + 1 \equiv k + 1 \pmod{n}$. c.q.d.

3 TESTES DE PRIMALIDADE

Se $n > 0$ e $1 < b < n-1$ são números inteiros e b^{n-1} não deixa resto 1 quando dividido por n , então n é um número composto. “O número b é conhecido como uma testemunha do fato de n ser composto” ([1], p. 105). Este fato nos permite construir um algoritmo para verificar se um número n é composto.

Algoritmo 6. *Teste de Fermat*

Entrada: *um inteiro positivo ímpar n .*

Saída: *um fator de n ou uma mensagem indicando que n é primo.*

Passo 1: *Comece com $x = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; se $n = x^2$ então x é fator de n e podemos parar.*

Passo 2: *Caso contrário incremente x de uma unidade e calcule $y = \sqrt{x^2 - n}$.*

Passo 3: *Repita o Passo 2 até encontrar um valor inteiro para y , ou até que x seja igual a $\frac{n+1}{2}$: no primeiro caso n tem fatores $x+y$ e $x-y$, no segundo n é primo*

Um problema desse algoritmo é que nem sempre quando ele concluir que n é primo ele realmente será. Em [1] é dito que Leibniz achava que seria um número primo, ele tomava $b = 2$, que é o caso mais simples de calcular. Mas isso não é verdade, por exemplo $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$, portanto 341 seria um número primo, mas $341 = 11 \cdot 31$. Esses “falsos primo” são conhecidos como pseudoprimos.

Observe que se p for primo, $b \in \mathbb{Z}$ e $p \nmid b$ então, pelo Teorema 5, $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Observe que

$$b^{p-1} - 1 = b^{2^k q} - 1 = ((b^q)^{2^{k-1}} + 1)((b^q)^{2^{k-2}} + 1) \dots ((b^q)^2 + 1)(b^q + 1)(b^q - 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{ou } (b^q)^{2^{k-1}} &\equiv -1 \pmod{p} \\ \text{ou } (b^q)^{2^{k-2}} &\equiv -1 \pmod{p} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \text{ou } (b^q)^2 &\equiv -1 \pmod{p} \\ \text{ou } b^q &\equiv -1 \pmod{p} \\ \text{ou } b^q &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

Substituindo p por um inteiro n , caso uma destas congruências não seja satisfeita, então n será composto. Este fato é base para o Teste de Primalidade de Miller. O Teste de Miller descrito abaixo é fundamentado desse desenvolvimento do Teorema 5.

Algoritmo 7. *Teste de Miller*

Entrada: um inteiro ímpar n , e a base b , onde $1 < b < n - 1$

Saída: uma das mensagens: ‘ n é composto’ ou ‘teste inconclusivo’

Passo 1: Divida $n-1$ sucessivamente por 2 até encontrar q (um número ímpar) e k tais que $n-1 = 2^k q$

Passo 2: Comece fazendo $i = 0$ e $r =$ resto de b^q por n

Passo 3: Se $i = 0$ e $r = 1$ ou se $i \geq 0$ e $r = n - 1$ a saída é ‘teste inconclusivo’

Passo 4: Incremente i de 1 e substitua r pelo resto da divisão de r^2 por n

Passo 5: Se $i < k$ volte ao **Passo 3**, senão a saída é ‘ n é composto’

A princípio, quanto o teste tem saída *inconclusivo*, duas coisas podem acontecer: n pode ser primo, ou n pode ser composto. Vejamos um exemplo a seguir. Vamos aplicar o número 341 ao teste de Miller. Pelo **Passo 1**, temos que $341 - 1 = 2^2 \cdot 85$. Precisamos calcular as potências de 2 módulo 341 para os expoentes 85 e 170, assim temos que $2^{85} \equiv 32 \pmod{341}$ e $2^{170} \equiv 32^2 \equiv 1 \pmod{341}$. Portanto 341 é composto pelo teste de Miller.

Teorema 8. (Teste de Miller) *Seja n um número ímpar composto. Se $n - 1 = 2^r m$ para naturais r e m , com m ímpar, então n é pseudoprimo com respeito a no máximo 25% dos elementos pertencentes a \mathbb{Z}_n^* .*

4 PROVA DO TESTE DE MILLER

Lema 9. *Seja n um número ímpar livre de quadrados. Se $n - 1 = 2^r m$ com m ímpar, $n = p_1 p_2 \dots p_k$ a fatoração de n e para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $p_i - 1 = 2^{r_i} m_i$ com m_i ímpar. Nestas condições, o número de raízes $X^m - \bar{1}$ em \mathbb{Z}_n é $(m, m_1)(m, m_2) \dots (m, m_k)$, sendo $(a, b) = \text{mdc}(a, b)$.*

Prova: Pela proposição 1, $\exists g_i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq g_i < p_i$ e \bar{g}_i gera $\mathbb{Z}_{p_i}^*$.

Vamos fixar um inteiro a tal que $0 \leq a < n$ e $(a, n) = 1$. Para cada i , existe a_i com $0 \leq a_i < p_i - 1$ tal que

$$\Psi(\bar{a}) = (\bar{g}_1^{a_1}, \bar{g}_2^{a_2}, \dots, \bar{g}_k^{a_k}). \quad (1)$$

Agora, caracterizaremos os a 's tais que $\bar{a}^m = \bar{1}$ em \mathbb{Z}_n . Pela operação de cartesiano de grupos e por (1) temos que

$$(\bar{1}, \bar{1}, \dots, \bar{1}) = \Psi(\bar{1}) = \Psi(\bar{a}^m) = (\bar{g}_1^{a_1 m}, \bar{g}_2^{a_2 m}, \dots, \bar{g}_k^{a_k m}).$$

Consequentemente esta igualdade será satisfeita se, e somente se $p_i - 1 = 2^{r_i} m_i | a_i m$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Como $2^{r_i} m_i | a_i m$ então

$$\begin{aligned} a_i m &= 2^{r_i} m_i z \\ a_i &= \frac{2^{r_i} m_i z}{m} \\ a_i &= \frac{2^{r_i} m_i m_i z}{m m_i} \\ a_i &= \frac{2^{r_i} m_i}{(m, m_i)} \cdot \frac{m_i z}{[m, m_i]} \end{aligned}$$

com $z \in \mathbb{Z}$. Portanto, a_i é múltiplo de $\frac{2^{r_i} m_i}{(m, m_i)}$.

Como $0 \leq a_i < p_i - 1$, existem (m, m_i) opções para a_i . Então o número de raízes para $X^m - \bar{1}$ em \mathbb{Z}_n é

$$(m, m_1)(m, m_2) \dots (m, m_k).$$

c.q.d.

Lema 10. *Seja n um número ímpar livre de quadrados. Se $n - 1 = 2^r m$ com m ímpar, $n = p_1 p_2 \dots p_k$ a fatoração de n e para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $p_i - 1 = 2^{r_i} m_i$ com m_i ímpar. Nestas condições, o número de raízes $X^{2^j m} + \bar{1}$ em \mathbb{Z}_n é $2^{kj} (m, m_1)(m, m_2) \dots (m, m_k)$ quando $j < \min\{r_1, \dots, r_k\}$ ou 0 caso contrário.*

Prova: Pela proposição 1, $\exists g_i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq g_i < p_i$ e \bar{g}_i gera $\mathbb{Z}_{p_i}^*$.

Vamos fixar um inteiro a tal que $0 \leq a < n$ e $(a, n) = 1$. Para cada i , existe a_i com $0 \leq a_i < p_i - 1$ tal que

$$\Psi(\bar{a}) = (\bar{g}_1^{a_1}, \bar{g}_2^{a_2}, \dots, \bar{g}_k^{a_k}). \quad (2)$$

Para $j \in \{0, 1, \dots, r - 1\}$, necessitamos descrever os a 's tais que $\bar{a}^{2^j m} = \overline{-1}$ em \mathbb{Z}_n . Pela operação de cartesianos de grupos e por (2) temos que

$$(\overline{-1}, \overline{-1}, \dots, \overline{-1}) = \Psi(\overline{-1}) = \Psi(\bar{a}^{2^j m}) = (\bar{g}_1^{2^j a_1 m}, \bar{g}_2^{2^j a_2 m}, \dots, \bar{g}_k^{2^j a_k m}). \quad (3)$$

Consequentemente essa igualdade será satisfeita se, e somente se

$$p_i - 1 = 2^{r_i} m_i | 2^{j+1} a_i m \quad p_i - 1 = 2^{r_i} m_i \nmid 2^j a_i m \quad (4)$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Observe que de (3) temos que

$$\begin{aligned} (\bar{g}_i^{2^j a_i m}) &\equiv -1 \pmod{p_i} \\ (\bar{g}_i^{2^j a_i m})^2 &\equiv (-1)^2 \pmod{p_i} \\ \bar{g}_i^{2^{j+1} a_i m} &\equiv 1 \pmod{p_i} \end{aligned}$$

Portanto a ordem de \bar{g}_i é igual a $p_i - 1 = 2^{r_i} m_i$. Assim

$$2^{j+1} a_i m = 2^{r_i} m_i z$$

$$a_i = 2^{r_i-j-1} \cdot \frac{m_i}{(m, m_i)} \cdot \frac{m_i z}{[m, m_i]}$$

com $z \in \mathbb{Z}$ e $\frac{m_i z}{[m, m_i]}$ ímpar.

Ressaltamos que $a_i \neq 2^{r_i-j} \frac{m_i q}{(m, m_i)}$.

Portanto (4) equivale a a_i ser múltiplo ímpar de $2^{r_i-j-1} \frac{m}{(m, m_i)}$.

Como $0 \leq a_i < p_i - 1$, então existem $2^j(m, m_i)$ opções para a_i . Portanto o número de raízes para $X^{2^j m} + \bar{1}$ em \mathbb{Z}_n é

$$2^{kj}(m, m_1)(m, m_2)\dots(m, m_k)$$

quando $j < \min\{r_1, \dots, r_k\}$ ou 0 caso contrário. c.q.d.

Com os resultados dos lemas 9 e 10, podemos prosseguir com a prova do Teorema 8.

Se n é pseudoprimeiro com respeito a a , então $a^{n-1} = \bar{1}$ por definição. Portanto, a possui inverso multiplicativo em \mathbb{Z}_n . Assim, devemos mostrar que vale a seguinte desigualdade

$$P_n = \frac{|\{a \in \mathbb{Z}_n^* : n \text{ é pseudoprimeiro com respeito a } a\}|}{n-1} \leq \frac{1}{4}.$$

Caso 1: n não é livre de quadrados.

Por definição, \exists primo p tal que $p^2 | n$. Seja t um natural satisfazendo $n = p^2 t$. Pela proposição 1, $\exists g \in \mathbb{N}$ tal que $0 < g < p^2$ e \bar{g} é um gerador para $\mathbb{Z}_{p^2}^*$.

Assuma que n é pseudoprimeiro com respeito a \bar{a} , onde

$$a \in \mathbb{N}; 0 < a < n, \tag{5}$$

em particular,

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}. \tag{6}$$

Vamos obter um limite superior para estes inteiros satisfazendo (5) e (6). De (6) temos que

$$\begin{aligned} a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n} &\Rightarrow a^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2 t} \\ a^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2} &\Rightarrow a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Como \bar{g} é gerador de $\mathbb{Z}_{p^2}^*$, então

$$\exists i \in \mathbb{Z}; 0 \leq i < \phi(p^2) = p(p-1), a \equiv g^i \pmod{p^2}. \tag{8}$$

De (7) e (8), temos que

$$a^{n-1} \equiv g^{i(n-1)} \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Pelo Teorema de Lagrange, a ordem de \bar{g} em \mathbb{Z}_{p^2} divide $i(n-1)$. Isto é, $p(p-1)$ divide $i(p^2 t - 1)$. Logo, i tem que ser múltiplo de p . Portanto $i = pj$, com $j \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq j < p-1$.

De (5) e (8) temos que

$$a = g^{pj} + sp^2 \tag{9}$$

com $0 \leq s < t$ e $s \in \mathbb{Z}$.

Como j varia de 0 até $p-1$, e s varia de 0 até t , então temos no máximo $(p-1)t$ valores possíveis para a satisfazendo (9), com $0 < a < n$. Portanto n é pseudoprimeiro com respeito a no máximo $(p-1)t$ elementos de \mathbb{Z}_n . Então

$$P_n \leq \frac{(p-1)t}{n-1} = \frac{(p-1)t}{p^2 t - 1} < \frac{(p-1)t}{(p^2 - 1)t} = \frac{p-1}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{4}$$

pois n é ímpar, logo $p \geq 3$.

Caso 2: n é livre de quadrados.

Pelos lemas 9 e 10, temos que n é pseudoprimo com respeito a exatamente

$$(m, m_1)(m, m_2)\dots(m, m_k) + \sum_{j=0}^{\min\{r_1, r_2, \dots, r_k, r\}-1} 2^{kj} (m, m_1)(m, m_2)\dots(m, m_k)$$

elementos de \mathbb{Z}_n . Portanto

$$P_n = \frac{(m, m_1)\dots(m, m_k)}{n-1} \left(1 + \sum_{j=0}^{\min\{r_1, \dots, r\}-1} 2^{kj} \right).$$

Substituindo a soma da P.G. de razão 2^k pelo seu valor, temos que

$$P_n = \frac{(m, m_1)\dots(m, m_k)}{p_1 p_2 \dots p_k - 1} \left(1 + \frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k} - 1}{2^k - 1} \right).$$

Note que

$$\frac{1}{p_1 \dots p_k - 1} < \frac{1}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)\dots(p_k - 1)} = \frac{1}{2^{r_1 + \dots + r_k} m_1 m_2 \dots m_k}.$$

Então

$$P_n < \frac{(m, m_1)\dots(m, m_k)}{2^{r_1 + \dots + r_k} m_1 \dots m_k} \left(1 + \frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k} - 1}{2^k - 1} \right).$$

Observe que

$$1 + \frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k} - 1}{2^k - 1} \leq \frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k}}{2^{k-1}},$$

assim, temos que

$$P_n < \left[\frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k}}{2^{r_1 + \dots + r_k}} \right] \left[\frac{1}{2^{k-1}} \right] \prod_{i=1}^k \frac{(m, m_i)}{m_i}.$$

Agora, vamos dividir essa probabilidade nos casos possíveis, e mostraremos que em todos eles $P_n \leq \frac{1}{4}$.

Caso 2.1: Se $k \geq 3$.

Observe que nesse caso temos as seguintes desigualdades:

$$\frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k}}{2^{r_1 + \dots + r_k}} \leq 1 \tag{10}$$

pois $\min\{r_1, \dots, r\}k \leq r_1 + \dots + r_k$.

$$\frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{4} \tag{11}$$

e

$$\prod_{i=1}^k \frac{(m, m_i)}{m_i} \leq 1. \tag{12}$$

De (10), (11) e (12) concluímos que

$$P_n < \left[\frac{2^{\min\{r_1, \dots, r\}k}}{2^{r_1 + \dots + r_k}} \right] \left[\frac{1}{2^{k-1}} \right] \prod_{i=1}^k \frac{(m, m_i)}{m_i} \leq \frac{1}{4}.$$

Caso 2.2: Se $k = 2$ e $r_1 \neq r_2$, suponha que $r_1 < r_2$.

$$P_n < \left[\frac{2^{\min\{r_1, r_2, r\}2}}{2^{r_1 + r_2}} \right] \left[\frac{1}{2^{2-1}} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i}$$

$$\Rightarrow P_n < \left[\frac{2^{2r_1}}{2^{r_1+r_2}} \right] \left[\frac{1}{2} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i}$$

Observe que

$$\frac{2^{2r_1}}{2^{r_1+r_2}} = \frac{2^{2r_1}}{2^{r_1} 2^{r_2}} = \frac{2^{r_1}}{2^{r_2}} \leq \frac{1}{2}$$

pois $r_1 < r_2$ e $r_i \in \mathbb{N}$.

Portanto

$$P_n < \left[\frac{2^{r_1}}{2^{r_2}} \right] \left[\frac{1}{2} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i} \leq \frac{1}{4}.$$

Análogo para $r_1 > r_2$.

Caso 2.3: Se $k = 2$, $r_1 = r_2$ e $(m, m_1) \neq m_1$.

Então

$$P_n < \left[\frac{2^{2r_1}}{2^{2r_1}} \right] \left[\frac{1}{2} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i}.$$

Observe que

$$\prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i} = \frac{(m, m_1)}{m_1} \cdot \frac{(m, m_2)}{m_2} \leq \frac{1}{2}$$

pois $(m, m_1) \neq m_1$. Portanto

$$P_n < 1 \cdot \left[\frac{1}{2} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i} \leq \frac{1}{4}.$$

Caso 2.4: Se $k = 2$, $r_1 = r_2$, $(m, m_1) = m_1$ e $(m, m_2) \neq m_2$.

Então

$$\prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i} = \frac{(m, m_1)}{m_1} \cdot \frac{(m, m_2)}{m_2} = \frac{m_1}{m_1} \cdot \frac{(m, m_2)}{m_2} \leq \frac{1}{2}$$

pois $(m, m_2) \neq m_2$. Portanto

$$P_n < 1 \cdot \left[\frac{1}{2} \right] \prod_{i=1}^2 \frac{(m, m_i)}{m_i} \leq \frac{1}{4}.$$

Caso 2.5: Se $k = 2$, $r_1 = r_2$, $(m, m_1) = m_1$ e $(m, m_2) = m_2$.

Neste caso, temos que $n = p_1 p_2$ e que $p_1 - 1$ e $p_2 - 1$ dividem $n - 1$. Podemos assumir que $p_1 > p_2$. Mas $n - 1 = p_1 p_2 - 1 = (p_1 - 1)p_2 + p_2 - 1$ e daí $n - 1$ deixa resto $p_2 - 1 < p_1 - 1$ quando dividido por $p_1 - 1$.

Um absurdo e o resultado segue. c.q.d.

Referências

- [1] COUTINHO, S. C. **Números inteiros e criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [2] HOFFSTEIN, J.; PIPHER, J. C.; SILVERMAN, J. H. **An introduction to mathematical cryptograpy**. Springer, 2008.
- [3] LEMOS, Manoel. **Criptografia, números primos e algoritmos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

UM EXEMPLO DE NOVAS PADRONAGENS DE TECIDOS A PARTIR DE RELAÇÕES *FUZZY* E O USO DO MATLAB

José Luiz Lívero Lavaqui¹
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
jose.lavaqui@gmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O tecido, como uma tecnologia que possibilitou uma melhoria na qualidade de vida, é um material presente na vida de todo ser humano, pois é utilizado desde os tempos mais antigos como meio de cobrir o corpo e se proteger do frio. Os tecidos antigos eram totalmente diferentes dos de hoje, que, são feitos em máquinas, eram produzidos totalmente à mão por meio da utilização de técnicas rudimentares; e, com o avanço tecnológico presente nos dias atuais e a modernização de tais técnicas, foram possíveis melhorar: a qualidade dos tecidos produzidos, o conforto por eles produzidos, a resistência, a leveza, entre outros.

Do ponto de vista matemático, Gerdes (2010, p. 15) explica que “em diversos ambientes culturais, em todos os continentes, mulheres e homens têm sentido um imenso prazer em decorar objetos, em criar formas e padrões. Um prazer artístico-matemático”. Essas formas e padrões normalmente podem ser verificados por meio da utilização de matrizes cíclicas (ou não) e apresentando diferentes possibilidades de uso. Nesse contexto, a matemática *fuzzy* permite que o matemático olhe de maneira diferente para esses arquétipos e formas. Além disso, a utilização de softwares permite criar e recriar novas padronagens e modelos.

Assim, esse trabalho tem o objetivo de analisar, utilizando o software MATLAB e os pressupostos da matemática *fuzzy*, o resultado dos diferentes arranjos propostos por Barros e Bassanezi (2006), a saber: tela, sarja e cetim (que serão mais bem explicados na próxima

¹ Agradecemos ao CNPQ pela ajuda financeira e pelas bolsas concedidas.

seção). Diante disso, o presente texto apresenta na próxima seção um pouco da história dos tecidos e da formação de seus principais padrões; na sequência introduz a matemática *fuzzy* apresentando alguns conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho; em seguida mostra os *scripts* utilizados para a determinação das padronagens e; ao final, discute os resultados em torno do tema.

UM POUCO SOBRE OS TECIDOS

A história dos produtos têxteis mostra a evolução destes por meio do desenvolvimento de novas técnicas e o uso de novos materiais. Como aponta Silva e Menezes (2013, p. 1) “desde o surgimento dos primeiros tecidos com fibras naturais, como a lã, o linho, a seda e o algodão, passando pela inserção das fibras artificiais e sintéticas, até os dias atuais com os chamados tecidos inteligentes”.

O tecido, dentro desse contexto, possui uma história muito antiga, uma vez que sua produção acompanha a história do homem desde os tempos mais remotos. Segundo Oliveira (2011, p. 444) “os tecidos foram desenvolvidos por povos que viviam em climas mais temperados, povos esses que inventaram o uso de fibras animais e vegetais para a confecção de roupas e utensílios domésticos”. De acordo com o Dicionário etimológico², a palavra tecido vem “do latim *textus*, que significa ‘tecer’ ou ‘entrelaçar fios’ [...]” e acrescenta que “[...] os primeiros tecidos foram criados a aproximadamente 5 mil anos a.C, a partir do uso de algodão, linho e pele de animais”.

O primeiro tecido que se tem datado é o linho. Oliveira (2011, p. 444 *apud* Laver 2006) destaca que,

[...] as fibras de casca de árvores foram utilizadas para tecer pelos índios americanos, mas não eram tão boas quanto as outras fibras vegetais como o linho, o cânhamo e o algodão. Essas últimas exigiam cultivo e foram pouco usadas na época pastoril (OLIVEIRA, 2011, p. 444 *apud* LAVER, 2006).

Como exemplo do uso do linho, podemos citar a existência de múmias encontradas por arqueólogos em que os tecidos de linho que as envolvem têm qualidade de tecelagem tão grande como os fabricados atualmente - com auxílio de máquinas.

² **DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO**. Disponível em: <<https://www.dicionarioetimologico.com.br>>. Acesso em: 06 abr. 2018.

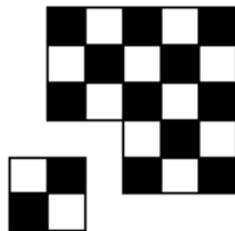
Um dos processos históricos mais importantes para o desenvolvimento de tecnologias, a Revolução Industrial, começou com a automatização de máquinas de tecelagem, tornando os tecidos importantíssimos para essa revolução e fazendo deles os objetos de produção das primeiras fábricas; com toda essa importância, os tipos de tecido e técnicas de tecelagem multiplicaram-se. Com os vários tipos de tecidos desde então fabricados, três padronagens se destacam: a tela, a sarja e o cetim.

Segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 69),

[...] os tecidos são formados por uma ordenação de dois sistemas de fios que se cruzam perpendicularmente, chamados de urdume (fios que estão no sentido do comprimento do tecido) e trama (fios que estão no sentido da largura do tecido). As ligações entre eles são chamadas de padronagem.

A tela é a mais simples das armações, pois sua base apresenta duas tramas e dois fios. É a armação mais produzida pelo mercado. Sua representação pode ser vista na Figura 1, onde os quadrados brancos indicam valor lógico 1 (um) e os quadrados pretos indicam valor lógico 0 (zero), na matriz de formação.

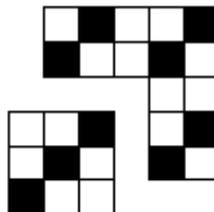
Figura 1 - Tipo Tela



Fonte: Dos autores

A principal característica da sarja são as diagonais que podem ser observadas em toda a largura do tecido. Nessa armação os fios têm que passar por cima de no mínimo duas tramas seguidas e por baixo da próxima trama. Na Figura 2, temos sua representação.

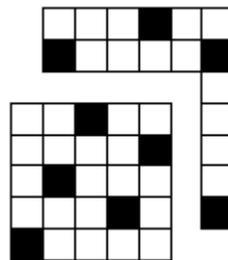
Figura 2 - Tipo Sarja



Fonte: Dos autores

O cetim é um tecido e foi assim denominado em homenagem a Zaitum, na China, de onde se origina. Era a princípio um tecido brilhante de seda em trama bem fechada. A distribuição de seus pontos o torna leve e brilhante. É dado por um deslocamento constante numa matriz quadrada previamente calculada, conforme pode ser vista na Figura 3, a seguir.

Figura 3 - Tipo Cetim



Fonte: Dos autores

Longe de ser um tratado sobre tecidos, o objetivo dessa seção foi destacar a importância que tiveram na evolução da tecnologia. Vale salientar que muitos dos teares contemporâneos utilizam a composição de padrões (como os já apresentados) para formar novos tecidos. Essa nova estruturação pode ser simplesmente um procedimento matemático de soma entre as matrizes que caracterizam uma padronagem ou então podem ser usadas composições típicas da lógica *fuzzy*, como por exemplo, o *max* e o *min*. Na próxima seção apresentamos os conceitos de matemática *fuzzy*.

RELAÇÕES FUZZY

A matemática *fuzzy* busca moldar os raciocínios aproximados, ou seja, aqueles não exatos, os imprecisos. Segundo Kosko (1993), em 1965, Lotfi Askar Zadeh, publicou o artigo *Fuzzy Sets* no *Journal Information and Control*. Esse artigo foi o primeiro a desenvolver o que na lógica *fuzzy* atual chamamos de funções de pertinência de conjuntos *fuzzy*.

Merli (2017, p. 6) aponta que “o ‘verdadeiro’ e o ‘falso’ são as situações limite, ou seja, as situações precisas. Não é exatamente com isso que essa lógica trabalha, e sim com as situações intermediárias a essas, ao usar palavras como ‘muitos’, ‘poucos’, ‘a maioria’, ‘ocasionalmente’, entre outras”.

Conjuntos *fuzzy* foram estabelecidos por Zadeh na década de 1960 “com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como ‘aproximadamente’, ‘em torno de’, dentre outros” (BARROS; BASSANEZI, 2006, p. 12). Tendo isso esclarecido, podemos entender que um conjunto *fuzzy* é uma classe de objetos que possuem grau de adesão ou pertinência. Cada objeto deve possuir um grau de pertinência diferente do outro, que varia entre zero (não pertencente) e um (pertence totalmente).

A formalização do conceito de conjunto *fuzzy* foi baseado na ideia de que todo conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, chamada função característica. As definições a seguir, bem como sua notação matemática são retiradas de Barros e Bassanezi (2006).

Definição 1. Seja U um conjunto clássico e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Desta forma, χ_A é uma função cujo domínio é U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$, com $\chi_A(x) = 1$ indicando que o elemento x está em A , enquanto que $\chi_A(x) = 0$ indica que x não é elemento de A .

Merli e Almeida (2012, p. 5) afirmam que,

[...] nos conjuntos crisp ou clássicos, um elemento pode apenas pertencer ou não pertencer a um dado conjunto. Assim, dado um conjunto A e um elemento x , dizemos que $x \in A$ ou que $x \notin A$. Por exemplo, o conjunto A dos números pares. Sabemos que o número $2 \in A$ e que $3 \notin A$.

Porém, há casos em que para algum elemento esta pertinência não está tão bem esclarecida. Nesses casos, a definição de conjuntos *fuzzy* é necessária.

Definição 2. Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto *fuzzy* F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F U := [0, 1], \quad (2)$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto *fuzzy* F . O índice F na função de pertinência é usado em analogia à função característica de subconjunto clássico, conforme Definição 1. O valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto *fuzzy* F ; $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$, indicam, respectivamente, a não pertinência e a

pertinência completa de x ao conjunto *fuzzy* F . Um subconjunto *fuzzy* F é composto de elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. Podemos dizer que um subconjunto *fuzzy* F de U é dado por um conjunto clássico de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{com } x \in U\} \quad (3)$$

Além dessa compreensão básica de conjunto *fuzzy*, é necessário, para o desenvolvimento do script, entender o que é uma Relação *Fuzzy*. De acordo com Barros e Bassanezi (2006, p. 57-58) “a relação será *fuzzy* quando optamos pela teoria dos conjuntos *fuzzy*, e será *crisp* quando usamos a teoria clássica dos conjuntos para conceituar a relação em estudo”.

Definição 3. Uma relação *fuzzy* R sobre um $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto *fuzzy* de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim, uma relação *fuzzy* R é definida por uma função de pertinência $\varphi_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1]$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos, $U_1 \times U_2$, então a relação é chamada de *fuzzy* binária sobre $U_1 \times U_2$.

As formas mais comuns de se representar uma relação *fuzzy* binária em, por exemplo, $X \times Y$, quando X e Y são finitos, são a tabular e a matricial. Sejam $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ e a relação *fuzzy* R sobre $X \times Y$, com função de pertinência dada por $\varphi_R(x_i, y_j) = r_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a representação matricial de R pode ser dada por:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Outro ponto importante de salientar é a definição de relação *fuzzy* binária inversa.

Definição 4. Seja R uma relação *fuzzy* binária em $X \times Y$. A relação *fuzzy* binária inversa, R^{-1} , definida em $Y \times X$, tem a função de pertinência $\varphi_{R^{-1}}: Y \times X \rightarrow [0,1]$ dada por $\varphi_{R^{-1}}(y, x) = \varphi_R(x, y)$.

É importante notar que a matriz de R^{-1} coincide com a transposta de R .

Definição 5. Considere R e S duas relações *fuzzy* binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação *fuzzy* binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))]. \quad (5)$$

Merli (2017, p. 8) afirma que “esta composição é denominada composição *max-min*. Quando os conjuntos U, V e W são finitos, então a forma matricial da relação $R \circ S$, dada pela composição *max-min*, é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo”.

Nesta seção, apresentamos apenas algumas definições de conceitos que utilizaremos para discutir os *scripts* a seguir. Na sequência, apresentamos alguns *scripts* feitos no MATLAB para determinar algumas padronagens.

UM SCRIPT EM MATEMÁTICA FUZZY PARA MOSTRAR DIFERENTES PADRONAGENS

O script apresentado a seguir permite que um usuário escolha entre seis opções de visualização de padronagem. As três primeiras opções são representações da matemática clássica, enquanto que as três últimas apresentam a representação da matemática *fuzzy*. Como já salientado, o script está na linguagem do software MATLAB e pode ser visto no Quadro 1.

Quadro 1 – Script do MATLAB

```

“disp ('escolha seu tipo de tecido')
x = input('1) tarja 2) sarja 3) cetim 4) exemplo de arranjo tarja+sarja rotação
5) exemplo de arranjo tarja+sarja translação 6) exemplo de arranjo tarja+sarja reflexão')

if x==1;
    imshow ([1 0; 0 1])

elseif x==2;
    imshow ([1 1 0; 1 0 1; 0 1 1])

elseif x==3;
    imshow ([1 1 0 1 1; 1 1 1 1 0; 1 0 1 1 1; 1 1 1 0 1; 0 1 1 1 1])

elseif x==4;
    imshow ([1 0 0 0 1 0; 0 0 0 1 0 1; 0 0 1 0 1 0; 0 1 0 1 0 0; 1 0 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 1])
    
```

```

elseif x==5;
    disp ('dispõe-se quatro padrões um ao lado do outro, fazendo movimentação de
    translação')
    imshow ([1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0; 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1; 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0; 0 1
    0 1 0 0 0 1 0 1 0 0; 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1; 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0; 0 0
    0 1 0 1 0 0 0 1 0 1; 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0; 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0; 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0; 0 1
    0 0 0 1 0 1 0 0 0 1])
elseif x==6
    disp ('dispõe-se quatro padrões um ao lado do outro, fazendo movimentação de
    reflexão')
    imshow ([1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1; 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0; 0 1
    0 1 0 0 0 0 1 0 1 0; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1; 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0; 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1; 0 0
    0 1 0 1 1 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0; 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0; 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1; 0 1
    0 0 0 1 1 0 0 0 1 0])
elseif x ~= 1;2;3;4;5;6
    disp ('número inválido')
end
  
```

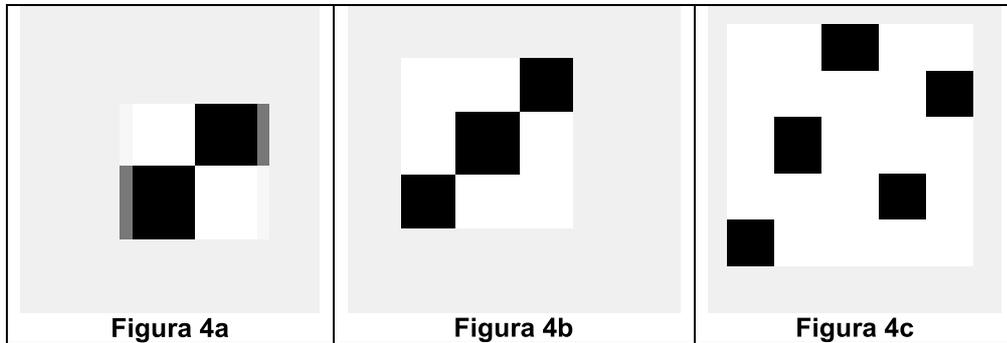
Fonte: dos Autores

Nas primeiras linhas do código selecionado é dado ao usuário do programa uma escolha entre seis opções, na qual em cada uma delas trará como resultado uma demonstração visual de qual foi o padrão escolhido. Na hora da formação das imagens, o programa MATLAB faz uso de cada termo como um pixel da imagem, sendo assim, o tamanho da imagem dependerá exclusivamente do tamanho da matriz dada a ele para tal.

Como a imagem almejada é binária, ou seja, apenas com duas cores, foi utilizado o padrão do programa, que é de 0 (zero) para a cor preta e de 1 (um) para a cor branca.

Se o resultado escolhido for a opção 1 (Tela) o usuário terá como resposta a Figura 4a, se for a opção 2 (Sarja) ele terá a Figura 4b e, se for a opção 3 (Cetim) ele terá a Figura 4c, como na visualização.

Figura 4 – Opções 1, 2 e 3



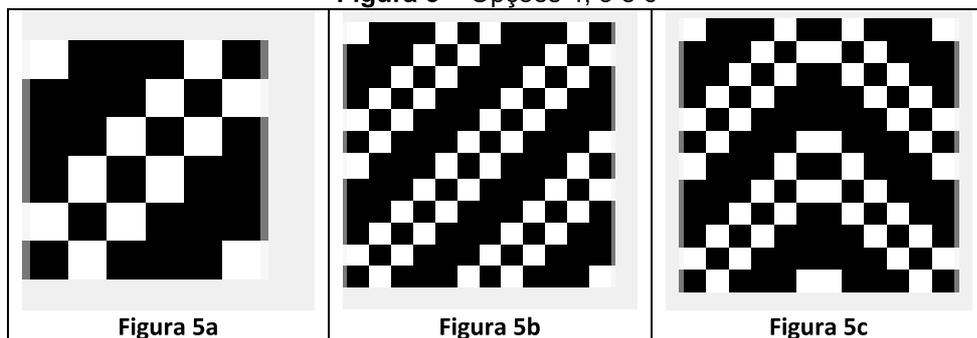
Fonte: Dos autores

As três figuras anteriores apresentam a representação clássica de padronagem na tecelagem resultantes dos padrões até então existentes. No entanto, a união dessas padronagens entre si geram outros arquétipos que podem ser constituídos por meio de composições *fuzzy*. Por exemplo, podemos tomar a operação:

$$T \oplus S = \max \{t_{ij}, s_{ij}\}. \quad (6)$$

Essa operação é definida como *soma*. Assim, adotando essa composição *fuzzy* e, se o usuário escolher a *soma* arranjada de Sarja e Cetim (opção 4), ele terá como resultado a Figura 5a. No caso de realizar uma translação a partir dessa soma (opção 5), o usuário terá como solução a Figura 5b. Por fim, caso a escolha seja a opção 6, que é uma soma do tipo reflexão, ele obterá, a Figura 5c.

Figura 5 – Opções 4, 5 e 6



Fonte: Dos autores

Os resultados obtidos na Figura 5 representam a criação de novos arquétipos a partir das padronagens clássicas: tela, sarja e cetim. Essas novas composições foram realizadas a partir de uma composição *fuzzy* do tipo máximo. Vale apenas salientar que outras composições *fuzzy* poderiam ser adotadas e outros padrões de tecido apareceriam.

CONSIDERAÇÕES (MAS NÃO FINAIS)

No presente artigo apresentamos um pouco da história dos tecidos e dos tipos de padronagem clássicas presentes na literatura: tela, sarja e cetim. Na sequência fizemos um breve resumo sobre alguns conceitos de matemática *fuzzy*, entre eles a ideia de composição *fuzzy*.

Em seguida apresentamos o script produzido em MATLAB que permite a um usuário escolher dentre seis opções/visualizações de padronagem clássica e *fuzzy*. Vale destacar que o software MATLAB é uma ferramenta que se mostrou muito útil para a realização do presente artigo, uma vez que ele possibilitou a criação das imagens mostradas. Também é possível salientar que ele é altamente versátil, já que existe nele uma praticidade na criação de matrizes. As três primeiras opções (Figura 4) representam as três padronagens clássicas e as três últimas (Figura 5) representam a padronagem por meio da composição *fuzzy* soma (equação 6), utilizando o método de máximo.

Assim, o objetivo principal do texto que era apresentar diferentes formas de produzir novas padronagens a partir da matemática *fuzzy* foi realizada por meio da criação de um *script*. Vale reforçar que o script apresentado não esgota todas as possibilidades de representação de novos padrões de tecido, mas apresenta apenas um exemplo de aplicação da matemática *fuzzy*, em especial, da composição *fuzzy*.

Por fim, podemos dizer que novos trabalhos em matemática *fuzzy* utilizando o software MATLAB serão desenvolvidos a fim de produzir novos *scripts*, até mesmo mais flexíveis quanto a escolha do usuário para produzir novas padronagens.

REFERÊNCIAS

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas. SP: Coleção IMECC, 2006.

GERDES, P. **Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

KOSKO, B. **Fuzzy Thinking**, Hyperion, New York, 1993.

LAYER, James. **A roupa e a moda: uma história concisa**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

MERLI, R. F. Atividades de modelagem matemática para o ensino de relações e composição *fuzzy*. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2017, Maringá. **Anais...** Maringá: UEM, 2017 Disponível em: <<http://www.eventos.uem.br/index.php/cnmem/xcnmem2017/paper/view/3063>>. Acesso em: 06 abr. 2018.

MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. Modelos clássico e *fuzzy* na avaliação por conceitos: Um olhar para as diferentes linguagens. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2013, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2013.

MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. Nem tudo é tão certo como parece ser: a Matemática *Fuzzy* como Linguagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2011, Apucarana. **Anais...** Apucarana: FAP, 2011.

MERLI, R. F.; ALMEIDA, L. M. W. O(s) modelo(s) populacional(is): clássico e *fuzzy* - Um olhar a partir de Wittgenstein. In: ENCONTRO PARANANENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V, 2012, Toledo. **Anais...** Toledo: UTFPR, 2012.

OLIVEIRA, G. I. A Trama e a urdidura: o vocabulário têxtil e a história da língua portuguesa. **Filologia e Linguística Portuguesa**, Brasil, v. 13, n. 2, p. 441-457, dez. 2011. Disponível em: <<https://www.revistas.usp.br/flp/article/view/59895>>. Acesso em: 06 abr. 2018.

SILVA, D. N.; MENEZES, M. dos S. Design têxtil: revisão histórica, surgimento e evolução de tecnologias. In: Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, XXI, 2013, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 2013. Disponível em: <<http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermedia/graphica2013/trabalhos/DESIGN%20TEXTIL%20REVISAO%20HISTORICA%20SURGIMENTO%20E%20EVOLUCAO%20DE%20TECNOLOGIAS.pdf>>. Acesso em: 06 abr. 2018.

ZADEH, L. A. *Fuzzy Sets*, **Information and Control**, v. 8, p. 338-353, 1965.

FRAÇÕES EQUIVALENTES EM LIVROS DIDÁTICOS NAS DÉCADAS DE 1960 E 1970

José Matheus Ramos

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo

josematheusramos@gmail.com

Barbara Winiarski Diesel Novaes

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo

barbaradiesel@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Enquanto aluno da educação básica, um dos maiores pontos de dificuldade na matemática no ensino fundamental foi o que se refere as frações. Hoje, como estudante do curso de licenciatura em matemática, percebo que a dificuldade dos alunos em frações no ensino fundamental, acaba resultando em os alunos não relacionarem, por exemplo, que valores como 0,5 também podem ser representados por $\frac{1}{2}$. É de extrema importância que o aluno consiga compreender os conceitos de equivalência para que possa entender proporções. Porém, se o aprendizado é falho no primeiro conceito, o restante do conteúdo passa a ser mais difícil para entendimento dos alunos.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998) o conceito de equivalência é de suma importância no desenvolvimento de cálculos. Segundo Van de Walle (2009) duas frações são ditas equivalentes, se elas forem representações para uma mesma quantia/quantidade, ou ainda se forem o mesmo número. Na adição e subtração envolvendo frações de denominadores diferentes, pode-se transformá-las em frações de mesmo denominador, utilizando o conceito de frações equivalentes (BRASIL, 1998).

Neste trabalho, objetiva-se analisar a forma como o conteúdo de frações equivalentes era apresentado em alguns livros didáticos das décadas de 1960 e 1970 da antiga quarta série primária e é um resultado parcial do projeto de iniciação científica “frações a ensinar nos primeiros anos escolares: livros didáticos e provas (1960-1980)”.

SOBRE O PROJETO

O projeto de iniciação científica já referenciado iniciou-se em outubro de 2017 e tem previsão de término em setembro de 2018.

A investigação vincula-se ao projeto de pesquisa com uma proposta de investigação Temática (Rede de Pesquisa) do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), coordenado pelo prof. Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP). A pesquisa distingue a matemática a ensinar e a matemática para ensinar como saberes de natureza diferente, constituídos ao longo do tempo, e que merecem ser estudados e problematizados por meio de uma investigação histórica (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017). Adota como referência estudos que colocam os saberes como foco da análise da profissão docente, bem como textos vindos da história cultural, que possibilitam análises em termos de uma cultura escolar (JULIA, 2001). O projeto tem por objetivo analisar a matemática a ensinar nos primeiros anos escolares na perspectiva dos processos de internacionalização e circulação no estado do Paraná no período de 1960 a 1970 e almeja contribuir com a rede de pesquisadores para a escrita da história da Educação Matemática em nosso país. O plano de trabalho se adequa ao projeto homologado por pretender analisar sequências didáticas para o ensino das frações propostas em livros didáticos e provas escolares (1960 – 1980). O estudo pretende localizar e inventariar provas escolares e livros didáticos de matemática do ensino primário que circularam na região oeste do estado do Paraná. Para a consecução do estudo foram disponibilizadas informações básicas acerca do trabalho de levantamento das fontes históricas requeridas no estudo, assim como orientadas leituras acerca do referencial teórico-metodológico para análise de livros didáticos numa perspectiva histórica (CHOPPIN, 2004).

FRAÇÕES EQUIVALENTES NOS LIVROS DIDÁTICOS

As frações partem da ideia de parte-todo, e dentro desta ideia existem diversos subconceitos interligados, os quais são quociente, razão, parte-todo e operador. Segundo Amrein (2017) a relação parte-todo tem destaque em livros didáticos de quinto e sexto ano em relação aos demais conceitos dentro do conteúdo de frações. O conceito de parte-todo vem da ideia de uma determinada parte equivalente de um todo. Quociente transmite a ideia

do número de grupos do qual o inteiro será dividido. Por sua vez, a razão é a comparação entre duas ou mais unidades. As frações equivalentes são aquelas que representam a mesma parte do todo. As frações equivalentes são encontradas a partir da divisão ou multiplicação do numerador e do denominador por um mesmo número natural.

Para este estudo inicial selecionamos 4 livros didáticos (tabela 1), cujos critérios para a escolha foram a representação gráfica, o período de publicação e a série trabalhada.

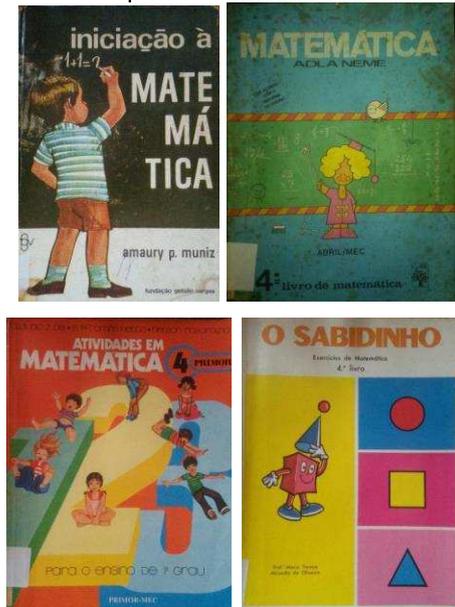
Tabela 1 – Livros didáticos selecionados

1975	DIB, Cláudio Z; NETTO, S. Pfromm; ROSAMILHA, Nelson. Atividades em Matemática. Primor-MEC-1975.
1966	MUNIZ, Amaury P. Iniciação à Matemática. Fundação Getúlio Vargas. 1966.
1973	NEME, Adla. À Caminho da Matemática. Editora Abril/ MEC – 4 ed., 1973.
1969	OLIVEIRA, Maria Tereza Miranda de. O Sabidinho. Editora Elyas S. A. – 4 ed., 1969.

Fonte: Autores

Pelas capas dos livros didáticos (na figura 1) é notável sua adequação a faixa etária dos estudantes que utilizaram os livros. O apelo visual é bastante presente e as temáticas envolvem o universo infantil e buscam despertar o interesse do aluno pela Matemática.

Figura 1 – Capa dos livros didáticos selecionados

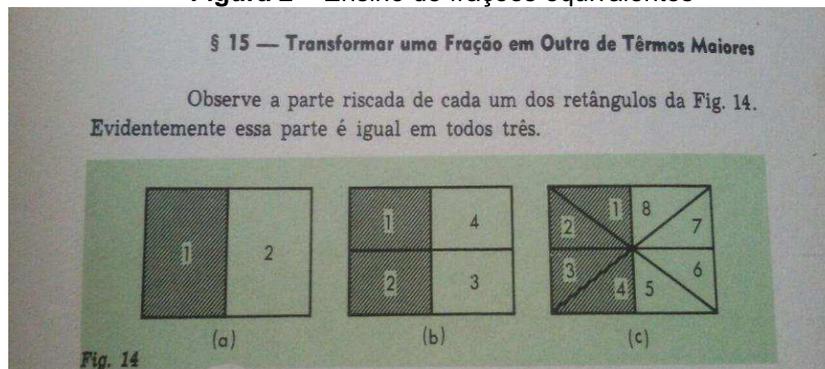


Fonte: acervo do GHEMATPR

Apesar de terem sido selecionados 4 livros, para este trabalho apenas um deles foi explorado.

Um exemplo que como era abordado o ensino de frações equivalentes nos livros didáticos na antiga quarta série são as figuras subdivididas de maneira diferente, porém com partes iguais preenchidas, como na figura 2.

Figura 2 – Ensino de frações equivalentes



Fonte: MUNIZ (1966)

No livro “Iniciação à matemática” de Amaury Muniz (1966), o autor inicia o conteúdo de frações com a noção de unidade. O primeiro exemplo a ser usado é a divisão de um segmento em partes iguais. Com o conceito de segmentos, os alunos conseguem relacionar a distância e assim, com a aplicação cotidiana de distância é de maior facilidade compreender a ideia de equivalência, quando, por exemplo, o aluno entende que já percorreu metade do caminho até a escola por conta de determinado ponto de referência, e assim consegue relacionar que se sair uma quadra antes de sua casa, e for até uma quadra depois da escola, o mesmo ponto de referência ainda será metade do caminho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo bastante inicial (primeiro trabalho de um dos autores) foi uma primeira tentativa de sistematização do estudo sobre que presente analisar sequências didáticas para o ensino equivalente propostas em livros didáticos das décadas de 1960 e 1970. Podemos observar inicialmente uma grande variação de abordagens, formas de ensinar os

conteúdos, problemas abordados e contextos de estudo. Percebemos que existia uma grande importância dada a questão teórica seguida de exercícios de aplicação. Nos próximos seis meses pretendemos aprofundar nosso quadro teórico sobre as frações equivalentes para poder analisar com maior propriedade os livros didáticos selecionados. Ressaltamos que a noção de equivalência é base para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, base para o entendimento de conteúdo futuros.

REFERÊNCIAS

AMREIN, Amanda. A ABORDAGEM DO ENSINO DE frações EM LIVROS DIDÁTICOS DE 5º E 6º ANOS (Trabalho de Conclusão de curso). UTFPR. Paraná, 2017. 74p.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF. 1998

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Educação e pesquisa, São Paulo, v. 30, n.3, p. 549-566, 2004.

DIB, Claudio Z; NETTO, S. Pfromm; ROSAMILHA, Nelson. Atividades em Matemática. Primor-MEC- 1975.

JULIA, Dominique. A cultura escolar como objeto histórico. Revista Brasileira de História da Educação, Campinas, n. 1, p. 9-43, 2001.

MUNIZ, Amaury P. Iniciação à Matemática. Fundação Getúlio Vargas. 1966.

NEME, Adla. À Caminho da Matemática. Editora Abril/ MEC – 4 ed., 1973.

OLIVEIRA, Maria Tereza Miranda de. O Sabidinho. Editora Elyas S. A. – 4 ed., 1969.

VAN DE WALLE, J. A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

HÁBITO DE LEITURA NO CURSO TECNOLOGIA EM PROCESSOS QUÍMICOS

Milena Kozima
UTFPR – Campus Toledo
mkozima06@gmail.com

Augusto Cesar Becker
UTFPR – Campus Toledo
augustobecker1@hotmail.com

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR-Campus Toledo
Regianefagundes@utfpr.edu.br

Resumo: O objetivo deste estudo foi avaliar o hábito de leitura dos alunos do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – campus Toledo, no ano de 2017. Trata-se de um estudo descritivo, exploratório, com abordagem quantitativa e qualitativa. A coleta de dados foi realizada em novembro de 2017, através de um questionário semiestruturado. Dentre os entrevistados 54,5% pertenciam ao primeiro e segundo períodos, 70,4% afirmaram ter hábitos de leitura no ensino médio, porém tais hábitos foram afetados pela faculdade. Os dados apontaram também que há um grande foco na leitura de conteúdo acadêmico. Pode-se concluir que a faculdade pode gerar um obstáculo para o desenvolvimento de hábitos de leitura e a literatura não acadêmica (por deleite).

Introdução

A atividade de leitura é considerada um hábito quando é repetidamente executada. Em termos mensuráveis, os hábitos de leitura são frequentemente considerados, em termos da quantidade de materiais a serem lidos, da frequência de leitura e bem como o tempo médio de leitura, sendo que este pode ser cultivado (SILVA, 2004).

O privilégio de ler surgiu do interesse da tecnologia e economia em reunir colaborações intelectuais da população, e, assim, o "direito de ler" também passou a

significar o direito de desenvolver capacidades intelectuais e espirituais, o direito de aprender e fazer progressos (BARROS, 2002).

A leitura já foi avaliada apenas como um meio de receber mensagens importantes, mas hoje se define o ato de ler como um processo mental de vários níveis que contribui para o desenvolvimento do intelecto. As demandas são feitas no cérebro pelo processo de transformação de símbolos gráficos em conceitos. Um número incalculável de células cerebrais são ativadas durante o processo de armazenamento de leitura; dessa forma, o repetir dessa prática resulta no treinamento cognitivo (DELIBERATO, 2005).

Estudos mostraram que a melhoria na capacidade de ler também leva a melhoria na capacidade de aprendizagem como um todo, muito além da mera recepção. A boa leitura é feita pelo confronto e a crítica das ideias de um autor. Essa passagem de passividade para atividade no hábito de leitura desencadeia, segundo Sampaio e Santos (2002), a maior compreensão de relacionamentos, de construção ou estrutura e interpretação de um contexto.

No contexto acadêmico, a leitura da literatura técnico científica constitui o pilar da formação profissional, pois subsidia o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao exercício da profissão, tornando os profissionais mais capacitados e competentes (KRIEGL, 2002).

O curso superior de Tecnologia em Processos Químicos, foco deste trabalho, objetiva formar profissionais para atuar no controle de qualidade do processo e dos produtos químicos, além da pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. Para tanto, é essencial registrar e interpretar resultados, adotando práticas adequadas para a busca de qualidade, viabilidade e sustentabilidade. Assim, a leitura diária de trabalhos técnico-científicos, incluindo livros e artigos científicos no contexto do cuidado com a qualidade, é essencial para a formação acadêmica e para a manutenção da qualificação profissional na área de Processos Químicos. Por se tratar de uma profissão que está fundamentada na evidência científica, a regulamentação dos hábitos de leitura deverá desencadear uma visão diferenciada do desempenho acadêmico (ARRUDA et al., 2012).

Portanto, o objetivo deste estudo foi avaliar o hábito de leitura dos alunos do curso superior de Tecnologia em Processos Químicos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Campus Toledo, no ano de 2017. Esse trabalho fez parte da avaliação

da disciplina de Probabilidade e estatística como Atividade Prática Supervisionada do curso de Engenharia Eletrônica.

Métodos

Trata-se de um estudo descritivo, exploratório, com abordagem quantitativa e qualitativa, realizado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná no campus de Toledo-PR, Brasil, onde são ofertados vários cursos na área de ciências exatas incluindo, o curso de Tecnologia em Processos Químico, que foi alvo da pesquisa. O curso é oferecido semestralmente no período noturno, possuindo turmas do primeiro ao sexto período, com alunos provenientes de todo o Brasil.

A população considerada neste estudo é composta de alunos do primeiro ao sexto período do curso de Processos Químicos. A amostra foi definida por conveniência, de acordo com a disponibilidade dos alunos em participar da pesquisa, obedecendo aos seguintes critérios de inclusão: idade superior a 18 anos e estar devidamente matriculado na instituição de ensino superior.

A coleta de dados foi realizada no dia 9 de novembro de 2017 após ser procurado o comitê de ética da instituição, o qual autorizou o trabalho. Os pesquisadores aplicaram um questionário em sala de aula sendo que os discentes foram informados sobre os objetivos do estudo e convidados a participarem voluntariamente da pesquisa.

Para a coleta de dados os pesquisadores com o auxílio do orientador (professor da disciplina de estatística) elaboraram um questionário semiestruturado, contendo questões semiabertas e fechadas. As variáveis pesquisadas descrevem o hábito de leitura referente a períodos anterior e posterior ao ingresso no curso e frequência com que leem.

As informações obtidas foram inseridas em um software de planilhas digitais para organização dos dados e sumarizados através da estatística descritiva. Calcularam-se a frequência absoluta (f_i), que é obtida contando-se a frequência observada em cada intervalo de classe, e frequência relativa (h_i), que é a razão entre a frequência absoluta e o número total de observações – f_i/n . Também foram utilizados gráficos de colunas e de setores para ilustrar as frequências relativas de algumas variáveis qualitativas. Mais detalhes podem ser encontrados em Montgomery e Runger (2012).

Resultados e Discussões

Nesta pesquisa houve a participação de 44 alunos que estavam presentes na universidade durante a época da coleta de dados. A Tabela 1 indica a distribuição de discentes levando em conta o gênero, sendo a maioria do sexo feminino (65,9%), e o período, com predominância dos alunos no primeiro e segundo período (54,5%). Verifica-se diminuição do número de alunos que participaram da pesquisa no decorrer dos períodos. Este fato pode estar relacionado a evasão do ensino superior. Segundo dados divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), somando o total de matrículas trancadas e alunos que abandonaram um curso superior temos aproximadamente 27% das vagas inativas. Ao confrontar o número de matriculados com o número de alunos que abandonaram um curso superior, a porcentagem sobe para 21,6% e o número de trancamentos sobe para 16,1% (BRASIL, 2018). Este acontecimento pode estar relacionado com a dificuldade do curso, interesses por outras áreas, defasagem de conhecimento e dificuldade de definir práticas de estudos, que engloba o hábito de leitura.

Tabela 1 – Distribuição dos discentes em Tecnologia em Processos Químicos em relação ao gênero e período da UTFPR – Campus Toledo, 2017

Variável	f_i	h_i (%)
Gênero		
Feminino	29	65,9
Masculino	15	34,1
Período		
1° e 2°	24	54,5
3° e 4°	12	27,2
5° e 6°	8	18,3
Total	44	100

Frequência: f_i =absoluta; h_i =relativa.

A Figura 1 indica que 70,4% dos acadêmicos mantinham o hábito de ler no ensino médio, e que para estes, a faculdade dificultou a manutenção do hábito de leitura, diminuindo assim a quantidade de livros lidos com relação à quantidade lida anteriormente.

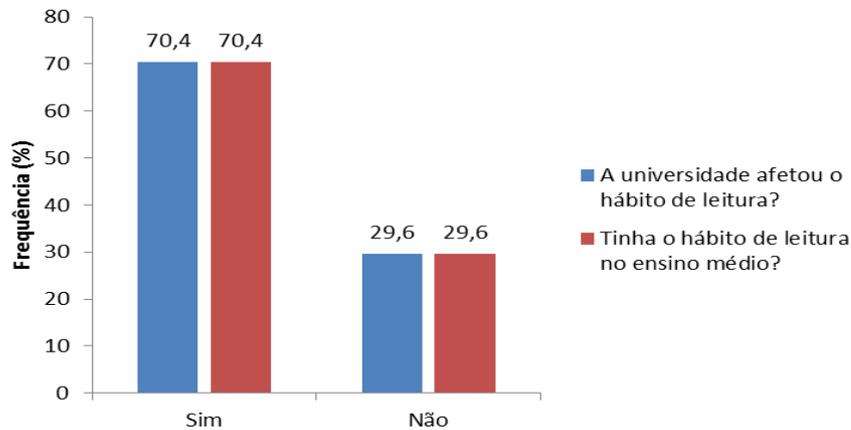


Figura 1 – Hábito de leitura antes e após o ingresso na UTFPR – Campus Toledo, 2017.

Os discentes foram questionados sobre o tipo de material de leitura que preferem entre notícias, revistas, leitura acadêmica e leitura não acadêmica. Houve uma preferência por leitura não acadêmica em todos os períodos, somando-se vinte e uma pessoas que escolheram esse tópico. Enquanto a acadêmica possui o menor índice de preferência, indicando que esta é realizada, em sua maioria, por obrigação.

Relacionando os períodos, observa-se que há maior homogeneidade nas escolhas em relação às leituras no terceiro e quarto período, diferente dos concluintes do curso, que responderam não realizar leitura acadêmica (Tabela 2). Este dado é um tanto contraditório, dado que nos últimos períodos os alunos desenvolvem o Trabalho de Conclusão de Curso a leitura acadêmica se torna ferramenta indispensável para elaboração de um bom trabalho.

Tabela 2 – Distribuição da preferência do tipo de leitura e período do curso dos discentes em Tecnologia em Processos Químicos – UTFPR-Campus Toledo, 2017

	Notícias	Revistas	Leitura acadêmica	Leitura não acadêmica
1° e 2°	12	4	4	12
3° e 4°	3	2	2	6
5° e 6°	5	3	0	3
Total	20	9	6	21

A Figura 2 indica que o grupo social (pais, amigos, colegas de trabalho) não contribui para desenvolver o hábito de leitura, sendo que apenas 15,90% dos entrevistados afirmaram

receber algum tipo de incentivo. Em contrapartida, percebe-se que 81,81% dos acadêmicos afirmam receber incentivo por parte dos professores para a leitura. No entanto os alunos relatam que, majoritariamente, o incentivo esta relacionado a conteúdos acadêmicos. Assim, os alunos são direcionados a darem prioridade aos assuntos do curso, resultando em menos tempo para uma leitura de lazer, corroborando com os resultados apresentados na Figura 1.

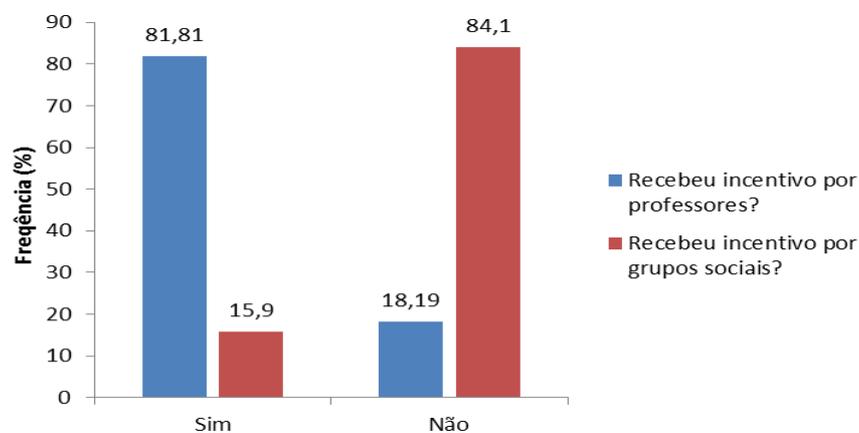


Figura 2 - Incentivo a leitura: por grupo social (pais, amigos, colegas de trabalho) e por professores.

Solicitou-se que os participantes informassem a frequência em que realizavam leitura de notícias, revistas, conteúdo acadêmico e livros literários. Analisando a Tabela 3, nota-se maior frequência em relação a notícias e conteúdo acadêmico, sendo que a leitura diária representou 52,27% e conteúdo acadêmico 43,18%. Em relação às variáveis revistas e livros literários apresentaram maior frequência relacionada à leitura anual, ou afirma que nunca leem com um índice de 34,09%. É possível notar pela Tabela 3 que ocorre maior interesse em assuntos relacionados à faculdade, ao mesmo tempo em que leituras direcionadas ao lazer diminuem.

Porém, vale refletir que a leitura literária é indispensável para qualquer pessoa, visto que a leitura para deleite próprio nos faz sentir um misto de sentimentos bons, aliviando o estresse diário ao qual somos acometidos na maioria dos dias, nos auxilia na ampliação de vocabulários e nos torna seres críticos.

Tabela 3 – Frequência relativa, em porcentagem (%), de diversas fontes de leitura realizada pelos discentes da UTFPR-Campus Toledo, 2017

	Notícias	Conteúdo acadêmico	Revistas	Livros literários
Diariamente	52,27	43,18	2,27	2,27
Semanalmente	31,82	47,73	18,18	11,37
Mensalmente	4,50	9,11	29,55	27,27
Anualmente	2,27	0,00	15,91	25,00
Nunca	9,14	0,00	34,09	34,09

Notícias: on-line, jornais impressos; Acadêmico: livros, artigos, resenhas.

Analisando a Figura 3 (b), é possível perceber que 92% dos entrevistados utilizam o acervo acadêmico no mínimo uma vez por mês o que comparado com o acervo literário, Figura 3 (c), esta soma resulta em apenas 28% dos discentes. Estes resultados corroboram com o apresentado na Tabela 3, onde se encontra que 34,09% de alunos nunca leem livros literários ou revistas e anualmente os valores foram 25,00% e 15,91%, respectivamente.

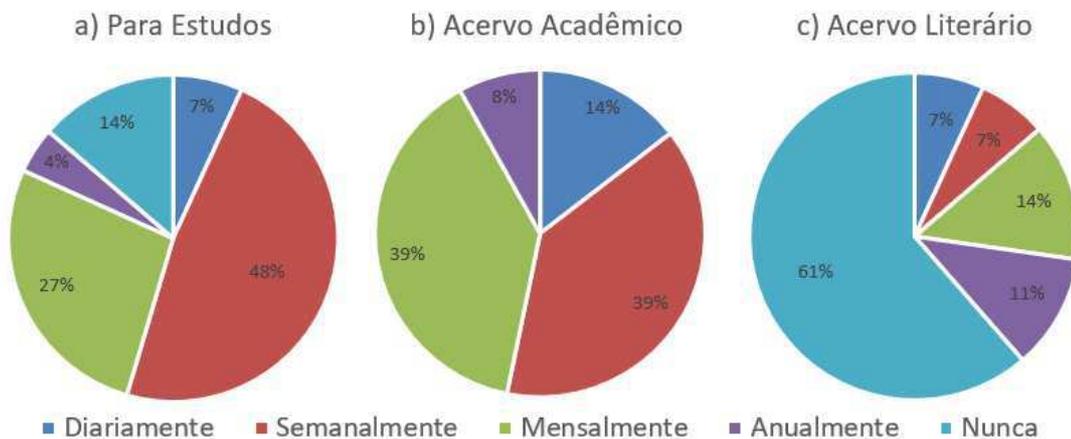


Figura 3 - Frequência relativa de utilização da biblioteca: (a) para estudo, (b) consulta do acervo acadêmico, (c) consulta do acervo literário.

Conclusão

Conclui-se que, ainda que haja a imprescindibilidade da leitura relacionada aos assuntos do contexto estudantil, a preferência pela leitura não acadêmica predomina, independente de ser a mais frequente. Assim, a busca por um equilíbrio entre a leitura acadêmica e “por

deleite” pode ser uma maneira de desenvolver o hábito de leitura. A universidade pode buscar meios para difundir a leitura nos diferentes cursos e níveis de graduação, buscando ele entre a teoria e a prática, entre o professor e aluno, entre realidade acadêmica e meio social.

Referências

ARRUDA, E.N.T.; SANTOS, J.O.; OLIVEIRA, P.P.; MENDES, K.G.L.; COUTINHO, R.M.C. **Análise do hábito de leitura de graduandos do curso de Enfermagem de uma universidade privada de São Paulo.** J Health Sci Inst, São Paulo, v.30, n.4, p.359-364, 2012.

BARROS, F.R. **A escola e a formação do sujeito-leitor.** In: TARGINO, Maria das Graças. Desafiando os domínios da informação. EDUFPI, 2002, p. 81-118.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). Informações estatísticas. Brasília: Inep, 2018. Disponível em <http://inep.gov.br/web/guest/dados>.

DELIBERATO, D. **Seleção, adequação e implementação de recursos alternativos e/ou suplementares de comunicação.** In: Núcleo de ensino, vol 1. Org. Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Correa Saglietti, Universidade Estadual Paulista – Publicações, 2005. p. 505-519. ISBN: 85.7139.623-X. Disponível em www.unesp.br/prograd.

KRIEGL, M.L.S. **Leitura: um desafio sempre atual.** Rev PEC (Curitiba). 2002; v.2, p.1-12.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G.C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 5 ed. Rio de Janeiro, LTC, 2012.

SILVA, E.M.T. **Leitura e escrita na universidade.** In: WITTER, Geraldina (Org.). Leitura e psicologia. Campinas, SP: Editora Alínea, 2004.

SAMPAIO, I.S.; SANTOS, A.A.A. **Leitura e redação entre universitários: avaliação de um programa de intervenção.** Psicol Estud. 2002; p. 31-8.

CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSO NA FILETAGEM DE TILÁPIAS: UM ESTUDO DE CASO

Paulo Augusto Fantinel
UTFPR - Campus Toledo
paulofantinel@alunos.utfpr.edu.br

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR - Campus Toledo
regianefagundes@utfpr.edu.br

1 Introdução

A demanda mundial por pescado vem sofrendo significativo avanço nas últimas décadas, o que se deve principalmente ao crescimento populacional e à procura por alimentos mais saudáveis. Dessa forma, a criação de peixes em grande escala em ambientes controlados (piscicultura) se destaca como uma alternativa viável para aumentar a oferta de pescados nos próximos anos (FAO, 2014).

Porém, um dos grandes problemas enfrentados pelas indústrias de filetagem de peixe é a padronização do filé. O tamanho do peixe, o método de filetagem, a destreza do filetador e a forma de corte dos músculos influenciam no rendimento e uniformidade do filé, podendo gerar descarte durante o processo de até 65 % da matéria-prima (VIDOTTI et al., 2003).

Uma das formas de auxiliar na correção deste problema é a implementação do Controle Estatístico de Processo (CEP) na industrialização. O CEP consiste de um conjunto de técnicas estatísticas que permitem diagnosticar a variabilidade no processo industrial, contribuindo para a melhoria da qualidade intrínseca, da produtividade, da confiabilidade e do custo do que está sendo produzido (MONTGOMERY, 2013). A aplicação dessa ferramenta pode evidenciar quais causas especiais estão provocando variabilidade no processo de industrialização do peixe e fornecer informações para que sejam tomadas ações gerenciais de melhoria do fluxo de produção em frigoríficos de peixes.

Assim, o presente trabalho tem por objetivo aplicar as ferramentas do Controle Estatístico de Processo (CEP) para avaliar o sistema de filetagem de tilápias.

2 Metodologia

Os dados analisados neste estudo foram obtidos junto a uma pequena agroindústria de filetagem na região Oeste do Paraná, que abate 5 toneladas de peixes diariamente. Foram coletados dados de abate durante os meses de março a dezembro de 2016. As variáveis monitoradas foram peso bruto total de peixes abatidos (kg) e rendimento total de filés diário, peso amostral bruto diário (g) de 30 tilápias e rendimento de filé amostral, com 3 repetições. Essa amostra foi definida seguindo o teorema central do limite, garantindo assim uma amostra representativa da população (MONTGOMERY, 2013).

As ferramentas do CEP mais conhecidas são as cartas de controle de Schwartz. Estas são divididas entre gráficos de controle para variáveis e para atributos. Há ainda outras técnicas de monitoramento como soma cumulativa, média móvel exponencialmente ponderada e análise de capacidade de um processo. Neste trabalho estudou-se especificamente as medidas para média

e amplitude (\bar{X} e R) e as medidas individuais e amplitude móveis (X individual e AM). Estes gráficos consistem em determinar estatisticamente uma faixa denominada limites de controle que é limitada pela linha superior de controle (UCL) e uma linha inferior de controle (LCL), além de uma linha central (CL).

Para construção dos limites do gráfico de controle R calcula-se:

$$UCL = D_4\bar{R}, \quad LC = \bar{R}, \quad LCL = D_3\bar{R};$$

e para construção dos limites do gráfico de controle \bar{X} calcula-se:

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2\bar{R}, \quad CL = \bar{\bar{X}}, \quad LCL = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{R},$$

em que $\bar{\bar{X}}$ é a média geral do processo, \bar{R} é a amplitude média e A_2, D_3 e D_4 são valores tabulados (MONTGOMERY, 2013).

Já para o cálculo das medidas individuais utiliza-se as seguintes equações:

$$\text{Gráfico } X: \quad UCL = \bar{X} + \left(\frac{3 * \overline{AM}}{d_2}\right); \quad CL = \bar{X}; \quad LCL = \bar{X} - \left(\frac{3 * \overline{AM}}{d_2}\right)$$

$$\text{Gráfico } AM: \quad UCL = D_4 * \overline{AM}; \quad CL = \overline{AM}; \quad LCL = D_3 * \overline{AM}$$

em que \bar{X} é a média das medidas individuais, \overline{AM} é a média da amplitude móvel e d_2, D_3 e D_4 são valores tabulados. Para mais detalhes sobre estas e outras cartas, ver Montgomery (2013).

As avaliações estatísticas de cálculo de rendimento, bem como os gráficos de controle estatístico do processo realizaram-se com o auxílio do *software R Core Team* e o pacote *qcc* (SCRUCCA, 2004).

3 Resultados e discussão

A seguir apresentam-se alguns dos resultados obtidos, destacando-se os gráficos de medidas individuais e o diagrama de Causa e Efeito, onde se relata algumas possíveis fontes de variabilidade do processo. As estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 1 referem-se ao peso bruto (matéria prima de entrada). Os resultados indicaram que o mês de novembro apresentou um LCL de 842,199 kg e UCL de 6542,554kg, com uma média de peixe bruto abatido de 3692,376 kg. Neste mês o coeficiente de variação foi de 22,21% apresentando uma grande variabilidade.

Outro mês que apresentou grande variabilidade foi o mês de junho. Neste mês obteve-se a menor média de peixe bruto abatido com 2620,234 kg, sendo coeficiente de variação em torno da média igual a 22,59%, sendo o maior coeficiente quando comparado com os outros meses avaliados (veja Tabela 1). Uma das causas de menor quantidade em kg de matéria prima abatida no mês de junho, pode estar associada à queda da temperatura das águas, pois uma temperatura de conforto dos peixes vai de 27° a 32°C, reduzindo dessa forma o crescimento e desenvolvimento (KUBITZA, 2011).

Tabela 1: Estatística descritiva do peso bruto de peixe, em kg, abatido diariamente no período de março à dezembro, 2016.

	\bar{X}	Desvio Padrão (s)	CV %	LCL	UCL
março	4209,696	500,626	11,89	2563,616	5855,776
abril	4065,340	507,795	12,49	2388,677	5742,002
maio	3396,924	566,613	16,68	1851,950	4941,897
junho	2620,234	592,053	22,59	848,068	4392,400
julho	3152,414	562,649	17,84	1889,542	4415,287
agosto	3286,527	486,401	14,79	2427,332	4145,722
setembro	2966,833	417,300	14,06	1821,674	4111,993
outubro	3184,004	448,443	14,08	1838,441	4529,567
novembro	3692,376	820,159	22,21	842,199	6542,554
dezembro	4285,327	561,067	13,09	2241,622	6329,033

Fonte: Os autores (2018).

Já a estatística descritiva referente ao peso de filé, Tabela 2, indicou que o mês de novembro um dos meses mais quentes do ano, à quantidade do peso bruto dos peixes abatidos foram maiores do que os outros meses. Isso fica evidente no mês de junho onde a média do peso bruto de peixes abatidos foi a menor. Esse decréscimo na média pode estar relacionada às condições ambientais, épocas do ano que fazem frio e calor que acabam influenciando no crescimento da matéria -prima, ou seja peso e tamanho do peixe.

Tabela 2: Estatística descritiva do peso em filé de peixe, em kg, abatido diariamente no período de março à dezembro, 2016.

	\bar{X}	Desvio Padrão (s)	CV %	LCL	UCL
março	1433,251	217,205	15,15	731,743	2134,758
abril	1391,840	208,471	14,97	722,181	2061,499
maio	1189,804	281,267	23,63	356,112	2023,495
junho	942,082	224,144	23,79	303,916	1580,246
julho	1101,472	211,103	19,16	646,737	1556,210 s
agosto	1141,844	185,966	16,28	709,924	1573,763
setembro	1021,082	163,451	16,00	609,563	1432,601
outubro	1040,075	139,857	13,44	593,497	1486,653
novembro	1259,296	293,372	23,29	137,304	2381,288
dezembro	1398,998	188,259	13,45	716,187	2081,809

Fonte: Os autores (2018).

Outro comparativo que podemos ver entre o meses de junho e novembro, é que ocorreu uma queda no coeficiente de variação ocasionando maior desperdício no processo de filetagem, e também é possível que a falta de treinamento na mão de obra pode ter influenciado tal perda.

A Figura 1 apresenta os gráficos de controle de medidas individuais, amplitude móvel dos meses de junho e novembro para o peso do filé. Nota-se que há pontos fora dos limites de controle e, também encontram-se arranjos típicos como tendência que é a contínua movimentação para cima ou para baixo, por pontos consecutivos ou não, que indicam a falta de controle estatístico.

Tais causas podem estar relacionadas com o peso, tamanho do peixe, com a temperatura entre outros.

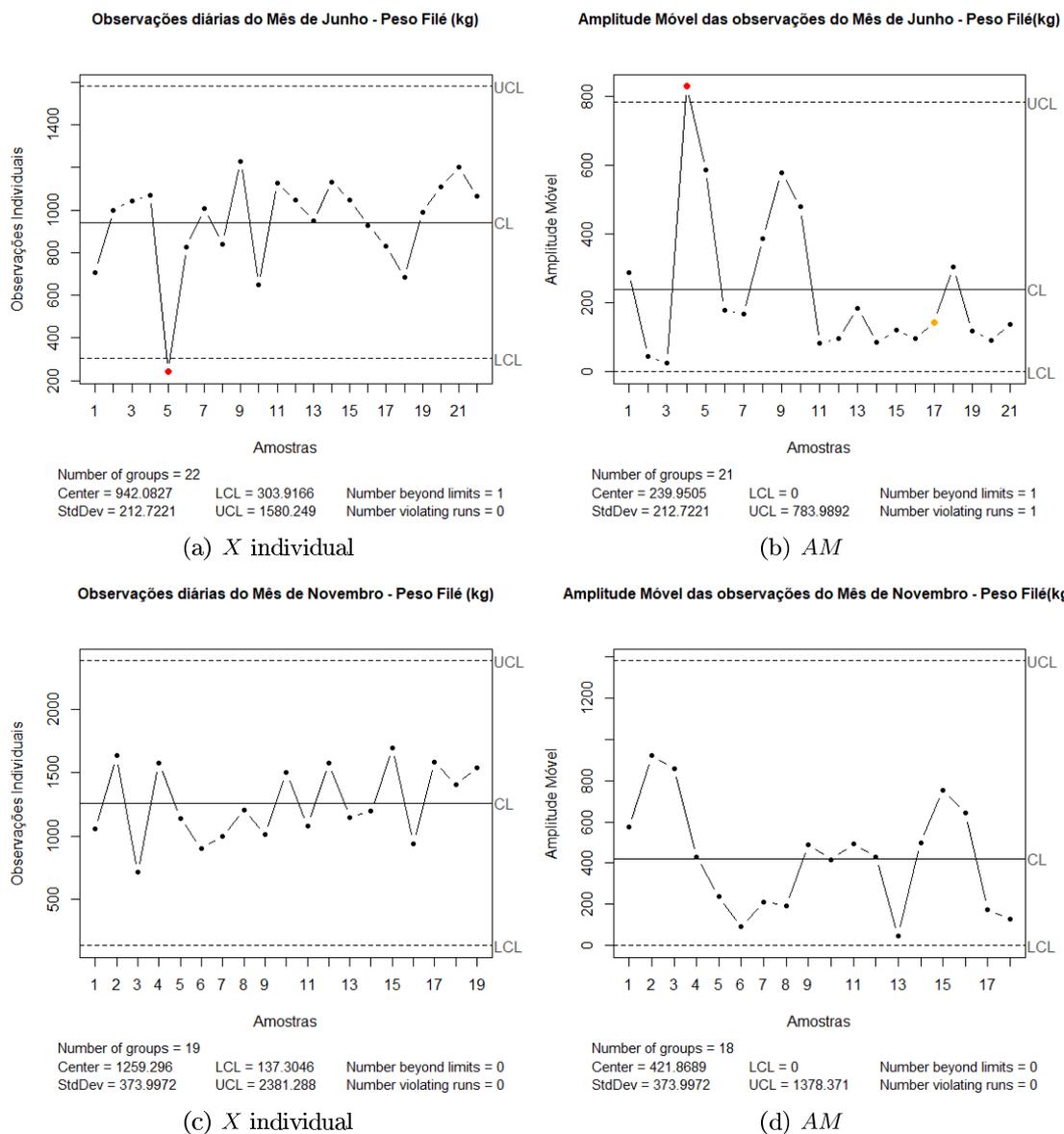


Figura 1: Gráfico de controle de medidas individuais (a-c) e amplitude móvel (b-d) dos meses de junho e novembro - Peso Filé (kg).

Fonte: Os autores (2018).

A Figura 2(a) apresenta o gráfico da média mensal do peso filé e a Figura 2(b) o gráfico da média mensal do percentual de conversão de março à dezembro de 2016.

Na Figura 2(a), encontra-se arranjos típicos, na faixa de 2 a 7, do tipo desvio com tendência (6 pontos consecutivos contínuo decrescente na região de 1-sigma), que também indicam a falta de controle estatístico. Na Figura 2(b), média mensal do percentual de conversão, observa-se que há seis pontos fora dos limites superior e inferior de controle, que indicam a falta de controle estatístico.

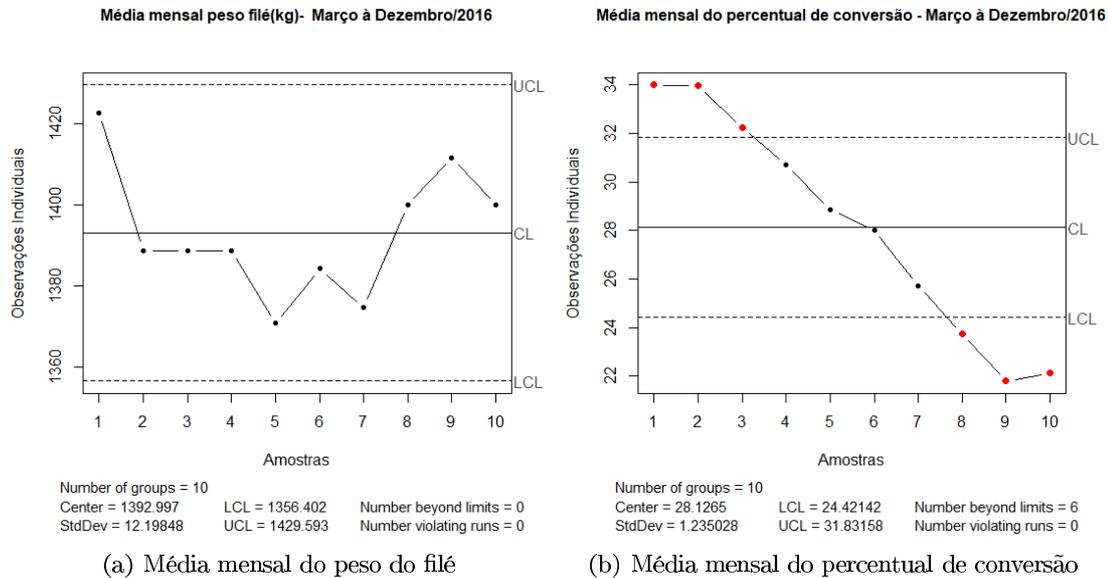


Figura 2: Gráfico de controle de medidas individuais e amplitude móvel para a média mensal para as variáveis peso filé (a) e percentual de conversão (b) de março à dezembro, 2016 (kg).
 Fonte: Os autores (2018).

A Figura 3 apresenta o Diagrama de Causa e Efeito. Nota-se que todas as causas atribuíveis que levaram a falta de controle estatístico no processo de filetagem de tilápias desde a matéria-prima, mão de obra, a falta de tecnologias, a falta de um sistema não automatizado, as condições ambientais e até mesmo o controle interno.

De um modo mais específico, com relação à causa associada à matéria-prima, verifica-se uma desuniformidade no que diz respeito ao peso e ao tamanho da espécie. Quanto à causa acerca da mão de obra, percebe-se que está relacionada aos fatores de produção, destreza do filetador e experiência (BECKER, 2014).

Outra questão que influencia na desuniformidade do peixe refere-se à tecnologia e ao sistema não automatizado, pois a falta de ferramentas, orçamento reduzido, segurança, qualidade, redução de custos e a otimização do tempo dificultam para que ocorra uma produção com efetivo controle. Por fim, outro fator que pode ser a causa de uma produção desuniforme e, por conseguinte, com controle de qualidade reduzido refere-se à gestão do frigorífico de peixe.

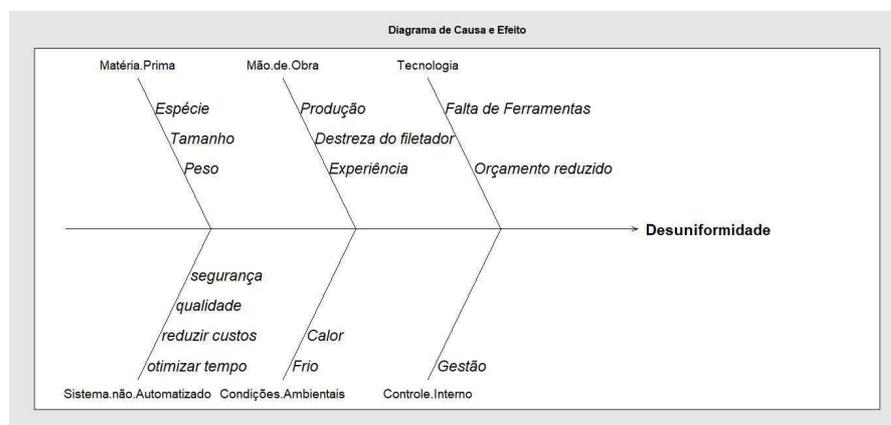


Figura 3: Diagrama de Causa e Efeito.
 Fonte: Os autores (2018).

4 Conclusão

Verifica-se que o uso do CEP auxiliou na percepção de que o processo de filetagem de tilápias necessita de um controle mais rigoroso, uma vez que as análises revelaram a não padronização do filé, ocasionando desperdício do alimento e, por conseguinte, prejuízos para o frigorífico de peixe. Neste sentido, acredita-se que o uso regular da ferramenta pode contribuir para a realização de um controle mais efetivo do processo de industrialização de filé.

Referências

- [1] BECKER, Evandro. **Simulação da dinâmica operacional do processo de produção de filés de tilápia em um frigorífico de peixes**. 2014. 60 f Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2014.
- [2] FAO - Food and Agriculture Organization of the United Nations. **The state of world fisheries and aquaculture: opportunities and challenges**. Roma: FAO, 2014.
- [3] KUBITZA, F. KUBITZA, L. M. **Tilápias: qualidade da água, sistemas de cultivo, planejamento de produção, manejo nutricional e sanidade**. AQUA & IMAGEM SERVIÇOS - Jundiaí, SP, 2011.
- [4] MONTGOMERY, Douglas C. **Introdução ao controle estatístico da qualidade**. 4.ed.- [Reimpr.]- Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [5] R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017. URL <https://www.R-project.org/>.
- [6] SCRUCCA, L. qcc: an R package for quality control charting and statistical process control. R News 4/1, 11-17, 2004. URL <https://cran.r-project.org/doc/Rnews/>
- [7] VIDOTTI, R. M.; VIEGAS, E. M. M.; CARNEIRO, D. J. **Amino acid composition of processed fish silage using different raw materials**. Universidade de São Paulo, Pirassununga, PR, 2003.

NORMAS USUAIS NO \mathbb{R}^n

Simone Ribeiro Da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
simone.ribeiro96@hotmail.com

Larissa Hagedorn Vieira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
larissavieira@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Ter uma norma em um espaço vetorial é estabelecer uma função que associe a cada vetor deste espaço um número real positivo, que será chamado de norma (ou comprimento) do vetor, e que cumpre certas propriedades. Nota-se, portanto, que a existência dessas condições, traz a possibilidade de estabelecer uma, duas ou mais normas diferentes num mesmo espaço vetorial. Neste trabalho, por exemplo, será considerado o espaço euclidiano \mathbb{R}^n como sendo o espaço vetorial do qual será apresentado três normas diferentes, que são consideradas normas usuais neste espaço, a saber: a norma euclidiana, a norma da soma e a norma do máximo.

Nesse sentido, este trabalho apresenta as três normas usuais de \mathbb{R}^n , mesmo que de forma breve, com a finalidade de mostrar que elas são equivalentes nesse espaço. Para fazer isso, o trabalho contém ainda mais três seções. Na seção seguinte, O Espaço Euclidiano n -dimensional, tem-se considerações sobre o espaço \mathbb{R}^n , que possibilitarão compreender as características dos seus elementos e as operações definidas entre eles, necessárias para que na terceira seção, Normas Usuais no Espaço \mathbb{R}^n , seja apresentada tais normas e como as mesmas levam um vetor em um número real e, como se garante a equivalência entre elas. Ao final, é tecida algumas considerações sobre a importância dessa equivalência, isto é, na seção Conclusão. Além disso, salienta-se que o referencial teórico adotado para subsidiar o trabalho nas seções que seguem, se encontra em [1].

2 O ESPAÇO EUCLIDIANO n -DIMENSIONAL

O espaço euclidiano n -dimensional, o \mathbb{R}^n , é obtido ao realizar o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} , para $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, um elemento x de \mathbb{R}^n que será chamado de ponto ou vetor, é identificado como uma sequência de n termos reais: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sendo que cada termo real do vetor $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, cada x_i ($i = 1, \dots, n$) é uma coordenada do vetor x .

Sejam x, y vetores de \mathbb{R}^n , dizer que tais vetores são iguais, é garantir que as respectivas coordenadas de cada um sejam iguais, de outro modo para $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

A operação de adição entre vetores de \mathbb{R}^n é realizada coordenada a coordenada, ou seja, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, então $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. A multiplicação por escalar também segue o padrão realizado para \mathbb{R}^2 , ou seja, se $x \in \mathbb{R}^n$ e α é um escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$) então $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

A partir dessas operações, pode-se mostrar (e, portanto estabelecer) algumas propriedades entre elementos do espaço \mathbb{R}^n , as quais são justamente aquelas que garantem que um dado conjunto seja de fato um espaço vetorial. Antes de apresentá-las é conveniente exprimir que os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 1)$ formam a base canônica de \mathbb{R}^n , bem como que o vetor $0 = (0, 0, \dots, 0)$ chama-se origem de \mathbb{R}^n e que o vetor $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ é o simétrico de qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Feito estas considerações, tem-se que as propriedades mencionadas anteriormente são válidas para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais propriedades são:

1. $x + y = y + x$;

2. $x + 0 = x$;
3. $-x + x = 0$;
4. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
8. $1 \cdot x = x$.

Pode-se ainda definir entre dois elementos de \mathbb{R}^n a função produto interno, que associa cada par de vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ um número real (o produto interno de x por y). Essa operação é escrita e realizada do seguinte modo: $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$. Dessa operação, segue-se ainda que para qualquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se que: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$, $\langle x, x \rangle > 0$ quando $x \neq 0$.

Esta função permite identificar quando dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais, pois se o resultado obtido ao realizar o produto interno de x por y for igual a zero, tem-se que x é ortogonal a y e, escreve-se $x \perp y$. E, além disso, a função produto interno possibilita definir a norma de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, como será visto na próxima seção.

3 NORMAS USUAIS NO ESPAÇO \mathbb{R}^n

Uma norma para \mathbb{R}^n , será também uma função que associa a cada vetor deste espaço um número real positivo e que cumpre três propriedades. Assim, inicialmente seja x um elemento qualquer de \mathbb{R}^n , o resultado obtido ao calcular o produto interno deste elemento por ele mesmo representa um número positivo que fornece o comprimento (ou norma) do vetor x , isto é, $\langle x, x \rangle = |x|^2$, em que $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é este número real positivo.

Assim se estabelece a norma euclidiana em \mathbb{R}^n , como uma norma advinda do produto interno. A norma euclidiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é calculada (e escrita) como $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. E, além desta norma, pode-se associar também ao vetor x um número real por meio da norma da soma e por meio da norma do máximo, que são escritas e calculadas como $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ e $|x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, respectivamente. Estas normas são denominadas normas usuais do espaço \mathbb{R}^n , sendo ainda a norma euclidiana definida como norma padrão para este espaço.

Cada uma dessas normas que associam ao vetor $x \in \mathbb{R}^n$ um número $|x|$, cumprem necessariamente as três propriedades seguintes para que sejam, de fato, uma norma:

1. $|x| \geq 0$, sendo $|x| = 0$ se, e somente se $x = 0$;
2. $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Neste trabalho será omitido a demonstração de que, de fato, cada uma das normas usuais em \mathbb{R}^n cumprem as propriedades acima.

Cabe ressaltar que, com o item 2 das propriedades anteriores, a igualdade $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$, para $\alpha = -1$, permite afirmar que $|-x| = |x|$.

Exemplo 3.1. *Seja o vetor $(2, -4, 1)$ um elemento de \mathbb{R}^n quando $n = 3$, determinar sua norma por meio das três normas usuais para \mathbb{R}^n .*

1. Com a norma euclidiana, a norma do vetor $(2, -4, 1)$ é $|(2, -4, 1)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

2. Com a norma da soma, a norma do vetor $(2, -4, 1)$ é $|(2, -4, 1)|_S = |2| + |-4| + |1| = |7| = 7$.

3. Com a norma do máximo, a norma do vetor $(2, -4, 1)$ é $|(2, -4, 1)|_M = \max\{|2|, |-4|, |1|\} = |-4| = |4| = 4$.

A partir das três condições que definem uma norma, e uma norma, pode-se induzir a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n , uma vez que essas condições apresentam as propriedades características de uma distância. Pois, por exemplo, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e a norma euclidiana de x , esta exprime a distância desse ponto até a origem de \mathbb{R}^n , e nesse sentido, por meio dessa norma pode-se determinar a distância entre dois pontos x e y , pondo $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$. E, de modo análogo, é possível obter a distância entre dois pontos de \mathbb{R}^n a partir da norma da soma e da norma do máximo.

Outro ponto interessante e que merece destaque em relação as normas usuais para \mathbb{R}^n que foram apresentadas, é que, de certo modo, elas são equivalentes, isto é, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ é válido que:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M.$$

Para verificar essa equivalência, optou-se por analisar cada relação de ordem. Nesse sentido, para $x \in \mathbb{R}^n$:

1. $|x|_M \leq |x|$

Seja $|x_w| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, segue que $|x_w| \geq |x_i|$, para qualquer $i = 1, \dots, n$, bem como que $|x_w|^2 \geq |x_i|^2$. Pela norma euclidiana, a norma do vetor x é $|x| = \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_w^2 + \dots + x_n^2)}$ e, de modo equivalente $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_w^2 + \dots + x_n^2$. Ao comparar as duas normas calculadas sobre o vetor x tem-se que $|x_w|^2 \leq x_1^2 + \dots + x_w^2 + \dots + x_n^2$, isto é, $|x_w|^2 \leq |x|^2$ que é equivalente a $|x_w| \leq |x|$, o que significa que $|x|_M \leq |x|$.

2. $|x| \leq |x|_S$

Seja $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_w^2 + \dots + x_n^2$ e seja também $|x|_S^2 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^2$. Note que $|x|_S^2 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|)^2 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \cdot (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 + 2 \sum_{j>i} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i||x_j|$. Como todo número ao quadrado é não-negativo, logo podemos

escrever que $|x|_S^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 2 \sum_{j>i} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i||x_j|$. Desta maneira, nota-se que $|x|_S^2 - |x|^2 =$

$$2 \sum_{j>i} \sum_{i=1}^{n-1} |x_i||x_j| \geq 0, \text{ isso significa que } |x|_S^2 \geq |x|^2 = |x|_S \geq |x|.$$

3. $|x|_S \leq n \cdot |x|_M$

Seja $|x_w|$ a norma do vetor x pela norma do máximo e seja $|x_1| + \dots + |x_w| + \dots + |x_n|$ a norma do vetor x pela norma da soma. Perceba que ocorre:

$$|x_w| \geq |x_1|$$

$$|x_w| \geq |x_2|$$

$$|x_w| \geq |x_3|$$

⋮

$$|x_w| \geq |x_n|$$

Ou seja, de um lado obtém-se $n \cdot |x_w|$ e do outro $|x|_S$, isso equivale a ter $n \cdot |x|_M \geq |x|_S$.

Portanto, de 1, 2 e 3 conclui-se válida a correspondência $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$.

Além disso, independentemente da norma que se usar, dentre as três normas possíveis em \mathbb{R}^n , vale também as seguintes desigualdades modulares:

1. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

4 CONCLUSÃO

Diante do que foi exposto nesse trabalho, nota-se que o espaço euclidiano \mathbb{R}^n admite não só uma, mas três normas usuais; bem como a possibilidade de outras normas, além dessas, serem estabelecidas nesse espaço. Assim, com o conhecimento dessas três normas (norma euclidiana, norma da soma e norma do máximo) e da equivalência entre elas, tem-se a possibilidade de usar aquela que for mais conveniente, isto é, aquela que facilitar a demonstração de que um resultado seja válido, por exemplo. Pois, se um conjunto qualquer de \mathbb{R}^n for limitado por uma delas, também será limitado em relação as outras.

Referências

- [1] LIMA, E. L. **Análise Real**. v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

**NOSSA PRIMEIRA EXPERIÊNCIA COM A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA: organização física do GHEMATPR**

Thalisson Wedley Rabelo Amâncio
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
thalissonrabeloamancio@gmail.com

Tuanny Katielly Costa de Souza
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
tutusouza2002@gmail.com

Barbara Winiarski Diesel Novaes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
barbaraw@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

No âmbito do projeto “A matemática a ensinar nos primeiros anos escolares: processos de internacionalização e circulação no estado do Paraná, 1960 – 1970” coordenado pela professora Barbara Winiarski Diesel Novaes há três subprojetos, dois deles de iniciação científica – ensino médio com estudantes do curso de Formação de Docentes do Colégio Estadual Presidente Castelo Branco intitulado “Repositório de conteúdo digital e a História da Educação Matemática: livros didáticos, cadernos de alunos e provas”.

A investigação vincula-se ao projeto de pesquisa com uma proposta de investigação Temática (Rede de Pesquisa) do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), coordenado pelo prof. Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP) em que pesquisadores de vários estados brasileiros inventariam e digitalizam fontes de pesquisa e enviam para o repositório de conteúdo digital do grupo (<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>) para a construção da História de Educação Matemática Brasileira.

Os nossos planos de trabalhos se adequa ao projeto homologado por pretender inventariar e digitalizar livros didáticos de matemática, cadernos de alunos e provas dos primeiros anos escolares na região oeste do estado do Paraná. Para a consecução do estudo recebemos informações básicas acerca do trabalho de levantamento das fontes históricas requeridas no estudo, assim como orientadas leituras para a fundamentação

teórico-metodológica. Os trabalhos iniciaram-se em agosto de 2017 e o término ocorre em julho de 2018. As etapas do plano de trabalhos que estamos desenvolvendo são:

1ª etapa:

a) estudo de literatura referente ao projeto;

b) inventário e digitalização do material localizado para envio ao repositório do grupo de pesquisa GHEMAT;

c) organização de planilhas específicas da produção inventariada.

2ª etapa:

a) organização cronológica da produção inventariada;

b) elaboração do Relatório Parcial.

3ª etapa:

a) Preenchimento da ficha catalográfica do material a ser enviado ao Repositório;

b) Preparação do material inventariado para envio para o Repositório.

c) Envio das fontes para o Repositório.

4ª etapa:

a) elaboração do Relatório Final;

b) apresentação do trabalho no Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR (SICITE);

c) apresentação de comunicação no XV Seminário Temático do GHEMAT a ser realizado em abril de 2018.

O objetivo deste artigo é relatar como ocorreu o processo de organização inicial dos livros didáticos, manuais pedagógicos e legislação doada pela professora Neuza Bertoni Pinto ao recém-criado GHEMATPR.

Fundado em 25 de outubro de 2017, o GHEMAT-PR está localizado fisicamente na UTFPR – Câmpus Toledo no Laboratório Interdisciplinar de Formação de Professores (LIFE) e forma uma rede de pesquisadores de várias cidades do Paraná (Palotina, Paranaguá, Fazenda Rio Grande e Curitiba). Possui um acervo de aproximadamente 200 livros didáticos antigos doados pela professora Neuza Bertoni Pinto que pode ser consultado com agendamento prévio. Nacionalmente contribui com as pesquisas do GHEMAT Brasil que possui um Repositório de Conteúdo Digital (RCD) da História da Educação Matemática sob responsabilidade do GHEMAT / SC.

CAIXAS E MAIS CAIXAS

No dia 06 de outubro (figura 1) iniciamos o processo de retirada e organização dos livros adquiridos por meio de uma doação a nosso projeto, até então vínhamos preparando a sala e pesquisando qual seria a melhor forma de organizar os livros, a coordenadora Bárbara conseguiu dois armários para que pudéssemos utilizá-los em nosso projeto o que nos facilitou durante todo o processo de retirada, organização e catalogação de todos os livros em posse de nosso projeto.

Nossa organização inicial de deu com a separação dos livros didáticos do primário, livros didáticos do ginásio, colegial, manuais pedagógicos, cartilhas de aprendizagem, livros preparatórios, legislação para o exame de admissão para posterior organização nos armários.

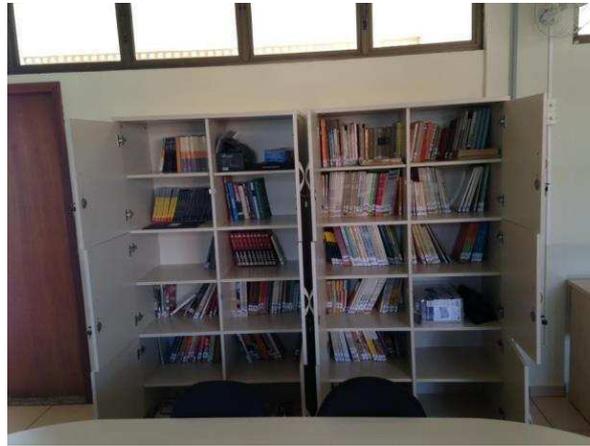
Figura 1 – Processo de retirada dos livros das caixas



Fonte: autores

Na figura 2 observamos os livros em posse do acervo organizados nos armários para sua futura catalogação.

Figura 2 – Processo de retirada dos livros das caixas



Fonte: autores

Um fato curioso é que encontramos um boletim da aluna Juditti Jorge do Colégio Instituto Filadélfia da cidade de Londrina do ano de 1951 no meio do livro “Guia de matemática”. Entre os livros, recebemos uma coleção com 10 volumes do escritor Malba Tahan, heterônimo de Júlio César de Mello e Souza, importante matemático brasileiro cuja data de nascimento comemoramos o dia da matemática no Brasil. Além disso, há livros didáticos do início do século XX, livros de outros países (vários escritos em espanhol sobre no período do Movimento da Matemática Moderna).

TRABALHO DE FORMIGA

Além da organização inicial dos livros, um dos objetivos atuais de nosso projeto é fazer funcionar os computadores, os scanners, para que assim possamos iniciar um processo de envio dos nossos exemplares de livros para o Repositório de Conteúdo Digital.

A primeira etapa após a retirada dos livros das caixas foi dividi-los em categorias com base nas séries para que depois disso pudéssemos armazená-los em seus respectivos lugares nos armários. Estamos planejando uma higienização e talvez restauração caso seja necessário nos livros de nosso acervo.

Até o momento essa organização resultou numa planilha com 55 livros sendo 42 livros didáticos dos anos iniciais, 10 manuais didáticos e 3 livros do antigo ginásial. As categorias utilizadas foram: autor, título, edição, ano, editora, número de páginas. Além

disso há três perguntas: está digitalizado?; está no repositório?; foi doado pela professora Neuza? Repositório – nessa organização nós acessávamos o repositório e verificávamos se o livro estava lá armazenado. Quando terminarmos a catalogação prévia dos livros, uma segunda etapa é o preenchimento de uma tabela mais descritiva de cada livro (metadados) para envio ao repositório.

Juntamente com a organização dos livros analisamos dois artigos e um livros que nos ajudarão a fundamentar nosso trabalho no que se refere ao Repositório de Conteúdo Digital (COSTA, 2015); análise de livros didáticos (CHOPPIN, 2004) e saberes profissionais (HOFFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017).

DEFINIÇÃO DO TEMA: AS FRAÇÕES NOS MANUAIS PEDAGÓGICOS E GUIAS DE ENSINO

Depois de finalizar a primeira organização dos livros didáticos, guias pedagógicos e manuais didáticos definimos qual seria o tema da nossa pesquisa. Optamos por estudas nos manuais e guias pedagógicos as orientações para o ensino das frações no ensino primários devido a sua importância nos anos iniciais e que gera bastante dificuldade nos alunos e professores. Dos 11 manuais e guias pedagógicos disponíveis no acervo, selecionamos 4 (tabela 1) por serem escritos por autores cujas obras tiveram uma grande circulação no Paraná.

Tabela 1 – Título da Tabela 1
(Fonte Arial, tamanho 10, centralizada, numerada)

Irene de Albuquerque	Metodologia da matemática (1964)
Maria Helena Roxo; Maria Luiza do Carmo Neves	Didática Viva da Matemática no curso primário (1970)
Norma Cunha Osório; Rizza de Araújo Pôrto	Matemática na escola primária moderna (1968)
Rizza Araujo	Ver, sentir, descobrir a

Porto	aritimetica (1968)
-------	--------------------

Fonte: autores

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizada esta primeira etapa do projeto nos próximos quatro meses estaremos analisando os manuais selecionados no que se refere ao ensino de frações. Para tanto iniciamos em paralelo estudo de referências teóricas sobre esta temática.

A organização de um acervo histórico (físico e digital) é um trabalho que demanda tempo, cuidado e dedicação. Em relação ao Repositório Digital do GHEMAT, este tem permitido que pesquisadores dos mais diferentes estados do Brasil, desenvolvam estudos históricos comparativos que permitem avançar na compreensão de como se constitui historicamente a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

CHOPPIN, A.. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte.** Educação e pesquisa, São Paulo, v. 30, n.3, p. 549-566, 2004.

COSTA, D.A. Repositório. v.3 In: VALENTE, W.R. (Org.). Cadernos de Trabalho. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015a.

HOFSTETTER, R.; SCHNEWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: VALENTE, W. R.; HOFSTETTER, R. Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores, 1 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

Introdução aos Números Ordinais e Números Cardinais

Vinícius Franco Vasconcelos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
v.f.v.math@gmail.com

Adriano Gomes de Santana
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrianosantana@utfpr.edu.br

1 INTRODUÇÃO

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais possui diversas propriedades, algumas das quais já estamos familiarizados. Utilizamos os números naturais principalmente para ordenar e para contar elementos de um conjunto finito a . Fazemos isso, ainda que de forma inconsciente, por meio de uma função de um subconjunto $\{k \in \mathbb{N} : k < n\} \subseteq \mathbb{N}$ em a . O conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ será identificado com n .

A noção de “ordenar” está associada a números ordinais, enquanto que a noção de “contar” está associada a números cardinais, porém qualquer ordenação e qualquer contagem que utilize números naturais está restrita a conjuntos finitos, sendo possível generalizar tais conceitos para conjuntos infinitos.

Pretendemos neste trabalho desenvolver essas noções, mostrar algumas propriedades dos números ordinais e dos números cardinais bem como diferenças entre elas, que coincidem no caso finito mas não no infinito.

Como estamos trabalhando dentro da Teoria dos Conjuntos, especificamente ZFC¹, não faremos distinção entre conjuntos e elementos, denotaremos ambos por letras minúsculas. Quando nos referirmos a classes, utilizaremos letras maiúsculas.

2 RELAÇÕES DE ORDEM

Definição 1. Dada uma relação binária \leq em a , dizemos que:

- \leq é *reflexiva* se $x \leq x$ para todo $x \in a$;
- \leq é *antissimétrica* se $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$ para todos $x, y \in a$;
- \leq é *transitiva* se $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$ para todos $x, y, z \in a$.

Se \leq for reflexiva, antissimétrica e transitiva, dizemos que \leq é uma *relação de ordem* em a , ou simplesmente uma *ordem* em a .

Definição 2. Dados um conjunto a e uma relação de ordem \leq em a , a estrutura (a, \leq) é chamada de *conjunto ordenado*. É comum dizermos simplesmente que a é um conjunto ordenado quando é claro a que ordem nos referimos.

Definição 3. Dado um conjunto ordenado (a, \leq) , definimos a *ordem estrita* em a como segue: para cada $u, v \in a$, escrevemos $u < v$ se $u \leq v$ e $u \neq v$.

¹Teoria Axiomática dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha. Os axiomas estão listados no primeiro capítulo de [2].

Exemplo 1. Dado um conjunto x , a inclusão é uma ordem em x , isto é, sendo $\subseteq_x = \{(k, \ell) \in x \times x : k \subseteq \ell\}$, a estrutura (x, \subseteq_x) é um conjunto ordenado.

Exemplo 2. Dado um conjunto x , a identidade é uma ordem em x , isto é, sendo $\text{Id}_x = \{(k, k) : k \in x\}$, a estrutura (x, Id_x) é um conjunto ordenado.

Exemplo 3. Dados dois conjuntos x e y , seja $\varphi = \bigcup_{k \subseteq x} \mathcal{F}(k, y)$, a restrição é uma ordem em φ , isto é, sendo $\upharpoonright_\varphi = \{(f, g) \in \varphi \times \varphi : f = g \upharpoonright \text{dom } f\}$, a estrutura $(\varphi, \upharpoonright_\varphi)$ é um conjunto ordenado.

Exemplo 4. Em \mathbb{N} , defina $\leq_+ = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} (m + k = n)\}$ e $\leq_\bullet = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} (m \cdot k = n)\}$. As relações \leq_+ e \leq_\bullet são ordens em \mathbb{N} , sendo que \leq_+ é a ordem usual e \leq_\bullet é a relação de divisibilidade.

Definição 4. Dados um conjunto ordenado (a, \leq) e um subconjunto $s \subseteq a$, dizemos que $x \in s$ é o *mínimo* de s se para todo $u \in s$ temos $x \leq u$. Analogamente, dizemos que $y \in s$ é o *máximo* de s se para todo $u \in s$ temos $u \leq y$. O mínimo e o máximo de s , caso existam, são únicos, e são denotados por $\min s$ e por $\max s$, respectivamente.

Definição 5. Dados um conjunto ordenado (a, \leq) e um subconjunto $s \subseteq a$, dizemos que $x \in s$ é um *elemento minimal* de s se não existe um $u \in s$ tal que $u < x$. Analogamente, dizemos que $y \in s$ é um *elemento maximal* de s se não existe um $u \in s$ tal que $y < u$.

Exemplo 5. Em $(\mathcal{P}(x), \subseteq_{\mathcal{P}(x)})$, considere o subconjunto $\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset, x\} \subseteq \mathcal{P}(x)$. Os elementos minimais de $\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset, x\}$ são os subconjuntos unitários de x e os elementos maximais de $\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset, x\}$ são os subconjuntos $y \subseteq x$ tais que $x \setminus y$ é unitário.

Exemplo 6. Em $(\mathbb{N}, \leq_\bullet)$, considere o subconjunto $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{N}$. Os elementos minimais de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ são os números primos.

Definição 6. Dados um conjunto ordenado (a, \leq) e um subconjunto $s \subseteq a$, dizemos que $x \in a$ é um *limitante inferior* de s se para todo $u \in s$ temos $x \leq u$. Analogamente, dizemos que $y \in a$ é um *limitante superior* de s se para todo $u \in s$ temos $u \leq y$. Se existir um limitante inferior de s , dizemos que s é *limitado inferiormente*, e se existir um limitante superior de s , dizemos que s é *limitado superiormente*. Se s for limitado inferiormente e limitado superiormente, dizemos que s é *limitado*.

Definição 7. Dados um conjunto ordenado (a, \leq) e um subconjunto $s \subseteq a$, dizemos que $x \in a$ é o *supremo* de s se $x = \min\{k \in a : k \text{ é limitante superior de } s\}$. Analogamente, dizemos que $y \in a$ é o *ínfimo* de s se $y = \max\{k \in a : k \text{ é limitante inferior de } s\}$. O supremo e o ínfimo de s , caso existam, são únicos, e são denotados por $\sup s$ e por $\inf s$, respectivamente.

Exemplo 7. Em $(\mathcal{P}(x), \subseteq_{\mathcal{P}(x)})$, dado um subconjunto $s \subseteq \mathcal{P}(x)$ qualquer, temos:

$$\sup s = \bigcup s \qquad \inf s = \begin{cases} \bigcap s & \text{se } s \neq \emptyset \\ x & \text{se } s = \emptyset \end{cases}$$

Exemplo 8. Em (\mathbb{N}, \leq) , dados $a, b \in \mathbb{N}$, temos $\sup\{a, b\} = \text{mmc}(a, b)$ e $\inf\{a, b\} = \text{mdc}(a, b)$. Além disso, temos $\sup \mathbb{N} = 0$ e $\inf \mathbb{N} = 1$.

Definição 8. Dado um conjunto ordenado (a, \leq) , dizemos que um subconjunto $s \subseteq a$ é uma *cadeia* se para todos $u, v \in s$ é verificado $u \leq v$ ou $v \leq u$. Se $a \subseteq a$ for uma cadeia, dizemos que a é *totalmente ordenado* e que \leq é uma ordem *total*, caso contrário dizemos que a é *parcialmente ordenado* e que \leq é uma ordem *parcial*. Se $\{x, y\} \subseteq a$ é uma cadeia, dizemos que x e y são *comparáveis*.

Exemplo 9. Se x tem ao menos dois elementos, então o conjunto $(\mathcal{P}(x), \subseteq_{\mathcal{P}(x)})$ é parcialmente ordenado, pois dados $u, v \in x$ distintos, os conjuntos $\{u\}$ e $\{v\}$ não são comparáveis.

Exemplo 10. O conjunto (\mathbb{N}, \leq_+) é totalmente ordenado, ao passo que (\mathbb{N}, \leq) é parcialmente ordenado (2 e 3 não são comparáveis). Os conjuntos da forma $\{n^k : k \in \mathbb{N}\}$ com $n \in \mathbb{N}$ são cadeias em (\mathbb{N}, \leq) .

Definição 9. Dado um conjunto ordenado (a, \leq) , dizemos que a é *bem ordenado* se todo subconjunto $s \subseteq a$ não-vazio tem mínimo. Nessas condições, dizemos ainda que \leq é uma *boa ordem*.

Não é difícil ver que toda boa ordem é uma ordem total (de fato, dados $x, y \in a$, o conjunto $\{x, y\}$ tem mínimo). Os teoremas 1 e 2 a seguir são equivalentes ao Axioma da Escolha, e as demonstrações podem ser encontradas em [1].

Teorema 1 (Lema de Zorn). Dado um conjunto ordenado (a, \leq) , se toda cadeia de a tiver um limitante superior, então a tem um elemento maximal.

Teorema 2 (Axioma de Zermelo). Dado um conjunto a , existe uma ordem \leq em a tal que (a, \leq) é bem ordenado.

Definição 10. Dados dois conjuntos ordenados (a, \leq) e (b, \preceq) e uma função $f : a \rightarrow b$, dizemos que f é *crescente* se $x \leq y$ implica $f(x) \preceq f(y)$ para todos $x, y \in a$. Ainda, dizemos que f é *estritamente crescente* se $x < y$ implica $f(x) \prec f(y)$ para todos $x, y \in a$. Analogamente, dizemos que f é *decrecente* se $x \leq y$ implica $f(y) \preceq f(x)$ para todos $x, y \in a$ e *estritamente decrecente* se $x < y$ implica $f(y) \prec f(x)$ para todos $x, y \in a$. Se f é crescente ou decrecente, dizemos que f é *monótona*, e se f é estritamente crescente ou estritamente decrecente, dizemos que f é *estritamente monótona*.

Definição 11. Dados dois conjuntos ordenados (a, \leq) e (b, \preceq) , dizemos que a e b são *isomorfos*, ou que a e b possuem o *mesmo tipo de ordem*, se existir uma função bijetora $f : a \rightarrow b$ tal que para quaisquer $x, y \in a$, temos $x \leq y$ se e somente se $f(x) \preceq f(y)$. A função f é chamada de *isomorfismo*.

Definição 12. Dados dois conjuntos ordenados (a, \leq) e (b, \preceq) com $a \cap b = \emptyset$, definimos a *ordem união*, ou *ordem soma*, em $a \cup b$ como:

$$x \leq_{\cup} y \text{ se e somente se } (x, y \in a \wedge x \leq y) \vee (x, y \in b \wedge x \preceq y) \vee (x \in a \wedge y \in b)$$

Definição 13. Dados dois conjuntos ordenados (a, \leq) e (b, \preceq) , definimos a *ordem produto*, ou *ordem lexicográfica*, em $a \times b$ como:

$$(x, y) \leq_{\times} (z, w) \text{ se e somente se } (x < z \vee (x = z \wedge y \preceq w))$$

3 NÚMEROS ORDINAIS

Definição 14. Dado um conjunto a , o conjunto $\mathcal{S}(a) = a \cup \{a\}$ é chamado de *sucessor* de a .

Definição 15. Um conjunto a é *transitivo* se para todo $x \in a$ temos $x \subseteq a$. Equivalentemente, a é transitivo se $a \subseteq \mathcal{P}(a)$, ou ainda, a é transitivo se $\bigcup a \subseteq a$.

Definição 16. Um conjunto a é um *ordinal* se a é transitivo e $(a, \underline{\subseteq}_a)$ é bem ordenado, em que $\underline{\subseteq}_a = \{(k, \ell) \in a \times a : k \in \ell \vee k = \ell\}$. É usual denotar ordinais por letras gregas minúsculas. A classe de todos os ordinais é denotada por **Ord**, e se trata de uma classe própria.

Teorema 3. O conjunto vazio é um ordinal e sucessor de ordinais é um ordinal.

Demonstração. É imediato que o conjunto vazio é um ordinal (as duas condições são satisfeitas por vacuidade).

Dado um ordinal α , seja $x \in \mathcal{S}(\alpha)$. Se $x = \alpha$, claro que $x \subseteq \mathcal{S}(\alpha)$. Se $x \in \alpha$, então $x \subseteq \alpha \subseteq \mathcal{S}(\alpha)$. Logo, $\mathcal{S}(\alpha)$ é transitivo. Seja $y \subseteq \mathcal{S}(\alpha)$ não-vazio. Se $\alpha \notin y$, então $y \subseteq \alpha$, logo y tem mínimo. Se $y = \{\alpha\}$, então $\min y = \alpha$. Caso contrário, $y \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$, e como $y \setminus \{\alpha\} \subseteq \alpha$, existe $z = \min(y \setminus \{\alpha\})$. Como $y \setminus \{\alpha\} \subseteq \alpha$, segue que $z \in \alpha$, e portanto $z = \min y$. Logo, $\mathcal{S}(\alpha)$ é bem ordenado por $\underline{\subseteq}$. Portanto $\mathcal{S}(\alpha)$ é um ordinal. \square

Corolário 3.1. Os números naturais são ordinais.

Demonstração. Como $0 = \emptyset$, temos que 0 é um ordinal. Se $n \in \mathbb{N}$ é um ordinal, então $\mathcal{S}(n)$ é um ordinal. Segue por indução finita que todos os números naturais são ordinais. \square

Teorema 4. Os elementos de ordinais são ordinais.

Demonstração. Seja α um ordinal e tome $\beta \in \alpha$. Seja $x \in \beta$. Como $\beta \subseteq \alpha$, segue que $x \in \alpha$, logo $x \subseteq \alpha$. Seja $u \in x$. Como $x \subseteq \alpha$, temos $u \in \alpha$. Assim, como $u \in x \in \beta$, segue que $u \in \beta$, logo $x \subseteq \beta$, e portanto β é transitivo. Seja $y \subseteq \beta$ não-vazio. Como $\beta \subseteq \alpha$, segue que $y \subseteq \beta \subseteq \alpha$, e portanto y tem mínimo. Logo, β é bem ordenado por $\underline{\subseteq}$. Portanto β é um ordinal. \square

Teorema 5. Dados dois ordinais α e β , se $\alpha \not\subseteq \beta$, então $\alpha \in \beta$.

Demonstração. Seja $x = \beta \setminus \alpha$. Como $x \neq \emptyset$ e $x \subseteq \beta$, seja $y = \min x$. Como $y \in \beta$, segue que $y \subseteq \beta$. Seja $z \in y$. Temos $z \in \beta$, e se $z \notin \alpha$, então $z \in x$, logo $y \subseteq z$, absurdo, assim $z \in \alpha$. Portanto, $y \subseteq \alpha$. Seja $w \in \alpha$. Temos $w \in \beta$, logo $w \subseteq y$ ou $y \subseteq w$. Se $y \subseteq w$, como $w \in \alpha$, temos $y \in \alpha$, mas $y \in x$, absurdo. Deste modo, segue que $w \in y$, e assim $\alpha \subseteq y$. Logo $\alpha = y$ e portanto $\alpha \in \beta$. \square

Corolário 5.1. Dados dois ordinais α e β , temos que $\alpha \in \beta$ se e somente se $\alpha \subseteq \beta$.

Demonstração. (\Rightarrow) É imediato da definição.

(\Leftarrow) Decorre do teorema anterior. □

Teorema 6. A intersecção de ordinais é um ordinal.

Demonstração. Considere $a \neq \emptyset$ um conjunto cujos elementos são ordinais. Seja $x \in \bigcap a$. Para todo $\alpha \in a$ temos $x \in \alpha$, logo $x \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in a$, e segue que $x \subseteq \bigcap a$. Assim, $\bigcap a$ é transitivo. Seja $y \subseteq \bigcap a$ não-vazio. Para todo $\alpha \in a$ temos $y \subseteq \alpha$, e portanto y tem mínimo. Logo, $\bigcap a$ é bem ordenado por \subseteq . Portanto $\bigcap a$ é um ordinal. □

Teorema 7. Dados dois ordinais α e β , temos que exatamente uma das seguintes situações acontece: $\alpha \in \beta$; $\beta \in \alpha$; ou $\alpha = \beta$.

Demonstração. Seja $\gamma = \alpha \cap \beta$. Temos $\gamma \subseteq \alpha$ e $\gamma \subseteq \beta$. Se $\gamma = \alpha$, temos $\alpha \subseteq \beta$, logo $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$. Se $\gamma = \beta$, temos $\alpha \supseteq \beta$, logo $\alpha = \beta$ ou $\beta \in \alpha$. Se $\gamma \subsetneq \alpha$ e $\gamma \subsetneq \beta$, obtemos $\gamma \in \alpha$ e $\gamma \in \beta$, logo $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, absurdo. Portanto, uma das condições $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$ deve ser satisfeita, e como duas quaisquer delas resulta em absurdo, segue que somente uma delas é satisfeita. □

Teorema 8. A união de ordinais é um ordinal.

Demonstração. Considere $a \neq \emptyset$ um conjunto cujos elementos são ordinais. Seja $x \in \bigcup a$. Existe um $\alpha \in a$ tal que $x \in \alpha$, logo $x \subseteq \alpha$, e segue que $x \subseteq \bigcup a$. Assim, $\bigcup a$ é transitivo. Seja $y \subseteq \bigcup a$ não-vazio. Seja $z = \{\min(k \cap y) : k \in \{\ell \in a : \ell \cap y \neq \emptyset\}\}$. Existe um $u \in a$ tal que $u \cap y \neq \emptyset$, logo $z \neq \emptyset$. Tome um $\xi \in z$. Se $\xi \cap z = \emptyset$, então para todo $\alpha \in z$ temos $\alpha \notin \xi$, isto é, $\xi \subseteq \alpha$, e portanto $\xi = \min z$. Se $\xi \cap z \neq \emptyset$, então $\xi \cap z \subseteq \xi$ tem mínimo, seja $\eta = \min(\xi \cap z)$. Dado $\nu \in z$, se $\nu \in \eta$, como $\eta \in \xi$, teríamos $\nu \in \xi$, logo $\nu \in \xi \cap z$, absurdo, pois η é o mínimo de $\xi \cap z$, logo $\eta = \min z$. Deste modo, existe $\gamma = \min z$ ($\gamma = \xi$ ou $\gamma = \eta$). Dado $w \in y$, existe $\delta \in a$ tal que $w \in \delta \cap y$, logo $\gamma \subseteq \min(\delta \cap y) \subseteq w$, e além disso $\gamma \in y$, portanto $\gamma = \min y$. Assim, $\bigcup a$ é bem ordenado por \subseteq . Portanto $\bigcup a$ é um ordinal. □

Corolário 8.1. O conjunto dos números naturais é um ordinal.

Demonstração. Como $\mathbb{N} = \bigcup \mathbb{N}$, segue do Corolário 3.1 que \mathbb{N} é um ordinal. □

Notação. Quando quisermos nos referir a \mathbb{N} como um ordinal, utilizaremos a letra grega ω .

Definição 17. Dado um ordinal α , se existir um ordinal β tal que $\alpha = \mathcal{S}(\beta)$, dizemos que α é um ordinal *sucessor*. Caso contrário, dizemos que α é um ordinal *limite*.

Exemplo 11. O conjunto dos números naturais é um ordinal limite. De fato, se existisse um ordinal α tal que $\mathcal{S}(\alpha) = \omega$, teríamos $\alpha \in \omega$, e assim $\mathcal{S}(\alpha) \in \omega$, implicando $\omega \in \omega$, absurdo.

Definição 18. Definimos a *ordem* entre ordinais como $\alpha < \beta$ se e somente se $\alpha \in \beta$, e $\alpha \leq \beta$ se e somente se $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Teorema 9. Se (a, \leq) é bem ordenado, então existe um único ordinal α tal que a e α possuem o mesmo tipo de ordem.

A demonstração do Teorema 9 pode ser vista em [1].

4 INDUÇÃO E RECURSÃO TRANSFINITAS

Teorema 10 (Indução Transfinita). Se uma propriedade $\varphi(x, p)$ (com parâmetro p) é tal que

- (i) $\varphi(0, p)$ é verificada;
- (ii) para cada ordinal α , temos que $\varphi(\alpha, p)$ implica $\varphi(\sigma(\alpha), p)$;
- (iii) para cada ordinal limite $\kappa \neq 0$, temos que $\varphi(\alpha, p)$ para todo $\alpha < \kappa$ implica $\varphi(\kappa, p)$;

então $\varphi(x, p)$ é satisfeita por todos os ordinais.

Demonstração. Suponha que $\varphi(\beta, p)$ não é satisfeita para algum ordinal β . Seja $u = \{x \leq \beta : \neg\varphi(x, p)\}$. Como $\beta \in u$, temos que u é não-vazio e portanto tem mínimo. Seja $\gamma = \min u$. Por (i), temos que $\gamma \neq 0$. Como $\varphi(\delta, p)$ é satisfeita para todo ordinal $\delta < \gamma$, segue de (ii), se γ for um ordinal sucessor, ou de (iii), se γ for um ordinal limite, que $\varphi(\gamma, p)$ é satisfeita, absurdo. \square

Teorema 11 (Recursão Transfinita). Dados um conjunto a e uma função G , existe uma única função F com domínio **Ord** tal que

- (i) $F(0) = a$;
- (ii) $F(\mathcal{S}(\alpha)) = G((F(\alpha), \alpha))$ para todo ordinal α ;
- (iii) $F(\kappa) = G((F \upharpoonright \kappa, \kappa))$ para todo ordinal $\kappa \neq 0$ limite.

A demonstração do Teorema 11 pode ser vista em [1].

5 ARITMÉTICA ORDINAL

Definição 19. Definimos a *adição* de ordinais como segue via recursão transfinita, para cada ordinal γ :

$$\begin{cases} \gamma + 0 = \gamma \\ \gamma + \mathcal{S}(\alpha) = \mathcal{S}(\gamma + \alpha) & \text{para cada ordinal } \alpha \\ \gamma + \kappa = \bigcup_{\beta < \kappa} (\gamma + \beta) & \text{se } \kappa \neq 0 \text{ é um ordinal limite} \end{cases} \quad (1)$$

Definição 20. Definimos a *multiplicação* de ordinais como segue via recursão transfinita, para cada ordinal γ :

$$\begin{cases} \gamma \cdot 0 = 0 \\ \gamma \cdot \mathcal{S}(\alpha) = \gamma \cdot \alpha + \gamma & \text{para cada ordinal } \alpha \\ \gamma \cdot \kappa = \bigcup_{\beta < \kappa} (\gamma \cdot \beta) & \text{se } \kappa \neq 0 \text{ é um ordinal limite} \end{cases} \quad (2)$$

Definição 21. Definimos a *exponenciação* de ordinais como segue via recursão transfinita, para cada ordinal γ :

$$\begin{cases} \gamma^0 = 1 \\ \gamma^{\mathcal{S}(\alpha)} = \gamma^\alpha \cdot \gamma & \text{para cada ordinal } \alpha \\ \gamma^\kappa = \bigcup_{\beta < \kappa} (\gamma^\beta) & \text{se } \kappa \neq 0 \text{ é um ordinal limite} \end{cases} \quad (3)$$

Na ausência de parênteses, a multiplicação tem prioridade sobre a adição, a exponenciação tem prioridade sobre a adição e a multiplicação.

Teorema 12. As seguintes propriedades são válidas para quaisquer ordinais α , β e γ :

- | | |
|---|---|
| (i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$; | (vi) $\alpha \cdot \beta = 0$ se e somente se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$; |
| (ii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$; | (vii) se $\alpha \leq \beta$, então existe um único δ tal que $\alpha + \delta = \beta$; |
| (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$; | (viii) se $\alpha \neq 0$, então existe um único ξ e um único $\rho < \alpha$ tais que $\alpha \cdot \xi + \rho = \beta$. |
| (iv) $\alpha^{\beta + \gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$; | |
| (v) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$; | |

Teorema 13. As seguintes propriedades **não** são válidas para quaisquer ordinais α , β e γ :

- | | |
|--|--|
| (i) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$; | (iv) se $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, então $\alpha = \beta$; |
| (ii) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$; | (v) se $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ e $\gamma \neq 0$, então $\alpha = \beta$; |
| (iii) $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$; | (vi) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$. |

As demonstrações dos itens do Teorema 12 seguem por indução transfinita. Note que os itens (vii) e (viii) nos permitem definir *subtração* e *divisão com resto* de forma análoga a \mathbb{N} , entretanto nem todas as propriedades dos números naturais valem para ordinais quaisquer, como mostra o Teorema 13.

Teorema 14. Dados dois conjuntos bem ordenados a e b disjuntos, se a possui o mesmo tipo de ordem do ordinal α e b possui o mesmo tipo de ordem do ordinal β , então $a \cup b$ com a ordem soma possui o mesmo tipo de ordem do ordinal $\alpha + \beta$.

Demonstração. Sejam $f : a \rightarrow \alpha$ e $g : b \rightarrow \beta$ isomorfismos. A função $h : a \cup b \rightarrow \alpha + \beta$ dada por $h(x) = f(x)$ se $x \in a$ e $h(x) = \alpha + g(x)$ se $x \in b$ é um isomorfismo. \square

Teorema 15. Dados dois conjuntos bem ordenados a e b , se a possui o mesmo tipo de ordem do ordinal α e b possui o mesmo tipo de ordem do ordinal β , então $a \times b$ com a ordem produto possui o mesmo tipo de ordem do ordinal $\alpha \cdot \beta$.

Demonstração. Sejam $f : a \rightarrow \alpha$ e $g : b \rightarrow \beta$ isomorfismos. A função $h : a \times b \rightarrow \alpha \cdot \beta$ dada por $h((x, y)) = \alpha \cdot f(x) + g(y)$ é um isomorfismo. \square

6 CARDINALIDADE

Definição 22. Dados dois conjuntos a e b , dizemos que a e b são *equipotentes*, ou que a e b têm a mesma *cardinalidade*, e escrevemos $|a| = |b|$, se existir uma função bijetora de a em b . Caso contrário escrevemos $|a| \neq |b|$. Se existir uma função de a em b injetora, escrevemos $|a| \leq |b|$. Se $|a| \leq |b|$ e $|a| \neq |b|$, escrevemos $|a| < |b|$.

Teorema 16. Para quaisquer conjuntos a , b e c , são satisfeitas:

- (i) $|a| = |a|$;
- (ii) se $|a| = |b|$, então $|b| = |a|$;
- (iii) se $|a| = |b|$ e $|b| = |c|$, então $|a| = |c|$.

Demonstração. (i) A função identidade $\text{Id}_a : a \rightarrow a$ é bijetora.
(ii) Seja $f : a \rightarrow b$ bijetora. A função $f^{-1} : b \rightarrow a$ é bijetora.
(iii) Sejam $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$ injetoras. A função $g \circ f : a \rightarrow c$ é bijetora. \square

Teorema 17. Para quaisquer conjuntos a , b e c , são satisfeitas:

- (i) se $|a| \leq |b|$ e $|b| \leq |c|$, então $|a| \leq |c|$;
- (ii) se $|a| \leq |b|$ e $|b| < |c|$, então $|a| < |c|$;
- (iii) se $|a| < |b|$ e $|b| \leq |c|$, então $|a| < |c|$.

Demonstração. (i) Sejam $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$ injetoras. A função $g \circ f : a \rightarrow c$ é injetora.
(ii) Segue de (i) que $|a| \leq |c|$. Se $|a| = |c|$, teríamos $|c| \leq |b|$, absurdo, logo $|a| < |c|$.
(iii) Análogo a (ii). \square

Teorema 18. Para quaisquer conjuntos a e b , são satisfeitas:

- (i) se $a \subseteq b$, então $|a| \leq |b|$;
- (ii) se $|a| \leq |b|$, então existe um $u \subseteq b$ tal que $|a| = |u|$.

Demonstração. (i) A função identidade de a em b é injetora.

(ii) Seja $f : a \rightarrow b$ injetora. A função $f : a \rightarrow \text{Im } f$ é bijetora, logo basta tomar $u = \text{Im } f$. \square

Teorema 19. Para quaisquer conjuntos a, b, c e d tais que $|a| = |c|$ e $|b| = |d|$, são satisfeitas:

(i) se $a \cap b = c \cap d = \emptyset$, então $|a \cup b| = |c \cup d|$;

(ii) $|a \times b| = |c \times d|$;

(iii) $|\mathcal{F}(a, b)| = |\mathcal{F}(c, d)|$.

Demonstração. Sejam $f : a \rightarrow c$ e $g : b \rightarrow d$ bijetoras.

(i) A função $u : a \cup b \rightarrow c \cup d$ dada por $u(x) = f(x)$ se $x \in a$ e $u(x) = g(x)$ se $x \in b$ é bijetora.

(ii) A função $v : a \times b \rightarrow c \times d$ dada por $v((x, y)) = (f(x), g(y))$ é bijetora.

(iii) A função $w : \mathcal{F}(a, b) \rightarrow \mathcal{F}(c, d)$ dada por $w(x) = g \circ x \circ f^{-1}$ é bijetora. \square

Teorema 20. Para qualquer conjunto a , vale $|\mathcal{P}(a)| = |\mathcal{F}(a, 2)|$.

Demonstração. A função $f : \mathcal{P}(a) \rightarrow \mathcal{F}(a, 2)$ dada por $f(x) = \chi_x$, em que χ_x é a função característica de x com domínio a , é bijetora. \square

Teorema 21 (Cantor). Para qualquer conjunto a , vale $|a| < |\mathcal{P}(a)|$.

Demonstração. A função $f : a \rightarrow \mathcal{P}(a)$ dada por $f(x) = \{x\}$ é injetora, logo $|a| \leq |\mathcal{P}(a)|$. Suponha que exista $g : a \rightarrow \mathcal{P}(a)$ bijetora. Seja $b = \{k \in a : k \notin g(k)\}$. Tome um $x \in a$. Se $x \in b$, segue que $x \notin g(x)$, logo $g(x) \neq b$. Se $x \notin b$, segue que $x \in g(x)$, logo $g(x) \neq b$. Desde modo, $b \notin \text{Im } g$, absurdo. Portanto $|a| < |\mathcal{P}(a)|$. \square

Corolário 21.1. Dado um ordinal α , existe um ordinal β tal que $|\alpha| < |\beta|$.

Demonstração. Pelo Teorema de Cantor, temos $|\alpha| < |\mathcal{P}(\alpha)|$, e pelos teoremas 2 e 9, existe um ordinal β tal que $|\beta| = |\mathcal{P}(\alpha)|$, e portanto $|\alpha| < |\beta|$. \square

Teorema 22. Para quaisquer conjuntos a, b e c , se $a \supseteq b \supseteq c$ e $|a| = |c|$, então $|a| = |b|$.

Demonstração. Seja $u : a \rightarrow c$ bijetora. Considere as funções $f, g : \omega \rightarrow \mathcal{P}(a)$ definidas via recorrência finita como seguem:

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(\mathcal{S}(n)) = u[f(n)] \end{cases} \quad \begin{cases} g(0) = b \\ g(\mathcal{S}(n)) = u[g(n)] \end{cases}$$

Considere ainda a função $h : \omega \rightarrow \mathcal{P}(a)$ dada por $h(n) = f(n) \setminus g(n)$. Temos $f(0) \supseteq g(0) \supseteq f(1)$, e portanto $f(n) \supseteq g(n) \supseteq f(\mathcal{S}(n))$ para todo $n \in \omega$, o que implica $h(m) \cap h(n) = \emptyset$ para $m \neq n$. Seja $d = \bigcup \{h(n) : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$, temos

$$u[h(n)] = u[f(n) \setminus g(n)] = u[f(n)] \setminus u[g(n)] = f(\mathcal{S}(n)) \setminus g(\mathcal{S}(n)) = h(\mathcal{S}(n)),$$

8 NÚMEROS CARDINAIS

Definição 27. Um ordinal κ é um *cardinal* se para todo $\alpha < \kappa$ temos $|\alpha| < |\kappa|$. A classe de todos os cardinais é denotada por **Card**, e se trata de uma classe própria.

Teorema 26. Os números naturais são cardinais, bem como o conjunto dos números naturais é um cardinal.

Demonstração. É imediato que o conjunto vazio é um cardinal (por vacuidade). Seja $n \in \omega$. Como n é finito, não existe bijeção entre n e um subconjunto próprio de n , em particular com os números naturais $m < n$, logo n é um cardinal. Como ω é infinito e todo $n < \omega$ é finito, segue que $|n| < |\omega|$, portanto ω é um cardinal. \square

Teorema 27. Para qualquer conjunto a , existe um único cardinal α tal que $|a| = |\alpha|$.

Demonstração. Pelos teoremas 2 e 9, existe um cardinal α tal que $|a| = |\alpha|$. Seja β um cardinal tal que $|a| = |\beta|$. Se $\alpha < \beta$, temos $|\alpha| < |\beta|$, absurdo. Se $\beta < \alpha$, temos $|\beta| < |\alpha|$, absurdo. Portanto, devemos ter $\alpha = \beta$. \square

Notação. Para cada conjunto a , representaremos o cardinal equipotente a a por $|a|$. Essa notação não é conflitante com a Definição 22.

9 ARITMÉTICA CARDINAL

Definição 28. Definimos a *adição* de cardinais como segue: dados dois cardinais α e β , considere conjuntos disjuntos a e b tais que $|a| = \alpha$ e $|b| = \beta$. Com isso, definimos $\alpha + \beta$ como $|a \cup b|$.

Definição 29. Definimos a *multiplicação* de cardinais como segue: dados dois cardinais α e β , considere conjuntos a e b tais que $|a| = \alpha$ e $|b| = \beta$. Com isso, definimos $\alpha \cdot \beta$ como $|a \times b|$.

Definição 30. Definimos a *exponenciação* de cardinais como segue: dados dois cardinais α e β , considere conjuntos a e b tais que $|a| = \alpha$ e $|b| = \beta$. Com isso, definimos α^β como $|\mathcal{F}(b, a)|$.

O Teorema 19 nos garante que as operações não dependem dos conjuntos a e b , estando assim bem definidas. Na ausência de parênteses, a multiplicação tem prioridade sobre a adição, a exponenciação tem prioridade sobre a adição e a multiplicação. Note que as operações entre cardinais não coincidem com as operações entre ordinais, mas o contexto deixará claro a que operações nos referimos.

Teorema 28. As seguintes propriedades são válidas para quaisquer cardinais κ , λ e μ :

- | | |
|--|--|
| (i) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$; | (iv) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$; |
| (ii) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$; | (v) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \mu)$; |
| (iii) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$; | (vi) $(\kappa + \lambda) \cdot \mu = (\kappa \cdot \mu) + (\lambda \cdot \mu)$; |

- (vii) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$; (ix) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$;
(viii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$; (x) $\kappa \cdot \lambda = 0$ se e somente se $\kappa = 0$ ou $\lambda = 0$.

As demonstrações dos itens do Teorema 28 seguem de manipulação de funções bijetoras.

10 ALEPHS

Definição 31. Para cada conjunto x , seja $\mathcal{H}(x)$ o menor ordinal tal que $|x| < |\mathcal{H}(x)|$. O ordinal $\mathcal{H}(x)$ é chamado de *número de Hartogs* de x .

Teorema 29. Para qualquer conjunto x , temos que $\mathcal{H}(x)$ é um cardinal.

Demonstração. Seja $\alpha < \mathcal{H}(x)$. Pela definição de número de Hartogs, segue que $|\alpha| < |\mathcal{H}(x)|$, logo $\mathcal{H}(x)$ é um cardinal. \square

Definição 32. Definimos os *alephs* via recursão transfinita como segue:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\mathcal{S}(\alpha)} = \mathcal{H}(\aleph_\alpha) & \text{para cada ordinal } \alpha \\ \aleph_\kappa = \bigcup_{\beta < \kappa} \aleph_\beta & \text{se } \kappa \neq 0 \text{ é um ordinal limite} \end{cases} \quad (4)$$

Teorema 30. Se κ é um cardinal infinito, então existe um ordinal α tal que $\kappa = \aleph_\alpha$.

Teorema 31. Dados dois alephs \aleph_α e \aleph_β , temos $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha, \beta\}}$.

As demonstrações dos teoremas 30 e 31 podem ser vistas em [1].

11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Cantor, juntamente com o Teorema 20, nos garante que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, isto é, como \aleph_1 é o menor cardinal maior do que \aleph_0 , $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. A afirmação " $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ " é chamada de *Hipótese do Continuum*, abreviada como CH, e é independente dos axiomas de ZFC. A *Hipótese Generalizada do Continuum*, abreviada como GCH, também independente dos axiomas de ZFC e que, como o próprio nome diz, generaliza CH, pode ser enunciada como $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ para todo ordinal α .

Provar as independências de CH e de GCH dos axiomas de ZFC não são tarefas simples. Estas independências podem ser verificadas por meio de uma técnica chamada *Forcing* que será estudada no Trabalho de Conclusão de Curso do primeiro autor, sob orientação do segundo autor.

Referências

- [1] HRBACEK, K. & JECH, T.: **Introduction to Set Theory**. Marcel Dekker, 3rd ed., rev. and expanded, (1999).
[2] JECH, T.: **Set Theory**. Berlin: Springer, 3rd Millennium ed., rev. and expanded, (2002).