ISSN 2358-4947

ANAIS

VII SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

Perspectivas e desafios para o Licenciado em matemática

Página do Evento:

http://www.td.utfpr.edu.br/semat/VII_semat/

Toledo – PR

Junho - 2019

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (7: 2019: Toledo, PR)

Anais da VII Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR), 03 a 07 de junho de 2019. / Organizado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. – Toledo, PR, 2019.

304 f.

Modo de Acesso: World Wide Web: <http://www.td.utfpr.edu.br/semat/VII_semat/>.

ISSN 2358-4947

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Currículo - Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD (22. ed.) 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Caroline Felema dos Santos Rocha CRB: 9/1880
Biblioteca da UTFPR-Dois Vizinhos

Sumário

1. INTRODUÇÃO 3

2. HISTÓRICO DO EVENTO 4

3. OBJETIVOS 4

4. PÚBLICO ALVO 4

5. PERÍODO DE REALIZAÇÃO 4

6. PERIODICIDADE DO EVENTO 4

7. REALIZAÇÃO 5

7.1. Comissão Organizadora 5

7.2. Comissão de Apoio 5

7.3. Comissão Científica 5

7.4. Comissão de Pareceristas 6

8. CRONOGRAMA 7

9. MINICURSOS 8

10. TRABALHOS 17

1. Introdução

As edições da Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciaram no ano de 2013 e em 2019, na sua **VII edição,** o tema discutiu "**Perspectivas e desafios para o Licenciado em matemática**". O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, cujos objetivos contemplam a preparação do acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura.

O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras, comunicações orais e pôsteres.

Participaram do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados.

A palestra de abertura foi ministrada pelo Prof. Dr. Régis Varão – IMECC – UNICAMP/SP, que falou sobre o Fantástico Mundo Matemático e sobre o "pensar" matemático.

No segundo dia do evento, foram ministrados minicursos para os professores da rede municipal de ensino e para os demais participantes da semana acadêmica.

No dia seguinte, contamos com a presença do Prof. Dr. Ronaldo Casagrande - Diretor da Alleanza Brasil, que ministrou a palestra Desafios e perspectivas para o Licenciado em Matemática, tema do evento. Em seguida, foi composta uma mesa de discussões, formada por egressos do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Toledo: Anderson Ervino Schwertner, Jackson Wille, Maycon Shrenk e Pablo Chang; pelo professor Ronaldo Casagrande e pelas professoras Elizangela Apª Santos Faria e Aracéli Marins (mediadora).

No quarto dia do evento, alunos, professores e demais pesquisadores inscritos puderam divulgar suas pesquisas e trabalhos por meio de comunicações orais e apresentação de pôsteres.

No último dia da semana acadêmica, os alunos participaram de uma competição denominada "Tangraço", e na sequencia foram realizadas apresentações culturais no IV Sarau da Matemática.

2. Histórico do Evento

A primeira edição da Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) foi no ano de 2013 com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da instituição, com o tema “Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática”.

Em sua segunda edição, a SEMAT abordou o tema “Matemática em foco: integrando saberes, compartilhando experiências”, no ano de 2014. Em 2015, a III SEMAT teve como tema “A matemática e seus caminhos: vencendo limites”. Nos anos de 2016, 2017 e 2018, os temas discutidos durante a realização do evento foram respectivamente: “A Matemática na Harmonia da Natureza”, “A Matemática e seus encantamentos: história, ciência e inclusão” e “Ser professor que ensina matemática em uma era tecnológica”.

Assim, no ano de 2019, em sua VII edição, a SEMAT abordou as possibilidades de atuação do licenciado em matemática, apresentando o tema **Perspectivas e desafios para o Licenciado em matemática**.

3. Objetivos

A VII SEMAT teve como objetivos:

- promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas; e
- viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.

4. Público Alvo

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

5. Período de Realização

O evento foi realizado nos dias 03 a 07 de junho de 2019.

6. Periodicidade do Evento

Esta foi a VII Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente.

7. Realização

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pela portaria nº 264, de 29 de agosto de 2018.

7.1. Comissão Organizadora

Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes – Coordenadora
Profa. Dra. Daniela Trentin Nava – Vice coordenadora
Profa. Dra. Araceli Ciotti de Marins – Responsável pela comissão científica
Prof. Me. Ivan José Coser
Prof. Me. Loreci Zanardini
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso
Profa. Ma. Marcia Regina Piovesan
Profa. Ma. Tatiany Mottin Dartora
Profa. Ma. Ana Cláudia de Oliveira
Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias de Andrade
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra

7.2. Comissão de Apoio

Maria Luiza Doebber
Maria Eduarda de B. Marques
Marco Aurélio Tavares Amaral
José Rodrigues dos Santos
Marcos A. A. Oeschsler
Rodrigo Matheus Ritter
Yasmin Monandra da Silva
Ana Maria Costa Spohr
Eduarda Debortoli da Silva
Anderson Alves Miguel
Glaucia Eduarda M. Hoffmann
Marlon Alípio Johann
Carlos Henrique Smek
Gabriel Pessoa Meroti

7.3. Comissão Científica

Profa. Dra. Araceli Ciotti de Marins – Responsável pela comissão científica
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Profa. Ma. Tatiany Mottin Dartora
Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias de Andrade
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra

7.4. Comissão de Pareceristas

Prof. Me. Adriano Gomes de Santana
Profa. Ma. Aline Keryn Pin
Profa. Ma. Ana na Claudia De Oliveira Guizelini Merli
Profa. Dra. Aracéli Ciotti de Marins
Profa. Dra. Bárbara W. D. Novaes
Profa. Dra. Daniela Trentin Nava
Prof. Me. Eduardo Zorzo Sartoretto
Prof. Dr. Emerson Tortola
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso
Prof. Me. Ivan José Coser
Profa. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti
Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira
Prof. Me. Loreci Zanardini
Profa. Ma. Marcia Regina Piovesan
Prof. Me. Márcio Virgínio da Silva
Profa. Naísa Camila Garcia Tosti
Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes
Prof. Me. Renato Francisco
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade
Profa. Dra. Rosangela A. B. Assumpção
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Profa. Ma. Tatiany Mottin Dartora
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo – UTFPR / Toledo - PR.

8. Cronograma

Data	Horário	Programação	Local
03/06/2019	18:00 – 19:00	Credenciamento	Auditório 1
	19:00 – 22:00	Palestra de Abertura: Fantástico mundo matemático Prof. Dr. Régis Varão – IMECC – UNICAMP/SP.	Auditório 1
	22:00 – 23:00	Coffee break	Auditório 2
04/06/2019	08:00 – 12:00	Minicursos	Salas de Aula
	13:00 – 18:00	Minicursos	Salas de Aula
	19:00 – 20:30	Minicursos	Salas de Aula
	20:30 – 21:00	Coffee break	Auditório 2
	21:00 – 23:00	Minicursos	Salas de Aula
05/06/2019	19:00 – 20:30	Palestra: Desafios e perspectivas para o Licenciado em Matemática Prof. Dr. Ronaldo Casagrande – Diretor da Alleanza Brasil	Auditório 1
	20:30 – 21:00	Coffee break	Auditório 2
	21:00 – 23:00	Mesa de discussões: Egressos do curso de Licenciatura em Matemática Câmpus Toledo/ Elisangela Apª Santos Faria/ Ronaldo Casagrande Mediadora: Profa. Dra. Aracéli Ciotti de Marins	Auditório 1
06/06/2019	19:00 – 21:30	Comunicações Orais	SALAS E104, E105, E106, E203 e E001
	21:30 – 22:00	Coffee break	Auditório 2
	22:00 – 23:00	Apresentação de Pôsteres	Auditório 2
07/06/2019	19:00 – 20:30	Tangraço	Ginásio
	20:30 – 21:00	Coffee break	Ginásio
	21:00 – 23:00	IV Sarau	Ginásio

9. Minicursos

A VII Semat contou com a apresentação de oito minicursos das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes da UTFPR e outras instituições de ensino.

A seguir, são apresentados os resumos dos minicursos ministrados.

JOGOS, LITERATURA INFANTIL E A MATEMÁTICA: UMA QUESTÃO INTERDISCIPLINAR

Bariccatti, Karen H.G. Pedagoga na UTFPR, doutora em Educação – UNICAMP, karenhg@utfpr.edu.br

Resumo:

A oficina visa proporcionar algumas situações de integração entre conteúdos matemáticos, em contextos de jogos, literatura infantil e montagens. Também são oportunizadas reflexões sobre o trabalho com a matemática na Educação Infantil.

Palavras Chaves: Matemática; Literatura Infantil; Educação Infantil.

FRAÇÕES, DECIMAIS E PORCENTAGEM: RUPTURAS E APROXIMAÇÕES ENTRE O QUINTO E SEXTO ANO

Barbara Winiarski Diesel Novaes - UTFPR – barbaraw@utfpr.edu.br
Emerson Tortola – UTFPR – emersontortola@utfpr.edu.br

Resumo:

Os temas frações, decimais e porcentagem são frequentemente apontados por professores e pesquisadores como problemáticos. São temas abordados no Ensino Fundamental, concentrados, principalmente, no período que abrange os quintos e sextos anos. A transição entre essas séries marca a vida dos estudantes com mais que uma mudança do que chamamos de anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental. Geralmente, ela vem acompanhada de uma mudança na instituição escolar, no local, na estrutura organizacional das disciplinas e dos professores, de novos colegas de turma e até mesmo na complexidade dos conteúdos. Em decorrência de todo esse conjunto de mudanças, essa transição acarreta em rupturas ou descontinuidades no ensino dessas temáticas, muitas vezes tendo foco demasiado em alguns aspectos em detrimentos de outros. Pensando nisso, propomos a realização de um minicurso direcionado para professores que atuam ou têm interesse em atuar nessas séries, tratando dessas temáticas de modo articulado, pensando na continuidade dos temas, particularmente nessas séries.

Palavras Chave: Ensino Fundamental. Quintos e Sextos anos. Frações. Decimais. Porcentagem.

O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Angela Mognon- UTFPR / Campo Mourão – amognon@utfpr.edu.br

Resumo:

O GeoGebra é um software livre de matemática dinâmica que permite realizar cálculos aritméticos e algébricos, além de possibilitar múltiplas representações de objetos matemáticos. O software foi idealizado por Markus Hohenwarterda Universidade de Salzburg, sendo seu principal desenvolvedor, juntamente com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo. A proposta deste minicurso é mostrar como podemos utilizar o GeoGebra no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I por meio de atividades que abordam conceitos de Funções, Limites, Derivadas e Integrais.

Palavras Chaves: Ensino e aprendizagem. GeoGebra. Cálculo diferencial e integral.

A FÍSICA COMO CONTEXTUALIZAÇÃO E MOTIVAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Arthur William de Brito Bergold –UFPR / Palotina – arthur.bergold@ufpr.br

Resumo:

A Física e a Matemática caminham tão próximas que muitas vezes é difícil distingui-las. Novos desenvolvimentos de uma área sempre estimulam o progresso da outra. Em muitas situações, a apresentação do conceito físico ou mesmo da experimentação proporciona uma contextualização que pode tanto facilitar quanto aprofundar a compreensão da ideia matemática. Alguns exemplos que se podem citar são: a cinemática escalar no estudo de funções, de derivadas e integrais; a cinemática vetorial no estudo de geometria analítica e trigonometria; o resfriamento ou decaimento radioativo no estudo da função exponencial; a acústica no estudo dos logaritmos e da série e transformada de Fourier; solução de circuitos elétricos no estudo de sistemas lineares e de números complexos; termometria e 3ª Lei de Kepler no estudo de regra de três; cosmologia e teoria das cordas no estudo da topologia.

Palavras Chaves: Ensino contextualizadode matemática; História da Física; História da Matemática.

A ÁLGEBRA E SUAS APLICAÇÕES NA MODELAGEM DE MAPAS

Denise Maria Grzegozewski – UFFS/ Laranjeiras do Sul – denisegrzegozewski@gmail.com

Resumo:

Até o advento da informática, a manipulação de dados geográficos era feita através de mapas e outros documentos impressos ou desenhados em uma base de papel sendo no universo do mundo real os fenômenos a serem representados. Com o desenvolvimento tecnológico, denota-se o conjunto de operações informatizadas que manipulam campos geográficos de "Álgebra de mapas", termo utilizado na literatura de geoprocessamento e sensoriamento remoto. Nestes mapas associam-se valores quantitativos (escalar, ordinal, cardinal ou intervalar) ou qualitativos (nominal) para cada local em estudo. Utiliza-se duas maneiras de representação de valores, a primeira com estrutura vetorial, em que a localização e a feição geométrica do elemento são armazenadas se representadas por vértices definidos por um par de coordenadas. Dependendo da sua forma e da escala cartográfica, os elementos podem ser expressos pelas feições geométricas de pontos, linhas e polígonos. A segunda representação do espaço se utiliza de dados raster ou também chamados matriciais P(m, n) composto de m colunas e n linhas, onde cada célula possui um número de linha, um número de coluna e um valor correspondente ao atributo estudado e cada célula é individualmente acessada pelas suas coordenadas. O processamento dos dados corresponde às operações de tratamento e de análise, sendo o tratamento destinado à montagem e à preparação da base de dados, consistindo em operações conversão de formatos, adequação da base de dados construção das tabelas de atributos e especificação dos geocódigos. Já a análise permite a utilização de operações matemáticas para testar e validar as aplicações da modelagem nos mapas. A grande coerência entre os resultados obtidos por essa técnica e os produzidos anteriormente (com uso de interpretação visual) revelou o potencial de Álgebra de Mapas como ferramenta de apoio e estudo de Sensoriamento Remoto e Geoprocessamento.

Palavras Chaves: Operações Algébricas. Geoprocessamento, Sensoriamento Remoto.

UMA ABORDAGEM SOBRE GEOMETRIA ALGÉBRICA

Rafael Lucas de Arruda – UFMS/Campo Grande

Resumo:
A Geometria Algébrica é uma área da Matemática que estuda objetos geométricos com a linguagem e as ferramentas da Álgebra Abstrata, especialmente da Álgebra Comutativa. Esses objetos geométricos, chamados variedades algébricas, são descritos como o lugar dos zeros de polinômios de várias variáveis. Um estudante de Matemática ou de áreas afins muito provavelmente já teve um primeiro contato com a Geometria Algébrica ao aprender propriedades básicas de seções cônicas como elipses, hipérboles e parábolas. Neste minicurso a Geometria Algébrica será abordada por meio de um estudo das curvas algébricas planas, que são variedades algébricas de dimensão 1. Uma curva algébrica plana é o lugar dos zeros de um polinômio de duas variáveis. Nesse estudo serão tratados assuntos como interseção de curvas, tangência, multiplicidade de pontos, plano projetivo e pontos no infinito, e questões enumerativas ou de contagem como a seguinte: quantos são os pontos de interseção entre duas curvas algébricas planas?

Palavras Chaves: Álgebra Abstrata. Curva Algébricas Planas. Matemática.

ABORDAGEM EDUCACIONAL UTILIZANDO LEGO MINDSTORMS

Anderson Ervino Schwertner, UEM – Maringá – andersonschwertner@hotmail.com

Resumo:
No âmbito das Novas Tecnologias de Informação e Comunicação aplicadas à Educação, a Robótica Educacional (RE) vem ganhando destaque e espaço nas escolas de todo país, principalmente na última década. Apesar de poucas escolas públicas terem acesso a estes materiais e contarem com oficinas de robótica, tal tecnologia educativa já é empregada por inúmeras escolas privadas, e graças a redução dos custos, parcerias com empresas especializadas, projetos open source e a chamada Robótica Livre, nota-se um movimento de popularização de tal tecnologia. Uma das plataformas de RE mais populares são os kits Lego Mindstorms, comercializada pela LEGO Education, desde 1998. Tal produto educacional foi desenvolvido pela LEGO Group em parceria com pesquisadores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT), baseados na teoria construcionista de Seymour Papert. Este minicurso será dividido em três partes. Inicialmente, veremos os principais fundamentos da Robótica Educacional, onde discutiremos suas potencialidades e importância na educação e no desenvolvimento de habilidades transversais, dando ênfase às contribuições para o ensino de Matemática. Em seguida, será apresentada a plataforma Lego Mindstorms, assim como noções básicas de programação. Por fim, será apresentado um desafio surpresa para os participantes, o qual envolverá o estudo, construção, programação e teste de um robô.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Robótica Educacional. Tecnologias de Informação e Comunicação

MODELAGEM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL: UMA FERRAMENTA PARA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DE PRODUÇÃO

André Sandmann1, André Inácio Melges2, Filipe Antonio Moscon de Matos – UTFPR/MD – 1sandmann_andre@hotmail.com, 2andremelges@hotmail.com, 3filipemoscon@hotmail.com

Resumo:
Os modelos que tratam essa oficina são modelos matemáticos, isto é, modelos formados por um conjunto de equações e inequações. Um modelo é uma representação de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto aguardando execução. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade. No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema. A confiabilidade da solução obtida através do modelo depende da validação do modelo na representação do sistema real. A validação do modelo é a confirmação de que ele realmente representa o sistema real. A diferença entre a solução real e a solução proposta pelo modelo depende diretamente da precisão do modelo em descrever o comportamento original do sistema. O uso da Modelagem matemática é, historicamente, uma forte ferramenta na tomada de decisões, em qualquer área do conhecimento. Num mercado altamente competitivo ressalta-se a importância de se dominar ferramentas de auxílio tecnológico, na busca da otimização de resultados, sendo eles, de maximização de receitas a minimização de tempo, custos. As ferramentas matemáticas apresentadas nesta oficina, a citar o Lingo, 10.0 (Lindo Systems Inc, Chicago, EUA), visam corroborar com a qualidade de gestões em qualquer área do conhecimento que envolve decisões em que a Matemática em si é a ferramenta primordial. Além disso, as respostas encontrados por meio do software devem ser questionados e a partir delas realizar uma reflexão, por exemplo: O resultado encontrado realmente é o melhor? Existem outras possibilidades? É significativo realmente? O modelo encontrado é válido? Por meio de questionamentos os alunos ao trabalharem com a modelagem matemática poderão observar sua aplicação de forma crítica e buscando novas alternativas para melhorar a solução (caso exista essa possibilidade), além disso, os valores encontrados não devem ser apenas números, mas resultados com significados que podem melhor ou não o problema proposto.

Palavras Chaves: Resultado Econômico, Matemática Aplicada, Criticidade.

10. Trabalhos

Nesta sétima edição da Semat, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral e/ou pôster.

Na sequência, são apresentados os 7 (sete) resumos expandidos apresentados e os 22 (vinte e dois) trabalhos completos, totalizando 29 (vinte e nove) trabalhos.

ISSN 2358-4947

O problema da Basiléia e séries de Fourier.

Tayssa Carolina Baccin Asakawa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
tayssa.asakawa@hotmail.com

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
loreci@utfpr.edu.br

Resumo

O objetivo deste artigo é estudar o problema da Basiléia, primeiro problema a tornar Leonard Euler famoso em 1735. Tal problema levou o nome da cidade onde Euler vivia na época ao propor sua solução. Hoje sabe-se que tal solução carece de rigor e, por isso, motivou vários outros matemáticos a desenvolverem outras soluções para o problema, uma delas foi proposta exatamente usando séries de Fourier. Por isso decidiu-se usar séries de Fourier de uma função quadrática, avaliá-la no ponto $x = \pi$ que é um ponto de continuidade da função, logo a convergência para o valor π^2 é garantida, uma vez obtido esse valor, opta-se por um programa computacional usando o software livre Scilab para aproximações do valor do número π e estudo do erro numérico cometido nas respectivas aproximações.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Convergências de séries. O Problema da Basiléia.

1 Introdução

A partir dos estudos preliminares com objetivo de escrita futura de um trabalho de conclusão de curso na área de Equações Diferenciais Parciais iniciou-se a discussão sobre as Séries de Fourier. Resolveu-se estudar paralelamente outras formas de obtenção do número π, sendo uma delas com o uso de uma série no qual anos atrás muitos matemáticos tentaram solucionar e não obtiveram sucesso.

Somente em 1736, anos depois do surgimento do problema, Leonhard Euler publicou a demonstração e o chamou de Problema da Basiléia, pois Euler havia se formado na cidade de Basiléia, sendo assim, se tornou uma grande referência na Matemática pela sua contribuição com mais de 500 artigos e livros publicados [1].

Após a sua descoberta, de forma análoga, Euler aplicou alguns resultados usando séries como $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$ e $\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$ utilizando o número π em equações que não envolveriam círculos, ver por exemplo [1].

2 Desenvolvimento

Neste trabalho será apresentada uma solução do problema de Basiléia pelo uso de séries de Fourier, analisa-se a convergência através de um teorema que garante o resultado e apresenta-se a prova de Euler. Abordaremos também outras demonstrações rigorosas para o problema.

2.1 A série de Fourier

O físico matemático Francês, Joseph Fourier desenvolveu trabalhos em vários ramos da matemática, como raízes irracionais de equações algébricas que teve início com Newton.

ISSN 2358-4947

Em 1822, Fourier lançou seu trabalho mais famoso Théorie Analytique de la chaleur, com uma seção toda dedicada ao desenvolvimento em séries de senos e cossenos de uma função dada. Hoje sabe-se que podemos desenvolver da seguinte forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 cosx + a_2 cos2x + \cdots + a_n cosnx + \cdots + b_1 senx + b_2 senx + \cdots + b_n sennx + \ldots$$

Teorema 2.1 (Teorema de Fourier). *[2] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, tal que f e f' são contínuas por partes no intervalo $[-L, L]$. Então a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 1, 2, ...$$

Dado o Teorema de Fourier, tomamos $f(x) = x^2$ no intervalo $(-k\pi, k\pi)$, talque $k \in \mathbb{N}$, conforme a figura 1.

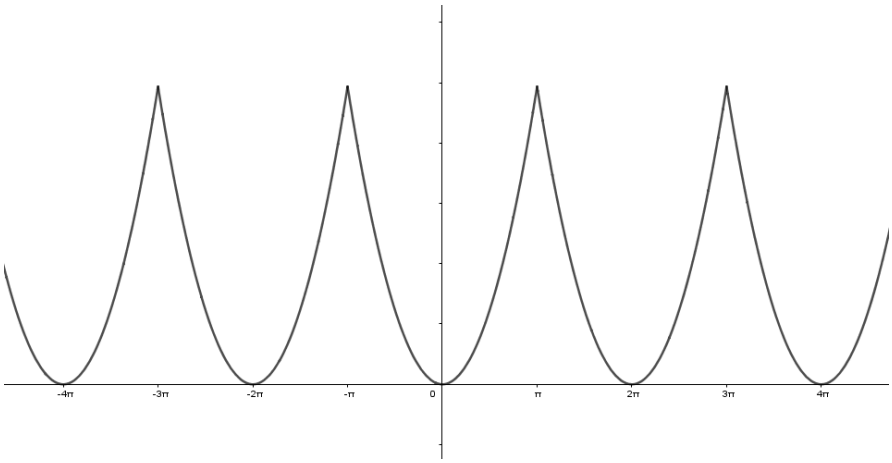


Figura 1: $f(x) = x^2$, $-k\pi < x < k\pi$
Fonte: Dos autores.

Assim, pode-se obter os coeficientes a_0, a_n e b_n, e tomando $L = \pi$. Para o coeficiente a_0, temos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

ISSN 2358-4947

Para o coeficiente a_n, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx. \end{aligned}$$

Pelo método da substituição, $u = nx$ então $du = ndx$, portanto, $\frac{du}{n} = dx$ e seja $x = \frac{u}{n}$, isto é

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^2\cos u}{n^3}du \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^3}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\cos u du\right). \end{aligned}$$

Utilizando a integração por partes, resulta em

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{n^2x^2\operatorname{sen} nx + 2nx\cos nx - 2\operatorname{sen} nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi}.$$

Logo, como $\operatorname{sen} n\pi = 0$ e $\cos n\pi = (-1)^n$, temos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Observe que para o coeficiente b_n, basta notar que $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\operatorname{sen} nxdx = 0$, pois a função é ímpar, assim, substituindo os coeficientes a_0, a_n e b_n em (1), obtemos

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx\right) \tag{2}$$

Substituindo $x = \pi$,

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos n\pi\right) \\ \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\right) \\ \frac{2\pi^2}{3} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto, segue que $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

ISSN 2358-4947

2.2 Convergência da série

A convergência da série (3) pode ser verificada pelo teste da p-série, ou seja

Teorema 2.2 (Convergência de séries p). *[3] A série p* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$.

Pelo teorema acima, tem-se que a série

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \tag{4}$$

é convergente, pois $p > 1$.

Agora, para estimar uma soma aproximada de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, pelo teorema abaixo, assim, pode-se considerar $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Teorema 2.3. *[4] Suponha que* $f(k) = a_k$*, onde* f *é uma função contínua, positiva, decrescente para* $x \leq n$ *e* $\sum a_n$ *é convergente. Se* $R_n = s - s_n$*, então*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Por exemplo, sabe-se que a série (4) é convergente e que $f(x) = \frac{1}{x^2}$, com $x \in [1, \infty)$ é contínua e decrescente. Então, considerando $n = 15$ e 10 casas decimais do Teorema 2.3, obtemos

$$s_{15} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{15^2} \approx 1,5804402834$$

Então, pode-se calcular a estimativa de soma da série (4), com o erro menor a 10^{-6}, ou seja, pelo Teorema 2.3

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < 10^{-6} \tag{5}$$

Desenvolvendo a equação (5)

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int_{n}^{t} \frac{1}{x^2} &< 10^{-6} \\ \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{n}^{t} &< 10^{-6} \\ \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{n} &< 10^{-6} \\ 0 + \frac{1}{n} &< 10^{-6} \end{aligned} \tag{6}$$

A partir da inequação (6), obtemos $n > 10^6$, ou seja, tomando $n = 1000001$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{1000001} \frac{1}{n^2}$ com erro menor a 10^{-6}, isto é

ISSN 2358-4947

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots + \frac{1}{1000001^2}$$

de outra maneira,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx 1,6449330668$$

Portanto, pela equação (3), pode-se obter o valor aproximado de π utilizando o resultado obtido com o erro menor que 10^{-6}, ou seja

$$\pi \approx 3,1415916987$$

Logo, aproximamos o número π com seis dígitos significativos.

2.3 O Problema da Basiléia

A série usada nesse trabalho, foi proposta inicialmente pelo matemático Pietro Mengoli (1625 – 1686) em 1644. Na época já se tinha conhecimento que a igualdade da equação (3) era verdadeira matematicamente. Em 1736, Euler demonstrou a igualdade que ficou conhecida como o Problema de Basiléia, já que Leonhard Euler nasceu e formou nesta cidade quando conseguiu resolver o problema [4].

A resolução de Euler utiliza-se a série de Maclaurin da função seno, ou seja

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Dividindo ambos os lados da equação por x sendo x não nulo, temos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

e substituindo x por $\sqrt{x}$, assim

$$\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots$$

Portanto, obtemos a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}. \tag{7}$$

e sua expansão em série de potências.

Na época, os matemáticos já sabiam que todo polinômio da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pode ser escrito como

ISSN 2358-4947

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = x^n + a_{(n-1)}x^{(n-1)} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad (8)$$

onde, r_1, r_2, ..., r_n são as raízes do polinômio $p(x)$. Então a partir da expressão (8), obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n r_1 r_2 \dots r_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} r_2 r_3 \dots r_n + (-1)^{n-1} r_1 r_3 \dots r_n + \dots + (-1)^{n-1} r_1 r_2 \dots r_{n-1} \end{aligned}$$

e dividindo a_1 por a_0, assim

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \qquad (9)$$

Como as raízes da função (7) são π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ ... e assumindo que estas propriedades de polinômios vale para as séries de potências, aplicando a função (7),

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots$$

Então, multiplicando ambos os lados da igualdade por π^2, isto é

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

O resultado obtido por Euler, na época, considerava-se correto e surpreendente, pois envolvia π como resposta de uma série que aparentemente não estava relacionada com circunferências ou trigonometria [5].

Apesar da solução estar correta, encontram-se algumas etapas efetuados por Euler que não estavam bem demonstradas.

Observe que a equação (9), Euler utilizou a propriedade de polinômios em uma série de potências, no entanto isso nem sempre é satisfeito. De fato, a série geométrica nos dá

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad x \in (-1, 1)$$

e a função

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}.$$

Repare que a raiz da função $g(x)$ é -1. Assim,

$$g(x) = -\frac{1}{2} - x - x^2 - x^3 - \dots \qquad (10)$$

ISSN 2358-4947

Pode-se observar pela equação (10) que o domínio da função g é diferente do domínio de sua expansão em série de potências, e a raiz, que é -1 não pertence ao intervalo de convergência. Mesmo assim, considerando que as propriedades continuam valendo para a equação (9), tem-se

$$-\frac{-1}{-1/2} = -\frac{1}{1}$$

isto é, $2 = 1$, tornando a prova de Euler invalida.

2.4 Outras demonstrações para o Problema da Basileia

Anos depois da grande descoberta de Euler, outros matemáticos como o Fourier, Cauchy e Apostol solucionaram o problema de forma rigorosa.

A resolução de Fourier, utiliza-se a série de Fourier, como mostramos anteriormente. Vale ressaltar que tomando $f(x) = x^2$ no intervalo $(-\pi, \pi)$, após desenvolver a série e substituindo $x = \pi$ obtém-se a resolução de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

No entanto, Augustin-Louis Cauchy, na sua prova utilizou-se as operações elementares de Matemática. A partir da equação de De Moivre [5],

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = cos(nx) + isen(nx)$$

A prova mais recente do problema foi solucionado pelo o matemático Tom Mike Apostol em 1983 [5]. Para a solução do problema, Apostol utilizou a equação envolvendo as integrais duplas:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy.$$

Após as manipulações algébricas, chega-se no resultado (3).

Podemos observar que existe pelo menos três maneiras distintas de obter a série no qual estamos abordando, desde o cálculo avançado à matemática elementar.

3 Resultados e Discussão

Com o objetivo de compreender as Séries de Fourier, estudou-se a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ apresentada no desenvolvimento deste trabalho. Para calcular a série, buscou-se utilizar as Séries de Fourier para representação da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e aplicamos o teste de convergência no problema inicial. Assim, buscamos obter uma aproximação do número π com dígitos significativo, afim de entender a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Podemos notar que com um erro da ordem de 10^{-6}, conseguimos obter a aproximação de $\pi = 3,1415916987$. Utilizando um número maior de termos da série conseguimos aproximar ainda mais os dígitos significativos. Uma forma de encontrar aproximações para o número π é utilizando softwares, como o Scilab, conforme utilizamos para determinar a convergência da série.

ISSN 2358-4947

4 Conclusão

O objetivo do trabalho era apresentar a solução do problema da Basiléia por meio da série de Fourier. Com isso, observamos a convergência da série, estimamos a soma com um certo erro determinado e mostramos a solução de Euler apresentada em 1736.

Observe-se a importância do problema da Basiléia no decorrer do desenvolvimento da Matemática, pois na época os matemáticos acreditavam que a resolução de Euler estava correta e surpreendente o que levou Leonhard Euler a ser conhecido por desvendar tal problema.

Ao utilizar o Software Scilab pode-se obter aproximações significativas para π através do uso da tecnologia.

Referências

[1] BOYER, C. B., MERZBACH, U. C. Historia da Matemática. 3. ed. São Paulo, Blucher, 2012.

[2] BIEZUNER, R. J. Notas de Aula: Introdução às Equações Diferenciais Parciais. UFMG, Minas Gerais: Instituto de Ciências Exatas, 2007.

[3] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. 10. ed. Poro Alegre: Bookman, 2014.

[4] STEWART, J., ROMO, J. H. Cálculo. Cengage Learning, 2008.

[5] GAYO, J., WILHELM, R. O problema que tornou Euler famoso. Ciência e Natura, UFSM, Santa Maria, v. 37, p.342-355, 2015.

VII ∫ε∧ατ UTFPR
ISSN 2358-4947

I WORKSHOP PROFMAT TOLEDO
7 de Junho de 2019
UTFPR

O PIONEIRISMO DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DAS ETF´S E CEFET´S NA CRIAÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS

Ana Paula Oliveira da Silva
UTFPR – Câmpus Toledo
aanasiilva.o@gmail.com

Simone Cintia dos Santos
UTFPR – Câmpus Toledo

Erik Henrique de Oliveira Mendes
UTFPR – Câmpus Toledo

Barbara Winiarski Diesel Novaes
UTFPR – Câmpus Toledo

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a iniciativa de professores de matemática de Escolas Técnicas Federais (ETF´s) e Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET´s) em desenvolver livros didáticos de matemática voltados para os cursos técnicos. Mais especificamente, analisar em um dos fascículos da coleção quais foram os principais exemplos advindos da prática profissional os quais eram utilizados para elucidar e relacionar os conteúdos matemáticos. As aulas magnas da década de 1970 foram aperfeiçoadas e discutidas nos Encontros Nacionais de Professores de Matemática (ENCONAM´s) das ETF´S e CEFET´S na década de 1980 e transformaram-se em fascículos impressos na editora da atual Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). O referencial teórico-metodológico para análise de livros didáticos numa perspectiva histórica é Choppin (2004). Os resultados iniciais da pesquisa nos mostram que os professores almejavam desenvolver um material específico para os cursos técnicos com foco no que era suficiente e necessário para os alunos.

Palavras-chave: ENCONAM. Livros didáticos. Cursos Técnicos.

1 Introdução

Ao decorrer do tempo a educação no Brasil, mais precisamente na década de 1960, recebeu uma grande influência externa sobre como formar trabalhadores. Criado nos Estados Unidos o modelo tecnicista de ensino deu aos governantes brasileiros a possibilidade de se adequarem ao novo mundo de avanços tecnológicos que estava chegando do exterior, com uma base extremamente técnica (como diz o próprio nome) e influenciada pelo behaviorismo, que era a grande tendência de ensino na época, o modelo tecnicista chegou e seus rastros se estendem até os dias atuais (ROMANELLI, 1982).

Nesse período histórico, a ideologia tecnicista se adequava perfeitamente ao intuito de formar trabalhadores de forma objetiva e pragmática e as escolas técnicas adotaram esse modelo no final da década de 1960. No Centro Federal de Educação Tecnológica

Federal do Paraná (CEFETPR[1]), por exemplo, o ensino por objetivos permaneceu como prática pelo menos até a década de 1990.

Isso não foi diferente entre os professores de matemática das escolas técnicas federais. Com o objetivo de promover uma matemática mais voltada aos cursos técnicos, foram realizados encontros anuais entre professores de variados CEFET'S e ETF'S. A finalidade dos encontros era de elaborar propostas para a melhoria do ensino da matemática, novas técnicas, trocas de experiências e reflexões em grupo para que o ensino de matemática se mantivesse com o foco no técnico. Esses encontros receberam o nome de Encontro Nacional de Professores de Matemática das ETF'S e CEFET'S (ENCONAM's).

Em 1981, na cidade de Fortaleza mais precisamente no segundo ENCONAM, houve um consenso em que os alunos não teriam uma aprendizagem técnica eficiente se o material teórico usado nas aulas de matemática não fosse moldado para a forma como eles deveriam aprender as disciplinas técnicas. Foi então aceito a proposta para a elaboração de livros didáticos que seriam específicos para o ensino técnico e para a realização de tal tarefa foi criada uma comissão provisória em 1982 no terceiro ENCONAM que no decorrer de um ano fez um questionário no qual levantavam questões de como a matemática deveria ser inserida, o quão necessária era em cada um dos cursos oferecidos e os conteúdos que o livro deveria abranger. Segundo Pinto e Santos (2013) ao apresentarem os resultados no IV ENCOMAN, foi aprovada no mesmo uma comissão permanente que ficou incumbida da elaboração do material didático. Então em 1985 no V ENCOMAN foram apresentados os 4 fascículos (figura 1) que futuramente seriam utilizados pelas escolas técnicas e CEFET's para o ensino da matemática. (SANTOS, PINTO 2013).

O objetivo deste trabalho é mostrar a iniciativa de professores de matemática de Escolas Técnicas Federais (ETF´s) e Centros Federais de Educação Tecnológica (CEFET´s) em desenvolver livros didáticos de matemática voltados para os cursos técnicos. Mais especificamente, analisar em um dos fascículos da coleção quais foram os principais exemplos advindos da prática profissional e que eram utilizados para elucidar e relacionar os conteúdos matemáticos.

1 Em 1909 a educação brasileira deu um importante passo, houve a criação de escola de ensino profissional, primário e gratuito, essa instituição recebeu o nome de Escolas de Aprendizes Artífices, ao decorrer do tempo essa escola foram se modernizando alcançando novos patamares de ensino, assim conseguindo oferecer uma maior gama de cursos com um ensino de melhor qualidade. Uma dessas escolas. Atualmente é a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (NOVAES, 2012).

O fascículo analisado foi o quarto que trata dos conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares e foi publicado pela editora da atual UTFPR em 1985.

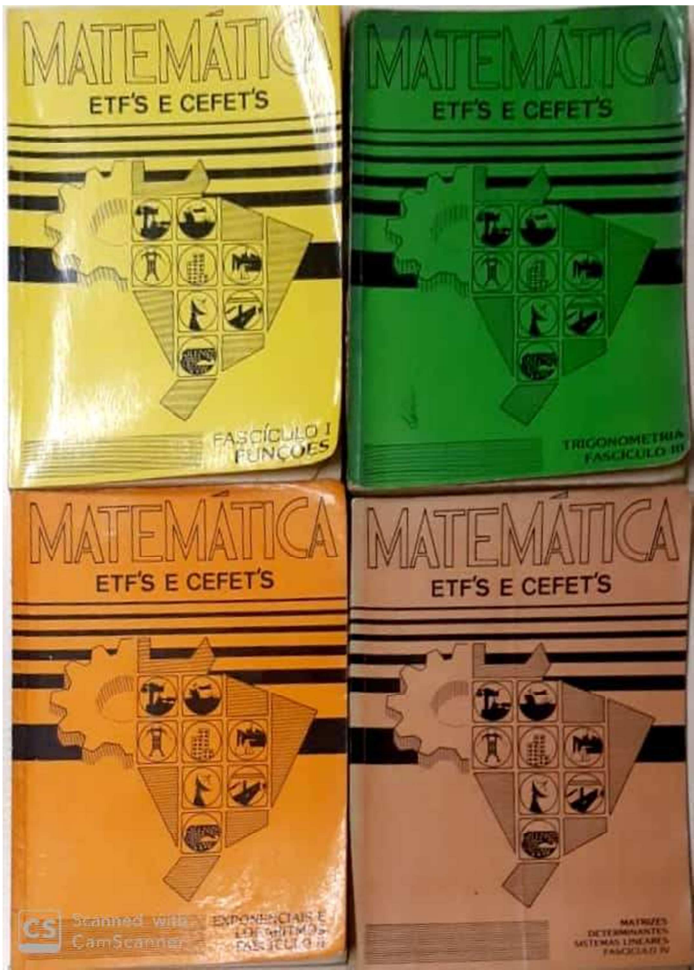


Figura 1 – Capas dos fascículos da coleção

Fonte: os autores

Segundo Choppin (2004) “os livros didáticos exercem quatro funções essenciais, que podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (p.553).

> 1. **Função referencial**, também chamada de curricular ou programática, desde que existam programas de ensino: o livro didático é então apenas a fiel tradução do programa ou, quando se exerce o livre jogo da concorrência, uma de suas possíveis interpretações. Mas, em todo o caso, ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações. 2. **Função**

> **instrumental**: o livro didático põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc. 3. **Função ideológica e cultural**: é a função mais antiga. A partir do século XIX, com a constituição dos estados nacionais e com o desenvolvimento, nesse contexto, dos principais sistemas educativos, o livro didático se afirmou como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das classes dirigentes. Instrumento privilegiado de construção de identidade, geralmente ele é reconhecido, assim como a moeda e a bandeira, como um símbolo da soberania nacional e, nesse sentido, assume um importante papel político. Essa função, que tende a aculturar — e, em certos casos, a doutrinar — as jovens gerações, pode se exercer de maneira explícita, até mesmo sistemática e ostensiva, ou, ainda, de maneira dissimulada, sub-reptícia, implícita, mas não menos eficaz. 4. **Função documental**: acredita-se que o livro didático pode fornecer, sem que sua leitura seja dirigida, um conjunto de documentos, textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno. Essa função surgiu muito recentemente na literatura escolar e não é universal: só é encontrada — afirmação que pode ser feita com muitas reservas — em ambientes pedagógicos que privilegiam a iniciativa pessoal da criança e visam a favorecer sua autonomia; supõe, também, um nível de formação elevado dos professores (CHOPPIN, 2004, p.553, grifos dos autores)

Desta forma, o livro didático é utilizado como fonte privilegiada de pesquisa histórica e neste caso específico tem a particularidade de ser pensado e confeccionado a partir de um grupo de professores das escolas técnicas que não eram grandes autores de livro didático e a confecção dos livros ficou a cargo da própria editora do então CEFETPR, o que não era comum à época.

2 Fascículo IV – Matrizes, determinantes e sistemas lineares

A ideia principal para a criação dos fascículos foi dada a partir da necessidade apresentada pelos alunos dos cursos técnicos para que ensino que fugisse da educação clássica das escolas regulares. Professores sensibilizados por esse desejo começaram a desenvolver esses livros dentro das escolas técnicas com recursos próprios (PINTO, SANTOS, 2011).

Ao iniciamos a análise do livro notamos que o mesmo busca mostrar aplicações da matemática em um ambiente técnico, procurando dar exemplos que tem de certa forma uma ligação com o dia a dia em um ambiente profissional. Os conteúdos se iniciam nos

capítulos em que se tratam das matrizes, logo após mostram os conteúdos das determinantes e terminam com sistemas lineares.

Ao observamos a estrutura dos capítulos, podemos perceber um padrão. O início dos capítulos tem uma introdução breve mostrando alguns conceitos básicos e apresentam algumas curiosidades relacionadas ao conteúdo, logo após surgem os conceitos e definições que serão necessárias para a resolução dos exercícios. Para a exemplificação dos exercícios há o uso de vários gráficos e desenhos ilustrativos, sendo todos eles feitos com base no desenho técnico.

Segundo o livro de matemática ETF's e CEFET's fascículo IV na pág. 12 [...] "é fácil criar coisas que não são necessárias, mas é difícil criar coisas que são necessárias – fácil criar coisas inúteis, mas difícil criar coisas uteis.", nesse fragmento podemos observar o pragmatismo dos autores, característica marcante do tecnicismo. O que é útil e necessário para formar bons técnicos?

O livro analisado apresenta vários exemplos práticos envolvem diretamente os cursos que a instituição oferece, segue a imagem de um exemplo de uma aplicação de conceitofs matemáticos dentro do curso de mecânica e edificações (figuras 2 e 3).

Aqui temos uma tabela de parafusos de rosca métrica.

PARAFUSO	DIÂMETRO EXTERNO	PASSO	DIÂMETRO INTERIOR
A	3	0,6	2,5
B	4	0,7	3,3
C	5	0,8	4,2

Figura 2 – Tabela de uma matriz quadrada
Fonte: Fascículo IV (1985)

	MASSA (camburões)	TIJOLO (milheiros)	MADEIRA (m^2)	TINTA (galões)	VIDRO (m^2)
1. Quarto	10	6	2	4	1
2. Quartos	15	8	3	6	2
3. Quartos	20	12	4	9	3

Figura 3 – Tabela de uma matriz

quadrada
Fonte: Fascículo IV (1985)

Na figura 2 e 3 podemos ver exemplos utilizados no fascículo IV da coleção Matemática ETF´s e CEFET'S em que os exemplos eram pensados especificamente para mostrar aos alunos como o conteúdo matemática estaria presente na sua realidade durante e após a formação. Esse tipo trabalho ajuda o aluno a compreender melhor como o conteúdo matemático está presente no dia a dia do curso estudado.

3 Considerações Finais

Contextualizar o conteúdo matemático, em consonância com a realidade dos educandos, é uma forma não só de melhorar a qualidade de ensino, mas, também tornar o conteúdo, principalmente o matemático mais visível a partir da sua realidade. Isso é mostrado de forma eficiente dentro dos livros analisados já que além de toda a linguagem empregada, existem ainda exemplos bem elaborados e relacionados a profissão técnica. Um dos autores deste trabalho estudou com os mesmos fascículos no CEFETPR entre os anos de 1994-1996 mostrando a importância dos mesmos para essas instituições, pois permaneceram por muito tempo.

Percebemos certa dificuldade em relacionar os conteúdos matemáticos a cada curso técnico, pois havia uma grande variedade de cursos ofertados pela instituição, o que acabou transformando em um empecilho a tarefa de realizar um material didático abrangesse todo o conteúdo matemático contextualizado necessário. No fascículo analisado encontramos mais exemplos de mecânica e edificações e poucos exemplos relacionados a eletrônica que envolve uma matemática mais abstrata e difícil de se contextualizar.

No fascículo analisado verificamos que o conteúdo vem de forma resumida, e apenas com o que de fato é necessário para cada curso técnico ensinado pelos professores, a ideia que esses professores tiveram em um encontro foi muito importante para o ensino técnico, e contribuiu de forma significativa para a história do ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

CHOPPIN, A. **História dos livros e dar edições didáticas: sobre o estado da arte.** Educação e pesquisa, São Paulo, v. 30, n.3, p. 549-566, 2004.

Fascículo IV – Matrizes, determinantes e sistemas lineares. Curitiba: Editora do CEFETPR, 1985.

NOVAES, Barbara Winiarski Diesel. **O Movimento da Matemática Moderna em escolas técnicas industriais do Brasil e de Portugal: impactos na cultura escolar**. 2012. Tese de Doutorado.

PINTO, A. H.; SANTOS M. G. DOS. **A MATEMÁTICA NAS ESCOLAS TÉCNICAS FEDERAIS: UM ACESSÓRIO SEGURO E IMPORTANTE NO TRABALHO. IN: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA,** 9, 2011, ARACAJU, SE. ANAIS... ARACAJU, 2011.

ROMANELLI, O. **História da Educação no Brasil**. 3.ed. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1982.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

CONJUNTO DE MANDELBROT NO SOFTWARE MICROSOFT R OPEN

Matheus Fernando Albertoni
UTFPR - Toledo
albertoni@alunos.utfpr.edu.br

Gustavo Henrique Dalposso
UTFPR - Toledo
gustavodalposso@utfpr.edu.br

Resumo

O termo fractal foi criado por B. Mandelbrot para classificar objetos que possuem dimensão fracionária, esses objetos são figuras irregulares com infinitos detalhes que não podem ser descritos através da geometria euclidiana. Neste artigo, é apresentado o Conjunto de Mandelbrot dando ênfase na quantidade de iterações necessárias para gerá-lo. O objetivo é desenhar graficamente o fractal aplicando a sequência $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ no software Microsoft R Open. Contudo, explicaremos passo a passo como foi elaborado o algoritmo utilizado, após isto, analisaremos algumas características e por fim faremos comparações com as imagens geradas usando diferentes iterações.

Palavras-chave: Fractais. Conjunto de Mandelbrot. Microsoft R Open. Iterações.

1 Introdução

As formas tradicionais da Geometria Euclidiana são triângulos, quadrados, circunferências, cones, esferas e afins. Elas são simples e não têm nenhuma estrutura detalhada em particular. Por outro lado, a Geometria Fractal abrange formas muito mais complexas, trata-se de um método matemático para lidar com as aparentes irregularidades do mundo natural, revelando sua estrutura oculta (Stewart, 2008).

Fractal é uma forma geométrica que pode ser separada em partes, cada uma delas é uma escala reduzida semelhante do todo (Mandelbrot, 1983). Fractais podem ser criados calculando repetidamente uma simples equação milhares ou milhões de vezes e, para isso, é necessário um software para gerá-lo e investigá-lo. O termo fractal foi denominado por Benoit Mandelbrot no século XX baseando-se no latim, que significa quebrar, criar fragmentos irregulares (Barbosa, 2016).

Além de definir o que era fractal, Mandelbrot também descobriu um dos fractais mais conhecidos atualmente, o Conjunto de Mandelbrot definido pela equação $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ (Devaney, 2006).

O objetivo deste trabalho é utilizar o software Microsoft R Open para esboçar o Conjunto de Mandelbrot e explorar suas características.

2 Material e Métodos

2.1 O Conjunto de Mandelbrot

As variáveis da equação do conjunto de Mandelbrot são complexas. Isto significa que ela é composta por duas partes: uma real e outra imaginária. Para a construção do conjunto de Mandelbrot tomamos um ponto fixo $C = x + yi$, e utilizando como partida $Z_0 = 0 + 0i$, iteramos

ISSN 2358-4947

a equação para cada ponto do plano complexo. Chamaremos de órbita cada novo ponto obtido através das iterações. Se, com o aumento do número de iterações, o módulo do ponto ou órbita continuar sendo menor ou igual a 2, diremos que este ponto pertence ao conjunto de Mandelbrot. Vejamos um exemplo:

Utilizando o ponto $C = 0.5 + 0.2i$ para calcular a primeira iteração Z_1 é simples, pois $Z_0 = 0$, portanto $Z_1 = Z_0^2 + C = C$ e $C = 0.5 + 0.2i \rightarrow Z_1 = 0.5 + 0.2i$. O módulo de Z_1 é $|Z_1| = \sqrt{(0.5^2 + 0.2^2)} \approx 0.538$. Logo a órbita Z_1 encontra-se dentro do Conjunto de Mandelbrot. $Z_2 = Z_1^2 + C$, para facilitar os demais cálculos foi utilizado uma ferramenta computacional, obtendo assim os seguintes resultados:

Tabela 1: Exemplo de iterações

$Z_0 = 0.000 + 0,000i$	$\|Z_0\| = 0.000$
$Z_1 = 0.500 + 0.200i$	$\|Z_1\| = 0.538$
$Z_2 = 0.710 + 0.400i$	$\|Z_2\| = 0.815$
$Z_3 = 0.844 + 0.768i$	$\|Z_3\| = 1.141$
$Z_4 = 0.623 + 1.496i$	$\|Z_4\| = 1.621$
$Z_5 = -1.352 + 2.064i$	$\|Z_5\| = 2.467$*

*Sua distância é maior que 2.

Fonte: Os Autores (2019).

Como o módulo de Z_5 é maior que 2 comprovamos que o ponto $C = 0.5+0.2i$ não pertence ao Conjunto de Mandelbrot. Entretanto se calculássemos as órbitas do ponto $C = -1 + 0.05i$, verificaríamos que a órbita permanece dentro do Conjunto de Mandelbrot durante as primeiras 100 iterações. Assim, consideraremos que o ponto pertence ao Conjunto de Mandelbrot.

2.2 Implementação Gráfica

Para gerar o Conjunto de Mandelbrot no software Microsoft R Open foi utilizado o seguinte algoritmo:

```
# Janela gráfica.
plot(1, type="n", xlab=, ylab=, xlim=c(-2,1), ylim=c(-2,2))
abline(h=0)
abline(v=0)

# Laços para percorrer todos os pontos do gráfico.
for (i in 1:600){
    for ( j in 1:800){

        r = -2+0.005*i
        m = -2+0.005*j

        # Criando as variáveis complexas.
        c = complex(real = r, imaginary = m)
        zk = complex(real = 0, imaginary = 0)
        zk_mais1 = ((zk)^2)+c
```

ISSN 2358-4947

```
        # Iterações de zk.
        p = 0
        while((Mod(zk_mais1)<2)&&(p <= 2000)){
            zk = zk_mais1
            zk_mais1 = ((zk)^2)+c
            p <- p+1
        }

        # Aplicando cores aos pontos.
        if(Mod(zk_mais1)>2)
        points(-2+0.005*i, -2+0.005*j, pch = ".", cex = 0.01, col = "white")

        if(Mod(zk_mais1) <= 2)
        points(-2+0.005*i, -2+0.005*j, pch = ".", cex = 0.01, col = "black")

    }
}
```

O algoritmo funciona do seguinte modo:

- Possui dois *for*, cujo primeiro possui a variável i recebendo os valores de 1 à 600 e o segundo a variável j de 1 à 800.
- Duas variáveis r e m dependentes, respectivamente, de i e j. Onde r representará a coordenada x (real) de todos os pontos e m representará a coordenada y (imaginária) de todos os pontos.
- O valor 0.005, que multiplica tanto o i quanto o j, significa a distância entre cada ponto.
- Duas variáveis complexas c e zk. Em que c é um ponto que recebe o valor real de r e imaginário de m.
- Cria-se a variável zk_mais1 de acordo com a equação do Conjunto de Mandelbrot.
- A variável p representa a quantidade de iterações realizadas.
- Um *while* para determinam se o ponto c resultante de i e j pertencem ao Conjunto de Mandelbrot.
- Dois *if* que verificam o módulo do ponto c e suas órbitas, e caso seja menor ou igual a 2, será colorido de preto, caso contrário branco.

Assim todos os pontos pretos gerados através do algoritmo constituem o Conjunto de Mandelbrot.

3 Resultados e Discussão

Após aplicarmos o algoritmo no software obtemos a imagem do Conjunto de Mandelbrot conforme disposto na Figura 1.

ISSN 2358-4947

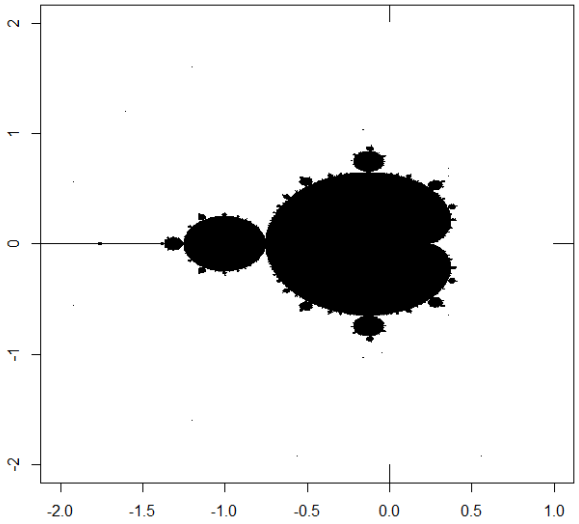


Figura 1: Conjunto de Mandelbrot gerado através do software Microsoft R Open
Fonte: Os Autores (2019).

Diferentes partes do Conjunto de Mandelbrot recebem diversos nomes (Figura 2). Vamos considerar que o conjunto Mandelbrot é feito de formas semelhantes à cardióides e elipses. Cada elipse está sempre ligada a outras elipses ou a possíveis cardióides, conforme figura a seguir:

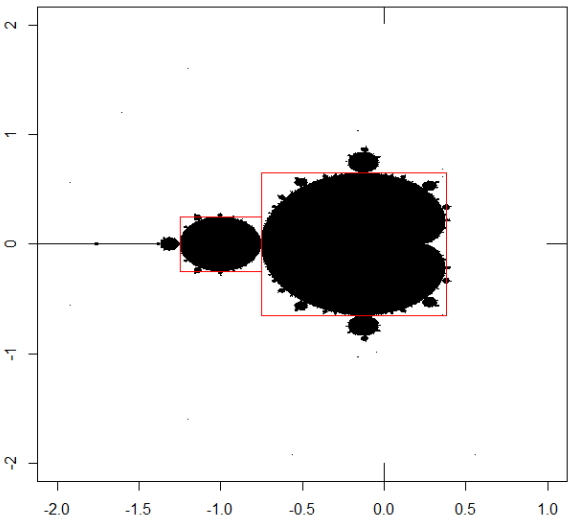


Figura 2: Destaque do cardióide e elipse.
Fonte: Os Autores (2019).

Por se tratar de um fractal, o Conjunto de Mandelbrot contém infinitos detalhes que são mais visíveis quando se há um maior número de iterações. Mas como saber a quantidade necessária de iterações para gerar uma imagem nítida do Conjunto de Mandelbrot? Bem, para isso fizemos algumas comparações gerando gráficos com 5, 10, 20 e 50 interações respectivamente (Figura 3).

ISSN 2358-4947

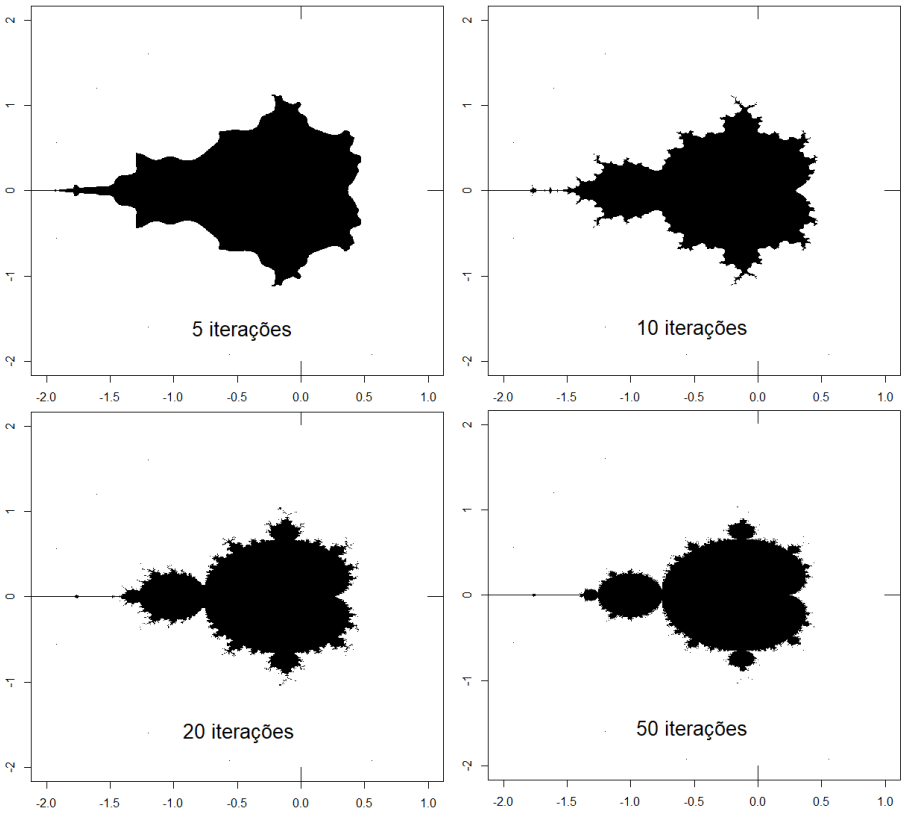


Figura 3: Conjunto de Mandelbrot com diferentes iterações.
Fonte: Os Autores (2019).

O Conjunto de Mandelbrot terá uma imagem mais precisa a medida que o número de iterações aumenta. Para obtermos a representação gráfica apresentadas nas Figura 1 e Figura 2 foram realizadas 2000 iterações.

4 Considerações Finais

O nosso mundo é composto por mares e oceanos, que separam continentes e ilhas, com seus rios, florestas, penhascos e animais. Esses elementos não podem ser explicados matematicamente utilizando a geometria euclidiana, pois, em diversas situações, ela a representa de maneira incompleta e, em alguns casos, de forma inapropriada. Contudo, a geometria fractal mostra como a aleatoriedade pode desempenhar um papel crucial na determinação da complexidade na natureza.

O Conjunto de Mandelbrot é um dos fractais mais conhecidos, ele possui um universo infinito em seu interior em escalas reduzidas. Dessa forma, com os resultados obtidos nessa pesquisa, nossos próximos objetivos são explorá-lo afim de analisar sua autossemelhança e conhecer outros fractais.

Referências

[1] MANDELBROT, Benoit B. The fractal geometry of nature. New York: WH freeman, 1983.

[2] STEWART, Ian. Almanaque das curiosidades matemáticas. Zahar, 2009.

ISSN 2358-4947

[3] DEVANEY, Robert. Unveiling the Mandelbrot set, disponível em <https://plus.maths.org/content/unveiling-mandelbrot-set>. Acesso em 20 mar. 2019.

[4] BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrindo a Geometria Fractal-para a sala de aula. Autêntica, 2016.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

UM PARALELO ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS E MÓDULOS

Maurício Eduardo Lamb
UTFPR - Campus Toledo
mauricio.lamb@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
UTFPR - Campus Toledo
robsonw@utfpr.edu.br

Resumo

O estudo da álgebra linear ocorre sobre uma estrutura algébrica chamada de corpo. Porém, muitos resultados podem ser generalizados quando analisamos sobre uma estrutura algébrica chamada de anel. Neste trabalho, faremos um paralelo entre a teoria de álgebra linear sobre corpos e anéis, destacando resultados importantes dos conceitos de espaço vetorial, conjunto gerador, independência linear e bases que podem ser generalizados para anéis e apresentando contraexemplos para resultados que nem sempre ocorrem. Este trabalho está sendo desenvolvido no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) da UFPR - Universidade Federal do Paraná, Câmpus Curitiba, mas sendo orientado na UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo.

Palavras-chave: Álgebra Linear. Corpos. Anéis.

1 Introdução

A Álgebra Linear constitui certa importância para a Matemática Pura e Aplicada, além de ser uma ferramenta útil na química, nas engenharias, na TI. Seja com seus conceitos sendo ferramentas para aplicações ou utilizando seu lado algébrico para o desenvolvimento de estruturas algébricas. Normalmente seus conceitos são vistos na resolução de equações diferenciais, sistemas de equações lineares, problemas com matrizes, porém podem ser vistos nas mais diversas situações como no balanceamento de equações químicas, problemas com circuitos elétricos e na computação gráfica.

Isso nos motiva a desenvolver o trabalho aqui apresentado, que teve como objetivo fazer um paralelo entre uma estrutura importante da Álgebra Linear e uma generalização dessa estrutura, os espaços vetoriais e os módulos, respectivamente. Essa generalização ocorre quando o conjunto utilizado na operação de multiplicação por escalar é a estrutura algébrica chamada de anel, não sendo mais necessariamente um corpo.

Desse modo, nessa generalização alguns resultados importantes da Álgebra Linear para espaços vetoriais nem sempre ocorrem, pois quando trocamos a estrutura de corpo para um anel propriedades importantes se perdem. É interessante apresentarmos contraexemplos para mostrar que alguns resultados definitivamente não valem.

Para isso, é necessário as definições de algumas estruturas algébricas que se encontram na seção 3.1. Na seção 3.2 será introduzido definições preliminares de espaços vetoriais com exemplos para melhor compreensão. De forma similar introduziremos a definição de módulos na seção 3.3 e definições preliminares semelhantes as definições abordadas na seção 3.2, porém agora para módulos. Na seção 3.4 abordaremos a ideia principal do trabalho, o paralelo entre os resultados que valem para espaços vetoriais, mas que nem sempre ocorrem para módulos. Já na seção 3.5 apresentaremos um exemplo dessa perda de propriedades em algo palpável com conceitos presentes na educação básica.

ISSN 2358-4947

2 Metodologia

A metodologia utilizada no desenvolvimento desse foi o método dedutivo que, segundo Gêronimo e Franco [2], consiste em:

- aceitar algumas afirmações denominadas *axiomas*;
- aceitar alguns conceitos denominados *conceitos primitivos*;
- demonstrar as seguintes afirmações usando os axiomas respeitando as regras da lógica clássica;
- apresentar *definições* a partir de axiomas, conceitos primitivos e afirmações já demonstradas;
- basear as demonstrações em afirmações anteriormente demonstradas ou em axiomas.

Como procedimento, o estudo a partir do livro [4] que proporcionou o estudo preliminar de estruturas algébricas importantes para o desenvolvimento do trabalho, do livro [1] que aborda a Álgebra Linear de forma algébrica generalizando espaços vetoriais para um corpo qualquer e das notas de aula [3] que traz exatamente a abordagem de módulos necessária para o trabalho.

3 Resultados e Discussão

Para iniciar nosso trabalho vamos precisar de alguns conceitos preliminares, que são apresentado nas seções 3.1, 3.2 e 3.3.

3.1 Estruturas algébricas utilizadas

Definição 3.1 (Grupo)**.** *Seja G um conjunto não vazio com uma operação*

$$* : G \times G \to G.$$

Dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo*** *se satisfazem as seguintes propriedades:*

i) Associativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$;

ii) Elemento Neutro: $\exists e \in G$ *tal que* $a * e = e * a = a, \forall a \in G$;

iii) Elemento Inversível: $\forall a \in G, \exists a' \in G$ *tal que* $a * a' = a' * a = e$.

Se, além disso, $(G, *)$ satisfaz $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, dizemos que $(G, *)$ é um ***grupo comutativo*** *(ou abeliano).*

Exemplo 1. *$(\mathbb{Z}, +)$ é grupo aditivo abeliano.*

Definição 3.2 (Anel)**.** *Seja A um conjunto não vazio com duas operações denominadas adição $+ : A \times A \to A$ e multiplicação $\cdot : A \times A \to A$. Dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um* ***anel*** *se*

i) $(A, +)$ é um ***grupo abeliano****,*

ii) $a(bc) = (ab)c$,

iii) $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$,

para todo $a, b, c \in A$.

ISSN 2358-4947

Um anel é chamado de ***anel com identidade*** *caso exista* $1 \in A$ *tal que* $\forall a \in A$,

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a;$$

E é chamado de ***anel comutativo*** *se* $\forall a, b \in A$ *tem-se que*

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Claramente $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são exemplos de anéis comutativos com identidades.

Definição 3.3 (Corpo)**.** *Seja* $(K, +, \cdot)$ *um anel comutativo com identidade. Dizemos que* K *é um* ***corpo*** *se, todo elemento* $a \in K^*$ *é inversível, isto é,* $\exists a^{-1} \in K$; $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Notemos que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de corpos, mas o mesmo não ocorre com $\mathbb{Z}$, pois os únicos elementos inversíveis em $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

3.2 Espaços Vetoriais

Definição 3.4. *Um conjunto não vazio* V*, com operações de:*

$$\textit{Adição: } \begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \quad e \quad \textit{Multiplicação por escalar: } \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, v) & \mapsto & \alpha \cdot v \end{array}$$

é um ***espaço vetorial*** *sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *se,* $\forall u, v, w \in V$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, satisfazem:*

(i) $u + v = v + u$

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

(iii) $\exists 0 \in V$ *tal que* $0 + v = v$

(iv) $\forall v \in V$, $\exists -v \in V$ *tal que* $v + (-v) = 0$

(v) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$

(vi) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

(vii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

(viii) $1 \cdot v = v$

Por exemplo, $\mathbb{K}^n$ e $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, são espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$.

Nesta seção, V sempre denotará um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. A próxima definição apresenta as subestruturas de V que também são espaços vetoriais.

Definição 3.5. *Um subconjunto não vazio* W *de* V *é um* ***subespaço*** *de* V *se,* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\forall u, v \in W$ *tem-se* $u + v \in W$ *e* $\alpha \cdot v \in W$*.*

Seja o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o subconjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ é um subespaço vetorial pois, dados $(x_1, x_1), (x_2, x_2) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $(x_1, x_1) + (x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2) \in W$ e $\alpha \cdot (x_1, x_1) = (\alpha x_1, \alpha x_1) \in W$.

ISSN 2358-4947

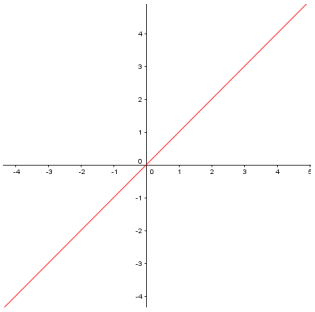


Figura 1: Subespaço W do $\mathbb{R}^2$
Fonte: Autores.

Na sequência, estudaremos subconjuntos de um espaço V, dos quais sempre é possível escrever um vetor qualquer de V como uma soma de múltiplos escalares dos vetores destes subconjuntos.

Definição 3.6. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

1. *$v \in V$ é uma **combinação linear** de $v_1, \ldots, v_n \in V$ se $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.*
2. *Um subconjunto $\mathcal{B}$ de V **gera** V se todo elemento de V for uma combinação linear de um número finito de elementos de $\mathcal{B}$.*

Por exemplos, o conjunto $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ é conjunto gerador do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois dado qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) + 0(1,2)$.

Podemos ver que o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ pode ser gerado apenas por $\{(1,0),(0,1)\}$, pois dado qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, temos que $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. Isso nos motiva a encontrar um conjunto gerador minimal onde nenhum de seus elementos é combinação linear dos outros, esse conjunto denominaremos de base.

Definição 3.7. *Um subconjunto $\mathcal{B} \subset V$ é **linearmente independente** (ou LI) se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, com $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, implica que $\alpha_i = 0, \forall i$. O conjunto $\mathcal{B}$ é chamado de **linearmente dependente** (ou LD) se não for LI.*

Com base no exemplo anterior temos que o conjunto $\{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ é LD, pois $(0,0) = 1(1,0) + 2(0,1) + (-1)\cdot(1,2)$ e que $\{(1,0),(0,1)\}$ é LI, pois $(0,0) = a(1,0) + b(0,1)$ implica $(0,0) = (a,b)$ e, consequentemente, $a = 0$ e $b = 0$.

Definição 3.8. *Um subconjunto $\mathcal{B}$ de V é uma **base** de V se $\mathcal{B}$ gera V e se $\mathcal{B}$ for LI.*

Conforme abordamos acima, o subconjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é uma base para o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois $\{(1,0),(0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$ e é LI.

É importante ressaltar que toda base de V possui o mesmo número de elementos, exceto quando V não é finitamente gerado. Este número é chamado de **dimensão** de V sobre K e, denota-se, $\dim_K(V)$.

Corolário 3.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finitamente não nulo. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos.*

Esse resultado e sua demonstração podem ser encontrados em (ver [1, Corolário 2.3.5, pág 52])

ISSN 2358-4947

3.3 Módulos

Definição 3.9. *Seja A um anel. Chamamos de A-**módulo** um grupo abeliano $(M,+)$ com uma operação de multiplicação por escalar*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A\times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \longmapsto & a\cdot m \end{array}$$

de forma que, $\forall a,b\in A$ e $\forall m,n\in M$, verifiquem-se:

(i) $(a+b)m = am+bm$

(ii) $a(m+n) = am+an$

(iii) $(ab)m = a(bm)$

(iv) $1m = m.$

A definição acima generaliza a definição de espaços vetoriais não exigindo que o conjunto de escalares seja necessariamente um corpo. No que segue A sempre denotará um anel comutativo com identidade e M um A-módulo.

Exemplo 2. *Todo anel A é um A-módulo com a multiplicação por escalar dada pela multiplicação do anel A.*

Exemplo 3. *Seja G um grupo abeliano qualquer, G pode ser visto como um módulo sobre o anel $\mathbb{Z}$ dos inteiros com a seguinte multiplicação por escalar:*

$$na = \begin{cases} a+\cdots+a & n \text{ vezes se } n>0 \\ 0 & \text{se } n=0 \\ (-a)+\cdots+(-a) & n \text{ vezes se } n<0, \end{cases}$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$ e $a\in G$.

Definição 3.10. *Dizemos que $N\subseteq M$, não vazio, é um **submódulo** de M se $\forall a\in A$ e $\forall m,n\in N$ tem-se $m-n\in N$ e $an\in N$.*

Por exemplo, seja $S\subset M$ não vazio, o conjunto $\langle S\rangle := \{\sum_{i=1}^{r} a_i s_i \,|\, a_i\in A, s_i\in S\}$ é um submódulo de M chamado **submódulo gerado** por S. Se $M=\langle S\rangle$, dizemos que S **gera** M.

Exemplo 4. *Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, o conjunto*

$$S = \langle (1,1),(-1,1)\rangle = \{(a-b,a+b)|a,b\in\mathbb{Z}\}$$

é um $\mathbb{Z}$-submódulo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exemplo 5. *Seja $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, o conjunto $W=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2|x=y\}$ é um submódulo pois dados $u=(a,a)$ e $v=(b,b)$ em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, temos que $u-v=(a-b,a-b)\in W$ e, também, $\alpha\cdot u=\alpha\cdot(a,a)=(\alpha a,\alpha a)\in W$,*

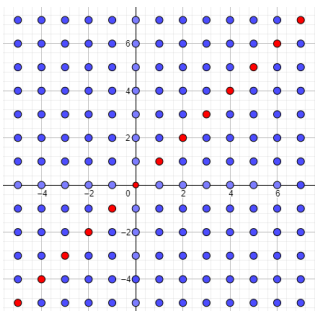


Figura 2: Submódulo W do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}^2$
Fonte: Autores.

ISSN 2358-4947

É importante ressaltar que as definições de dependência e base para módulos são exatamente iguais para espaços vetoriais.

Definição 3.11. *Um subconjunto $\mathcal{B} \subset M$ é **linearmente independente** (ou LI) se $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 0$, com $m_i \in \mathcal{B}$ e $a_i \in A$, implica que $a_i = 0, \forall i$. O conjunto $\mathcal{B}$ é chamado de **linearmente dependente** (ou LD) se não for LI.*

Exemplo 6. *Seja $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o conjunto $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ gera o módulo pois dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) + 0 \cdot (1,1)$$

mas é LD

$$(0,0) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) + (-1) \cdot (1,1)$$

Definição 3.12. *Dizemos que subconjunto $\mathcal{B}$ de M é uma **base** de M se $\mathcal{B}$ gera M e se $\mathcal{B}$ for LI. Neste caso, dizemos que M é um A-**módulo livre**.*

Exemplo 7. *Podemos ver que o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é um exemplo de base. Pois gera*

$$(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

e é LI.

$$(0,0) = 0 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1)$$

3.4 Espaços Vetoriais X Módulos

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, valem as afirmações abaixo, em geral, tais resultados nem sempre ocorrem quando $\mathbb{K}$ **NÃO** é um corpo, ou seja, quando a estrutura que trabalhamos é um módulo sobre um anel A, não necessariamente corpo. Ressaltamos que não faremos aqui as demonstrações das afirmações, apenas apresentaremos a referência de onde encontrá-las, já que elas são bem conhecidas da literatura de Álgebra Linear.

Afirmação 1. *Todo espaço vetorial V finitamente gerado não nulo possui uma base. (ver [1, Teorema 2.3.10, pág. 54])*

Contraexemplo 1. *Nem todo módulo é livre.*

Veremos abaixo que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, ou seja, $\mathbb{Q}$ não possui uma base.

- *$\mathcal{B} = \{a/b, c/d\}$ é sempre LD. De fato, sejam $r = \dfrac{a}{b}$ e $s = \dfrac{c}{d}$. Se $r = 0$, então $\mathcal{B}$ é LD. Suponha $r \neq 0$, assim*

  $$br = a \text{ e } ds = c \quad \Rightarrow \quad (br)c = ac \text{ e } a(ds) = ac \quad \Rightarrow \quad (bc)r = (ad)s \quad \Rightarrow \quad (bc)r - (ad)s = 0$$

  com $ad \neq 0$, pois $r \neq 0$ e $d \neq 0$. Logo, dois elementos de $\mathbb{Q}$ são sempre LD.

- *Uma base de $\mathbb{Q}$ deve conter um único elemento. No entanto, dado $a/b \in \mathbb{Q}$ na sua forma irredutível, se tomarmos $p \in \mathbb{Z}$ primo tal que $p \nmid b$, é claro que $\nexists\, n \in \mathbb{Z}$ tal que*

  $$1/p = n \cdot a/b.$$

  Portanto, nenhum conjunto unitário gera $\mathbb{Q}$.

Afirmação 2. *Todo subconjunto LI de V pode ser completado a uma base de V. (ver [1, Teorema 2.3.9, pág. 54])*

ISSN 2358-4947

Contraexemplo 2. *Nem todo subconjunto LI de um módulo livre pode ser completado a uma base.*

De fato, considere $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}$-módulo. Temos que $\mathbb{Z}$ é livre e as únicas bases de $\mathbb{Z}$ são $\{1\}$ e $\{-1\}$. Porém, o conjunto $\{2\}$ é LI e NÃO pode ser completado a uma base de $\mathbb{Z}$.

Afirmação 3. *Todo conjunto gerador de V contém uma base de V. (ver [5, Teorema 4.6.3, pág. 118])*

Contraexemplo 3. *Um conjunto gerador de um módulo pode não conter uma base. Com efeito, considerando novamente o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, temos que $\{2,3\}$ é um conjunto gerador, pois dado $a \in \mathbb{Z}$ existem $-a, a \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$a = (-a) \cdot 2 + a \cdot 3.$$

Mas $\{2,3\}$ não contém uma base para $\mathbb{Z}$.

Afirmação 4. *Uma família de elementos $\{v_i\}_{i\in I}$ de V é LD $\Leftrightarrow$ um deles é combinação linear dos demais. (ver [5, Teorema 4.5.2, pág. 114])*

Contraexemplo 4. *Existem conjuntos LD em um A-módulo M no qual nenhum dos seus elementos é uma combinação linear dos demais.*

Por exemplo, considerando $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo, temos que $\{2,3\} \in \mathbb{Z}$ é LD, pois

$$(-3) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 0.$$

Porém, nenhum dos dois elementos é um múltiplo inteiro do outro.

Afirmação 5. *Se W é um subespaço próprio de V, então $\dim_K(W) < \dim_K(V)$. (ver [1, Observação 2.4.4 (a), pág. 60])*

Contraexemplo 5. *Seja M um módulo livre e $N \subsetneq M$ um submódulo livre de M. Nem sempre o número de elementos de uma base de N é menor do que número de elementos de uma base de M.*

Com efeito, considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e o submódulo $S = \langle (1,1), (-1,1) \rangle$.

- *$S \subsetneq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Note que $(0,1) \notin S$, pois a única combinação linear possível é*

$$(0,1) = \frac{1}{2} \cdot (1,1) + \frac{1}{2} \cdot (-1,1),$$

mas $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

- *Tanto S quanto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ possuem bases com o mesmo número de elementos, visto que $\{(1,1),(-1,1)\}$ é base para S e $\{(1,0),(0,1)\}$ é base para $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

3.5 Um exemplo com conteúdos da educação básica na perda de propriedades quando mudamos a estrutura algébrica

Exemplo 8. *Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ e $\det A \neq 0$, ou seja, uma matriz com duas linhas e duas colunas, com valores sendo números inteiros e com seu determinante sendo diferente de 0, a sua matriz inversa sempre pertencerá a esse conjunto? Obs: Caso os números da matriz fossem números reais isso ocorre.*

ISSN 2358-4947

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$\det A = (-2) \cdot 3 - (-4) \cdot 3 = 6$, *ou seja a matriz* A *tem inversa, mas* $A^{-1} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$*?*

A sua inversa pode ser facilmente calculada por escalonamento ou a fórmula para matrizes 2×2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 3/2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 3/2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/3 \end{array}\right]$$

Logo, sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Porém, como os valores da matriz são números que não pertencem aos números inteiros, $A^{-1} \notin \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$.

Isso ocorre pois quando estamos trabalhando sobre os inteiros perde-se a propriedade do número inverso multiplicativo.

4 Conclusão

Diante do estudo desenvolvido, podemos perceber que apesar da estrutura de módulos ser uma generalização dos espaços vetoriais, perde-se propriedades muito importantes e que são usadas de forma automática em espaços vetoriais. Desse modo, quando estamos trabalhando sobre módulos temos que ter esse cuidado para não utilizar essas propriedades, pois como vimos elas não valem, em geral, para módulos.

5 Agradecimentos

Os agradecimentos são para o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) e para o CNPq pela bolsa de iniciação científica que possibilitou o estudo necessário para o desenvolvimento desse trabalho.

Referências

[1] Coelho, F. U., Lourenço, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2005.

[2] Gerônimo, J. R., Franco, V. S., *Fundamentos de Matemática*, Maringá: Eduem, 2006.

[3] Hernandes, M. E., *Notas de aula sobre módulos*, UEM.

[4] Sharp, R. Y., *Steps in commutative algebra*, C. U. Press, 2000.

[5] BOLDRINI, José Luiz et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

MÉTODOS DE AMOSTRAGEM NA GEOESTATÍSTICA

Eduardo Vendramini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
vendramini.1999@alunos.utfpr.edu.br

João Pedro Fagundes da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Guilherme Poleto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Rosangela Aparecida Assumpção
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

O trabalho procura apresentar os mapas gerados com fundamento na análise geoestatística sobre amostras obtidas por diferentes técnicas de amostragem e tamanhos. Para tal fim, foi utilizado o *software* R Studio, no qual foi feita a Simulação de Monte Carlo em conjunto com a decomposição de Cholesky, simulando uma população com parâmetros espaciais conhecidos. Baseando-se nessa população e utilizando um algoritmo criado no *software,* foram retiradas seis amostras, das quais três empregaram a técnica de amostragem Sistemática e as demais a amostragem Aleatória, ambas com tamanhos 25, 100 e 625. Após realizada a análise geoestatística sobre as amostras, foram gerados os mapas e determinados os índices de concordância *Kappa*. Tal índice permitiu identificar que o mapa gerado a partir da amostragem sistemática com n = 625 apresentou alta precisão, consequentemente menor perda de informação quando comparado com a população simulada.

Palavras-chave: Técnicas de amostragem. Mapas Geoestatísticos. Simulação. Amostragem Sistemática. Amostragem Aleatória.

1 Introdução

A Geoestatística é uma teoria que estuda dados que possuem coordenadas geográficas e pode ser empregada em diversos setores, como: agricultura, geologia, saúde, entre outros. Essa teoria vem evoluindo ao longo dos últimos anos por conta do desenvolvimento tecnológico e computacional. Assim, atualmente é possível se obter grandes bases de dados georreferenciados a um menor custo.

Como consequência das técnicas da geoestatística aplicadas sobre os dados amostrados de uma região, é possível gerar mapas para análise de um fenômeno. A utilização de interpoladores geoestatísticos, como a Krigagem, e o conhecimento dos parâmetros obtidos por um gráfico de dispersão denominado semivariograma, construído a partir de dados amostrais, permite estimar valores em pontos não amostrados da superfície.

ISSN 2358-4947

Para que os mapas gerados sejam confiáveis, além da utilização correta das técnicas geoestatísticas é necessário que a amostragem deva ser realizada com base em um planejamento no qual é definido o tamanho da amostra e a técnica de amostragem a ser utilizada (YAMAMOTO, 2013).

Sendo assim, o presente trabalho utiliza o *software* R STUDIO, bem como a Simulação de Monte Carlo e a Decomposição de Cholesky para simular dados de uma área com parâmetros espaciais conhecidos. A partir desses dados, fazendo uso de um algoritmo, foram retiradas amostras de tamanhos 25, 100 e 625, considerando as técnicas de amostragem sistemática e aleatória. Sobre as amostras, foram aplicadas as técnicas de análise geoestatística e construídos os mapas, os quais foram comparados com o mapa da área simulada. O índice de concordância *Kappa* foi calculado para verificar a precisão dos mapas gerados a partir das amostras.

2 Metodologia

Para verificar a eficiência das técnicas de inferência em geoestatística torna-se necessária a simulação de uma área que representa o fenômeno completo, já que na prática não é possível conhecê-lo. Sendo assim, é possível realizar diferentes amostragens com diferentes tamanhos de amostras, aplicar as técnicas de inferência e interpolar os valores não amostrados, podendo assim comparar os mapas.

Na geoestatística as técnicas de amostragem mais utilizadas são a Amostragem Aleatória Simples, amostragem Sistemática e a amostragem Estratificada (Yamamoto, 2013), porém no presente trabalho não foi considerada a técnica de amostragem estratificada.

A amostragem Aleatória Simples consiste em retirar uma amostra (n) de uma população (N). Essa deve estar dentro de uma determinada região de estudo, mas suas coordenadas são aleatórias. Por outro lado, na Amostragem Sistemática, as amostras (n) são escolhidas em determinadas coordenadas - definidas pelo responsável pela amostragem - de modo que haja um intervalo específico entre cada amostra (YAMOTO, 2013).

Através do processo de Simulação de Monte Carlo e da Decomposição de Cholesky, foi realizada a simulação de um processo estocástico multivariado, isotrópico, com dependência espacial conhecida.

ISSN 2358-4947

Para a simulação considerou-se uma malha regular com um total de 2500 pontos (50 x 50) e distância entre nós (h) igual a 1 unidade. O modelo de semivariograma do processo simulado foi o modelo exponencial com *efeito nugget* (φ_1) igual a 0,01, *sill* (φ_2) igual a 0,9 e *alcance* ($a = 3\varphi_3$) igual a 30 unidades.

A função semivariograma correspondente ao modelo *exp (0,01; 0,9; 30)*, foi:

$$\gamma(h) \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2\left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right)\right], & \text{se } 0 \le h \le 30 \\ 0, & \text{se } h > 30 \end{cases}$$

Aos dados simulados atribuiu-se um valor para a média igual a 50. Esse valor pode ser escolhido arbitrariamente, uma vez que não afeta nem os semivariogramas, nem as análises posteriores (KAVANAGHI, 2001).

Sobre os dados simulados foram retiradas amostras pelas técnicas de amostragem aleatória simples e sistemática, para ambas, os números de pontos amostrais foram iguais a 25, 100 e 625, totalizando seis (6) diferentes amostras, conforme apresenta a Figura 1.

As técnicas de geoestatística para a estimação dos parâmetros espaciais foram aplicadas sobre as amostras e com suporte da Krigagem Ordinária foram estimados 50 pontos nas direções X e Y, totalizando 2500 para a construção dos mapas.

Com o objetivo de verificar a concordância entre o mapa gerado pelos dados simulados e os mapas gerados a partir dos valores estimados pela krigagem ordinária sobre cada amostra, foi calculado o índice de concordância *Kappa* (Cohen, 1960), conforme a equação:

$$K = \frac{N\sum_{i=1}^{r} x_{ii} - \sum_{i=1}^{r}(x_{i+}x_{+1})}{N^2 - \sum_{i=1}^{r}(x_{i+}x_{+1})}$$

Em que:

K: índice *Kappa* de concordância;

N: número total de *pixels*;

r: número de linhas e colunas da matriz de concordância;

x_{ii}: área da *i*-ésima linha e a *i*-ésima coluna;

ISSN 2358-4947

x_{i+} : área da *i*-ésima linha, sendo $x_{i+} = \sum_{j=1}^{r} x_{ij}$;

x_{+i} : área da *i*-ésima coluna, sendo $x_{+i} = \sum_{u=1}^{r} x_{ui}$.

Kripendorff (1980) classifica o índice kappa como de baixa exatidão se K < 0, 67, como de média exatidão de 0, 67 ≤ K < 0, 80 e com alta exatidão se K ≥ 0,80.

3 Resultados e Discussão

Baseando-se na população simulada com 2500 pontos foram retiradas as amostras, das quais duas correspondem a 1% da população (25 elementos), outras duas com 4% da população (100 elementos) e as demais com 25% (625 elementos), conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1 - Estatística Descritiva

Estatística	População	Amostras					
		Sistemática			Aleatória		
Tamanho da amostra (% da população)	2500	25 (1%)	100 (4%)	625 (25%)	25 (1%)	100 (25%)	625 (25%)
Média	49,89	49,84	49,85	49,88	49,62	49,94	49,87
Valor mínimo	46,58	47,03	46,75	46,58	47,54	46,58	46,58
Valor máximo	54,07	54,07	54,07	54,07	52,56	52,56	52,95
Desvio padrão	1,10	1,77	1,17	1,14	1,03	1,02	1,13
Coeficiente de Variação (%)	2,2	3,54	2,36	2,29	2,07	2,04	2,27

Fonte: Os autores.

De acordo com a Tabela 1, observa-se que a média das amostras se mostram muito semelhante à populacional, com apenas décimos de diferença. Os mesmos valores máximos e mínimos da população foram obtidos nas amostras. Quanto à variabilidade, duas amostras apresentaram desvio padrão inferior ao da população e as demais superior, sendo que a amostra sistemática, com n=25, apresentou a maior dispersão. Por fim, todas amostras são homogêneas, pois apresentam baixa dispersão, conforme (MARTINS, 2001).

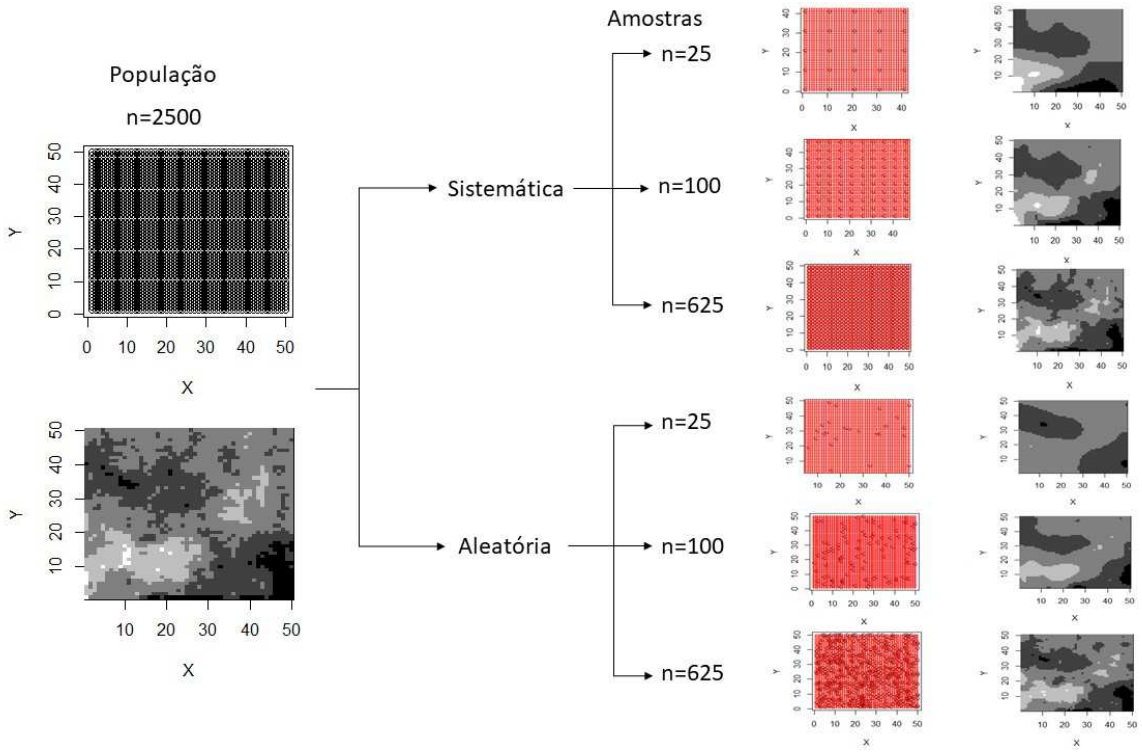
ISSN 2358-4947

A Figura 1 apresenta a grade gerada para a população e as grades amostrais de acordo com a técnica de amostragem e o tamanho da amostra. Apresenta ainda o mapa gerado para os dados simulados e os mapas gerados para cada uma das seis amostras.

As regiões brancas indicam dados com valor entre (46,58 e 48,07), as regiões com cinza claro (48,07 a 49,57), regiões com tom de cinza médio (49,57 a 51,07), nas regiões com cinza mais escuro (51,07 a 52,57) e em preto os valores mais altos (52,57 a 54,07).

Observando a Figura 1, verifica-se que a amostra aleatória com n = 25 não tem todos os tons de cinza da amostra sistemática com n = 25, o que implica que essa perde bastante características, se comparada com a sistemática.

Figura 1 – Grades e mapas da população e das amostras.



Fonte: Os autores.

A fim de mensurar o quão próximo a amostra está da população, obteve-se o índice *Kappa* (K), calculado sobre a matriz de erros. Essa matriz quantifica a concordância entre as classes de cada amostra e as classes da população. Os valores obtidos estão na Tabela 2.

ISSN 2358-4947

Tabela 2 - Coeficiente de concordância *Kappa* (K)

Amostra	n	*K*
Sistemática	25	0,43
	100	0,66
	625	0,81
Aleatória	25	0,46
	100	0,56
	625	0,78

Fonte: Os autores.

De acordo com a classificação para o índice *kappa* apresentada por Kripendorff (1980), verifica-se que apenas a amostragem sistemática com n=625 apresenta alta exatidão (K ≥ 0,80). A amostragem aleatória com n=625 apresentou média exatidão e as demais baixa exatidão. Tanto para a amostragem sistemática quanto para a aleatória, o índice *kappa* aumentou conforme aumentou o tamanho da amostra. Verifica-se ainda que, comparando a amostragem sistemática com a aleatória, para n=25 a amostragem aleatória apresentou maior índice *kappa* e para n=100 e 625 o índice foi maior para a amostragem sistemática.

4 Conclusões / Considerações Finais

Entende-se, portanto, que ao realizar amostras deve-se, juntamente, ser analisada a técnica que está sendo empregada, pois escolhendo a técnica de amostragem correta, isso pode acarretar em uma amostra mais fiel à população que se pretende estudar.

Conforme se aumenta o número de amostras, conclui-se que a técnica de amostragem sistemática apresenta valores mais próximos da população estudada, se

ISSN 2358-4947

comparada à amostragem aleatória. Ademais, a única amostra com alta exatidão foi a sistemática de n=625, cujo kappa foi equivalente a 0,81.

Outrossim, se a amostra (n) é muito pequena – ao simular várias dessa amostra (n) - a técnica aleatória pode obter valores ora muito próximos dos da população, ora muito distantes, o que torna a técnica suscetível a muitas variações nos valores de desvio padrão, kappa, entre outros indicadores de erro.

Para obter resultados mais precisos, sugerimos que sejam geradas mais populações, variando os parâmetros espaciais e dessas retiradas várias amostras.

Referências

COHEN, J.A Coefficient of Agreement for Nominal Scales. Educational and Psychological Measurement, v. XX, n.1, 1960.

DE PAULA, R. R.. *Método de Monte Carlo e Aplicações.* 2014. 83. Monografia - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2014.

Simulação de Monte Carlo - 2019 - https://www.palisade-br.com/risk/monte_carlo_simulation.asp - Acesso em: 03/05/2019.

KAVANAGH, C. *Estimação de parâmetros no ajuste de modelos teóricos a semivariogramas experimentais*. 2001, 84f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2001.

KRIPPENDORFF, K. Content Analysis: an Introduction to its Methodology. Beverly Hills: Sage Publications. p.189, 1980.

MARTINS, G. A.. Estatística Geral e Aplicada. São Paulo: Atlas S.A., 2001.

YAMAMOTO, J. K.; LANDIM, P. M. B.. Geoestatística: conceitos e aplicações. São Paulo: Oficina de Textos, 2013.

RStudio Team (2015). RStudio: Integrated Development for R. RStudio, Inc., Boston, MA URL http://www.rstudio.com/.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

FUNÇÃO DEFINIDA POR PARTES NA MODELAGEM DA EROSÃO HÍDRICA SOB EFEITO DA COBERTURA VEGETAL

Pablo Chang
UNIOESTE
pablo-sdw@hotmail.com

Deonir Secco
UNIOESTE

Aracéli Ciotti de Marins
UTFPR

Rogério Luis Rizzi
UNIOESTE

Resumo

Este trabalho teve por objetivo modelar as perdas de água, solo e nutrientes em um Latossolo argiloso sob efeito da cobertura vegetal. O experimento foi em lavoura de soja do IAPAR – Santa Tereza do Oeste (PR). Os dados foram coletados a cada precipitação ao longo do ciclo da soja, em calhas coletoras. Foi utilizado o Método de Levenberg-Marquardt para o ajuste de curvas das perdas e foram gerados submodelos por meio de função definida por partes para estimar valores da cobertura verde ao longo do ciclo da soja. As maiores perdas de água, solo e nutrientes estão relacionadas com menor cobertura verde.

Palavras-chave: Escoamento superficial. Agricultura. Regressão não-linear.

1 Introdução

Uma das principais causas da degradação dos solos agrícolas brasileiras é a erosão hídrica. Estimam-se cerca de 616,5 milhões de toneladas de solo perdidas por ano, que equivalem ao custo de US$1,3 bilhões ao ano (DECHEN et al., 2015) ocasionado pelo processo de erosão superficial, o qual é o maior responsável pela produção de sedimentos (MIGUEL et al., 2014).

A erosão hídrica é um processo de transporte de materiais como partículas de solo e nutrientes por meio do escoamento superficial pela água (PANDEY et al., 2016). Na camada superficial do solo é onde ocorre maior vulnerabilidade ao selamento superficial, definido como uma camada de partículas com adensamento provocado pelo impacto das gotas de chuva. Assim, o selamento induz ao impedimento da infiltração da água da chuva, resultando na sua retenção em superfície e posterior escoamento (CÂNDIDO et al., 2014).

Rodrigues et al. (2015), em seus estudos, simularam a chuva em parcelas com e sem cobertura vegetal. Em solos descobertos, ocorreu um aumento de 98,09% de sedimentos comparado às parcelas que apresentaram cobertura. Oliveira et al. (2015)

ISSN 2358-4947

também afirmaram em seu trabalho: que a diminuição da cobertura superficial no solo acelera a erosão hídrica.

Keesstra et al. (2016) encontraram redução das perdas com o crescimento da cobertura vegetativa no solo. Tudo isso pode ser explicado pelos maiores valores de condutividade hidráulica e macroporosidade que a intensa existência de camada vegetal proporciona ao solo (CÂNDIDO et al., 2014; EDUARDO et al., 2013).

Uma das estratégias para determinar o uso correto do solo e água nas lavouras para se prevenir a erosão é com a utilização de modelos matemáticos. Por meio dos resultados das simulações, os produtores rurais conseguem compreender melhor os impactos gerados pela mudança de manejo ou remoção de espécies de plantas (MELLO et al., 2016). Portanto, este trabalho teve por objetivo modelar as perdas de água e solo em um Latossolo argiloso, avaliando o efeito da cobertura vegetal.

2 Material e Métodos

O trabalho foi realizado no Instituto Agronômico do Paraná (IAPAR) de Santa Tereza do Oeste. As coletas foram realizadas durante a safra 2017/2018 com a cultura de soja sobre a palhada de crambe em Sistema Plantio Direto. Foram construídas 29 calhas coletoras com as áreas delimitadas em 9m² (3×3 m) por separadores de grama e recipientes coletores de 25 L.

Ao todo, foram realizadas 20 coletas sucedidas entre os dias 08/11/2017 a 10/02/2018. O conteúdo armazenado nos recipientes coletores foi homogeneizado e quantificado por meio de provetas graduadas. Além disso, foi retirado 500 mL do material escoado em garrafas pet, sendo que 50 mL foram destinados à quantificação do solo no Laboratório de Física do Solo (LAFIS). Foram analisadas em cada amostra concentrações de Fósforo (P), Potássio (K), Ca (Cálcio) e Mg (Magnésio) e a coleta da cobertura vegetal foi obtida por meio de câmera fotográfica e aplicativo *Canopeo* (CANOPEO APP, 2019).

ISSN 2358-4947



(a) (b)

Figura 1 – (a) Parcela experimental com a calha coletora; (b) Amostra de cobertura verde.

Fonte: Dos Autores, 2019.

O software STATISTICA (STATSOFT, 2011) foi utilizado para a geração dos ajustes à modelagem e seus respectivos gráficos. Para o ajuste de curvas por quadrados mínimos não linear, foi utilizado o Método de Levenberg-Marquardt.

Sobre a cobertura verde (*Cob(t)*) , foram estimados valores para cada dia *t* de coleta. Foi necessário definir as condições inicial e final para representar fisicamente o seu comportamento:

$$Cob(0) = Cob(135) = 0$$

A expressão indica que no dia da semeadura e no dia da secagem completa das folhas de soja (135 dias após a semeadura), respectivamente, a cobertura verde é equivalente a 0%.

Nos testes realizados com ajustes polinomiais, foi observado que nenhum grau do polinômio determinou um ajuste satisfatório que obedecesse ao seguinte critério:

$$0 \leq Cob(t) \leq 100$$

pois, os valores ajustados ou ultrapassavam demasiadamente os 100%, ou ficavam menores que 0%, o que extrapola a aproximação física desejada para a modelagem.

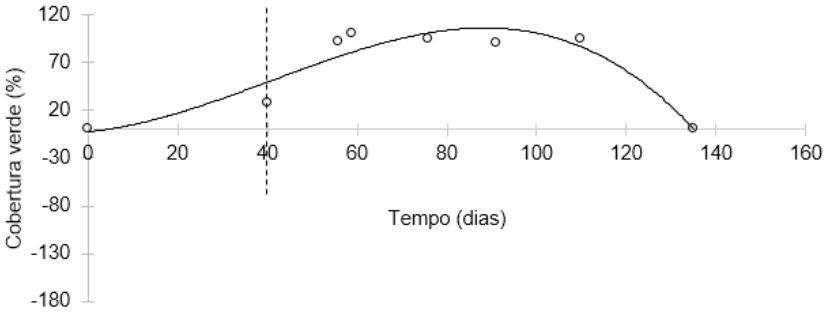
Portanto, o método escolhido, que foi verificado ser mais próximo aos dados, foi a utilização de uma função definida por partes como:

$$Cob_T(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n_1} a_i t^i, & t < 40 \\ \sum_{i=0}^{n_2} b_i t^i, & t \geq 40 \end{cases}$$

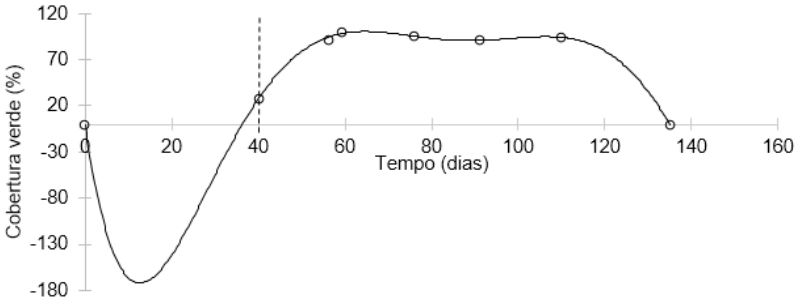
ISSN 2358-4947

sendo τ o número da parcela, n_1 e n_2 o grau do polinômio referente a antes e depois dos 40 dias da semeadura, respectivamente. O dia 40 foi escolhido, a critério, por ser o primeiro dia de coleta após o surgimento da cobertura verde.

(a)



(b)



(c)

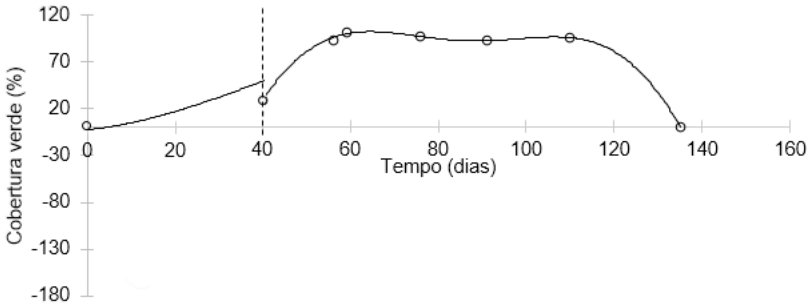


Figura 2 – Exemplo de submodelo para cobertura verde. (a) função polinomial de grau 3 para os primeiros 40 dias; (b) função polinomial de grau 6 para depois dos 40 dias e (c) função definida por partes com a junção das duas funções.

Fonte: Dos Autores, 2019.

3 Resultados e Discussão

A Tabela 1 apresenta a estatística descritiva das perdas de água, solo e nutrientes. Pode-se perceber que o coeficiente de variação para todas as perdas foi bastante elevado. Visto que a estatística descritiva apresentada na tabela é referente aos dados de todas as

ISSN 2358-4947

coletas de chuva, que passaram por intensidades desde baixas até altas. A maior variação observada foi de 279,5%, com perda de potássio.

Tabela 1 – Estatística descritiva das perdas de água, solo e nutrientes

	Água (L ha^{-1})	Solo (kg ha^{-1})	Magnésio (kg ha^{-1})	Cálcio (kg ha^{-1})	Potássio (kg ha^{-1})	Fósforo (kg ha^{-1})
Mín.	107,50	0,01548	4,09E-06	0,00061	0,00629	0,0002613
Q1	2151,00	0,5419	1,96E-03	0,00713	0,0629	0,001919
Q2	4086,00	1,603	3,81E-03	0,01542	0,1401	0,004095
Méd.	7247,00	7,882	9,47E-03	0,04369	0,5459	0,1026
Q3	10220,00	6,115	9,32E-03	0,04565	0,3321	0,008597
Máx.	26880,00	205,3	7,08E-02	0,57980	11,19	0,2356
S	7292,26	20,32886	1,69E-04	0,06996	1,526011	0,022775
S²	53176984	413,2627	1,37E+02	0,00489	2,32871	0,00052
CV (%)	100,63	257,9274	137,336	160,15250	279,5493	221,9226
Ass.	1,30	0,926614	100,300	1,21221	0,79777	12,97559
K	0,19	0,166629	0,122	0,16119	0,36064	0,19506

Mín: mínimo; Q1: 1º quartil; Q2: 2º quartil ou mediana; Méd.: média; Q3: 3º quartil; Máx.: máximo; S: desvio padrão; S²: variância; CV: coeficiente de variação; Ass.: assimetria; K: curtose.

Fonte: Dos Autores, 2019.

Os modelos gerados para a perda de água são apresentados na Tabela 2. Os baixos coeficientes de determinação são associados a alta variabilidade dos dados coletados, como mostrado na Tabela 1, a coleta a campo, caracteriza um ambiente que não pode ser controlado, no entanto, representa o comportamento real do fenômeno.

Tabela 2 – Modelos de perda de água, solo e nutrientes em função da intensidade máxima de chuva por evento de precipitação (mm h^{-1}) e cobertura vegetal (%)

Equações	R²
$P.água\,(Int, Cob) = 858{,}818\ Int - 12{,}044\ Msp + 1517{,}64$	0,4353
$P.solo\,(Int, Cob) = 10{,}5836\ exp(0{,}06481\ Int) - 0{,}03853\ Cob - 7{,}606$	0,2991
$P.magnésio\,(Int, Cob) = 36{,}5216\ exp\,(3{,}6 \cdot 10^{-5}\ Int) + -2{,}2 \cdot 10^{-5}\ Cob - 36{,}52$	0,5422
$P.cálcio\,(Int, Cob) = 79{,}3833\ exp\,(8{,}25 \cdot 10^{-5}\ Int) - 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ Cob - 79{,}369$	0,4776
$P.potássio\,(Int, Cob) = -2{,}1242\ exp(-0{,}06199\ Int) - 0{,}00131\ Cob + 2{,}16698$	0,1721
$P.fósforo\,(Int, Cob) = 31{,}0742\ exp(3{,}93 \cdot 10^{-5}\ Int) - 2{,}7 \cdot 10^{-4}\ Cob - 31{,}071$	0,1702

Int: intensidade máxima de chuva por evento de precipitação; Ds: densidade do solo; Mac: macroporosidade; Msp: massa seca da palha; Cob: cobertura verde; P.: perdas.

Fonte: Dos Autores, 2019.

ISSN 2358-4947

Os gráficos dos modelos são apresentados na Figura 3, em que evidenciaram a redução das perdas com o aumento da cobertura vegetal. Concordando com Carvalho et al. (2015), que afirmam que a maior cobertura do solo por desenvolvimento natural da colheita reduz as perdas de água e solo.

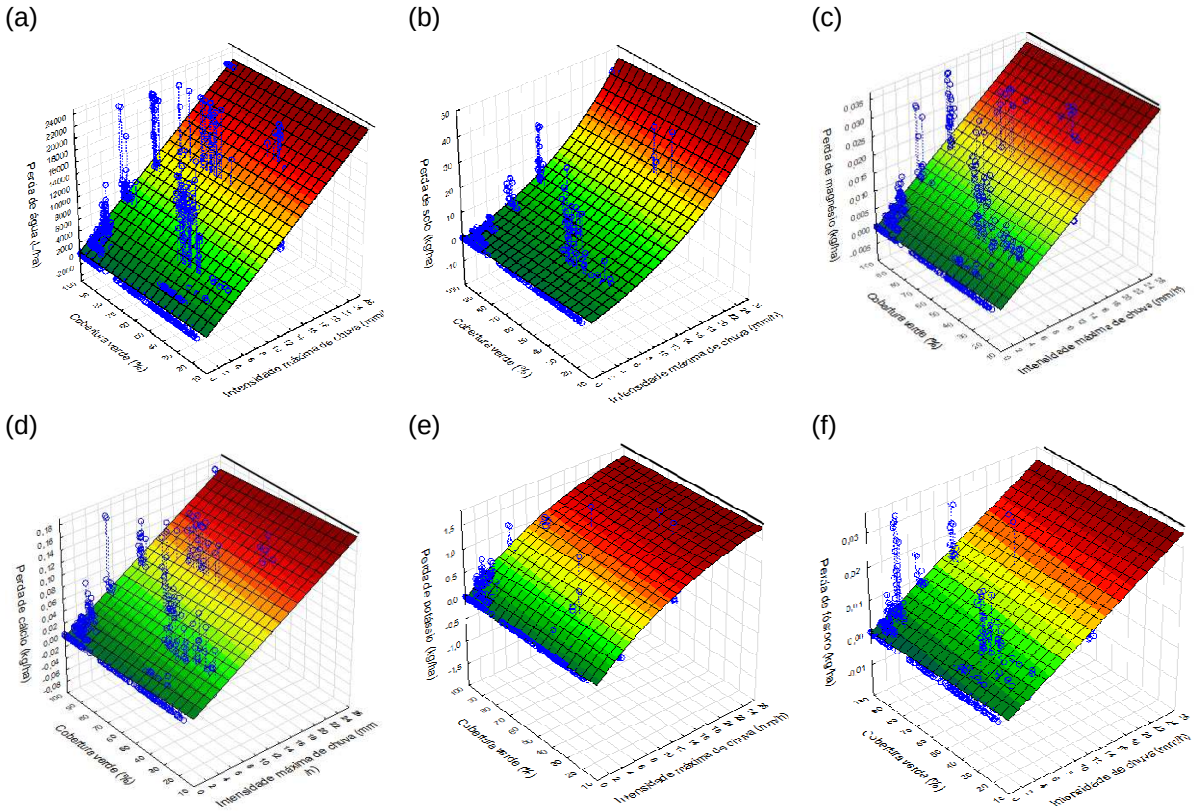


Figura 3 – Gráficos das perdas em função da cobertura verde e intensidade máxima de chuva. (a) Perda de água; (b) perda de solo; (c) perda de magnésio; (d) perda de cálcio; (e) perda de potássio e (f) perda de fósforo.

Fonte: Dos Autores, 2019.

Ramos et al. (2014), ao analisarem o efeito das condições de superfície na erosão hídrica, também aplicaram modelos exponenciais para realizar os seus ajustes, concluindo que as perdas de solo reduziram exponencialmente com o incremento da cobertura do solo. Almeida et al. (2016), em seus trabalhos, também observaram que o tratamento mais vulnerável ao processo erosivo foi circunstância em que a cobertura vegetal foi igual a zero.

4 Conclusões / Considerações Finais

ISSN 2358-4947

- A função definida por partes foi adequada para estimar valores de cobertura verde ao longo do ciclo da soja.
- As maiores perdas de água, solo e nutrientes estão relacionadas com menor cobertura vegetal, informação que permite ao produtor atentar quanto ao uso e manejo do solo.
- É esperado que as informações obtidas possam contribuir no aprofundamento do tema e reorientar no uso e manejo do solo para reduzir a erosão e suas consequências.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, W. S. de et al. Erosão hídrica em diferentes sistemas de cultivo e níveis de cobertura do solo. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 51, n. 9, p. 1110-1119, 2016.

CÂNDIDO, B.M. et al. Erosão hídrica pós-plantio em florestas de eucalipto na bacia do rio Paraná, no leste do Mato Grosso do Sul. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 38, n. 5, 2014.

CANOPEO APP. **Canopeo Web**. Oklahoma State University Department of Plant and Soil Sciences. Disponível em: <http://canopeoapp.com>. Acesso em: 24 de Jul. 2018.

CARVALHO, D. F. D. et al. Water erosion and soil water infiltration in different stages of corn development and tillage systems. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 19, n. 11, p. 1072-1078, 2015.

DECHEN, S. C. F. et al. Perdas e custos associados à erosão hídrica em função de taxas de cobertura do solo. **Bragantia**, São Paulo, v. 74, n. 2, 2015.

EDUARDO, E. N. et al. Erodibilidade, fatores cobertura e manejo e práticas conservacionistas em Argissolo Vermelho-Amarelo, sob condições de chuva natural. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 37, n. 3, 2013.

KEESSTRA, S. et al. Effects of soil management techniques on soil water erosion in apricot orchards. **Science of the Total Environment**, Amsterdam, v. 551, p. 357-366, 2016.

MELLO, C. R. de et al. Agricultural watershed modeling: a review for hydrology and soil erosion processes. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 40, n. 1, p. 7-25, 2016.

MIGUEL, P. et al. Identificação de fontes de produção de sedimentos em uma bacia hidrográfica de encosta. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 38, n. 2, 2014.

OLIVEIRA, D. M. S.; LIMA, R. P. de; VERBURG, E. E. J. Qualidade física do solo sob diferentes sistemas de manejo e aplicação de dejeto líquido suíno. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental-Agriambi**, Campina Grande, v. 19, n. 3, 2015.

PANDEY, A. et al. Physically based soil erosion and sediment yield models revisited. **Catena**, Amsterdam, v. 147, p. 595-620, 2016.

ISSN 2358-4947

RAMOS, Júlio César et al. Influência das condições de superfície e do cultivo do solo na erosão hídrica em um Cambissolo Húmico. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Viçosa, v. 38, n. 5, 2014.

RODRIGUES, V. A. et al. Avaliação do escoamento e interceptação da água das chuvas. **Irriga**, Botucatu, v. 1, n. 1, p. 01, 2015.

STATSOFT, INC. **Statistica (data analysis software system)**, version 10. 2011.

ISSN 2358-4947

UTILIZAÇÃO DO CUBO MÁGICO NO ENSINO DE FRAÇÕES: PRIMEIROS RESULTADOS

Bruna Ariceli Schirmann Kolling
UTFPR - Toledo
brunaariceli@gmail.com

Renato Francisco Merli
UTFPR – Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Resumo

O presente artigo, que parte de um trabalho de conclusão de curso, tem como objetivo realizar um levantamento de dados sobre a utilização do Cubo Mágico como ferramenta para o ensino de Frações com o intuito de investigar o que tem sido pesquisado e discutido sobre o tema na área de ensino de matemática. Para tal, realizamos uma pesquisa na Plataforma *Qualis,* banco de Teses e Dissertações da CAPES e também no *Google*. Verificamos que existe uma carência de publicações que utilizem o Cubo Mágico como ferramenta de ensino, principalmente quando se trata do conteúdo de frações. Com base nos dados obtidos, concluímos ser incipiente o número de pesquisas sobre o uso do Cubo Mágico para o ensino de frações.

Palavras-chave: Cubo Mágico. Frações. Ensino.

1 Introdução

Atualmente os professores vivenciam a desmotivação e desinteresse dos alunos em sala de aula (MORALES; ALVES, 2016), em decorrência disso, os professores têm procurado metodologias de ensino diferenciadas. De acordo com Santos (2003, p. 12) os alunos “não querem mais ficar só escutando o professor, querem falar, querem ser ouvidos, desejam ser mais participativos”. Nesse contexto, Oliveira (2011, p. 12-13) afirma que “o lúdico em sala de aula possibilita ao aluno superar suas dificuldades, experimentar, descobrir, inventar, aprender e conferir suas habilidades, além de estimular sua curiosidade, autoconfiança e autonomia”.

Devido à importância e as possibilidades do lúdico enquanto proposta de ensino, buscamos nesse texto, que é parte de um trabalho de conclusão de curso de uma licenciatura em matemática, verificar a presença de trabalhos que discorrem sobre o uso do Cubo Mágico como proposta de ensino. Para tanto, buscamos na Plataforma *Qualis,* no banco de Teses e Dissertações da CAPES e também no *Google* por trabalhos dessa

ISSN 2358-4947

natureza.

Na seção seguinte apresentamos nossos procedimentos metodológicos, na sequência fazemos uma análise sobre os dados encontrados e, a partir deles, realizamos uma discussão sobre a utilização do Cubo Mágico como ferramenta de ensino.

2 Procedimentos Metodológicos

Trata-se de uma pesquisa qualitativa exploratória bibliográfica, onde buscamos encontrar dados e relatos sobre a utilização do Cubo Mágico como ferramenta de ensino. A pesquisa bibliográfica,

> [...] é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (FONSECA, 2002, p. 32).

O primeiro passo percorrido foi a realização de uma pesquisa, utilizando os termos “Cubo Mágico frações” na plataforma *Qualis* dos periódicos do quadriênio 2013-2016 na Área de Ensino com periódicos nacionais de classificação A1. Escolhemos as revistas de classificação A1 por entendermos que é nesse Qualis que se encontram o estado do conhecimento da área. No segundo momento, buscamos verificar a existência de trabalhos, utilizando os mesmos termos, no banco de Teses e Dissertações da CAPES e no buscador do Google.

Realizada a coleta de dados, fizemos uma análise dos trabalhos encontrados, considerando o título, o conteúdo matemático, a modalidade do trabalho e os autores.

3 Resultados e Discussão

Na primeira pesquisa, do *Qualis* A1, não encontramos publicações que abordassem a utilização do Cubo Mágico como ferramenta de Ensino. No segundo momento realizamos a pesquisa no Banco de Teses e Dissertações da CAPES e no buscador *Google.* Como resultado dessa última pesquisa, encontramos alguns trabalhos conforme Quadro 1.

ISSN 2358-4947

Quadro 1 – Trabalhos sobre o Cubo Mágico no Ensino

Título	Conteúdo	Modalidade	Autores
Ensino de análise combinatória usando o Cubo Mágico	Análise Combinatória	Artigo em evento	Rafael Werneck Cinoto David Pires Dias
O Cubo Mágico: Aplicações do algoritmo euclidiano da divisão	Divisão	Trabalho	Alecio Soares Silva Thalita Alves da Silva Weslley Balbino Barros Valdson Davi Moura Silva
O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processamento de ensino e aprendizagem da matemática	Raciocínio lógico	Artigo	Alexandre de Almeida Vasques Ingrid Muniz de Lima Viviane Simões dos Santos
Aprendendo com o Cubo Mágico	Algoritmo	Artigo em evento	João Paulo Gonzaga Vieira Ana Paula de Souza Angela Leite Moreno
Construção tridimensional do Cubo Rubik a partir das propriedades da soma de vetores na Geogebra	Soma de Vetores	Oficina	Charles Gomes Bezerra De Brito Daniela Maurício Silva Da Costa
Cubo Mágico: Propriedade e resolução envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos	Álgebra e Teoria de Grupos	Dissertação	Luis Gustavo Hauff Martins Grimm
Cubo Mágico: Uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática	Geometria espacial, em probabilidade, frações e álgebra	Monografia	Gislaine Aparecida Roncolli
Os Benefícios do Cubo Mágico nas aulas de Matemática do Ensino Médio.	Raciocínio lógico e dos conceitos geométricos, análise combinatória, probabilidade e matrizes.	Monografia	Eudes Nascimento Silva Junior
O uso do Cubo Mágico para o Ensino de Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio	Geometria Plana e Espacial	Dissertação	Huerllen Vicente Lemos Silva
O uso do Cubo Mágico como estratégia de Ensino de Permutação e funções	Permutação e funções	Monografia	Marlene Gorete de Araújo
Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático	Lógica	Relato de Experiência	Juliana Moreno Oliveira Gizele Geralda Parreira Luciano Duarte da Silva
Que matemática está por trás do Cubo Mágico	Análise Combinatória	Projeto de Pesquisa	Milca Pires Machado
Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico	Álgebra	Oficina	Waldeck Schutzer

ISSN 2358-4947

Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta – PB	Álgebra e Geometria	Monografia	José Vinicius do Nascimento Silva
Uma visão Matemática do Cubo Magico	Teoria de Grupos	Dissertação	Claudia Salomão Moya
Teoria de Grupo e o Cubo Mágico	Teoria de Grupos	Dissertação	Jocemar Esteves da Silva Junior
O cubo mágico de Rubik: teoria, prática e arte.	Teoria de Grupos	Dissertação	Fernando Vieira Barbosa
Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik	Teoria de Grupos	Dissertação	Jeferson Saraiva Bezerra
Álgebra e o Cubo de Rubik	Álgebra	Dissertação	Robson Guimarães

Fonte: Autores, 2019

O Quadro 1 apresenta 19 trabalhos que tratam especificamente do Cubo Mágico. Desses trabalhos, apenas um trabalha com o ensino de frações. O conteúdo que mais aparece é o de Teoria dos Grupos, seguido de Análise Combinatória e Álgebra (Figura 1).

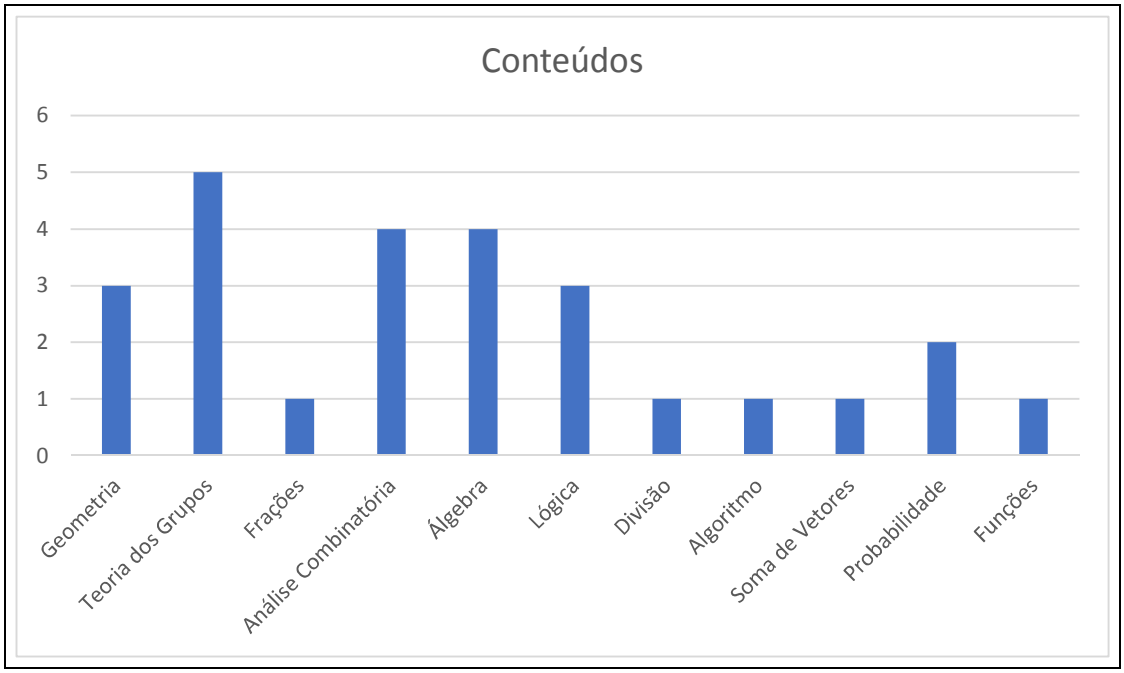


Figura 1 – Conteúdos abordados nos trabalhos encontrados
Fonte: Autores, 2019

Assim, verificamos que o Cubo Mágico é utilizado principalmente para o ensino de Teoria dos Grupos, Análise Combinatória e Álgebra. O conteúdo para o qual nossa pesquisa é voltada, aparece apenas uma vez em uma monografia que traz o Cubo Mágico como uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática, porém, o mesmo estende-se a mais

ISSN 2358-4947

outros três conteúdos, trazendo cada um deles de forma bem sucinta. Ou seja, há praticamente uma escassez no que tange a utilização do Cubo Mágico como ferramenta para o ensino de frações.

Em um dos trabalhos presentes no Quadro 1, o autor realizou a experiência em sala de aula e concluiu que a utilização do Cubo Mágico,

> [...] como ferramenta contribui e influencia na formação do estudante, possibilitando um enriquecimento permanente, aumentando sua autoestima, paciência e concentração a curto e a longo prazo. Pode desenvolver um raciocínio lógico aliado a algum conteúdo matemático, como potenciação, radiciação, geometria espacial, etc., o que consequentemente trará mais benefícios para o seu rendimento não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas (SILVA, 2015, p. 68).

A partir do Quadro 1, da Figura 1 e das afirmações de Silva (2015), entendemos que o estudo do Cubo Mágico enquanto ferramenta para o ensino de frações é pequeno, o que justifica a pesquisa dessa temática.

Como uma primeira intenção, que ainda precisa ser lapidada, pretendemos utilizar o Cubo Mágico como fonte de interesse e motivação em aprender frações. Podemos, por exemplo, pedir que os alunos o manuseiem encontrando e idenficando a presença de representações de frações. É possível pedir que deixem uma face do Cubo Mágico com 3/9 de “quadradinhos” verdes, ou ainda, que deixem uma das faces com 1/3 de “quadradinhos” verdes, abordando, nesse caso, a equivalência de frações.

4 Considerações Finais

O conteúdo de frações é sempre um assunto muito delicado no processo de ensino e aprendizagem, considerando a dificuldade de compreensão das crianças para entenderem o que é um número não inteiro. Consequentemente torna-se, para o professor, um desafio encontrar métodos de ensino que auxiliem na aprendizagem desse conteúdo. Uma forma prazerosa de ensino é utilizando atividades lúdicas, com por exemplo, o Cubo Mágico, jogo mundialmente conhecido.

A partir de uma pesquisa bibliográfica na Plataforma *Qualis,* no banco de Teses e Dissertações da CAPES e também no *Google*, concluímos que há a falta de publicações sobre o uso do Cubo Mágico como ferramenta para o ensino de frações.

Esse resultado nos permite afirmar que uma pesquisa nesse âmbito é justificável e possível, pois o Cubo Mágico, enquanto material lúdico e que encanta a todos, pode ser um

ISSN 2358-4947

instrumento para o ensino de frações, além de possibilitar agregar, de forma indireta, o ensino de outros conteúdos, como o pensamento lógico, a álgebra e a geometria.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Marlene Gorete de. **Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático.** 2016. 66 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal – RN, 2016. Disponível em: <https://memoria.ifrn.edu.br/bitstream/handle/1044/837/TCC_MARLENE-GORETE-DE-ARAUJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 15 mai. 2019.

BARBOSA, Fernando Vieira. **O Cubo Mágico de Rubik:** teoria, prática e arte. 2018. 64 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade de Brasília, Brasília – DF, 2018. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5663228>. Acesso em: 15 mai. 2019.

BEZERRA, Jeferson Saraiva. **Tópicos em Teoria de Grupos:** O Desafio do Cubo de Rubik. 2016. 85 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande – MS, 2016. Disponível em: <http://repositorio.cbc.ufms.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2799/1/Jeferson%20Saraiva%20Bezerra.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2019.

BRITO, Charles Gomes Bezerra; COSTA, Daniela Maurício Silva. Construção tridimensional do Cubo Rubik a partir das propriedades da soma de vetores na Geogebra. 2016. In: Forint – Fórum de Integração da IFPR, V, **Anais...**, Boa Vista: Roraima. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ifrr.edu.br/index.php/anais_forint/article/view/638/464> Acesso em: 15 mai. 2019.

CINOTO, Rafael Werneck; DIAS, David Pires. Ensino de análise combinatória usando o cubo mágico. 2014. In: Jornada das Licenciaturas da USP/IX Semana da Licenciatura em Ciências Exatas – SeLic. V, **Anais...** São Carlos: São Paulo. 2014. Disponível em: <http://vjornadalicenciaturas.icmc.usp.br/CD/EIXO%202/210.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2019.

FONSECA, João. José. Saraiva. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GRIMM, Luis Gustavo Hauff Martins. **Cubo Mágico:** Propriedade e resolução envolvendo Álgebra e Teoria dos Grupos. 2016. 83 f. Dissertação (Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro – SP, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/144192/grimm_lghm_me_rcla_int.pdf?sequence=4&isAllowed=y>. Acesso em: 15 mai. 2019.

GUIMARÃES, Robson. **Álgebra e o Cubo de Rubik.** 2016. 66 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Triângulo

ISSN 2358-4947

Mineiro, Uberaba – MG, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95508>. Acesso em: 15 mai. 2019.

JUNIOR, Eudes Nascimento Filho. **Os benefícios do Cubo Mágico nas aulas de matemática no ensino médio.** 2016. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática do Ensino Médio) - Universidade Estadual do Piauí, 2016. Disponível em: <https://monografias.brasilescola.uol.com.br/matematica/os-beneficios-cubo-magico-nas-aulas-matematica-no-ensino-medio.htm>. Acesso em: 15 mai. 2019.

JUNIOR, Jocemar Esteves da Silva**. Teoria de Grupo e o Cubo Mágico.** 2016. 99 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro – RJ, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5031658>. Acesso em: 15 mai. 2019.

MACHADO, Milca Pires. Que matemática está por trás do Cubo Mágico. 2017. In: Mostra Interativa da Produção Estudantil em Educação Científica e Tecnológica, III, **Anais...** Ijuí: RS, 2017. Disponível em: <https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/moeducitec/article/view/8524>. Acesso em: 15 mai. 2019.

MORALES, Maria de Lourdes; ALVES, Flávio Lopes. O desinteresse dos alunos pela aprendizagem: Uma intervenção pedagógica. In: PARANÁ. Secretaria de Estado e Educação. Superintendência de Educação. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**, 2016. Curitiba: SEED/PR, 2016. v. 1 (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_ped_unioeste_marciadelourdesmorales.pdf >. Acesso em: 24 mai. 2019.

MOYA, Claudia Salomão**. Uma visão matemática do cubo mágico.** 2015. 65 f. Dissertação (Centro de Matemática, Computação e Cognição) - Universidade Federal do ABC, Santo André – SP, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=74949>. Disponível em: 15 mai. 2019.

OLIVEIRA, Juliana Moreno; PARREIRA, Gizele Geralda; SILVA, Luciano Duarte da**.** Uso do Cubo Mágico como recurso pedagógico para o desenvolvimento de raciocínio lógico-matemático. 2017. In**:** Encontro Goiano de Educação Matemática (EnGEM), VI, **Anais..** Urutaí: GO, 2017. Disponível em: <http://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/article/download/59/57>. Acesso em: 15 mai. 2019.

OLIVEIRA, Juliana Ribeiro de. **O prazer de aprender brincando.** 2011. 39 f. Monografia (Especialização em Psicopedagogia) – Programa de Pós Graduação Lato “Sensu” em Psicopedagogia, Universidade Candido Mendes – Niterói, 2011. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/docpdf/monografias_publicadas/N203980.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2019.

RONCOLLI, Gislaine Aparecida. **Cubo Mágico:** Uma ferramenta pedagógica nas aulas de matemática. 2016. 46 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João Del-Rei. São João Del Rei: MG, 2016. Disponível em:

ISSN 2358-4947

<http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/74/GISLAINE%20APARECIDA%20RONCOLLI_12217_assignsubmission_file_UFSJ%20-%20TCC.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SANTOS, Josivaldo Constantino dos. **Processos Participativos na Construção do Conhecimento em Sala de Aula**. Cáceres, MT: UNEMAT Editora, 2003.

SCHULTZER, Waldeck. Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico. 2005. In: Semana da Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, V, **Anais...**, Uberlândia: MG, 2005. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik/rubik1.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SILVA, Alecio Soares; SILVA, Thalita Alves da; BARROS, Weslley Balbino; SILVA, Valdson Davi Moura. 2016. O Cubo Mágico: aplicações do algoritmo euclidiano da divisão. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática, IX, **Anais...**, Campina Grande: PB, 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA4_ID787_30102016201059.pdf>. Acesso em: 15 mai. 2019.

SILVA, José Vinicios do Nascimento. **Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta – PB**. 2015. 72f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: < http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2390/2/PDF%20-%20Jos%C3%A9%20Vin%C3%ADcius%20do%20Nascimento%20Silva.pdf >. Acesso em: 20 mar. 2019.

SILVA, Huerllen Vicente Lemos. **O Uso do Cubo Mágico Para o Ensino da Geometria Plana e Espacial no Ensino Médio**. 2017. 51 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/638/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20Hu%C3%A9rllen%20Final.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 mai. 2019.

VASQUES, Alexandre de Almeida; LIMA Ingrid Muniz de; SANTOS, Viviane Simões dos. O Cubo Mágico como estratégia mediadora do processo de ensino e aprendizagem da matemática. **Madre Ciência – Educação**. v. 1, n. 1, p. 1-11. SANTANA: SP, 2016. Disponível em: <https://grupomadretereza.com.br/revista/index.php/educacao/article/view/8>. Acesso em: 15 mai. 2019.

VIEIRA, João Paulo Gonzafa; SOUZA, Ana Paula de; MORENO, Angela Leite. Aprendendo com o Cubo Mágico. In: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics.** v. 5, n. 1. Gramado: RS, 2017. Disponível em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/download/1553/1564>. Acesso em: 15 mai. 2019.

ISSN 2358-4947

Algumas discussões sobre o Teorema de Lagrange e os Teoremas de Sylow

Adina Veronica Remor
UTFPR - TD
adinaremor@hotmail.com

Wilian Francisco de Araujo
UTFPR - TD
waraujo@utfpr.edu.br/

Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar o estudo que foi desenvolvido no PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado, na área de Álgebra - Teoria de Grupos, sob orientação do professor Wilian Francisco de Araujo. Após estudar vários tópicos referentes a Teoria de Grupos, que serão apresentados neste trabalho, alguns questionamentos surgiram. Sabemos, pelo Teorema de Lagrange, que a ordem de um subgrupo sempre divide a ordem do grupo. Mas dado um número que divide a ordem do grupo, nem sempre existe um subgrupo com esta ordem. Então, será que é possível determinar em quais casos é possível garantir a existência de subgrupos com uma dada ordem? Assim apresentamos neste trabalho os Teoremas de Sylow, cujo resultados estão próximos de responder o questionamento acima, e além disso fornecem outras características importantes a respeito do grupo e seus subgrupos.

Palavras-chave: Teoria de Grupos; Teorema de Lagrange; Teoremas de Sylow.

1 Introdução

A Teoria de Grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na linguagem moderna. Podemos encontrar tal teoria presente em inúmeras áreas, como teoria quântica de campos, as estruturas atômica e, em particular, cristalografia, além da álgebra abstrata, onde esse conceito é fundamental para o estudo das demais estruturas algébricas, como anéis, corpos e espaços vetoriais, que são construídos a partir do conceito de grupo.

A Teoria de Grupos teve origem por meio das ideias do matemático francês Évariste Galois (1811-1832), a partir da tentativa de resolver equações algébricas de grau maior ou igual a 5 por meio de radicais. Mas ao longo do tempo outros matemáticos renomados contribuíram nessa área, como o suíço Leonard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e o britânico Arthur Cayley (1821-1895), que foi o primeiro a introduzir o conceito de grupo como conhecemos hoje. Atualmente a Teoria de Grupos está dividida em diversas subáreas, no qual vários problemas têm sido atacados e solucionados, destacando o nome de muitos outros matemáticos e físicos.

Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos primordiais da Teoria de Grupos, bem como buscaremos investigar a validade da recíproca do Teorema de Lagrange, no qual dado um número que divide a ordem do grupo, é possível garantir a existência de subgrupos com esta ordem. Para tal, demonstraremos os Teoremas de Sylow, que além de responderem parcialmente a questão acima, fornecem outras informações importantes a respeito dos grupos e subgrupos.

2 Metodologia

O presente trabalho possui cunho bibliográfico, dessa forma foi realizado um estudo utilizando-se principalmente os livros [1] e [2]. Foram estudados vários tópicos presentes nesses livros. Os

ISSN 2358-4947

mais pertinentes para nosso trabalho serão aqui apresentados, mas para quem possui interesse em se aprofundar nesta área ou conhecer um pouco mais sobre a Teoria de Grupos recomenda-se fortemente uma leitura inicial de [1] e após [2].

2.1 Conceito de Grupo

Nesta subseção apresenta-se algumas definições e teoremas importantes para o desenvolvimento da Teoria de Grupos. Algumas demonstrações serão ocultadas devido ao objetivo do nosso trabalho. Todas elas podem ser encontradas em [1] ou [2].

Definição 2.1. *Um sistema matemático constituído de um conjunto G, tal que $G \neq \varnothing$, e uma operação $(x, y) \mapsto x \cdot y$ sobre G é chamado* ***grupo*** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

- *Associatividade (Propriedade 1): $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$.*
- *Existência do elemento neutro (Propriedade 2): existe um elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$, qualquer que seja $a \in G$.*
- *Existência do simétrico (Propriedade 3): para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que $a \cdot a' = a' \cdot a = e$.*

Podemos perceber que é possível obter subconjuntos de G, que, com a operação $\cdot$ definida em G satisfazem as mesmas propriedades elencadas acima. Estes subconjuntos, com a operação $\cdot$ são chamados *subgrupos*. Assim, podemos escrever a seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Um subconjunto $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ é dito subgrupo se, com a operação de $(G, \cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Fechado para a operação (Propriedade 0): $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall\, h_1, h_2 \in H$.*
- *Associatividade (Propriedade 1): $(h_1 \cdot h_2) \cdot h_3 = h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3)$, $\forall\, h_1, h_2, h_3 \in H$.*
- *Existência do elemento neutro (Propriedade 2): $\exists\, e_H \in H$ tal que $e_H \cdot h = h \cdot e_H = h, \forall\, h \in H$.*
- *Existência do simétrico (Propriedade 3): Para cada $h \in H$, existe $h' \in H$ tal que $h \cdot h' = h' \cdot h = e_H$.*

Além disso, alguns grupos G possuem uma quantidade finita de elementos. Neste caso, são chamados de *grupos finitos*. Assim, o número de elementos de G é chamado *ordem* do grupo, representado por $o(G)$ ou $\mid G \mid$, e a tábua da operação $\cdot$ (que mostra como todos os elementos se relacionam) se denomina *tábua do grupo*. Para cada elemento a de G também é possível associar uma ordem, que é o inteiro $h > 0$ tal que $a^h = e$ e $a^r \neq e$ sempre que $0 < r < h$. Por fim, se $\forall\, x, y \in G$ temos $x \cdot y = y \cdot x$, então o grupo é chamado *grupo abeliano*.

2.2 Exemplos

1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido com a operação $+$ é subgrupo do grupo dos números reais $\mathbb{R}$ com esta mesma operação. Para tal, basta verificar que todas as propriedades exigidas pelas definições acima são cumpridas.

ISSN 2358-4947

2. Podemos determinar outro exemplo de grupo, que não é tão trivial como o acima. Assim, seja C um conjunto qualquer e considere $Bij(C) = \{f : C \to C \mid f \text{ é uma bijeção}\}$. Provaremos que $(Bij(C), \circ)$ é grupo. Assim, sejam $f, g, h \in Bij(C)$ e $x \in C$. Temos: $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g \circ h)(x) = f \circ (g \circ h)(x)$. Logo, vale a propriedade associativa. Como sabemos, a função identidade I é bijetora, assim $I \in Bij(C)$, e como $\forall f \in Bij(C)$ tem-se $f \circ I = I \circ f = f$, I é o elemento neutro de $(Bij(C), \circ)$. E como toda função bijetora possui inversa, que também é bijetora, basta tomar $f^{-1} \in Bij(C)$ tal que, $\forall f \in Bij(C)$ tem-se $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$, logo f^{-1} é o elemento simétrico de f com relação a operação $\circ$. Assim $(Bij(C), \circ)$ é grupo.

   Agora, tome $C = \{1, 2, 3, ...n\}$ em que $n \geqslant 1$. Neste caso, o conjunto das permutações de C será representado por S_n. Temos que $(S_n, \circ)$ é um grupo, cuja ordem é $n!$.

   Assim, vamos considerar $n = 3$, ou seja, tomaremos o grupo das permutações S_3. Os elementos deste grupos são as permutações: I, que é a identidade; (12), que leva o elemento 1 em 2 e o elemento 2 em 1 e mantém o elemento 3 fixo; (13) que leva o elemento 1 em 3, o elemento 3 em 1 e mantém o elemento 2 fixo; (23) que leva 2 em 3 e vice-versa, e mantém o elemento 1 fixo; (123) que leva 1 em 2, 2 em 3 e 3 em 1 e por fim a permutação (132) que leva o elemento 1 em 3, 3 em 2 e 2 em 1. Estas são todas as possíveis permutações do elementos $\{1, 2, 3\}$. Assim, obtemos que $(S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}, \circ)$ é grupo. Através de composições entre essas permutações, que são funções bijetoras, podemos calcular a ordem de cada elemento, o simétrico, o resultado de cada possível operação, etc.

A partir desta notação definida para grupos de permutações, cada permutação $(a_1a_2a_3...a_r)$, onde $a_1, a_2, ..., a_r$ são inteiros distintos e $\sigma \in S_n$ é uma permutação tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = \sigma^2(a_1) = a_3, ..., \sigma(a_{r-1}) = \sigma^{r-1}(a_1) = a_r$, $\sigma(a_r) = \sigma^r(a_1) = a_1$ e $\sigma(x) = x$ para todo $x \in I_n - \{a_1, a_2, ..., a_r\}$ se diz que σ é um *r-ciclo*. Se $r = 2$ então σ é chamado de *transposição*. Assim, as permutações $(12), (13)$ e $(23) \in S_3$ são transposições. Dessa forma, podemos elencar uma proposição muito importante presente em [1]:

Proposição 2.1. *Toda permutação $\sigma \in S_n$, exceção feita à permutação idêntica (I), pode ser escrita univocamente (salvo a ordem dos fatores) como um produto de transposições distintas.*

A demonstração deste resultado não será feita neste trabalho, mas pode ser encontrada em [1], página 202.

Este resultado acima é muito importante para conhecermos um novo grupo, o A_n.

Definição 2.3. *Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada par ou ímpar conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. O conjunto das permutações pares do S_n é indicado por A_n.*

Proposição 2.2. *Para todo $n > 1$ o conjunto A_n é subgrupo do S_n, de ordem $\frac{n!}{2}$.*

Demonstração: Ver [1], página 206.

2.2.1 Classes laterais e o Teorema de Lagrange

Nesta seção enunciaremos um conhecido teorema da Teoria de Grupos Finitos, muito importante para o nosso trabalho e ponto inicial das discussões que serão realizadas posteriormente.

Mas antes de enunciá-lo, introduziremos o conceito de classes laterais, que é necessário para o Teorema de Lagrange.

ISSN 2358-4947

Proposição 2.3. *Seja G um grupo e H um subgrupo de G. A relação $\sim$ definida sobre G por "$y \sim x$ se e somente se $\exists\ h \in H$ tal que $y = x \cdot h$" é uma relação de equivalência.*

Mostraremos que $\sim$ define uma relação de equivalência, ou seja, $\sim$ satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

- Reflexiva: Observe que por H ser subgrupo de G, $\exists\ e \in H$ tal que $x = x \cdot e$. Dessa forma $x \sim x$.
- Simétrica: Observe que se $x \sim y$ então $\exists\ h \in H$ tal que $x = y \cdot h$. Assim, $x \cdot h^{-1} = (y \cdot h) \cdot h^{-1}$ o que implica que $y = x \cdot h^{-1}$. Portanto $y \sim x$.
- Transitiva: Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $\exists\ h_1 \in H$ e $\exists\ h_2 \in H$ tal que $x = y \cdot h_1$ e $y = z \cdot h_2$. Logo $y = x \cdot h_1^{-1}$. Portanto:

$$\begin{aligned} z \cdot h_2 = x \cdot h_1^{-1} &\Rightarrow z \cdot h_2 \cdot h_1 = x \cdot h_1^{-1} \cdot h_1 \\ &\Rightarrow z \cdot h_2 \cdot h_1 = x \\ &\Rightarrow x = z \cdot (h_2 \cdot h_1) \\ &\Rightarrow x \sim z \end{aligned}$$

já que $h_2 \cdot h_1 \in H$.

Logo "$y \sim x$ se e somente se $\exists\ h \in H$ tal que $y = x \cdot h$" é uma relação de equivalência.

Por definição a classe de equivalência de x é o conjunto $\{y \in G \mid y \sim x\} = \{x \cdot h \mid h \in H\}$, que é denotado por xH e chamado de classe lateral à esquerda de H em G, que contém x, já que a relação definida é de equivalência.

Da mesma forma podemos definir as classes laterais à direita de H em G; basta tomar a relação de equivalência $y \sim x$ se e somente se $\exists\ h \in H$ tal que $y = h \cdot x$. Assim $Hx = \{h \cdot x \mid h \in H\}$.

Observe que em particular tem-se $H = e \cdot H = H \cdot e$.

Definição 2.4. *O conjunto das classes laterais à esquerda de H em G será denotado por $\frac{G}{H}$. Assim $\frac{G}{H} = \{aH \mid a \in G\}$.*

Como a relação de equivalência acima determina uma partição de G, temos $a_iH = a_jH$ ou $a_iH \cap a_jH = \varnothing$ sempre que $i \neq j$, e assim, se G é finito, vamos tomar $\frac{G}{H}$ como o conjunto de todas as classes laterais distintas. O número de elementos de $\frac{G}{H}$ é chamado de *índice* de H em G e é denotado por $(G : H)$. Além disso, $G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_nH$.

Podemos observar certas relações entre as classes laterais, como a seguinte:

Proposição 2.4. *Todas as classes laterais de H em G têm a mesma cardinalidade, igual a cardinalidade de H.*

Demonstração: Ver [1], página 189.

O resultado acima é importante para a demonstração do Teorema de Lagrange, que será enunciado agora:

Teorema 2.1. *(Teorema de Lagrange) Seja H um subgrupo de um grupo finito G. Então $o(G) = o(H) \cdot (G : H)$ e portanto $o(H) \mid o(G)$.*

ISSN 2358-4947

Demonstração: Seja n o número de classes laterais à esquerda distintas de H em G. Assim, sabemos que $n = (G : H)$. Considere o conjunto $\frac{G}{H} = \{a_1H, a_2H, ..., a_nH\}$. Como a relação de equivalência determina uma partição de G, sabemos que $G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_nH$ e $a_iH \cap a_jH = \varnothing$ (já que todas as classes são distintas). Mas, devido a proposição anterior, sabemos que todas as classes laterais possuem a mesma cardinalidade, que é igual a de H. Logo $G = a_1H \cup a_2H \cup ... \cup a_nH$, então $o(G) = o(a_1H) + o(a_2H) + ... + o(a_nH)$ o que implica que $o(G) = o(H)+o(H)+...+o(H)$. Como o número de classes distintas é n, obtemos $o(G) = o(H)\cdot n$. Mas $n = (G : H)$, logo $o(G) = o(H) \cdot (G : H)$ e portanto $o(H) \mid o(G)$.

A seguinte definição também será importante para as discussões a seguir.

Definição 2.5. *Um subgrupo N de um grupo G é chamado subgrupo normal se $\forall g \in G$ se verifica a igualdade $gN = Ng$. Ou seja, a classe lateral à esquerda de g em N é igual a classe lateral à direita de g em N, $\forall g \in G$.*

A notação utilizada para subgrupo normal é $N \lhd G$. A fim de simplificar a notação também denotaremos $x \cdot y = xy$.

2.2.2 Recíproca do Teorema de Lagrange

Após estudar o Teorema de Lagrange, surgiu o seguinte questionamento: será que a recíproca do Teorema de Lagrange é válida? Ou seja, será que sempre que um número dividir a ordem de um grupo G é possível garantir que exista ao menos um subgrupo com esta ordem?

Assim, analisando alguns exemplos chegamos a conclusão que a resposta é não, ou seja, nem sempre existem subgrupos para um número que divide a ordem de um grupo G.

Dessa forma, apresentaremos um contra-exemplo.

Considere o grupo A_4. Sabemos que a ordem deste grupo é $\frac{4!}{2} = 12$. Assim, os divisores de 12 são $1, 2, 3, 4, 6$ e 12, logo se a recíproca do Teorema de Lagrange fosse válida, obteríamos ao menos um subgrupo para cada divisor acima.

Tabela 1: Tábua do grupo A_4

$\circ$	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
I	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(13)	(12)(13)	(13)(12)	I	(23)(24)	(14)(23)	(12)(34)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(24)	(24)(23)	(14)(12)	(13)(14)
(13)(12)	(13)(12)	I	(12)(13)	(13)(24)	(13)(14)	(24)(23)	(14)(23)	(12)(34)	(14)(12)	(14)(13)	(23)(24)	(12)(14)
(14)(12)	(14)(12)	(14)(13)	(14)(23)	(12)(14)	I	(13)(24)	(23)(24)	(13)(12)	(12)(34)	(13)(14)	(12)(13)	(24)(23)
(12)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(24)(23)	I	(14)(12)	(12)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(14)	(23)(24)	(14)(13)	(13)(12)
(14)(13)	(14)(13)	(14)(23)	(14)(12)	(12)(34)	(24)(23)	(13)(14)	I	(13)(24)	(12)(13)	(13)(12)	(12)(14)	(23)(24)
(13)(14)	(13)(14)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(12)	(13)(24)	I	(14)(13)	(12)(14)	(14)(23)	(14)(12)	(24)(23)	(12)(13)
(24)(23)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(24)	(14)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(12)	(23)(24)	I	(12)(13)	(13)(14)	(14)(12)
(23)(24)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(14)	(14)(23)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(24)	I	(24)(23)	(12)(14)	(13)(12)	(14)(13)
(12)(34)	(12)(34)	(13)(14)	(23)(24)	(24)(23)	(14)(13)	(12)(14)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(12)	I	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(14)	(13)(12)	(23)(24)	(14)(12)	(12)(13)	(14)(13)	(14)(23)	I	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(14)(12)	(14)(13)	(12)(13)	(23)(24)	(13)(12)	(24)(23)	(13)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(12)(34)	I

Mas ao construir a Tabela 1, podemos obter todos os subgrupos do A_4, que são:

$\{I\}$
$\{I, (13)(24)\}$
$\{I, (12)(13), (13)(12)\}$
$\{I, (13)(14), (14)(13)\}$
$\{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
$\{I, (12)(34)\}$
$\{I, (14)(23)\}$
$\{I, (12)(14), (14)(12)\}$
$\{I, (23)(24), (24)(23)\}$
A_4

ISSN 2358-4947

Observe que A_4 não possui subgrupo de ordem 6, embora $6 \mid 12$.

2.3 Teoremas de Sylow

Após perceber que a recíproca do Teorema de Lagrange não é válida, podemos nos questionar: será possível determinar em quais casos de fato ela é válida? Se sim, como?

Assim, estudamos os Teoremas de Sylow, que respondem parcialmente o questionamento acima. Mas antes de enunciá-los, precisamos de algumas definições que serão utilizadas na demonstração desses teoremas. Todas as definições e teoremas desta seção podem ser encontrados em [2].

Definição 2.6. *Seja G um grupo. O centro de G, denotado por $Z(G)$, é o subconjunto $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \forall\, g \in G\}$. Sabemos que $Z(G)$ é um subgrupo de G.*

Definição 2.7. *Seja G um grupo e C um conjunto. A aplicação $\rho : G \to P(C)$ é dita uma representação de G no grupo das permutações de C se ρ é um homomorfismo de grupos.*

Definição 2.8. *Seja G um grupo e C um conjunto. Seja $\rho : G \to P(C)$ uma representação de G e seja $x \in C$.*

- *A **órbita** de x é o conjunto $D(x) = \{\rho(g)(x) \mid g \in G\}$.*
- *O **estabilizador** de x é o conjunto de elementos de G que deixam o elemento x fixo, isto é:*

$$E(x) = \{g \in G \mid \rho(g)(x) = x\}.$$

O estabilizador $E(x)$ é subgrupo de G.

Teorema 2.2. *Seja $\rho : G \to P(C)$ uma representação do grupo G no grupo de permutações do conjunto C. Seja $x \in C$. Então a aplicação ψ abaixo é uma bijeção:*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & D(x) & \to & \{\text{Classes laterais à esquerda de } E(x) \text{ em } G\} \\ & \rho(g)(x) & \mapsto & gE(x) \end{array}$$

Em particular, no caso de G ser finito, temos que $\#(D(x)) = (G : E(x))$ e que $\#(D(x))$ divide $o(G)$.

Demonstração: Ver [2], página 255.

Agora, considere um grupo G. Seja

$$\begin{array}{rcccl} I: & G & \to & P(G) & \\ & g & \mapsto & I_g: & \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{array} \end{array}$$

Seja $x \in G$. A órbita $D(x) = \{I_g(x) \mid g \in G\} = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ de um elemento $x \in G$ nesta representação por conjugação se chama classe de conjugação de x, e se denota $Cl(x)$. Os elementos de $Cl(x)$ se chamam os conjugados de $x \in G$.

Observe que temos $Cl(x) = \{x\}$ se e somente se $gxg^{-1} = x$, $\forall\, g \in G$. Assim $x \in Z(G)$. O estabilizador $E(x) = \{g \in G \mid I_g(x) = x\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid g \text{ comuta com } x\}$ de um elemento de $x \in G$ nesta representação por conjugação se chama o centralizador de x, e se denota $Z(x)$. O teorema anterior nos dá

ISSN 2358-4947

$$o(Cl(x)) = \#\{\text{Conjugados de } x \text{ em } G\} = (G : Z(x)).$$

Naturalmente, o conjunto G é igual à união disjunta das classes de conjugação. Em cada classe escolhemos um representante x_α. Então temos $o(G) = \sum_\alpha o(Cl(x_\alpha))$, logo

$$o(G) = o(Z(G)) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) \tag{1}$$

Essa igualdade se chama a equação das classes de conjugação. Por fim, seja G um grupo e $C = \{\text{subgrupos de } G\}$. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} I: & G & \to & P(C) \\ & g & \mapsto & I_g: \quad \begin{array}{ccc} C & \to & C \\ H & \mapsto & gHg^{-1} \end{array} \end{array}$$

A órbita $D(H) = \{I_g(H) \mid g \in G\} = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ de um subgrupo H se chama a classe de conjugação de H. Os elementos de $D(H)$ se chamam os subgrupos conjugados de H. Observe que se $D(H) = \{H\}$ se e somente se $H \triangleleft G$.

O estabilizador $E(H) = \{g \in G \mid I_g(H) = H\} = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ se chama o *normalizador* de H em G e é denotado por $N_g(H)$. Observe que $N_g(H)$ é o maior subgrupo de G no qual H é normal e também $N_g(H) = G$ se e somente se $H \triangleleft G$.

Aqui temos $\#\{\text{conjugados de } H \text{ em } G\} = (G : N_g(H))$.

Estes conceitos introduzidos acima serão importantes para as demonstrações dos teoremas de Sylow. Mas antes de enunciar o primeiro Teorema de Sylow, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.1. *(Cauchy): Seja G um grupo finito abeliano. Seja p um número primo que divide $o(G)$. Então existe $x \in G$ de ordem p.*

Demonstração: Será demonstrado por meio de indução sobre a $o(G)$. Se $o(G) = 1$, o resultado é válido. Assim, vamos supor que $o(G) > 1$, e vamos supor como hipótese de indução que o lema vale para todos os grupos abelianos de ordem menor ou igual a $o(G)$. Vamos mostrar que vale também para $o(G)$.

Primeiramente, se $o(G) = p$, como p é primo, sabemos que G é cíclico e assim existe ao menos um $x \in G$ tal que $x^p = e$, que é o gerador de G.

Logo, vamos supor que $o(G) \neq p$. Dessa forma, vamos afirmar que existe um subgrupo H tal que $1 < o(H) < o(G)$. De fato, para tal, tome $y \in G$ com $y \neq e$ e considere $H = \langle y \rangle$. Como queremos utilizar a hipótese de indução sobre H, precisamos que $o(H) < o(G)$, logo se $\langle y \rangle \neq G$ podemos considerar $H = \langle y \rangle$. Se $\langle y \rangle = G$, então podemos considerar $H = \langle y^p \rangle$, já que $o(G) \neq p$, e assim $o(H) = o(y^p) = \frac{o(G)}{p} < o(G)$.

Como $1 < o(H) < o(G)$, se $p \mid o(H)$ temos pela hipótese de indução que existe $x \in H$ tal que $x^p = e$. Mas como $H \subseteq G$, segue que $x \in G$ e assim o resultado é válido.

Mas se $p \nmid o(H)$, então como pelo Teorema de Lagrange sabemos que $o(G) = o(H) \cdot o\left(\frac{G}{H}\right)$, concluímos que $p \mid o\left(\frac{G}{H}\right)$, e como $o\left(\frac{G}{H}\right) < o(G)$, pela hipótese de indução sabemos que existe $\overline{x} \in \frac{G}{H}$ de ordem p. Assim, considere o homomorfismo canônico $\phi : G \to \frac{G}{H}$ e tome $x \in G$ tal que $\phi(x) = \overline{x}$. Seja r a ordem deste elemento x, temos $x^r = e$, logo $\phi(x^r) = \phi(e)$, mas como sabemos que $\phi(e) = \overline{e}$ (já que ϕ é homomorfismo), então $\overline{x}^r = \overline{e}$, e assim r é um múltiplo da ordem de $\overline{x}$,

ISSN 2358-4947

ou seja, r é um múltiplo de p, logo $r = p \cdot k$ com $k \geq 1$. Assim x^k é um elemento de G de ordem p.

Agora apresentaremos o Primeiro Teorema de Sylow:

Teorema 2.3. *(Primeiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$ com $(p, b) = 1$. Então, para cada n, $0 \leq n \leq m$ existe um subgrupo H de G tal que $o(H) = p^n$.*

Demonstração: A prova também será feita por indução sobre $o(G)$.

Se $o(G) = 1$ o resultado é válido.

Se $o(G) > 1$ então vamos supor que para todos os grupos de ordem menor que $o(G)$ o teorema é válido. Assim, vamos mostrar que para $o(G)$ o teorema também vale.

Agora, seja n um inteiro positivo tal que $p^n \mid o(G)$. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1: Se existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, pela hipótese de indução sabemos que existe um subgrupo K de H de ordem p^n, mas como H é subgrupo de G, concluímos que K é subgrupo de G e portanto o teorema está sendo válido.

Caso 2: Se não existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, vamos considerar a Equação 1 determinada anteriormente:

$$o(G) = o(Z(G)) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) = o(Z(G)) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} (G : Z(x_\alpha))$$

Para cada $x_\alpha \notin Z(G)$, temos $Z(x_\alpha) \subsetneq G$, assim como supomos que não existe um subgrupo H de G tal que p^n divida $o(H)$, concluímos que $p^n \nmid o(Z(x_\alpha))$ e consequentemente $p \mid (G : Z(x_\alpha))$. Como $p \mid o(G)$ obtemos que $p \mid o(Z(G))$.

Como $Z(G)$ é grupo abeliano, sabemos pelo Lema de Cauchy que existe ao menos um elemento $x \in Z(G)$ tal que $x^p = e$. Como $x \in Z(G)$, x comuta com todos os elementos de G e dessa forma sabemos que $\langle x \rangle \lhd G$. Assim, podemos considerar o grupo quociente $\frac{G}{\langle x \rangle}$. Sabemos que $o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right) < o(G)$ e pelo Teorema de Lagrange $p^{n-1} \mid o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right)$, já que $o(\langle x \rangle) = p$ e $p^n \mid o(G)$. Logo, pela hipótese de indução sabemos que $\frac{G}{\langle x \rangle}$ possui um subgrupo K' tal que $o(K') = p^{n-1}$. Agora, considere o homomorfismo canônico $\phi : G \to \frac{G}{\langle x \rangle}$ e tome $K = \phi^{-1}(K')$. Então K é um subgrupo de G e $o(K) = o(ker\phi) \cdot o(K') = o(\langle x \rangle) \cdot o(K') = p \cdot p^{n-1} = p^n$.

O resultado acima nos fornece a resposta parcial que estávamos procurando. Assim, sempre que for dada a ordem de um grupo, saberemos em quais casos é possível determinar a existência de ao menos um subgrupo com esta ordem: basta que a ordem do subgrupo dada seja uma potência de um primo p que divide a ordem de G. Quando ela for a maior potência que divide a ordem de G, os subgrupos com esta ordem recebem um nome especial:

Definição 2.9. *Sejam G um grupo finito, p um primo e p^m a maior potência de p que divide $o(G)$. Os subgrupos de G que têm ordem p^m são chamados de $p-$subgrupos de Sylow.*

Observe que se p é um número primo que não divide $o(G)$, então $\{e\}$ é o único $p-$subgrupo de Sylow.

Outra definição importante para os próximos resultados é:

ISSN 2358-4947

Definição 2.10. *Seja p um primo. Um grupo G no qual todo elemento tem sua ordem igual a uma potência de p é chamado $p-$grupo.*

Assim, os próximos Teoremas de Sylow vão além do questionamento que possuíamos e nos fornecem outras informações muito interessantes que merecem ser estudadas. Dessa forma, vamos enunciar primeiramente um lema que será necessário e depois os demais Teoremas de Sylow:

Lema 2.2. *Sejam G um grupo finito e p um número primo. Sejam S um $p-$subgrupo de Sylow de G e P um $p-$subgrupo qualquer de G. Então $P \cap N_G(S) = P \cap S$.*

Demonstração: Ver [2], página 262.

Teorema 2.4. *(Segundo Teorema de Sylow): Sejam G um grupo, p um número primo e n_p o número de p-subgrupos de de Sylow de G. Então:*

a) Todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si. Em particular, um p-subgrupo de Sylow S de G é normal em G se e somente se S é o único p-subgrupo de Sylow de G. Neste caso S é um subgrupo característico de G.

b) Se P é um p-subgrupo de G, existe um p-subgrupo de Sylow S de G tal que $P \subseteq S$.

c) Se S é um p-subgrupo de Sylow, temos $n_p = (G : N_G(S))$.

Demonstração: Seja S um p-subgrupo de Sylow qualquer de G. Considere a representação por conjugação $\rho : G \to P(D)$, onde D denota o conjunto dos subgrupos de G. Por definição, $C = \{\text{conjugados de } S\} = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$ é a órbita de S nesta representação. Assim, pelas equações já estudadas anteriormente temos $o(C) = (G : N_G(S))$.

Itens a) e b): Precisamos mostrar que se P é um p-subgrupo qualquer de G, então P está contido em um conjugado de S em G. Assim, considere a representação

$$\begin{array}{rccccl} I: & P & \to & P(C) & & \\ & a & \mapsto & I_a: & C & \to & C \\ & & & & gSg^{-1} & \mapsto & agSg^{-1}a^{-1} \end{array}$$

Vamos tomar todas as órbitas distintas $D_1, D_2, ..., D_k$ desta representação e para cada órbita D_i vamos escolher um representante $S_i = g_i S g_i^{-1}$ em D_i. Como C é a órbita de S na representação anterior, obtemos que $o(C) = \sum_{i=1}^{k} o(D_i)$. Além disso, pelo Teorema 2.2 temos $o(D_i) = (P : E(S_i)) = (P : P \cap N_G(S_i))$ e pelo Lema 2.2, temos $(P : P \cap N_G(S_i)) = (P : P \cap S_i)$. Portanto, obtemos:

$$o(C) = \sum_{i=1}^{k} (P : P \cap S_i).$$

Das duas expressões obtidas para $o(C)$ temos que

$$(G : N_G(S)) = \sum_{i=1}^{k} (P : P \cap S_i).$$

Cada parcela $(P : P \cap S_i)$ é igual a 1 ou um múltiplo de p, pois P é um p-grupo. Como S é um p-subgrupo de Sylow, sabemos que $(G : S)$ não contém fator p, logo p não divide $(G : N_G(S))$,

ISSN 2358-4947

já que $o(S) \mid o(N_G(S))$. Consequentemente, existe i tal que p não divide $(P : P \cap S_i)$, assim $(P : P \cap S_i) = 1$ e portanto $P \subseteq S_i$.

Item c): Pelo item a), temos $\{p\text{-subgrupos de Sylow}\} = \{\text{conjugados de } S\}$. Dessa forma concluímos que $n_p = (G : N_G(S))$.

Após obter as informações acima, temos condições para determinar algumas características do inteiro $(G : N_G(S))$. Elas não vão caracterizá-lo, mas serão suficientes para localizá-lo em um conjunto pequeno de divisores da $o(G)$.

Teorema 2.5. *(Terceiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m b$, com $(p, b) = 1$. Seja n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Então*

- *n_p divide b;*
- *$n_p \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração: Seja S um p-subgrupo de G. Sabemos que $S \subset N_G(S)$ e $(G : N_G(S))$ divide $(G : S) = b$. Agora, tome a expressão obtida no teorema anterior:

$$(G : N_G(S)) = \sum_{i=1}^{k} (P : P \cap S_i)$$

Vamos tomar $P = S$. Assim, obtemos:

$$(G : N_G(S)) = \sum_{i=1}^{k} (S : S \cap S_i)$$

onde $S_1, ..., S_k$ são representantes das distintas órbitas $D_1, ..., D_k$ da representação $I : S \to P(C)$, onde C é o conjunto dos p-subgrupos de Sylow de G. Agora, vamos tomar $S_1 = S$, assim obtemos:

$$(G : N_G(S)) = (S : S \cap S) + \sum_{i=2}^{k} (S : S \cap S_i) \equiv 1 \pmod{p}$$

Como pelo Segundo Teorema de Sylow sabemos que $n_p = (G : N_G(S))$, segue o resultado.

2.3.1 Aplicações

Os Teoremas de Sylow são muito importantes para garantir a existência de determinados subgrupos, bem como fornecer outras informações importantes a respeito dos elementos e até mesmo do grupo.

Por exemplo, considere o grupo A_4. Nós já calculamos quais são seus subgrupos para cada uma das seguintes ordens: sabemos que há um subgrupo de ordem $1 = 2^0 = 3^0$ (que é $\{e\}$); subgrupos de ordem $2 = 2^1$, um subgrupo de ordem $4 = 2^2$ e subgrupos de ordem $3 = 3^1$. A existência de tais subgrupos está garantida pelo Primeiro Teorema de Sylow.

Observe também que, ao calcularmos, por exemplo, o normalizador do subgrupo $H = \{I, (12)(13), (13)(12)\}$, obtemos o próprio H. Como pelo Segundo Teorema de Sylow, $n_p = (G : N_G(S))$, então $n_3 = (A_4 : N_{A_4}(H))$, o que implica que $n_3 = (A_4 : H) = \frac{12}{3} = 4$. Observe que de fato obtemos 4 3-subgrupos de Sylow. Da mesma forma, ao calcularmos $N_{A_4}(K)$, onde $K = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, obtemos $N_{A_4}(K) = A_4$, assim $n_2 = (G : N_G(K))$

ISSN 2358-4947

implica que $n_2 = (A_4 : A_4) = 1$, e de fato, há apenas um subgrupo de ordem $4 = 2^2$, que é o 2-subgrupo de Sylow de G, e pelo fato de ser único, é normal em A_4.

Também podemos ver outras aplicações dos Teoremas de Sylow ainda neste exemplo. Considere novamente H, que é um 3-subgrupo de Sylow. Sabemos que todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si, assim, basta tomar $g = (12)(14)$, por exemplo, e conseguiremos gerar o 3-subgrupo de Sylow J, onde $J = gHg^{-1} = \{I, (13)(14), (14)(13)\}$. Ainda podemos ver que todos os 2-grupos do A_4 estão contidos em K que é o 2-subgrupo de Sylow.

Observe que todas essas informações facilitam a compreensão dos Teoremas de Sylow. Mas neste caso, nós já conhecíamos a estrutura do grupo dado, como todos os elementos se relacionam, os subgrupos que ele possui, etc.

Porém, nem sempre teremos tais informações. Neste caso, os Teoremas de Sylow são ferramentas que nos auxiliam a compreender melhor a estrutura do grupo. Por exemplo, considere um grupo G de ordem $56 = 2^3 \cdot 7$. Podemos mostrar que G possui um subgrupo normal de ordem 7 ou um subgrupo normal de ordem 8.

Para isso, vamos calcular n_7. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, $n_7 \mid 2^3 = 8$, logo $n_7 = 1, 2, 4$ ou 8. Mas $n_7 \equiv 1 \pmod 7$, logo concluímos que $n_7 = 1$ ou $n_7 = 8$. No primeiro caso, o resultado já segue, visto que se há apenas um 7-subgrupo de Sylow, ele será normal em G. Agora analisaremos o caso $n_7 = 8$. Assim, teremos 8 subgrupos distintos de ordem 7. Ao retirar o elemento neutro de cada subgrupo, restam $8 \cdot 6 = 48$ elementos de ordem 7, pois 7 é primo, assim tais subgrupos são cíclicos e os elementos são geradores. Como haviam inicialmente 56 elementos neste grupo, restam $56 - 48 = 8$ elementos. Sabemos pelo Primeiro Teorema de Sylow, que existe ao menos um subgrupo de ordem $2^3 = 8$ neste grupo. Como restaram exatamente 8 elementos, concluímos que G possui exatamente um subgrupo de ordem 8, o 2-subgrupo de Sylow, que será normal em G.

Agora, considere este outro exemplo. Seja G um grupo de ordem $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Através dos Teoremas de Sylow, podemos mostrar que G possui exatamente um subgrupo de ordem 5 e um subgrupo de ordem 19.

Assim, vamos iniciar calculando n_5. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_5 divide $2^2 \cdot 19 = 76$, logo $n_5 = 1, 2, 4, 19, 38$ ou 76. Mas $n_5 \equiv 1 \pmod 5$, logo concluímos que $n_5 = 1$ ou $n_5 = 76$. Da mesma forma, vamos calcular n_{19}. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_{19} divide $2^2 \cdot 5 = 20$, logo $n_{19} = 1, 2, 4, 5, 10$ ou 20. Mas $n_{19} \equiv 1 \pmod{19}$, assim $n_{19} = 1$ ou $n_{19} = 20$. Queremos mostrar que $n_5 = 1$ e $n_{19} = 20$.

Pelo Primeiro Teorema de Sylow, a existência de ao menos um subgrupo de cada ordem que divide a ordem do grupo está garantida. Assim, sejam H um subgrupo de G tal que $o(H) = 5$ e K um subgrupo de G tal que $o(K) = 19$. Podemos concluir que ou $n_5 = 1$ ou $n_{19} = 1$, visto que se $n_5 = 76$, o grupo G possuiria $76 \cdot 4 = 304$ elementos de ordem 5, e se $n_{19} = 20$, G possuiria $20 \cdot 18 = 360$ elementos de ordem 19, totalizando $304 + 360 = 664$ elementos em G. Absurdo. Portanto, ou H ou K são normais em G e assim podemos considerar o subgrupo HK. Como H tem ordem 5, ele é cíclico, e da mesma forma, como K tem ordem 19, K também é cíclico. Logo $H \cap K = \{e\}$, e assim $o(HK) = \frac{o(H) \cdot o(K)}{o(H \cap K)} \Rightarrow o(HK) = \frac{5 \cdot 19}{1} = 95$.

Agora, aplicaremos o Terceiro Teorema de Sylow no grupo HK. Como $o(HK) = 5 \cdot 19$, sabemos que $n_5 \mid 19$, logo $n_5 = 1$ ou 19. Mas $n_5 \equiv 1 \pmod 5$, logo concluímos que $n_5 = 1$. Da mesma forma, $n_{19} \mid 5$, assim $n_{19} = 1$ ou 5. Mas $n_{19} \equiv 1 \pmod{19}$, logo concluímos que $n_{19} = 1$. Assim, HK contém apenas um subgrupo de ordem 5, que necessariamente é H, e apenas um subgrupo de ordem 19 que necessariamente é K. Logo H é normal em HK, e assim $HK \subseteq N_G(H)$. Dessa forma, $o(HK) \leq o(N_G(H))$, o que implica pelo Teorema de

ISSN 2358-4947

Lagrange que $(G : N_G(H)) \leq (G : HK)$. Como sabemos que $(G : HK) = \frac{o(G)}{o(HK)} = \frac{380}{95} = 4$, concluímos que $(G : N_G(H)) \leq 4$. Mas pelo Segundo Teorema de Sylow, $(G : N_G(H)) = n_p$, logo $n_5 = (G : N_G(H)) \leq 4$. Como inicialmente havíamos obtido que $n_5 = 1$ ou $n_5 = 76$, concluímos que $n_5 = 1$. Da mesma forma, como K é normal em HK, sabemos que $NK \subseteq N_G(K))$, logo $o(HK) \leq o(N_G(K))$ e assim $(G : N_G(K)) \leq (G : HK)$. Mas, como $n_{19} = (G : N_G(K))$, concluímos que $n_{19} \leq 4$, logo como havíamos obtido que $n_{19} = 1$, ou $n_{19} = 20$, concluímos que n_{19} só pode ser 1. Assim G possui exatamente um subgrupo normal de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 19.

3 Conclusão

Após realizar os estudos acima, bem como construir a tábua e verificar que de fato o A_4 não possui subgrupo de ordem 6, mas possui subgrupos próprios de ordem $2, 3$, e 4, podemos perceber as aplicações dos Teoremas de Sylow, visto que eles garantem a existência de determinados subgrupos (os p-subgrupos). Assim, podemos concluir que os Teoremas de Sylow são muito importantes para a Teoria de Grupos Finitos, pois além de garantir a existência de tais subgrupos, podem, a partir desses subgrupos, determinar outras características importantes sobre o grupo, como normalidade, ordem dos elementos, quantidade de subgrupos, entre outras.

Referências

[1] DOMINGUES, H. H. e IEZZI G. **Álgebra moderna**. 4, ed. São Paulo: Atual, 2003.

[2] GARCIA, A. e IEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. 6, ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NO ENSINO DE ESTATÍSTICA UTILIZANDO O KAHOOT E ELEMENTOS DA GAMIFICAÇÃO[1]

Larissa Arianna Mekelburg Da Silva
UTFPR - Toledo
larimekel@hotmail.com

Matheus Fernando Albertoni
UTFPR – Toledo
albertoni@alunos.utfpr.edu.br

Welton Antunes Rodrigues
UTFPR – Toledo
weltonrodrigues@alunos.utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
UTFPR – Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Rubens Vito
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco (PREMEN)
rvito@uol.com.br

Resumo

A matemática é campo do conhecimento em que muitos estudantes têm dificuldade em compreender certos conteúdos, muitas das vezes por conta dos processos de ensino utilizados. Com o desenvolvimento simultâneo de novas abordagens de ensino e de tecnologia digitais educacionais, algumas dificuldades de aprendizagem podem ser superadas. Este presente trabalho tem como objetivo relatar a experiência de uma atividade, com elementos da Gamificação, realizada em um colégio público em parceria com o PIBID, em que participaram 91 alunos. Com a intenção de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Estatística, assunto o qual o professor supervisor estava trabalhando, elaboramos uma atividade para revisar o conceito de porcentagem e desvio padrão. Para isso, utilizamos a plataforma KAHOOT, envolvendo os seguintes elementos da gamificação: competição, pontuação, premiação e feedback imediato. Dessa forma, utilizando os elementos de gamificação, percebemos que houve uma participação maior dos alunos em relação a outras atividades.

Palavras-chave: Gamificação. KAHOOT. Matemática.

1 Introdução

Vivemos em um mundo em que a tecnologia se atualiza rapidamente de forma a melhorar a vida do ser humano. Informações que antes demoravam dias para serem transmitidas hoje chegam em milésimos de segundos. No campo da educação a tecnologia

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

ISSN 2358-4947

digital tem ganhado um espaço cada vez maior nas instituições de ensino, como por exemplo, com o uso de computadores, projetores, internet, lousa digital, celulares smartphones, entre outros.

Junto a esta inovação, com o uso de tecnologias digitais, surge a necessidade de modernizar o ensino em sala de aula, provindo novas metodologias e novos artefatos tecnológicos. Como apontam Busarello, Ulbricht e Fadel (2014, p. 12) “o desenvolvimento de novos produtos e sistemas deve levar em consideração, além dos fatores tecnológicos, a tendência de que a sociedade contemporânea parece estar cada vez mais interessada por jogos”.

Assim, com a popularização dos jogos eletrônicos e as pesquisas sobre educação que têm mostrado um aumento no engajamento das pessoas (DETERDING, 2014; DOMÍNGUEZ, 2013; FARDO, 2013; KAPP, 2012; SIMÕES, DÍAZ REDONDO, VILAS, 2012), a Gamificação, ou seja, a utilização dos elementos dos jogos em práticas de ensino, tem se mostrado uma importante aliada no ensino, no nosso caso, no ensino de matemática.

Nesse contexto educacional, este artigo, fruto de uma experiência realizada em uma sala de aula do Ensino Médio de um colégio estadual público, no contexto do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), traz um relato do uso de uma sistemática de gamificação para ensinar/resgatar conceitos de estatística. Para tanto, discutiremos os principais conceitos de Gamificação, na sequência apresentamos de maneira mais detalhada o contexto em que foi aplicada a atividade, juntamente com as atividades que foram desenvolvidas. Por fim, realizamos uma análise sobre a proposta inicial pensada e a experiência realizada, apresentando aspectos da gamificação que foram utilizados e, aqueles os quais não apareceram.

2 Gamificação

A Gamificação, segundo Busarello, Ulbricht e Fadel (2014, p. 15) “tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo”. Vianna *et al.* (2013) consideram que a Gamificação tem como objetivo utilizar mecanismos de jogos para resolver problemas e, permite o engajamento de certo público por meio da motivação. Busarello, Ulbricht e Fadel (2014, p. 15) enfatizam que, para esses “autores isso não significa, necessariamente, a participação em um jogo, mas a

ISSN 2358-4947

utilização dos elementos mais eficientes – como mecânicas, dinâmicas e estética – para reproduzir os mesmos benefícios alcançados com o ato de jogar".

Zichermann e Cunningham (2011), afirmam que a Gamificação permite explorar diferentes níveis de engajamento de um indivíduo para resolução de determinados problemas. Os autores ainda identificam "que nessa realidade o envolvimento de qualquer público deve estar baseado em estruturas de recompensa, reforço e feedbacks, suportadas por mecânicas e sistemáticas que potencializam o envolvimento do indivíduo" (BUSARELLO, ULBRICHT, FADEL, 2014, p. 12-13). Para Furió *et al.* (2013) o ato de jogar é um meio pelo qual o sujeito desenvolve habilidades de pensamentos e cognição, estimulando a memória e atenção.

Simões, Redondo e Vilas (2013) salientam que "em um contexto educacional aspectos dos jogos como repetição de experimentos, ciclos rápidos de resposta, níveis crescentes de dificuldade, diferentes possibilidades de caminhos, reconhecimento e recompensa são extremamente significantes para a aprendizagem". Os autores Li, Grossman e Fitzmaurice (2012) ainda destacam que é necessário proporcionar ao indivíduo inspiração de diferentes maneiras para que permaneça a motivação. Para isso, é necessário que se utilize mecânicas de jogo.

Zichermann e Cunningham (2011) afirmam que "a mecânica de um sistema de jogo é composta por várias ferramentas que tem a capacidade de produzir respostas estéticas significativas aos jogadores". Destacam-se as seguintes ferramentas: pontos, níveis, placar, divisas, integração, desafios e missões, loops de engajamento, personalização, reforço e feedback.

Schmitz, Klemke e Specht (2012) resumem os componentes do jogo como sendo o personagem, a competição e as regras, sendo possível serem explorados de vários modos. Ressaltam que esses principais elementos são indispensáveis quando se é empregada uma metodologia gamificada.

Para gamificar uma sala de aula existem estratégias que podem ser utilizadas. Dentre elas, et al. Vianna (2013) cita a interação que o professor deve ter com a lógica dos jogos e saber conhecer suas diferentes mecânicas, identificar seu público, definir os conteúdos envolvidos, refletir se é possível relacionar problemas do cotidiano com o conteúdo estudado, definir a missão que os alunos devem cumprir, elaborar uma narrativa relacionada ao tema e ao contexto, escolher o ambiente para a realização da atividade podendo ser digital ou físico, estabelecer as regras, criar um sistema de pontuação, planejar uma ação diária, e por fim, revisar a estratégia.

ISSN 2358-4947

Nesse contexto, a próxima seção, traz o relato de nossa experiência sobre uma atividade de matemática que utilize alguns elementos da Gamificação.

3 Um relato de experiência

A atividade foi realizada em um dos colégios parceiros do PIBID com o intuito de realizar atividades diferenciadas nas aulas do professor supervisor e também de experienciar o processo de ensino, um dos objetivos do programa de iniciação à docência.

O conteúdo estudado pelos alunos naquele período era Estatística, mais especificadamente medidas de tendência central e de dispersão, análise gráfica e porcentagem. Assim, elaboramos uma atividade que utiliza a plataforma KAHOOT[2] trazendo alguns elementos de gamificação: sistema de recompensas, competição, pontuação, placar, reforço e feedback imediato.

Dividimos a atividade em duas etapas, as quais tinham duração de uma hora-aula cada, além disso, foram aplicadas em diferentes dias. Participaram três turmas dos anos finais do ensino médio, denominadas turma A, turma B e turma C. Ao todo foram envolvidos 91 alunos, 25 da turma A, 31 da turma B e 35 da turma C. Na primeira etapa foi desenvolvido um teste de matemática com cinco questões no formato de quiz pelo aplicativo KAHOOT, este teste não abrangia os conteúdos correspondentes ao planejamento da disciplina, mas sim a matemática básica. As questões foram selecionadas a fim de aperfeiçoar a interpretação de exercícios que necessitam de maior atenção do aluno. Em relação aos conteúdos trabalhados, abordamos equação de primeiro grau, potenciação, radiciação, adição, subtração e porcentagem.

Para realizar a primeira etapa foi necessário o uso de internet sem fio e, além disso, cada aluno utilizou seus próprios smartphones. O aplicativo opera através dos seguintes elementos: questões, pontuação e classificação. Cada questão do quiz possuía 4 alternativas, sendo somente uma correta e ela deveria ser respondida no prazo máximo de dois minutos. A pontuação é determinada da seguinte maneira, zero se estiver errada, e caso esteja certa ela será definida de acordo com o tempo utilizado para respondê-la, de maneira que quanto menos tempo for gasto para responder, mais pontos serão obtidos. A classificação é imediata

[2] Aplicativo gratuito que torna fácil criar e compartilhar jogos de quizzes dinâmicos e que possui em seu escopo, elementos da Gamificação. Para maiores informações acesse: <https://kahoot.com>.

ISSN 2358-4947

e mostrada no aplicativo cada vez que uma questão é respondida, mostrando um ranking dos cinco alunos com maior pontuação.

Nas turmas A e B, a primeira etapa foi realizada em sala. Entretanto, na turma C houve uma dificuldade na conexão com a rede wi-fi e consequentemente tivemos que alocar os alunos para um ambiente aberto, mas, em nenhum momento, surgiu problemas decorrentes dessa mudança.

Durante a primeira etapa os alunos demonstraram curiosidade e animação devido ao fato de ser uma atividade diferenciada e que utilizava ferramentas tecnológicas, tornando-a mais dinâmica. O papel do professor foi fundamental para o empenho dos alunos, pois ele teve o encargo de motivá-los e monitorá-los. Dentro da motivação entraram alguns elementos da gamificação: a competição entre as turmas e entre os alunos, e a premiação para a melhor turma e o melhor aluno.

Ao fim de cada questionário o KAHOOT apresentou a porcentagem de acertos e erros, desse modo foi possível elaborar gráficos que apresentassem esses dados de cada turma. Na Figura 1, podemos verificar os resultados da Turma A, na Figura 2 da Turma B e na Figura 3, da Turma C.

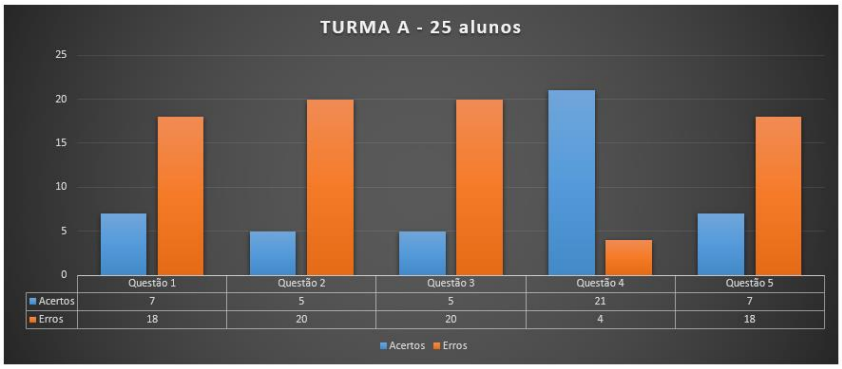


Figura 1 – Acertos e Erros – Turma A
Fonte: Autores, 2019

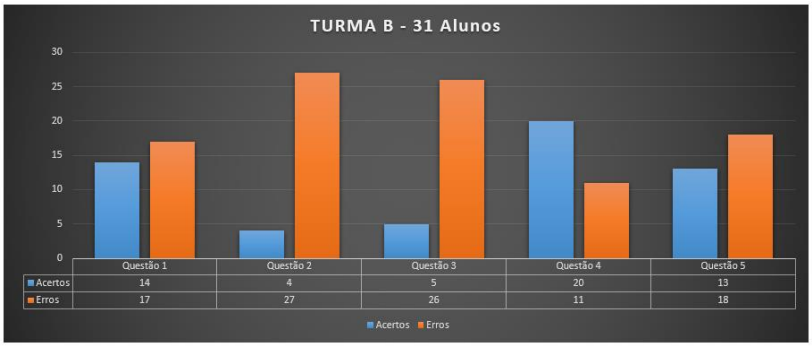


Figura 2 – Acertos e Erros – Turma B
Fonte: Autores, 2019

ISSN 2358-4947

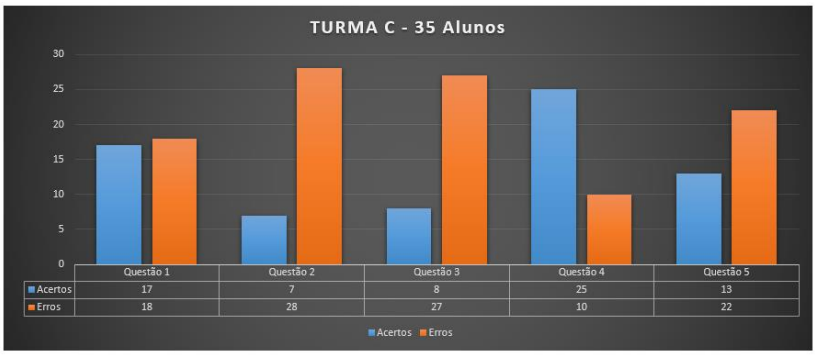


Figura 3 – Acertos e Erros – Turma C
Fonte: Autores, 2019

Os resultados obtidos foram os esperados, pois era previsto que a maioria dos alunos acertasse a primeira e quarta questão, principalmente a quarta, porque ela abrangia apenas os conteúdos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Em contrapartida, o resultado da primeira questão na turma A não alcançou o desejado. Na segunda, terceira e quinta questões, era previsto que a minoria dos alunos acertasse, pois para resolvê-las era necessário aplicar propriedades de radiciação e potenciação.

Com isto, passamos para a segunda etapa, relacionando essas informações com o conteúdo de estatística estudados pelos alunos, e com a autorização do professor das turmas, elaboramos 2 questões avaliativas que foram respondidas individualmente por cada aluno. Estavam à disposição o professor da turma e nós, PIBIDianos, para esclarecer eventuais dúvidas pertinentes às resoluções dos exercícios.

Na primeira questão foi solicitado aos alunos que transformassem a quantidade de acertos e erros em porcentagem, em relação ao gráfico da sua respectiva turma. Nesta questão os alunos não apresentaram dificuldades na resolução do problema, pois o conteúdo já tinha sido estudado. A Figura 4 mostra a resolução de um dos alunos.

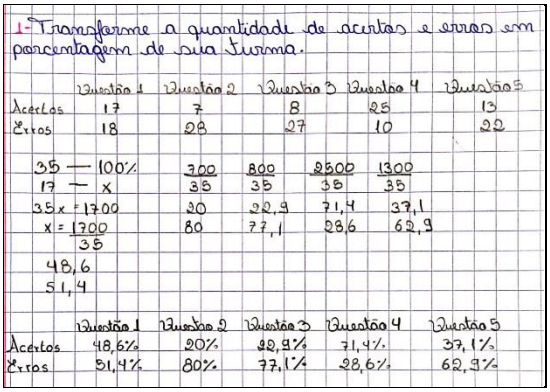


Figura 4 – Resolução da primeira questão
Fonte: Autores, 2019

ISSN 2358-4947

Na segunda questão foi solicitado aos alunos que calculassem o desvio padrão da média de acertos de cada turma. Embora este conteúdo também tenha sido estudado recentemente, alguns alunos apresentaram dificuldade durante a resolução do exercício. Selecionamos duas resoluções feitas pelos alunos e as apresentamos na Figura 5.

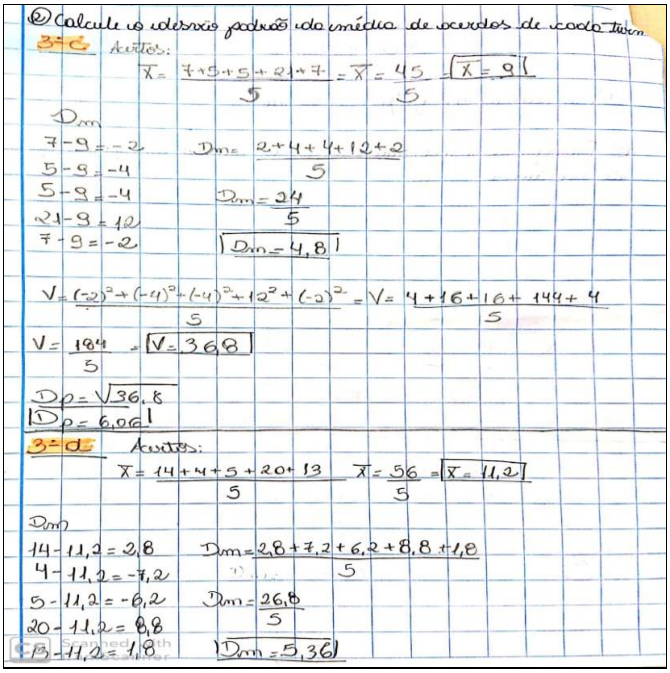


Figura 5 – Resolução da segunda questão
Fonte: Autores, 2019

Após a correção das questões fizemos a normalização[3] (conforme a Tabela 1) das notas obtidas do KAHOOT (K), utilizamos a nota da Avaliação (A) e elaboramos a equação a seguir para encontrar a Nota Final (NF):

$$NF = \frac{K + 3A}{4}$$

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos com a normalização da pontuação do KAHOOT.

Tabela 1 – Conversão da pontuação do KAHOOT

Turmas	Pontuação	Nota K
A	1443.48	8.9
B	1553.58	9.6
C	1604.51	10

Fonte: Autores, 2019

[3] Utilizamos aqui a ideia de proporcionalidade para normalizar as notas, ou seja, a maior pontuação estabelecemos com nota 10. A partir dela, realizamos os cálculos proporcionais às outras pontuações.

ISSN 2358-4947

A Tabela 2 apresenta a média dos resultados das questões avaliativas. Uma inferência é importante é que todas as turmas obtiveram resultados muitos próximos e acima de nove.

Tabela 2 – Média das questões avaliativas

Turmas	Nota A
A	9.2
B	9.1
C	9.4

Fonte: Autores, 2019

Desse modo, as notas finais das turmas A, B e C são, respectivamente, 9.1, 9.2 e 9.5. Logo, a turma campeã foi a turma C. O aluno vencedor foi definido de acordo com a maior pontuação no KAHOOT. Sendo o aluno X da turma A que atingiu a pontuação de 3801.

A recompensa para a turma C foi que durante a próxima prova cada aluno teria direito de consultar um PIBIDiano para tirar somente uma dúvida sobre uma questão, de maneira que, em nenhum momento, poderia ser passada a resposta. A premiação para o aluno vencedor foi uma barra de chocolate.

4 Algumas análises e discussões finais

Quando apresentamos a atividade aos alunos, eles disseram que nunca tinham utilizado a plataforma KAHOOT em sala de aula. À medida em que foram respondendo as questões os alunos interagiram cada vez mais entre si, aumentando e, ao mesmo tempo, instigando a competição entre eles. Por envolver uma premiação e por ter também um feedback imediato, no decorrer da primeira etapa da atividade, os alunos ficaram mais motivados, dedicando-se mais a ela.

Entre a primeira e a segunda etapa, não foi possível aplicar os mesmos elementos de gamificação, os únicos que foram comuns as duas etapas foram a competição e a premiação, pois na segunda não teria como dar uma classificação e feedback imediato por ser necessária a correção manual.

Dentro da segunda etapa percebemos que, por não usarmos tantos elementos da gamificação que prendem a atenção dos alunos, eles não ficaram tão motivados, mas ainda assim, a maioria se dedicou muito a atividade, pois eles sabiam que haveria a premiação final para a turma vencedora.

ISSN 2358-4947

Quando elaboramos a atividade, pensamos que os alunos ficariam mais instigados e se dedicariam mais a ela se houvesse essa relação com a Gamificação, e realmente foi isso que ocorreu. Planejávamos inserir mais elementos da Gamificação, mas devido ao tempo que tínhamos para aplicar a atividade, limitamos um pouco o uso desses elementos para a atividade se enquadrar dentro da proposta que nos foi proporcionada. Enfim, os resultados poderiam ter sido melhores, principalmente na primeira etapa, em contrapartida, os resultados foram satisfatórios para a segunda etapa, aquele que envolvia o conteúdo que os alunos estavam estudando no momento.

Assim, para concluir, verificamos que, com a necessidade de modernizarmos a sala de aula, a Gamificação é uma estratégia que vale a pena ser pesquisada e utilizada no contexto educacional. Pudemos perceber que os alunos realmente evoluíram dentro do conteúdo de estatística após a aplicação dessa atividade, pois os elementos da Gamificação motivaram os alunos, proporcionando uma maior participação por parte deles. Isso pode ser visto pelos resultados das figuras apresentadas, bem como pela forma como os alunos interagiram.

Diante dos resultados obtidos, inferimos que a Gamificação, ou alguns de seus elementos, pode ser aplicada independentemente do conteúdo estudado, porém, a adaptação do professor para essa nova estratégia exige estudos sobre a metodologia, criatividade e a busca por ideias inovadoras. Assim, com essa experiência adquirida, pretendemos continuar a pesquisa sobre Gamificação e estudar formas de aplicá-la, não apenas como atividade ou trabalho, mas como metodologia de ensino.

REFERÊNCIAS

BUSARELLO, R. I.; ULBRICHT, V. R.; FADEL, L. M. A gamificação e a sistemática de jogo: conceitos sobre a gamificação como recurso motivacional. IN: FADEL, L. M. et al. (orgs.). **Gamificação na educação**. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014.

DETERDING, S. Gamification: Designing for Motivation. **Interations magazine**, v.19, n. 4, jul./aug., p. 14-17, 2012.

DOMÍNGUEZ, A. *et al*. Gamifying learning experiences: Practical implications and outcomes. **Journal Computers & Education**, Virginia, v. 63, p. 380–392, 2013.

FARDO, M. L. **A gamificação como método**: Estudo de elementos dos *games* aplicados em Processos de ensino e aprendizagem. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul.

ISSN 2358-4947

FURIÓ, D. *et al.* The effects of the size and weight of a mobile device on an educational game. **Journal Computers & Education**, Virginia, v. 64, p. 24–41, 2013.

KAPP, K. **The Gamification of Learning and Instruction**: Game-based Methods and Strategies for Training and Education. Pfeiffer, 2012.

SIMÕES, J.; DÍAZ REDONDO, R.; VILAS, R.F. A social gamification framework for a K-6 learning platform. **Computers in Human Behavior**, n. 29, p.345- 353, 2013.

VIANNA, Y. et al. **Gamification**, Inc.: como reinventar empresas a partir de jogos. MJV Press: Rio de Janeiro, 2013.

ZICHERMANN, G.; CUNNINGHAM, C. **Gamification by Design**: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc. 2011.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na aprendizagem de Matemática**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Licenciatura em Matemática. São Paulo: UNASP, 2007.

LI, W.; GROSSMAN, T.; FITZMAURICE, G. **Gamified Tutorial System For First Time AutoCAD Users.** UIST '12, October 7–10, Cambridge, Massachusetts, USA. 2012.

SCHMITZ, B.; KLEMKE, R., SPECHT, M. **Effects of mobile gaming patterns on learning outcomes: a literature review.** Journal Technology Enhanced Learning. 2012.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

ANÁLISE DE CORRESPONDÊNCIA APICADA À ANÁLISE DE PROCESSO EXECUTIVO DE ALVENARIA ESTRUTURAL

Victor de Sousa Guimarães
UTFPR – Câmpus Toledo
victor.guimaraes@hotmail.com

Lucia Bressiani
UTFPR – Câmpus Toledo
bressiani@utfpr.edu.br

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR– Câmpus Toledo
regianefagundes@utfpr.edu.br

Resumo

A análise de correspondência simples (ACS) é uma técnica de análise multivariada que pode ser aplicada a variáveis categóricas, que permite a representação gráfica da distribuição das frequências das categorias das linhas e/ou colunas em um sistema de coordenadas. Apesar de a técnica ser utilizada em diversas áreas, poucos estudam mostram sua aplicação na engenharia civil. Assim, o objetivo do trabalho é apresentar a aplicação da técnica de ACS em dados obtidos a partir do estudo de caso do processo executivo de alvenaria estrutural. Os dados foram coletados em uma obra de alvenaria estrutural, situada na cidade de Cascavel – PR, por meio da aplicação de listas de verificações de serviços que foram elaboradas com base na NBR 15961-2. Os resultados indicaram que a ACS foi eficiente para detectar atividades críticas, desencadeadas pela não execução e pela baixa frequência de execução, tais como: a não verificação do projeto durante o assentamento, possíveis desníveis das lajes, o não uso de escantilhão e a falta de umedecimento das superfícies de assentamento durante dias quentes. Assim, a execução da alvenaria estrutural do caso estudado apresenta algumas falhas durante seu processo construtivo, mas que são passíveis de melhorias através de orientação e fiscalização mais rígida.

Palavras-chave: Análise Multivariada, dados categóricos, Processo construtivo

1 Introdução

A análise multivariada é uma área instigante da estatística por considerar, simultaneamente, as diversas variáveis que caracterizam um fenômeno em estudo, sendo a análise, a descrição e a inferência realizada valendo-se da estrutura de correlação entre essas variáveis (FAGUNDES, 2017).

ISSN 2358-4947

Entre as diversas ferramentas da estatística multivariada tem-se Análise de Correspondência Simples (ACS), que pode ser definida como uma técnica adequada para dados categóricos, que permite analisar graficamente as relações existentes através da redução de dimensionalidade do conjunto de dados (LATTIN, et al., 2011).

A ACS é aplicada a tabelas de contingência com o objetivo de determinar o grau de associação global entre suas linhas e as colunas, indicando como as variáveis estão relacionadas. Este método tem como base a decomposição do valor singular de uma matriz retangular (tabela de contingência adaptada) e é utilizado para representar graficamente as linhas e as colunas desta tabela como pontos em espaços vetoriais de pequena dimensão, de forma a identificar nesta dimensão a existência de padrões subjacentes (MINGOTI, 2005; GREENACRE, 2007; FERREIRA, 2011).

Na literatura encontram-se muitas aplicações em diferentes contextos, por exemplo, Infantosi, et al. (2014) aplicaram a ACS para interpretar dados categóricos em ciências da saúde. Silveira et al. (2015), utilizaram a técnica para analisar questões do ENEM relacionadas a área de ciências da natureza, detectando relações entre a elaboração e contextualização das questões e desempenho dos alunos.

Oliveira (2015) analisa a eficiência e eficácia do processo de compras públicas, por meio da ACS e consegue mostrar por meio do "mapa perceptual" bidimensional que os preceitos da teoria da burocracia são elevados nos processos de licitação das instituições, indicando a necessidade de aperfeiçoar e atenuar disfunções encontradas em seus trâmites e treinamento adequado a todos envolvidos no processo.

Apesar da aplicação da ACS nas mais diversas áreas, poucos estudos envolvendo a técnica são encontrados na Engenharia Civil. Steiner et al. (2008) aplicaram métodos estatísticos multivariados à engenharia de avaliações e indicaram ser viável e altamente apropriada, fomentando a aplicação na área de Engenharia Civil.

Assim, o objetivo do trabalho foi apresentar a aplicação da técnica de ACS em dados reais obtidos a partir do estudo de caso do processo executivo de alvenaria estrutural.

2 Material e Métodos

2.1 Delineamento Experimental e Coleta de Dados

ISSN 2358-4947

O delineamento da pesquisa é caracterizado por um estudo de caso (Yin, 2001), por meio da observação de uma obra de alvenaria estrutural, situada na cidade de Cascavel – PR que foi desenvolvida com a finalidade habitacional (Figura 1).



Figura 1 – Edificação em alvenaria estrutural.
Fonte: Autor (2018).

O levantamento de dados ocorreu por meio da aplicação de listas de verificações de serviços, com o objetivo de avaliar os procedimentos de execução, que foi elaborada com base na NBR 15961-2. O conjunto de listas idênticas foram aplicadas a todos os funcionários que estiveram executando a elevação. A lista 01 refere-se aos serviços preliminares e a lista 02 sobre os processos de marcação e foi aplicada a cada funcionário por elevação de pavimento.

O método de análise da execução na obra, foi baseado na escala Likert de cinco pontos (LIKERT, 1932) e a lista de verificação de serviço foi classificada como apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Quantificação das categorias "números inteiros ordenados"

Questão	Nunca	Raramente	Muitas vezes	Quase sempre	Sempre
1.1 – 2.7	1	2	3	4	5

Fonte: Autores (2018).

ISSN 2358-4947

2.3 A Técnica de Análise de Correspondência Simples

A ACS foi realizada sobre uma matriz de probabilidades ou frequências relativas, dada por $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$, indicando a relação entre o total de classificados na categoria i de A (norma avaliada) e j de J (frequência de execução na obra).

Tabela 1: Representação da tabela de correspondência $(i \times j)$

		Colunas (Variável B)				Total Linhas
		1	2	. . .	j	
Linhas (variável A)	1	p_{11}	p_{12}	. . .	p_{1j}	$p_{1.}$
	2	p_{21}	p_{22}	. . .	p_{2j}	$p_{2.}$
	.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.
	.	.	.		.	.
	i	p_{i1}	p_{i2}	. . .	p_{ij}	$p_{i.}$
	Total Colunas	$p_{.1}$	$p_{.2}$	. . .	$p_{.j}$	1

A partir da Tabela 1 foi possível gerar as matrizes de correspondência, de perfil de linhas e de perfil de colunas. A matriz de correspondência é denotada por $\boldsymbol{P}$, de dimensão $(i \times j)$ constituída das proporções $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$.

A matriz de perfil das linhas é a matriz diagonal, denotada por $\boldsymbol{D}_r$, cujos elementos diagonais são iguais a $\boldsymbol{r} = (p_{1.} \quad \cdots \quad p_{i.})'$. Ou seja, o vetor $\boldsymbol{r}$, chamado de vetor coluna, armazena a proporção de ocorrências pertencentes à categoria i da variável A (norma avaliada), em relação ao total (centroide ou probabilidade marginal) em que $p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}$. O vetor $\boldsymbol{r}$ irá compor a matriz de perfil das linhas.

Já a matriz de perfil das colunas é a matriz diagonal, denotada por $\boldsymbol{D}_c$, cujos elementos diagonais são iguais a $\boldsymbol{c} = (p_{.1} \quad \cdots \quad p_{.j})'$. Ou seja, o vetor $\boldsymbol{c}$, armazena a proporção de ocorrências pertencentes a categoria j da variável B (frequência de execução), em relação ao total (centroide ou probabilidade marginal), em que $p_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}$. O vetor $\boldsymbol{c}$ irá compor a matriz perfil das colunas.

Definida $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{c}$, aplicou-se o Teste Qui-quadrado (χ^2_{cal}), que examina se a informação contida nas linhas da tabela é independente ou não da informação contida nas colunas (teste de homogeneidade). O Teste é expresso por:

$$\chi^2{}_{cal} = n. \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \frac{(p_{ij} - p_{.i}p_{.j})^2}{p_{.i}p_{.j}}.$$

ISSN 2358-4947

Se $\chi^2{}_{cal} > \chi^2{}_{(i-1)(j-1),\alpha}$ rejeita-se a hipótese de que não há associação entre variáveis.

Rejeitada a hipótese de que não associação entre variáveis, o passo seguinte foi realizar a decomposição em coordenadas principais. Segundo Mingoti (2005), a matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{r}.\boldsymbol{c}'$, é a matriz de entrada do tipo:

$$\left(p_{ij} - \frac{n_{i.}}{n}\frac{n_{.j}}{n}\right),$$

ou seja, os termos representam uma comparação da proporção observada no interior das casela da tabela, com aquela esperada sob um modelo no qual as variáveis A e B são independentes.

O posto (rank) da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i\times j}$ é dado por $k = min(i-1, j-1)$.

Assim, foi possível decompor a matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i\times j}$ em seus autovalores e autovetores, ou seja, fazer a decomposição em seus valores singulares, obtendo:

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i\times j} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}'$$

em que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{r}}^{1/2}.\boldsymbol{U}_{i\times k}$ é uma matriz de dimensão $i \times k$ e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{c}}^{1/2}.\boldsymbol{V}_{j\times k}$ é uma matriz de dimensão $j \times k$, sendo $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ matrizes ortogonais; $\boldsymbol{\Lambda}$ é a matriz de dimensão $k \times k$, contendo os autovalores da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ ordenados em ordem decrescente.

A matriz $\boldsymbol{U}$ contém os autovetores da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}\widetilde{\boldsymbol{P}}'$ e matriz $\boldsymbol{V}$ contém os autovetores da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}'\widetilde{\boldsymbol{P}}$. Como consequência tem-se que as linhas da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ podem ser escritas como combinações lineares das linhas da matriz $\boldsymbol{B}'$, e as colunas da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ podem ser escritas como combinações lineares das colunas da matriz **A**, definindo assim as coordenadas principais das linhas e das colunas como $\boldsymbol{Y}_{i\times k} = \boldsymbol{D}_r^{-1}.\boldsymbol{A}_{i\times k}\ \boldsymbol{\Lambda}_{k\times k}$ e $\boldsymbol{Z}_{j\times k} = \boldsymbol{D}_c^{-1}.\boldsymbol{B}_{j\times k}\ \boldsymbol{\Lambda}_{k\times k}$, respectivamente.

Da decomposição acima, a matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}$ pode ser expressa como função dos autovalores e das coordenadas principais, isto é, $\widetilde{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{r}.\boldsymbol{c}' = \sum_{i=1}^{k}\hat{\lambda}_i\,\tilde{a}_i\tilde{b}_i{}'$ em que $\tilde{a}_i$ denota a i-ésima coluna da matriz **A** e $\tilde{b}_i$ denota a i-ésima coluna da matriz $\boldsymbol{B}$, sendo $k = posto\left(\widetilde{\boldsymbol{P}}\right) = min(i-1,\ j-1)$,ou seja o número máximo de dimensões que pode ser estimado é um a menos que o menor número entre a quantia de linhas ou e colunas.

As duas primeiras coordenadas principais das linhas e das colunas são as mais representativas em termos da associação total existente entre as variáveis A e B, pois estão relacionadas aos maiores autovalores da matriz $\widetilde{\boldsymbol{P}}$.

A variação total existente nesse sistema, chamada também de inércia total, é dada por: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2$, em que λ_i são os autovalores não nulos da diagonal da matriz $\boldsymbol{\Lambda}, i =$

ISSN 2358-4947

$1, 2, .. k$. Assim, a proporção de explicação da i-ésima coordenada principal em relação à inércia total é dada por:

$$\frac{\lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2}$$

Tomando como base a decomposição do valor singular da matriz retangular (tabela de contingência adaptada) é possível representar graficamente as linhas e as colunas desta tabela como pontos em espaços vetoriais de pequena dimensão. Assim, foi construído o "mapa perceptual" para representação das similaridades entre as variáveis. Optou-se por representação bidimensional utilizando o principio de parcimônia. Com o gráfico produzido pode-se avaliar se as variáveis de interesse se afastam do pressuposto de independência, sugerindo possíveis associações. Os níveis das variáveis de linha e de coluna assumiram posições nos gráficos de acordo com a associação ou similaridade entre elas.

A análise dos dados foi realizada com o auxílio do *software* R (R Core Team 2017) e o pacote auxiliar FactoMineR (LÊ et al., 2008) .

3 Resultados e Discussão

Com a realização da investigação da execução no canteiro de obra de alvenaria estrutural, obteve-se os dados dos procedimentos de execução e da frequência da execução. Constatou-se que algumas das atividades não foram executadas conforme previsto e que em outros casos a frequência de execução foi rara. Para investigar as relações de dependência e similaridade entre as variáveis (atividades executadas) e a frequência de execução, aplicou-se a AC dentro de suas respectivas etapas de verificação.

3.1 Serviços preliminares

Na etapa composta pelas atividades referentes aos serviços preliminares todos os itens foram executados na obra. Verifica-se pela Tabela 1 que o serviço de verificar se os projetos da alvenaria e complementares estão no local totaliza 40% da frequência de nunca ou raramente executados. O serviço de efetuar a limpeza do local apresentou um índice mediano de execução variando de 10% (muitas vezes) a 40% (quase sempre). Os demais itens quase sempre ou sempre foram executados.

Observou-se forte associação entre as variáveis ao nível de 5% de significância, sendo que o valor do Qui-Quadrado, com 20 graus de liberdade, foi de $X^2_{cal} = 38{,}57 > X^2_{tab} = 10{,}85$, validando a aplicação da AC.

ISSN 2358-4947

Tabela 1 - Distribuição de frequência (%) dos serviços executados na fase preliminar da obra relacionado a frequência de execução

Atividade avaliada	Nunca	Raramente	Muitas vezes	Quase sempre	Sempre
1.1. Efetuar a limpeza da superfície de assentamento	0	0	10	40	50
1.2. Verificar se os projetos da alvenaria e complementares estão no local	30	10	0	0	60
1.3. Verificar a disposição dos paletes de blocos para a primeira fiada, mantendo livre os eixos de assentamento	0	0	0	30	70
1.4. Verificar a disponibilidade de equipamentos	10	0	0	60	30
1.5. Providenciar argamassa	0	0	0	0	100
1.6. Separar os tipos de blocos para início da alvenaria conforme o projeto	0	0	0	10	90

Fonte: Autor (2018).

A partir da matriz de correspondência, de perfil de linhas e de perfil de colunas, calculou-se as coordenadas principais das linhas e colunas e a variação total existente entre as variáveis (inércia total). Os resultados encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2 - Inércia associada as 4 dimensões

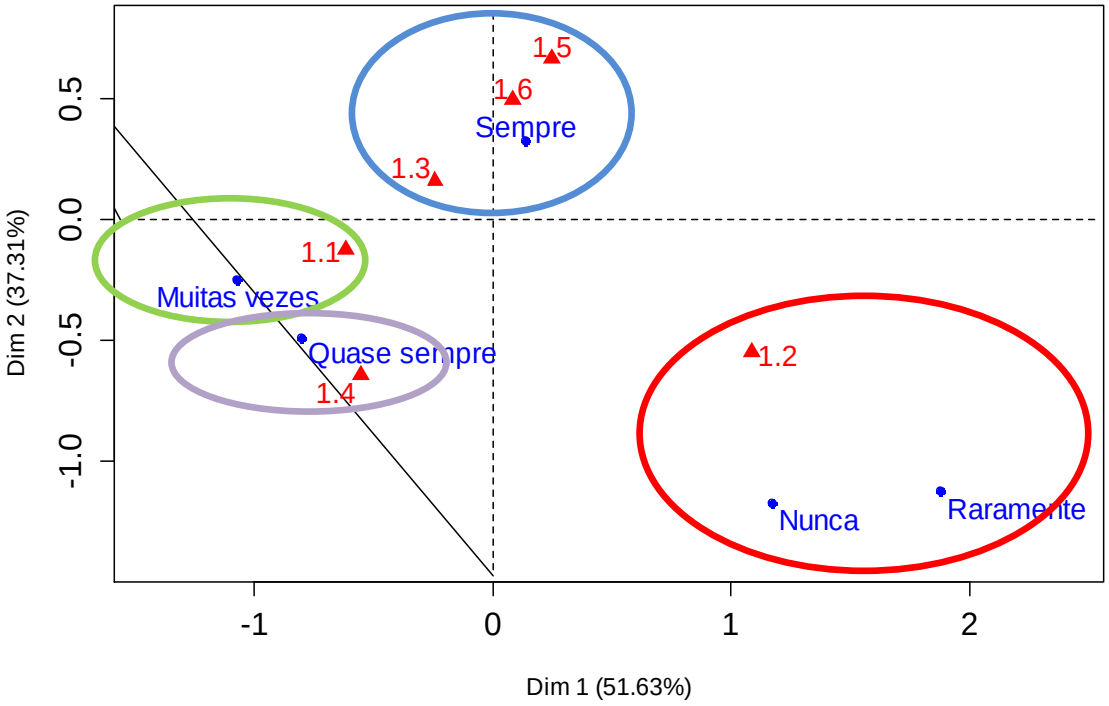
Dimensão	Inércia	Variação explicada (%)	Variação acumulada explicada (%)
1	0,332	51,63	51,63
2	0,242	37,31	88,94
3	0,070	10,88	99,82
4	0,001	0,18	100,00

Fonte: Autor (2018).

Verifica-se que a dimensão 1, ou seja, a primeira coordenada, representa 51,63% da inércia, e a segunda coordenada (dimensão 2) 37, 31%. Assim, as duas primeiras dimensões conseguem descrever a associação entre as variáveis com uma variação acumulada de explicação de 88,94%. Portanto, optou-se por trabalhar com uma representação do “mapa perceptual” bidimensional, associando o serviço executado na fase preliminar e a frequência de execução.

Analisando a Figura 2, verifica-se que os itens 1.3, 1.5 e 1.6 estão associados a categoria de sempre executados. Já os itens 1.1 muitas vezes executados, 1.4 quase sempre e 1.2 com maior dispersão se agrupando a raramente ou nunca executado.

ISSN 2358-4947



Fonte: Autor (2018).

Figura 2 - Serviço preliminar x Frequência de execução.

Vale destacar que o item 1.2, que se refere a “verificar se os projetos da alvenaria e complementares estão no local” representou a pior situação analisada, referente aos serviços preliminares. Porém, isso pode ser justificado pelo fato de os funcionários estarem executando um serviço que já havia sido repetido várias vezes, ou seja, vários pavimentos iguais, não consultando o projeto com tanta frequência.

3.2 Marcação

Ao contrário da etapa anterior, nas atividades que contemplam a marcação, alguns dos itens não foram executados ou tiveram frequência mínima de execução. Verifica-se pela Tabela 3 que os serviços de localizar o ponto mais alto da laje e assentar um bloco com menor espessura de argamassa possível (2.3) e posicionar e fixar os escantilhões (2.7) nunca foram executados. Nota-se grande variabilidade no item conferir as medidas da laje, seu esquadro e nivelamento. Essas situações mais críticas são destacadas na Tabela 3.

ISSN 2358-4947

Tabela 3 - Distribuição de frequência relativa (%) dos serviços de marcação da obra relacionado a frequência de execução

Atividade avaliada	Nunca	Raramente	Muitas vezes	Quase sempre	Sempre
2.1. Conferir as medidas da laje, seu esquadro e nivelamento	20,00	30,00	40,00	10,00	0
2.2. Transferir os eixos de referência do pavimento	0,00	0,00	0,00	10,00	90,00
2.3. Localizar o ponto mais alto da laje e assentar um bloco com menor espessura de argamassa possível (mínimo 5 mm e máximo 10mm)	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.4. Assentar os blocos estratégicos (blocos de canto, de encontro de paredes e blocos determinantes das aberturas de portas)	0,00	0,00	0,00	20,00	80,00
2.5. Nivelar os blocos estratégicos	0,00	0,00	10,00	60,00	30,00
2.6. Distribuir os demais blocos entre os blocos estratégicos e verificar o nivelamento da primeira fiada	0,00	0,00	10,00	90,00	0,00
2.7. Posicionar e fixar os escantilhões	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autor (2018).

Com o teste do Qui-Quadrado observou-se forte associação entre as variáveis ao nível de 5% de significância, sendo que o valor do Qui-Quadrado, com 24 graus de liberdade, foi de $X^2_{cal} = 136{,}12 > X^2_{tab} = 13{,}85$, validando a aplicação da AC.

A variação total existente entre as variáveis (inércia total) encontra-se na Tabela 4. Verifica-se que as duas primeiras dimensões conseguem descrever a associação entre as variáveis com uma variação acumulada de explicação de 79,05%, sendo a primeira coordenada com 47,75% da inércia, e a segunda coordenada 31,30%.

Tabela 4 - Inércia associada as 4 dimensões

Dimensão	Inércia	Variação explicada (%)	Variação acumulada explicada (%)
1	0,929	47,75	47,75
2	0,609	31,30	79,05
3	0,406	20,89	99,94
4	0,001	0,06	100,00

Fonte: Autor (2018).

O “mapa perceptual” bidimensional, associando o serviço executado durante a marcação e a frequência de execução encontra-se na Figura 3. Verifica-se que os itens 2.2 e 2.4 estão associados a categoria de sempre executados. Já os itens 2.7 e 2.3 nunca são executados e o item 2.1 raramente executado, como destacado anteriormente.

ISSN 2358-4947

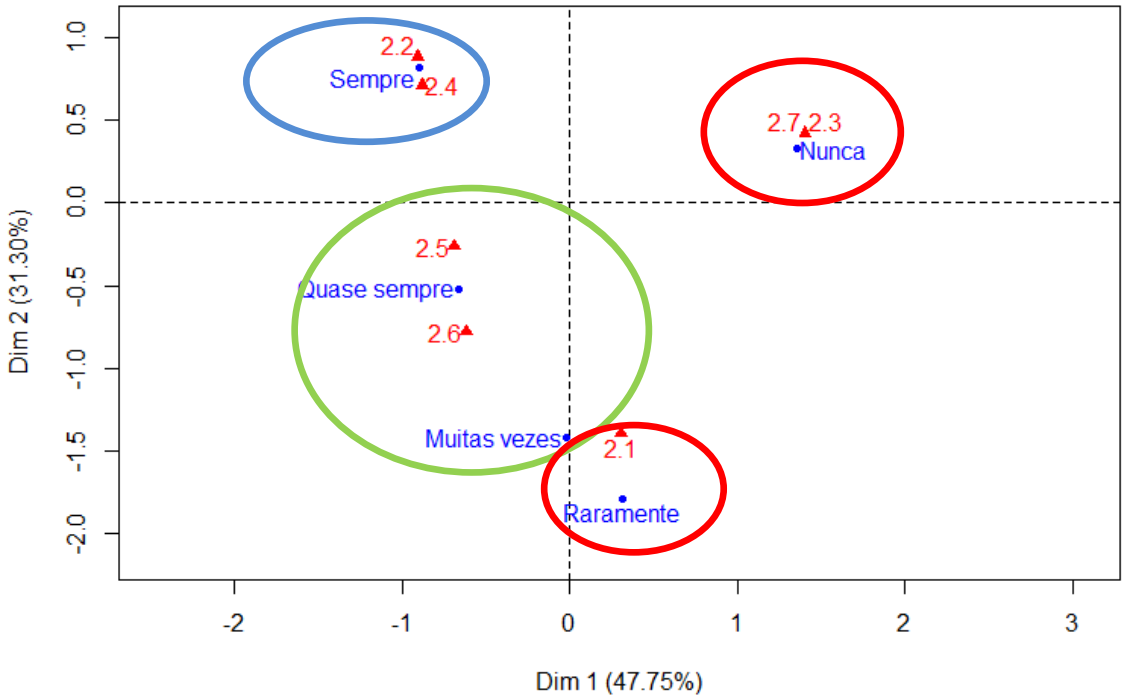


Figura 3 - Serviço de Marcação executado x Frequência de execução.

Fonte: Autor (2018).

O item 2.3 contempla em localizar o ponto mais alto da laje e assentar um bloco com menor espessura de argamassa possível. A técnica utilizada na obra consistia apenas em assentar os blocos estratégicos com o auxílio dos fios de referência. Em dias de tempo chuvoso notava-se em algumas regiões das lajes poças d'água, como a evidenciada na, demonstrando a existência de desníveis.

O fato de não se investigar o desnível da laje pode acarretar em algumas consequências no decorrer do assentamento dos blocos, como por exemplo, haver juntas horizontais fora dos limites pré-estabelecidos pela NBR 15961-2 (2011) nas camadas subsequentes da primeira fiada.

A NBR 15961-2 (2011) já estabelece a possibilidade de executar juntas horizontais na primeira fiada mais espessas, de no máximo 20 mm, visando contornar tais situações. Além disso, especifica que em caso de necessidade de um nivelamento maior, deve ser utilizado material de mesma resistência da laje.

O item 2.7, posicionar e fixar os escantilhões, como citado, nunca foi executado durante toda a análise em canteiro de obra. O método de execução que envolve o uso do equipamento, segundo Manzione (2004) é usado com a finalidade de se nivelar e assentar

ISSN 2358-4947

os blocos de concreto garantindo seu prumo. Deste modo, seu uso auxilia em quesitos do plano de elevação especificado e no prumo, amparando os quesitos de aceitação definidos pela NBR 15961-2 (2011).

No entanto, a norma NBR 15961-2 (2011) redigida acerca da execução e controle de obras não cita a necessidade do uso deste equipamento, tornando-o facultativo em obra.

4 Conclusões

Por meio do presente trabalho foi possível compreender a eficiência da mão de obra responsável pela execução processo executivo de alvenaria estrutural. A ACS indicou algumas atividades críticas, desencadeadas pela não execução e pela baixa frequência de execução, tais como: a não verificação do projeto durante o assentamento, possíveis desníveis das lajes, o não uso de escantilhão e a falta de umedecimento das superfícies de assentamento durante dias quentes.

Percebeu-se há a necessidade de se realizar a execução mais atentamente, para evitar a variação na frequência de algumas atividades que possam eventualmente desencadear prejuízos a estrutura, obtendo assim índice de execução satisfatório e com resultados dentro da tolerância.

Conclui-se que a ACS foi eficiente, indicando que a execução da alvenaria estrutural do caso estudado apresenta algumas falhas durante seu processo construtivo, mas que são passíveis de melhorias através de orientação e fiscalização mais rígida. Assim, ter-se-á uma obra de qualidade, limitando a possibilidade de problemas futuros, tornando o método de construção mais acessível e seguro e fazendo prevalecer as vantagens que esse sistema construtivo possibilita.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15961-1**: Alvenaria Estrutural – Blocos de concreto: Projeto. Rio de Janeiro, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15961-2**: Alvenaria Estrutural – Blocos de concreto: Execução e Controle de obras. Rio de Janeiro, 2011.

FAGUNDES, R. S. **Distribuição slash multivariada aplicada a dados agrícolas.** Tese de Doutorado – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE, Cascavel/PR, 2017.

ISSN 2358-4947

FERREIRA, D. **Estatística multivariada**. Lavras: Editora UFLA, 2011.

GREENACRE, M. J. **Correspondence Analysis in Practice**. 2 ed. Chapman & Hall/CRC 2007.

INFANTOSI, A. F. C.; COSTA, J. C. G. D.; ALMEIDA, R. M. V. R. **Análise de correspondência:** base teóricas na interpretação de dados categóricos em Ciências da Saúde**.** Caderno de Saúde Pública, Rio de Janeiro, v. 30, n. 4, p. 473 – 486, 2014.

LATTIN, J.; CARROL, J. D.; GREEN, P. E. **Análise de Dados Multivariados**. São Paulo: Cengage, 2011.

MANZIONE, L. **Projeto e Execução de Alvenaria Estrutural.** São Paulo: O Nome da Rosa, 2004.

MINGOTI, S. A. **Análise de dados através de métodos de estatística multivariada**: uma abordagem aplicada. Belo Horizonte: UFMG, 2005. 295 p.

LÊ, S.; JOSSE, J.; HUSSON, F. **FactoMineR:** An R Package for Multivariate Analysis**.** *Journal of Statistical Software*. **25(1)**. p. 1-18, 2008.

LIKERT, R. **A technique for the measurement of attitudes.** Archives of Psychology. n. 140, p. 44-53, 1932.

OLIVEIRA, I. G. De. **Análise de correspondência aplicada a preposições sobre a eficiência e eficácia do processo de compras públicas a partir da percepção de diferentes atores envolvidos.** Rev. Ciências Administrativas, Fortaleza, v. 21, n. 1, p. 131-162, jan./jun. 2015.

R Development Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017.

SILVEIRA, L. S.; BARBOSA, M. C. B.; SILVA; R. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM):** Uma análise crítica**.** Ver. Brasileira de Ensino de Física, v. 37, n. 1, 1101, 2015.

STEINER, M. T. A.; CHAVES NETO, A; BRAULIO, S. N.; ALVES, V. **Métodos estatísticos multivariados aplicados à engenharia de avaliações.** Revista Gestão e Produção, São Carlos, v. 15, n. 1, p. 23-32, jan.-abr. 2008.

YIN, R. **Estudo de caso**: Planejamento e Métodos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

RELATO DE EXPERIÊNCIAS COM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM DISCIPLINA DO ENSINO SUPERIOR

Bruno Gonçalves
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Brunomiguel281@gmail.com

Thalia Falquievicz Corassa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
thaliacorassa@hotmail.com

Resumo

O presente artigo relata algumas considerações feitas acerca das atividades propostas durante o primeiro semestre do ano de 2018, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática (RPMM), do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel. Visamos aqui, além de relatar, conciliar as atividades desenvolvidas no decorrer do semestre com as ideias apresentadas pelos autores dos textos lidos acerca da temática e, também, com as discussões realizadas e as sínteses apresentadas pelo docente da disciplina. Concluímos que, a Tendência Resolução de Problemas é uma ferramenta muito útil no ensino aprendizagem de Matemática, pois desenvolve no aluno a arte de resolver problemas, levando-o a encontrar diversos caminhos para a resolução de uma determinada situação-problema, instigando-o a construir o seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Tendências. Resolução de Problemas. Educação Matemática

1 Introdução

O presente trabalho tem o intuito de relatar algumas análises realizadas acerca das atividades propostas no decorrer do primeiro semestre de 2018, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática (RPMM), do Curso Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná *campus* de Cascavel, ministrada pelo professor Dr. Tiago Emanuel Klüber. Visamos aqui, além de relatar, relacionar as experiências com os textos estudados ao longo do semestre, elencando também as situações trabalhadas em sala e as discussões realizadas acerca da Resolução de Problemas no decorrer da disciplina.

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino de Matemática que propicia o desenvolvimento de estratégias e técnicas na resolução de situações-problema. Colabora para um amadurecimento das estruturas cognitivas, levando os alunos a raciocinar logicamente, e serem capazes de resolver problemas do seu cotidiano.

ISSN 2358-4947

Para Van de Walle (2001) apud Onuchic (2001, p. 81), um problema é definido como “qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Ou seja, é aquilo que não se sabe fazer, mas que está interessado em fazer”.

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar Matemática, receberam atenção a partir de Polya, considerado o pai da Resolução de Problemas. Polya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.

Segundo Krulik (1997, p. 9), "aprender a resolver problemas é a razão principal para se estudar matemática". Desta forma, cabe ao professor em sua prática pedagógica ensinar a resolver problemas. E assim, professor e aluno, juntos, constroem o conhecimento matemático e a apropriação dos conteúdos se utilizando da Resolução de Problemas.

Nas aulas de RPMM, buscamos resolver ou criar, em grupos, situações-problemas de temas variados, abordando diferentes conteúdos, após isso, fizemos socializações dos resultados obtidos em cada um dos grupos. Realizamos, também, a leitura de textos e concluímos com seminários, que esclareceram um pouco mais sobre esta Tendência. Diante do exposto, buscamos no presente trabalho, apresentar as tarefas realizadas, bem como o desenvolvimento delas e a forma como foram abordadas em sala de aula, descrevendo os apontamentos e os diversos conceitos debatidos. De forma que a conclusão de cada atividade seja diretamente interligada com as concepções apresentadas na bibliografia estudada. Com o avançar das aulas e o desenvolvimento das atividades evoluímos nas compreensões em torno deste tema, consequentemente, a visão inicial que tínhamos, sofreu mudanças. Nas seções seguintes relatamos as atividades e nosso entendimento sobre o assunto, elencando algumas concepções de Resolução de Problemas na Educação Matemática.

2 Descrição das atividades

Na busca de proporcionar um ensino de Matemática mais relevante e instigante, surgem as Tendências em Educação Matemática. Acredita-se que uma proposta metodológica, fundamentada nas Tendências em Educação Matemática, possibilita uma melhor compreensão e torna a construção do conhecimento matemático mais significativo, sendo capaz de tornar a matemática uma disciplina agradável, ou seja, a utilização de uma Tendência no processo ensino-aprendizagem da Matemática pode contribuir para que

ISSN 2358-4947

professores e alunos vivenciem diferentes formas de ensinar e aprender Matemática. Nesse sentido, a Resolução de Problemas, uma das Tendências em Educação Matemática, propõe uma forma de aprender e ensinar diferente das metodologias tradicionais.

De acordo com Onuchic (2011, p. 82),

> O ensino por meio da Resolução de Problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

O autor ainda coloca que os professores que ensinam matemática por meio da Resolução de Problemas se empolgam e não querem voltar a ensinar da forma tradicional, pois sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.

No decorrer do primeiro semestre de 2018, na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, desenvolvemos diferentes atividades acerca do assunto Resolução de Problemas.

Para a primeira atividade o professor pediu para que pesquisássemos um problema para debatermos na aula. Grande parte dos problemas apresentados se tratava de aplicações, os quais tinham respostas imediatas por meio de técnicas e algoritmos. O que não se enquadra no ensino da matemática através da Resolução de Problemas.

Segundo Polya (1997, p. 1-2),

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.

Em sequência às atividades, para elucidar o conceito anterior, recebemos uma lista contendo diversos problemas, para serem resolvidos em grupos e em sequência apresentados para a turma. (Anexo 1)

Tratava-se de problemas com diversas soluções, o problema 1 pedia para descrever uma história a partir de uma interpretação gráfica. Os problemas 2, 3, 4, 6 e 7 eram o inverso, pediam para esboçar gráficos de acordo com a história descrita, porém os enunciados não disponibilizavam nenhum valor, somente a interpretação do que acontecia. No problema 5 era necessário descrever, o que acontecia na interpretação gráfica, porém a

ISSN 2358-4947

mesma também não apresentava valores. E, por fim, o problema 8 sugeria para realizar interpretações acerca de duas tabelas.

Após a resolução, cada grupo apresentou a forma como pensou em cada questão, havendo assim divergências de respostas, porém todas estavam corretas, pois as questões não tinham um resultado imediato, podendo assim conjecturar diversas hipóteses.

As análises e discussões desses problemas foram muito interessantes, pelo fato de que a maioria de nós nunca havia tido contato com esse tipo de problema, os quais exigiram mais raciocínio lógico do que algébrico, pois os exercícios não possuíam valores numéricos.

Para entendermos ainda melhor a importância desse tipo de problema, o professor disponibilizou uma segunda lista contendo 4 problemas, com características muito semelhantes á lista anterior. (Anexo 2)

Novamente os problemas poderiam ser abordados de diversas formas, o primeiro se tratava do uso da simbologia matemática, executando operações e interpretando os resultados. O segundo retrata a importância da comunicação matemática. O terceiro pode ser considerado um problema presente no nosso dia a dia. E o último, consistia em realizar a prova de um teorema, de quantas maneiras era possível realizar essa prova e se é possível generalizá-la.

A condução da aula e da realização das atividades nos fez perceber mais uma vez a importância do trabalho com Resolução de Problemas, pois o docente estava em constante observação e levantando conjecturas se nossos resultados estavam realmente corretos, porém sem dar a resposta, isso nos fazia pensar melhor e analisar os possíveis equívocos. Essa é a postura que um professor deve ter em sala de aula, instigar os alunos, porém deixá-los construir seu próprio conhecimento.

Em consequência dos debates e estudos acerca das situações-problema apresentadas anteriormente, chegamos à conclusão que esses tipos de problemas são os que devemos adotar em nossa prática docente, quando trabalharmos com o ensino de matemática a partir da Resolução de Problemas, pois eles apresentam diversas formas e caminhos de resolução, necessitando de um raciocínio além do domínio das operações matemáticas. Desenvolvendo assim, a capacidade de pensar matematicamente, o fazer matemática, a técnica de conjecturar, de levantar hipóteses e trabalhar em cima das mesmas, para obter um resultado esperado. E assim, despertar o gosto pela matemática.

ISSN 2358-4947

De acordo com Schoenfeld, A. (1996, p. 11), “Estes tipos de comportamentos – modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar – ou, seja, atividades com sentido matemático, é aquilo que a Matemática realmente é”.

A próxima tarefa se tratava de um problema que deveria ser resolvido em grupo e, a partir da resolução identificar os possíveis conteúdos que poderiam ser abordados por intermédio do mesmo. Segue o problema:

> Um granjeiro pretende construir um novo galinheiro e para isso compra 50 metros de tela. No terreno escolhido já existia uma parede onde irá fixar a tela de forma que o galinheiro tenha forma retangular. As galinhas que pretendem criar são de uma raça especial, assim cada uma necessita de 1 metro quadrado de área. Quais são as dimensões do galinheiro para que ele possa criar o maior número possível de galinhas?

Após as diversas resoluções, houve a discussão sobre o que poderia ser trabalhado, chegando a uma série de conteúdos como, introduzir o conceito de função quadrática, representação gráfica, lei de formação, dependência de variáveis, domínio e imagem, conceitos de área, estimativa, entre outros.

Em seguida, o professor solicitou para que na próxima aula, cada aluno trouxesse um problema e os conteúdos que poderiam ser pautados a partir dele, para que fosse discutido no grupo e assim escolher somente um que deveria ser apresentado para a turma.

A partir da análise da situação-problema apresentada pelo docente e todas as demais apresentadas pelos grupos, foi possível identificar que um “simples problema” pode abranger uma imensidade de conteúdos intrínsecos a ele. Cabe ao professor ter discernimento para escolher o adequado, de acordo com os objetivos que se pretende alcançar.

Desta forma, percebemos que ao se trabalhar com Resolução de Problemas se faz necessário saber o que realmente se pretende trabalhar, quais conteúdos serão abordados e a forma como abordá-los. No momento que é disponibilizado o problema para o aluno, o professor já deve ter em mente o que quer com esse problema, se é introduzir um conteúdo ou reforçar conceitos já aprendidos.

Em sequência, estudamos o texto escrito por Thomas Butts (1997, p. 33), “Formulando problemas adequadamente”, no qual o autor apresenta cinco tipos de problemas matemáticos, sendo eles: Exercícios de Reconhecimento, Exercícios Algorítmicos, Problemas de Aplicação, Problemas de Pesquisa Aberta e Situações-

ISSN 2358-4947

problemas. Os três primeiros recaem em problemas nos quais há estratégias de resolução, basta aplicar conceitos. Ao contrário dos outros dois, os quais são situações a ser pensadas e exploradas, encontrando assim um caminho para resolver. E ainda, nesse texto são apresentadas sugestões para formular problemas de modo que desperte a motivação e o aprendizado na resolução, desenvolvendo a arte de resolver problemas.

A partir dos estudos feitos, o docente pediu para que fosse realizado um trabalho, o qual deveria conter um exemplo de cada tipo de problema apresentado no texto, e por fim, escolher um problema a ser reformulado segundo as sugestões indicadas.

A conclusão dessa tarefa foi apresentar os trabalhos em sala de aula, realizando as discussões e apontamentos referentes a cada trabalho. A maioria dos alunos relatou a dificuldade para encontrar exemplos que se enquadrassem em cada tipo de problema, e ainda a dificuldade em conseguir reformular um problema de acordo com as sugestões apresentadas por Butts (1997).

Em razão dessa atividade percebemos a importância da reformulação dos problemas, pois grande parte dos problemas convencionais se apresenta de forma a não despertar a motivação dos alunos na resolução. Ainda, chegamos à conclusão que os bons problemas são aqueles que apresentam enunciados de fácil entendimento, que podem ser resolvidos por diversos caminhos, de forma a serem explorados pelos alunos, ou seja, criativos e desafiadores, que despertem a arte e a satisfação de resolver problemas. Para isso, é necessário saber reformulá-los. Segundo Polya (1995, p. v):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

A próxima atividade realizada em sala consistia no experimento abaixo, o qual seria realizado em grupos.

Experimento I: Olhando através de tubos

Neste experimento, a medida da imagem visualizada é função da distância em que você se encontra da parede. Consideremos a distância que você se encontra da parede como sendo a variável independente e a medida da imagem que você enxerga como a variável dependente. Veja a figura 1 a seguir.

ISSN 2358-4947

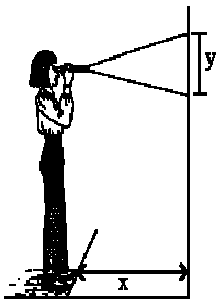


Figura 1 – Experimento.
Fonte: Aguiar (2008).

Equipamento

- Cilindros ocos de tamanhos diferentes e mesmo diâmetro, um por grupo (canos, rolos de papel);
- Trenas, duas por grupo. Este material pode ser confeccionado pelo grupo para facilitar a visualização das medidas;
- Folhas de papel milimetrado, uma por aluno.

Procedimento

- Trabalhar em grupo de dois ou três;
- Utilizar sempre o mesmo tubo nesta atividade;
- Fixar uma trena na parede;
- Posicionar-se a uma distância x da parede e visualizar a trena fixada (y);
- Anotar numa tabela os valores de x e y;
- Repetir algumas vezes este procedimento, para valores diferentes de x;
- Construir, na folha de papel milimetrado, o gráfico (distância da parede x medida da imagem) a partir dos valores obtidos para x e y.

A partir do desenvolvimento do experimento percebemos que o mesmo poderia ser utilizado na introdução do conteúdo de funções. Mais uma vez, ao decorrer da atividade o docente estava passando nos grupos indagando os métodos de resolução, nos levando a refletir e analisar nossos resultados. Por fim, realizamos o debate sobre o experimento,

ISSN 2358-4947

surgindo divergências entre as respostas dos grupos, porém com a discussão chegamos a um resultado concreto.

Em sequência, o docente pediu para que cada aluno procurasse um problema passível a se tonar um experimento, para ser debatido no grupo, e então, escolher um para transformar em experimento e aplicar o mesmo para a turma, utilizando os conceitos e abordagens de acordo com o ensino através da Resolução de Problemas. Foram apresentados e discutidos diversos experimentos, cada um com abordagem de conteúdos diferentes.

Diante disso, mediante as análises feitas chegamos à conclusão que o ensino de matemática por meio da Resolução de Problemas também pode ser abordado por meio de atividades práticas e lúdicas, deixando de lado a ideia errônea que não se pode fazer nada de diferente nas aulas de Matemática, a não ser apresentar os conteúdos de maneira teórica, utilizando o livro didático. Enfatizamos que o professor deve sempre ter um objetivo para a atividade, o que espera alcançar com a mesma.

Schoenfeld (1997) apud Justo (2012, p. 38), afirma que o professor deve fazer o uso de práticas metodológicas, as quais tornam as aulas mais dinâmicas e não restringem o ensino de matemática a modelos clássicos como exposição oral e resolução de exercícios, pois essas práticas desvirtuam a essência da tarefa de resolver problemas que é pensar por si próprio. Transformam aquilo que deveria ser desafiador e instigante em uma tarefa cansativa, pouco produtiva e com poucos ganhos para a aprendizagem.

Para encerrar as tarefas do semestre realizamos o estudo de alguns textos, que foram discutidos e debatidos em sala de aula, com o objetivo de concretizar as ideias e conceitos aprendidos durante as atividades realizadas, referente ao ensino da matemática por meio da Resolução de Problemas.

3 Considerações Finais

A partir das análises e atividades desenvolvidas durante o primeiro semestre na disciplina de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática, percebemos que a Resolução de Problemas é uma tendência de suma importância e deveria ser mais utilizada no ensino-aprendizagem de Matemática, pois desenvolve nos alunos a arte de resolver problemas e o fazer matemático. Mostrou ainda, as inúmeras formas e caminhos para a resolução de uma determinada situação-problema, instigando assim, a conjecturar possíveis resultados.

ISSN 2358-4947

Desta forma, como docentes devemos adquirir em nossa prática pedagógica essa postura que a Resolução de Problemas nos apresenta, instigando os alunos a construir seu próprio conhecimento, se superando a cada dia e realizando novas descobertas. O que não é tão comum no ensino de Matemática da realidade, o qual os professores verem as dificuldades dos alunos e diante disso acabam fornecendo as respostas ou até mesmo resolvendo o problema para o aluno. É necessário que o professor saiba realizar a análise dos problemas e atividades, de forma a adequá-los para sua aula.

Portanto, a metodologia Resolução de Problemas é uma ferramenta muito útil no ensino aprendizagem, demonstrando que é possível abordar o ensino da Matemática de uma forma mais prática e motivadora, deixando de lado a concepção que a Matemática está pronta e acabada.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, R. Curso de Extensão Ensino Médio. Departamento de Matemática. CCT-UDESC, Joinville, 2008.

BUTTS, T.; Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org). A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

JUSTO, Jutta Cornelia Reuwsaat. Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Fundamental. Educação Matemática em Revista**.** Rio Grande do Sul, v. 1, n. 13, p.37-45, jun. 2012.

KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org). A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Boletim de Educação Matemática. São Paulo, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

POLYA, George**.** A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

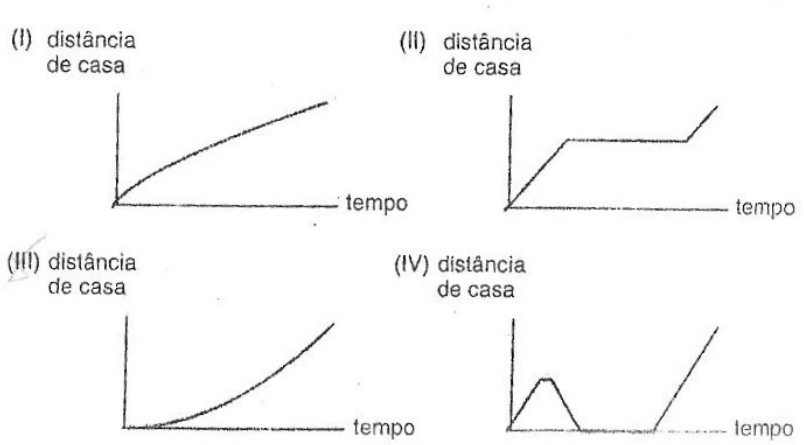
POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na *high school*. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Org). A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997. p. 1-3.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds). Investigar para aprender matemática. Lisboa: APM e Projeto MPT, 1996.

ISSN 2358-4947

Anexo 1

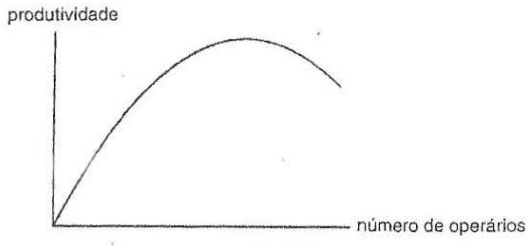
1. Qual dos gráficos da figura abaixo, melhor se enquadra nas três histórias seguintes? Escreva uma história para o gráfico restante.
   a) Eu tinha acabado de sair de casa quando percebi que havia esquecido meus livros; então, eu voltei para buscá-los.
   b) Tudo ia bem até que o pneu furou.
   c) Eu iniciei calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta de que iria me atrasar.



2. Esquentou durante toda manhã e, de repente, ficou bem mais frio por volta de meio-dia, quando uma tempestade se formou. Após a tempestade esquentou novamente, antes de tornar a resfriar ao anoitecer. Esboce um possível gráfico da temperatura desse dia em função do tempo.
3. Após se aplicar uma certa droga a um paciente com batimento cardíaco acelerado, a pulsação caiu dramaticamente e, então, voltou a subir lentamente à medida que o efeito da droga foi passando. Esboce um possível gráfico da taxa de batimento cardíaco em função do tempo, a partir do momento em que a droga foi aplicada.
4. Em geral, quanto mais fertilizantes se usa, melhor é o rendimento de uma lavoura. Entretanto, se for colocado muito fertilizante, a lavoura fica envenenada e o rendimento cai rapidamente. Esboce um possível gráfico ilustrando o rendimento da lavoura em função da quantidade de fertilizante aplicada.

ISSN 2358-4947

5. Descreva o que a figura a seguir lhe diz a respeito de uma linha de montagem cuja produtividade é representada em função do número de operários que ali trabalham.



6. Um vôo do Aeroporto de Dulles, na cidade de Washington D.C., até o Aeroporto de LaGuardia, em New York, tem que circular LaGuardia diversas vezes até obter permissão para pousar. Esboce um gráfico da distância do avião até Washington em função do tempo, desde o momento da decolagem até o seu pouso.
7. Em seu Guia do Comportamento Excruciantemente Correto, a Srta. Manners afirma:

> Existem três elementos em um encontro – diversão, comida e afeição – dos quais pelo menos dois têm que ser oferecidos. É costume começar uma série de encontros com uma boa quantidade de diversão, uma quantidade moderada de comida e não mais que uma mera sugestão de afeição. À medida que a quantidade de afeição aumenta, a diversão pode ser reduzida proporcionalmente. Quando a afeição tiver substituído a diversão, já não poderemos mais chamar isto simplesmente de encontro. Em circunstância alguma a comida poderá ser omitida.

   Baseado nessa afirmação, esboce um gráfico ilustrando diversão em função de afeição, supondo que a quantidade de comida permanece constante. Indique o ponto do gráfico em que o relacionamento começa, assim como aquele em que o relacionamento deixa de ser chamado de um simples encontro.
8. Quando Galileu estava formulando as leis do movimento, ele considerou o deslocamento de um corpo partindo do repouso e caindo em queda livre. Originalmente, ele pensou que a velocidade de tal corpo era proporcional à distância já percorrida na queda. Os dados da Tabela 1.2 esclarecem de alguma forma, a hipótese de Galileu? Que hipótese alternativa é sugerida pelos dois conjuntos de dados nas Tabelas 1.2 e 1.3?

ISSN 2358-4947

TABELA 1.2

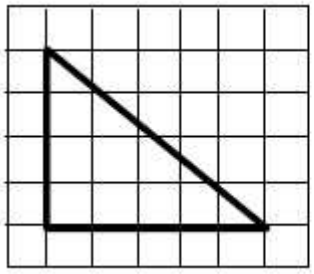
Distância (m)	0	1	2	3	4
Velocidade (m/s)	0	2,4	4,4	4,8	5

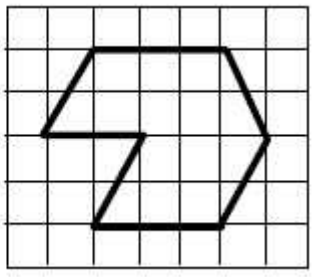
TABELA 1.3

Tempo (s)	0	1	2	3	4
Velocidade (m/s)	0	9,8	19,6	29,4	39,2

Anexo 2

1. Um autocarro do exército leva 36 soldados. Se 1128 soldados estão a ser mandados para os seus lugares de treino, quantos autocarros são precisos?
2. Imagina que estás a falar com um aluno da tua sala ao telefone e queres que o aluno desenhe algumas figuras (podem ser partes de um trabalho de casa, por exemplo). Os outros alunos não podem ver as figuras. Escreve uma série de instruções com as quais os outros alunos consigam desenhar as figuras mostradas na figura junta:





3. Supõe que os testes à sida são 98% precisos: 98% das pessoas que têm a doença testam positivamente e 98% das pessoas que não têm a doença testam negativamente. Supõe ainda que 0.5% da população (1 em cada 200) tem a doença. A uma amostra aleatória da população é feito o teste. Se uma pessoa tem um teste positivo sob estas condições, qual é a probabilidade daquela pessoa ter a doença? Justifica a tua resposta.
4. Todos nós sabemos que o teorema de Pitágoras diz que se a e b, são o comprimento dos catetos de um triângulo retângulo no plano e c é o comprimento da hipotenusa, então, $a^2 + b^2 = c^2$. Vamos começar daí. Podes provar o teorema? De quantas maneiras diferentes? Consegues estendê-lo ou generalizá-lo? Sabes qual é o número total de soluções tipo, como por exemplo, o (3,4,5)? Há outros ternos idênticos? Consegues encontrá-los todos? Quantos mais?

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

MODELAGEM MATEMÁTICA VIA SUPPORT VECTOR REGRESSION NA ENGENHARIA CIVIL: EXEMPLO DE APLICAÇÃO UTILIZANDO O SOFTWARE R

Wagner Alessandro Pansera
UTFPR-TD
pansera@utfpr.edu.br

Thiago Alessi Reichert
UTFPR-TD

Carlos Eduardo Tino Balestra
UTFPR-TD

Resumo

Support Vector Regression (SVR) é uma técnica de aprendizado de máquina supervisionado que recebe um conjunto de amostras na forma par ordenado (x, y). O objetivo do SVR é encontrar uma função y = f(x), com uma margem de erro caracterizada pelo intervalo $y_i - \varepsilon$ e $y_i + \varepsilon$, onde desvios são permitidos desde que não ultrapassem a margem especificada ε. A SVR tem sido aplicado em vários campos: séries temporais e previsões financeiras, aproximação de análises de engenharia complexas, etc. Contudo, poucos estudos aplicando SVR foram realizados na área da engenharia civil. Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho é apresentar o uso de SVR a partir de um *software* livre que tenha suporte para a técnica e seja de fácil acesso para profissionais e alunos de graduação da engenharia civil. Para isso, foi utilizado o *software* R (versão 3.5.2) e o pacote "e1071", apresentando uma aplicação utilizando dados publicados na literatura, referentes a perfis de concentração de cloretos em estruturas de concreto armado.

Palavras-chave: *Machine learning*. Capacidade preditiva. Estatística computacional

1 Introdução

Se fazer ciência é a capacidade de observar e descrever os fenômenos naturais, a matemática tem uma importância fundamental nos estudos científicos, pois é a partir da observação de fenômenos, processos ou sistemas (que podem ser físicos, químicos, biológicos, econômicos) que se busca determinar as leis que os regem. Assim, se passíveis de serem descritas por relações matemáticas, essas leis dão origem aos modelos matemáticos.

Nesse contexto, o termo modelo é utilizado como objeto abstrato, que procura imitar as principais características de um objeto real com o propósito de representá-lo (ARENALES *et al*., 2011). Em geral, para formular um modelo matemático, simplificações razoáveis do sistema ou problema real precisam ser consideradas (em diferentes níveis) e a validação do modelo depende da coerência de sua solução com o contexto original.

ISSN 2358-4947

Com isso, o modelo matemático é uma representação simplificada (abstração) do problema real. Assim, ele deve ser suficientemente detalhado, para captar os elementos essenciais do problema, e, ao mesmo tempo, suficientemente sintetizado, de modo que permita o tratamento por métodos de resolução. O diagrama da Figura 1 ilustra um processo simplificado da abordagem de solução de um problema usando a modelagem matemática.

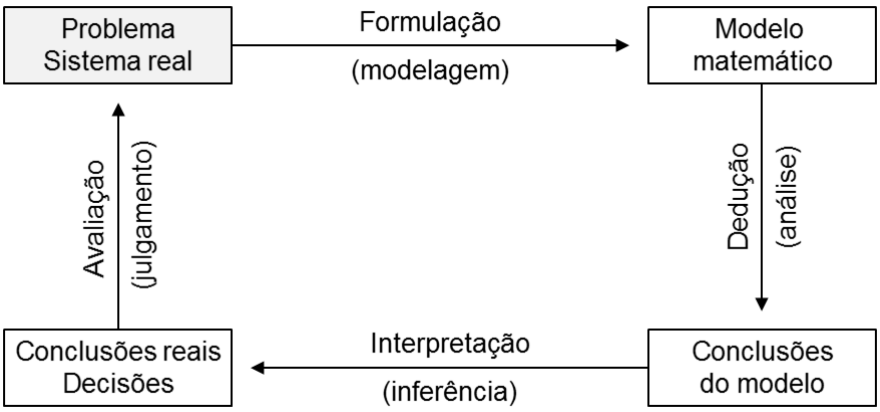


Figura 1 – Processo de modelagem.
Fonte: Adaptado de Arenales *et al*. (2011).

A formulação (modelagem) define as variáveis e as relações matemáticas para descrever o comportamento relevante do sistema ou problema real. A dedução (análise) aplica técnicas matemáticas e tecnologias (*softwares*) para resolver o modelo matemático e visualizar quais conclusões ele sugere. Na interpretação (inferência) argumenta-se que as conclusões retiradas do modelo têm significado suficiente para inferir conclusões ou decisões para o problema real. Por fim, uma avaliação (julgamento) dessas conclusões ou decisões inferidas deve ser realizada (ARENALES *et al*., 2011).

Assim, é possível que se conclua, após a etapa de avaliação, que os resultados obtidos não são adequados. Por isso, a definição do problema e sua modelagem matemática, frequentemente, exigem revisão e, então, o ciclo é repetido até que se obtenha conclusões reais sobre o problema no final do processo (ARENALES *et al*., 2011).

Nesse sentido, existem diversos métodos de modelagem matemática aplicáveis na engenharia civil, tais como: equações diferencias ordinárias e parciais, otimização e ajuste de curvas. Contudo, neste trabalho será abordado somente o ajuste de curvas.

ISSN 2358-4947

É comum o engenheiro civil se deparar com problemas de ajuste de curvas para dados amostrais e, para esse contexto, a técnica mais comumente desenvolvida é a regressão. Segundo Chapra e Canale (2016), a regressão é empregada quando há significativo grau de erro associado aos dados e, por isso, é geralmente utilizada para os dados de resultados experimentais.

Para essas situações, a estratégia é derivar uma única curva que represente a tendência dos dados sem necessariamente corresponder a quaisquer pontos individuais. Ferramentas usuais nessa perspectiva, as máquinas de vetores suporte (*Support Vector Machine* – SVM) são técnicas de aprendizado estatístico supervisionado. Originalmente foram desenvolvidas para a solução de problemas de classificação de padrões e, posteriormente, foram estendidas para a modelagem de dados, sendo denominada, então, como regressão por vetores suporte (*Support Vector Regression* – SVR) (BURGES, 1998; SMOLA; SCHÖLKOPF, 2004).

A ideia básica da SVR é encontrar a função que melhor se aproxima a um conjunto de observações e que propicie a inferência a respeito de uma nova observação (YAOHAO, 2016). Ou seja, o objetivo do SVR é encontrar uma função f(x), com uma margem de erro caracterizada pelo intervalo $[y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$, onde desvios são permitidos desde que não ultrapassem a margem especificada (ABREU; NETO, 2016).

Desse contexto, origina-se a principal motivação para utilização da SVR: elevada capacidade de generalização (uma medida da eficiência na previsão de dados que não pertençam ao conjunto utilizado para o treinamento). Assim sendo, evita-se o *overfitting*, situação na qual se obtêm baixos erros no conjunto de treinamento e erros elevados no conjunto de previsão (FERRÃO *et al*., 2007).

Softwares estatísticos são de grande importância na aplicação do método SVR para análise de dados, bem como, na interpretação dos resultados. No entanto, o custo de aquisição, normalmente, é relativamente alto.

Por isso, a demanda pelo chamado *software* livre ou de código aberto é grande atualmente. O ambiente R, ou somente “R” (como os usuários o chamam), é um *software* de domínio público, que tem se tornado bastante conhecido (PETERNELLI, 2011).

A maioria das atividades práticas de engenharia envolve a manipulação de uma grande quantidade de dados. Por isso, o conhecimento e a prática de estatística computacional são imprescindíveis para os engenheiros (MONTGOMERY; RUNGER; HUBELE, 2004).

ISSN 2358-4947

Dessa forma, o objetivo principal é divulgar a técnica SVR para profissionais e alunos de engenharia civil. Pretende-se apresentar o R como uma ferramenta poderosa e acessível, para auxiliar na utilização do método SVR, tanto no contexto profissional, quanto de pesquisa.

Explicações sobre o uso das funções necessárias para aplicar o método SVR no *software* R serão ilustradas com um exemplo, para facilitar a interpretação e adaptação a outros problemas similares. Não será apresentada a teoria matemática que envolve o método SVR, pois foge do escopo deste trabalho, mas para essa finalidade podem ser consultados Smola e Schölkopf (2004) ou Basak, Pal e Patranabis (2007).

2 Estudo de Caso

Balestra *et al*. (2019) realizaram um estudo sobre modelagem de perfis de concentração de cloretos em estruturas expostas a mais de 40 anos em diferentes ambientes de agressividade marinha. Os dados experimentais utilizados neste trabalho foram obtidos a partir de um perfil de concentração de cloretos apresentado nesse estudo de Balestra *et al*. (2019), de modo a apresentar um exemplo de aplicação com dados reais.

O estudo do processo de penetração de cloretos em estruturas de concreto armado é muito importante na engenharia civil, pois os cloretos provocam a corrosão das barras de aço presentes nos elementos estruturais. Esse fenômeno acaba afetando a integridade estrutural de construções como: casas, edifícios e pontes.

A modelagem dos perfis de concentração de cloretos tem dois objetivos principais:

(i) determinar os níveis da concentração de cloretos em função da profundidade; e

(ii) identificar a concentração máxima de cloretos (pico) e sua profundidade.

Para realizar a modelagem dos dados de concentração de cloretos no concreto, o primeiro passo é fazer a entrada dos dados de Balestra *et al*. (2019) no *software* R:

```
x=c(1,3,5,7,9,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48)
y=c(1.172,1.303,1.041,1.112,1.399,1.407,1.408,1.309,1.151,1.118,0.88
4,0.778,0.573,0.463,0.327)
plot(x, y, xlab="Profundidade (mm)", ylab="Concentração de cloretos
(%, cimento)", pch=19)
```

O resultado da entrada de dados pode ser visualizado na Figura 2, em que as abscissas (x) representam a profundidade na estrutura de concreto (em milímetros) e as ordenadas (y) a concentração de cloretos (em % em relação à massa de cimento).

ISSN 2358-4947

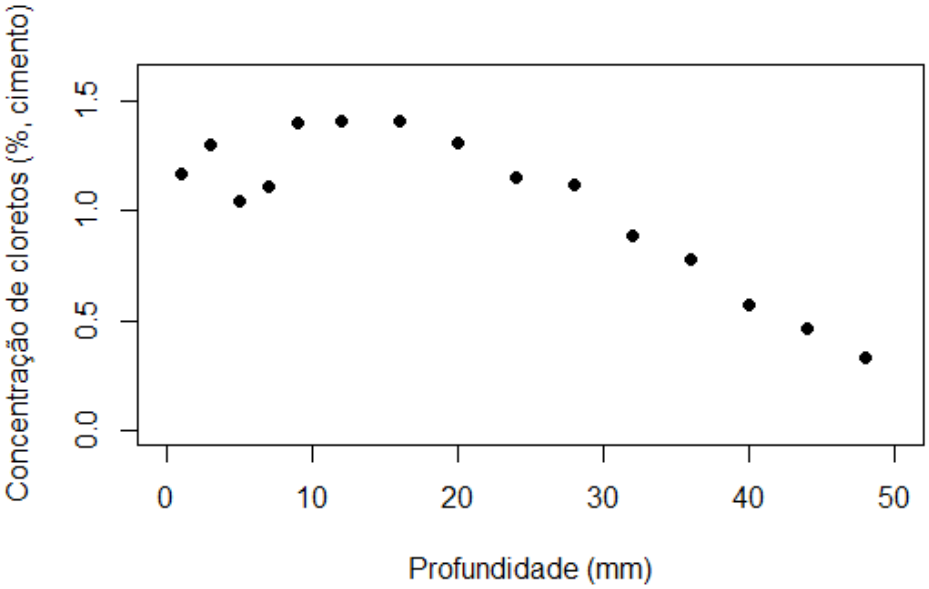


Figura 2 – Perfil de concentração de cloretos em uma estrutura de concreto.

Fonte: Os autores (2019).

Dessa forma, será utilizada a SVR para determinar a concentração de cloretos em função da profundidade na estrutura de concreto, ou seja, y = f(x).

Para que a SVR seja feita de forma eficiente, a seleção dos parâmetros C, ε e o tipo de função *kernel* devem ser estudados cuidadosamente. O valor de ε está relacionado com a amplitude do ruído presente no conjunto de treinamento e, sendo esta informação normalmente desconhecida, ε pode variar em um intervalo proposto pelo usuário (SMOLA; SCHÖLKOPF, 2004; ALVES, 2012; ACOSTA; AMOROSO; SANTANNA, 2016).

O parâmetro C determina a penalização para os casos em que a função de regressão aceita objetos com desvios maiores que o valor de ε. Dessa forma, a robustez do modelo de regressão depende da escolha do valor de C, que pode assumir valores entre 0 e ∞. Quando C é muito alto, o algoritmo é mais flexível, mas há uma probabilidade alta de uma adequação ao conjunto de treinamento, também chamada de *overfitting*. Isto significa que o algoritmo terá baixo desempenho na generalização. No entanto, um baixo valor de C pode fazer com que o algoritmo faça predições pobres devido à falta de flexibilidade. Esse fato é denominado *underfitting* (KUHN; JOHNSON, 2013).

As funções *kernel* mais utilizadas são a linear, polinomial, função de base radial (RBF) e sigmoidal (FACELI *et al*., 2011). Estas funções devem ser determinadas pelo usuário.

ISSN 2358-4947

Das diversas propostas de seleção de parâmetros existentes na literatura, foi utilizada a *grid search* (busca em grade). Conforme Bonesso (2013), a *grid search* se refere ao processo de busca exaustiva sobre um subconjunto do espaço de trabalho. A busca é realizada em um espaço formado pelos parâmetros de interesse e seu objetivo é encontrar pontos nos quais a acurácia seja a maior possível.

Resumindo, o usuário tem que escolher a função *kernel* mais adequada, bem como, utilizar a *grid search* para identificar os melhores parâmetros C e ε. Todo esse procedimento foi realizado com a utilização do pacote "e1071", por meio da função "svm", no ambiente estatístico do *software* R.

Para avaliar a acurácia dos modelos foi utilizado a raiz do quadrado médio do erro (RQME). Assim, o RQME será calculado conforme a Equação 1, em que $\hat{Y}_i$ é o valor da concentração de cloretos estimado por meio da SVR e O_i é o valor da concentração de cloretos observada experimentalmente.

$$RQME = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - O_i\right)^2} \quad (1)$$

3 Resultados e Discussão

O primeiro passo é identificar qual função *kernel* descreve melhor aos dados da Figura 2. Para realizar esta tarefa foram utilizados os comandos abaixo:

```
#Instalar o pacote e1071
install.packages("e1071", dependencies = TRUE)
#Carregar o pacote e1071
library(e1071)
#Gerar a SVR utilizando as funções kernel: radial, linear e polinomial
model1<- svm(y ~ x,type="eps-regression",kernel="radial")
model2<- svm(y ~ x,type="eps-regression",kernel="linear")
model3<- svm(y ~ x,type="eps-regression",kernel="polynomial")
#Obter os valores ajustados pelo método SVR
predictedY1 <- predict(model1)
predictedY2 <- predict(model2)
predictedY3 <- predict(model3)
#Plotar gráfico entre modelos e dados observados
lines(x, predictedY1, col="red",lty=1,lwd=2)
lines(x, predictedY2, col="blue",lty=2,lwd=2)
lines(x, predictedY3, col="purple",lty=3,lwd=2)
```

ISSN 2358-4947

```
legend("bottomleft",c("Radial","Linear","Polinomial"),title="Kernel"
,lwd=2,lty=1:3,col=c("red","blue","purple"),cex=.9)
```

O resultado da sequência de comandos acima pode ser observado na Figura 3, onde é possível identificar que a função *kernel* radial (ou RBF) apresentou o melhor ajuste aos dados amostrais.

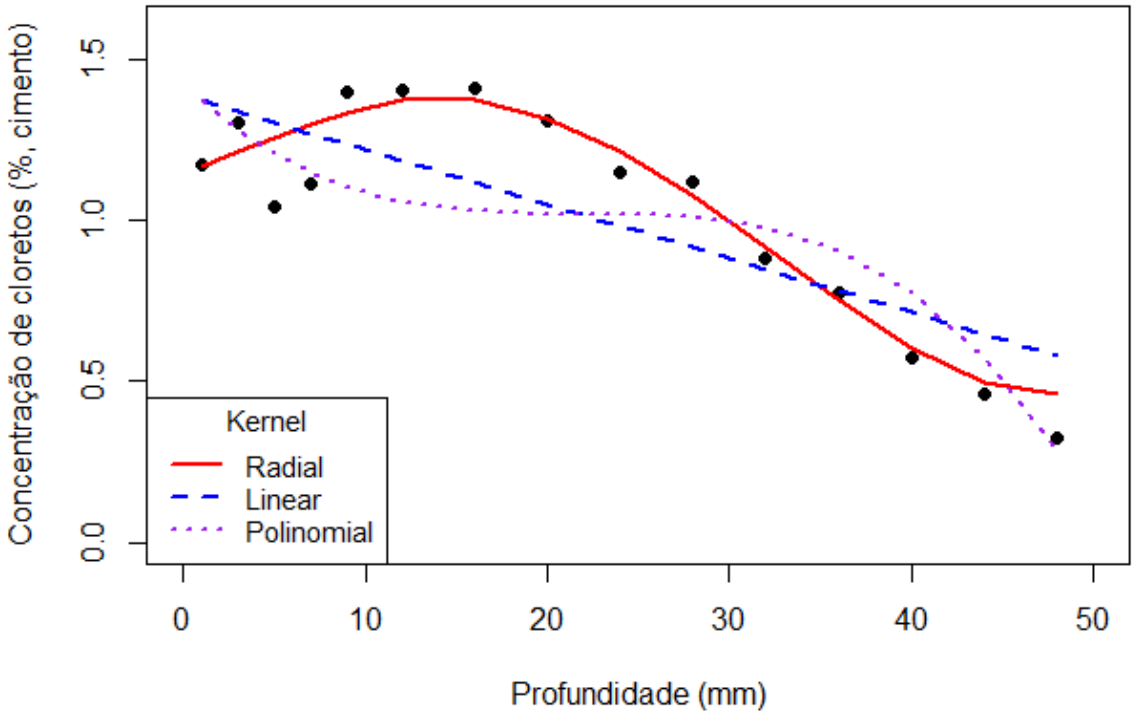


Figura 3 – Ajuste das funções *kernel* aos dados amostrais.

Fonte: Os autores (2019).

Além disso, foi calculado o RQME e gerada a Tabela 1.

```
#RQME da função RBF
error1<- model1$residuals
sqrt(mean(error1^2))
#RQME da função linear
error2<- model2$residuals
sqrt(mean(error2^2))
#RQME da função Polinomial
error3<- model3$residuals
sqrt(mean(error3^2))
```

ISSN 2358-4947

Tabela 1 – Raiz do quadrado médio do erro (RQME)

Função *Kernel*	RQME
Radial	0,0911
Linear	0,1911
Polinomial	0,2024

Fonte: Os autores (2019).

Observa-se na Tabela 1 que a função radial obteve o menor valor de RQME e selecionada para continuidade do estudo. Contudo, foram utilizados valores padrão dos parâmetros C e ε.

Alterando-se os valores desses parâmetros pode-se melhorar o desempenho da função radial. A maneira mais comum de fazer isso é realizar uma *grid search*. Isso significa que vamos treinar muitos modelos para os diferentes pares de C e ε, escolhendo o par que produzir menor RQME.

```
#Realizar grid search
otim <- tune(svm, y ~ x,type="eps-regression",kernel="radial", ranges
= list(epsilon = seq(0,1,0.1), cost = 2^(2:9)))
print(otim)
#Realizar grid search
plot(otim)
```

Há dois pontos importantes no código acima:

(i) Utilizou-se a *grid search* para treinar modelos com ε = 0, 0.1, 0.2, ...,1 e C = 2^2, 2^3, ..., 2^9. Portanto, serão avaliados 88 modelos (esse procedimento pode demorar).

(ii) O comando “otim” retorna o QME, portanto, deve ser convertido para RQME (Equação 1) antes de realizar comparações.

A Figura 4 apresenta o gráfico da *grid search*. Nesse gráfico nota-se que quanto mais escura a região é, melhor é o modelo (porque o RQME é mais próximo de zero em regiões mais escuras). Isso significa que se pode tentar outra *grid search* em um intervalo menor, ou seja, com valores entre 0 e 0,1 com passo 0,01. Além disso, o valor do custo (parâmetro C) igual a 2^2, 2^3 e 2^4.

ISSN 2358-4947

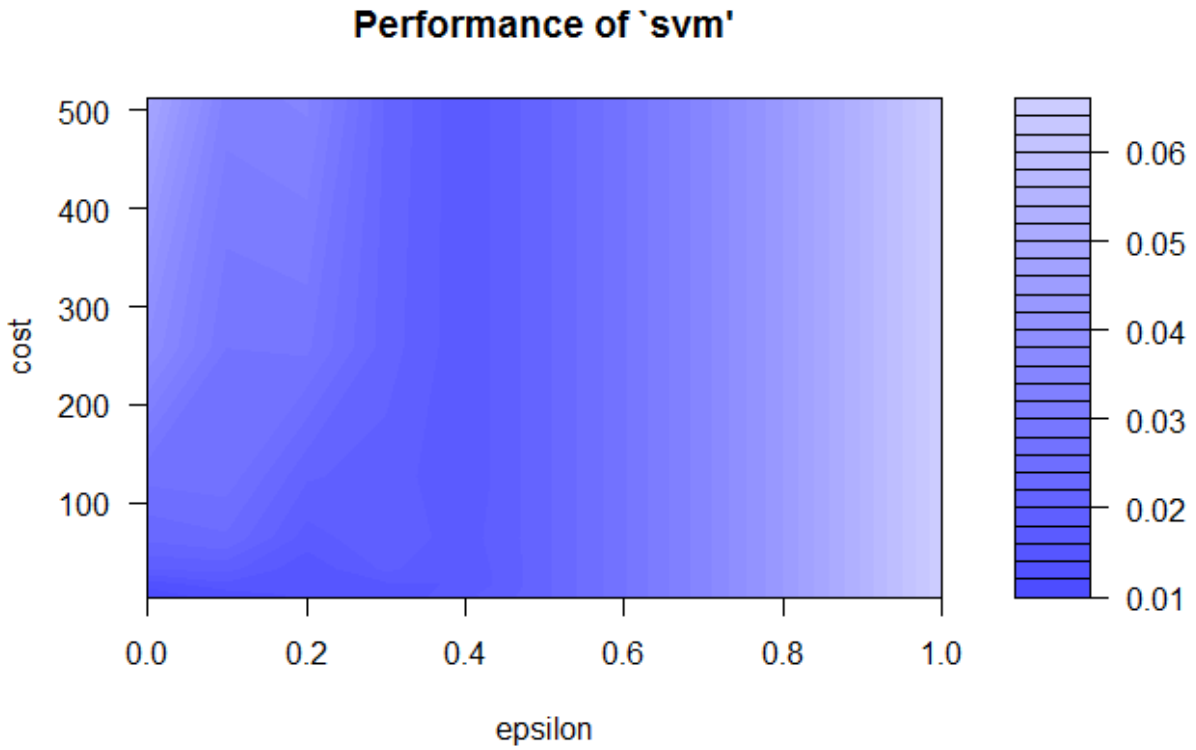


Figura 4 – *Grid search* dos parâmetros épsilon (ε) e custo (C).

Fonte: Os autores (2019).

Na segunda tentativa também será alterado o parâmetro gama função *kernel* radial, no intervalo [0,1] com passo 0,01. A seguir é apresentado o código para *grid search* da segunda tentativa:

```
#Realizar novo grid search
otim <- tune(svm, y ~ x,type="eps-regression",kernel="radial", ranges
= list(epsilon = seq(0,.1,0.01), cost = 2^(2:4),gamma=seq(0,1,0.01)))
print(otim)
#Guardar os parâmetros que produzem os menores erros
otimModel <- otim$best.model
#Plotar gráfico do melhor modelo
otimModelY <- predict(otimModel, y)
plot(x,y, xlab="Profundidade (mm)", ylab="Concentração de cloretos (%,
cimento)", ylim=c(0,1.6), xlim=c(0,50), pch=19)
lines(x, otimModelY, col="red",lty=1,lwd=2)
```

ISSN 2358-4947

A execução do código acima pode demorar, pois ele avalia a combinação linear dos parâmetros testados. Ao final do procedimento, o resultado do ajuste do melhor modelo obtido pode ser visualizado na Figura 5.

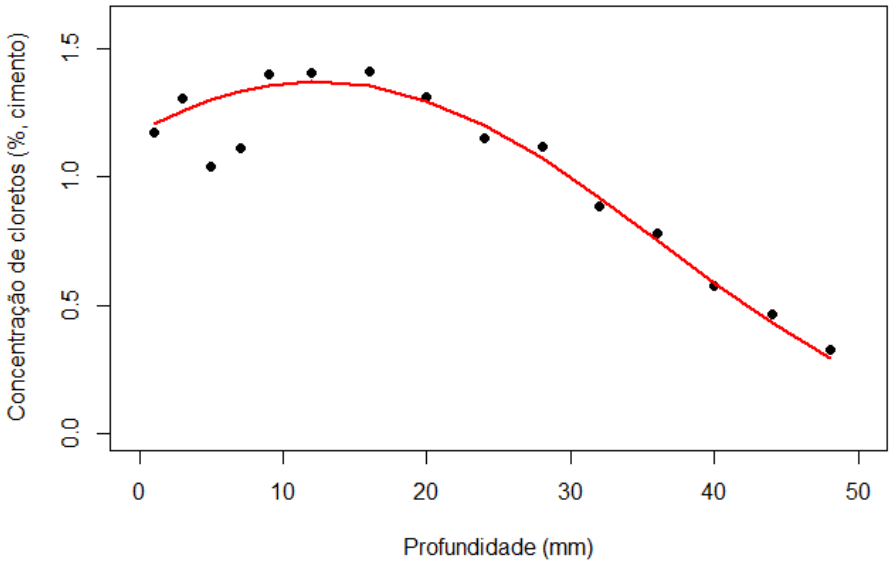


Figura 5 – Ajuste do melhor modelo SVR obtido na segunda tentativa.

Fonte: Os autores (2019).

Por fim, foi calculado um RQME de 0,0942 para o melhor modelo SVR (ou modelo otimizado), utilizando o seguinte código:

```
#RQME do modelo SVR
otimModel <- otim$best.model
otimModelY <- predict(otimModel, y)
error <- (y - otimModelY)^2
sqrt(mean(error))
```

Com isso, observa-se que houve um pequeno aumento do RQME do modelo otimizado (0,0942) em relação ao modelo padrão (0,0911 – conforme a Tabela 1). Pode-se, então, realizar um comparativo gráfico entre o modelo otimizado e o modelo padrão, utilizando o código a seguir para obtenção de um gráfico simultâneo (Figura 6) dos modelos.

```
plot(x, y, xlim=c(0,50), ylim=c(0,1.6), xlab="Profundidade (mm)",
ylab="Concentração de cloretos (%, cimento)", pch=19)
lines(x, otimModelY, col="red",lty=1,lwd=2)
```

ISSN 2358-4947

```
lines(x, predictedY1, col="blue", lty=2, lwd=2)
legend("bottomleft", c("Radial Otimizada", "Radial Padrão"), lwd=2,
lty=1:2, col=c("red","blue"), cex=.9)
```

Apesar do aumento na RQME, o modelo otimizado obteve melhor ajuste nas profundidades entre 40 e 50 mm, como apresentado na Figura 6. Além disso, entre as profundidades 0 e 40 mm, os modelos apresentam comportamento semelhante.

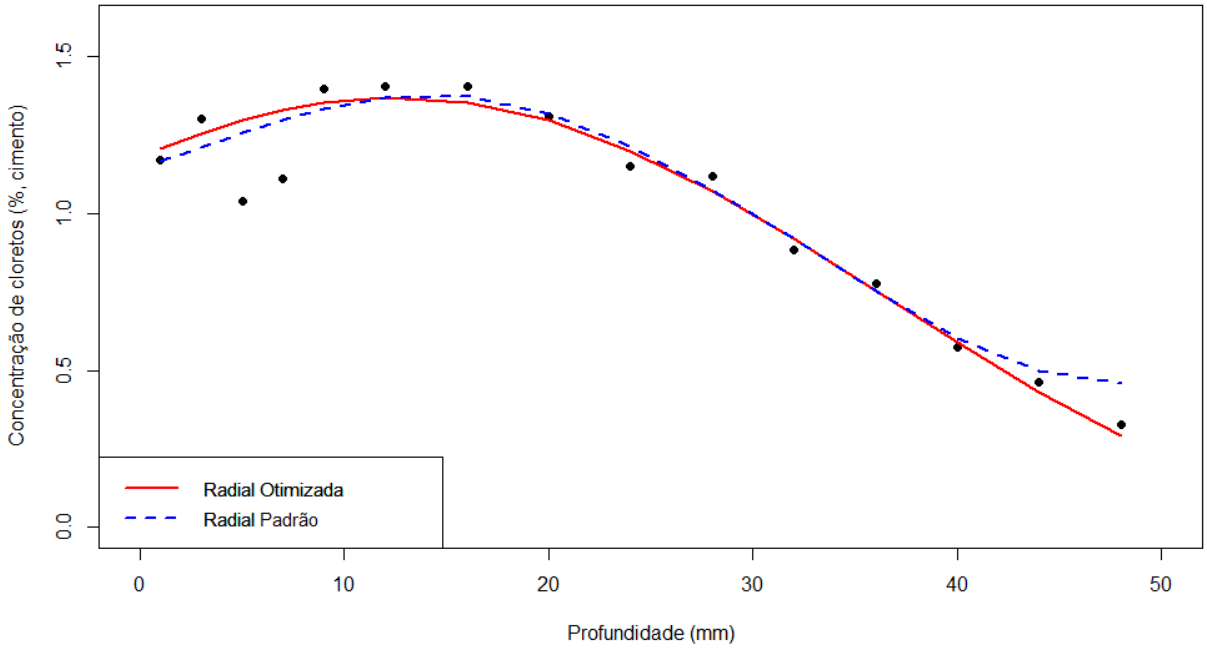


Figura 6 – Comparativo entre o modelo otimizado e o modelo padrão.
Fonte: Os autores (2019).

Dessa forma, o método SVR foi capaz de modelar adequadamente o perfil de concentração de cloretos da estrutura de concreto armado. Assim, a SVR pode se tornar uma importante ferramenta para avaliar a corrosão em barras de aço nas estruturas de concreto.

4 Considerações Finais

A função que melhor descreveu os dados foi a função radial ou RBF.

Observa-se o potencial da metodologia SVR na engenharia civil, sendo capaz de modelar processos complexos, como os perfis de concentração de cloretos no concreto.

O *software* livre R, em conjunto com o pacote “e1071”, demonstrou ser uma ferramenta alternativa aos *softwares* proprietários, para modelagem de dados experimentais utilizando a técnica SVR.

ISSN 2358-4947

Espera-se, com este trabalho, que a técnica SVR possa ser divulgada e ajude na modelagem e resolução de problemas nos diversos campos da engenharia civil.

REFERÊNCIAS

ABREU, A. L. E. de; NETO, A. C. Estimação do grau de astigmatismo pelo método support vector regression correlacionado. **Cadernos do IME – Série Estatística**, Rio de Janeiro, v. 41, p. 15-28, dez. 2016. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. DOI 10.12957/cadest.2016.27523. Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/cadest/article/view/27523. Acesso em: 18 abr. 2019.

ACOSTA, S. M.; AMOROSO, A. L.; SANTANNA, A. M. O. Modelagem de um processo produtivo utilizando regressão por vetores suporte. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 36., 2016, João Pessoa. **Anais** [...]. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Engenharia de Produção, 2016. Disponível em: http://www.abepro.org.br/biblioteca/TN_STO_231_350_30549.pdf. Acesso em: 18 abr. 2019.

ALVES, J. C. L. **Máquina de vetores de suporte aplicada a dados de espectroscopia NIR de combustíveis e lubrificantes para o desenvolvimento de modelos de regressão e classificação**. 2012. 272 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Química, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012. Disponível em: http://www.biq.iqm.unicamp.br/arquivos/teses/000846051.pdf. Acesso em: 18 abr. 2019.

ARENALES, Marcos N. *et al*. **Pesquisa operacional**. 1. ed. Coleção ABEPRO. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 2011. ISBN 978-85-352-1454-3.

BALESTRA, C. E. T. *et al*. Chloride profile modeling contemplating the convection zone based on concrete structures present for more than 40 years in different marine aggressive zones. **Construction and Building Materials**, v .198, p. 345-358, 2019. DOI 10.1016/j.conbuildmat.2018.11.271. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0950061818329647. Acesso em: 20 fev. 2019.

BASAK, D.; PAL, S.; PATRANABIS, D. C. Support Vector Regression. **Neural Information Processing – Letters and Reviews**, v. 11, n. 10, p. 203-224, 2007. Disponível em: http://bsrc.kaist.ac.kr/nip-lr/V11N10/V11N10P1-203-224.pdf. Acesso em: 18 abr. 2019.

BONESSO, Diego. **Estimação dos parâmetros do kernel em um classificador SVM na classificação de imagens hiperespectrais em uma abordagem multiclasse**. 2013. 108 f. Dissertação (Mestrado em Sensoriamento Remoto) – Programa de Pós-Graduação em Sensoriamento Remoto, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/86168/000909969.pdf?sequence=1. Acesso em: 18 abr. 2019.

BURGES, Christopher J. C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition. **Data Mining and Knowledge Discovery**, v. 2, p. 121-167, 1998. DOI 10.1023/A:1009715923555. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A%3A1009715923555. Acesso em: 18 abr. 2019.

ISSN 2358-4947

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2016. ISBN 978-85-805-5568-4.

FACELI, Katti *et al*. **Inteligência artificial: uma abordagem de aprendizado de máquina**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. ISBN 978-85-216-1880-5.

FERRÃO, M. F.; MELLO, C.; BORIN, A.; MARETTO, D. A.; POPPI, R. J. LS-SVM: uma nova ferramenta quimiométrica para regressão multivariada. Comparação de modelos de regressão LS-SVM e PLS na quantificação de adulterantes em leite em pó empregando NIR. Quím. Nova, São Paulo, v. 30, n. 4, p. 852-859, 2007. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S010040422007000400018&lng=en&nrm=iso>. access on 05 May 2019. http://dx.doi.org/10.1590/S0100-40422007000400018.

KUHN, Max; JOHNSON, Kjell. **Applied predictive modeling**. New York: Springer, 2013. ISBN 978-1-4614-6849-3.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. F. **Estatística aplicada à engenharia.** 2. ed. São Paulo: LTC, 2004. ISBN 978-85-216-1398-9.

PETERNELLI, Luiz A. Program R: applications in plant breeding. **Crop Breeding and Applied Biotechnology,** v. 11, n. spe, p. 91-92, 2011. DOI 10.1590/S1984-70332011000500014. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1984-70332011000500014&lng=en&tlng=en. Acesso em: 18 abr. 2019.

SMOLA, A. J.; SCHÖLKOPF, B. A tutorial on support vector regression. **Statistics and Computing**, v. 14, n. 3, p. 199-222, 2004. DOI 10.1023/B:STCO.0000035301.49549.88. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/B%3ASTCO.0000035301.49549.88. Acesso em: 18 abr. 2019.

YAOHAO, P. **Support Vector Regression aplicado à previsão de taxas de câmbio**. 2016. 144 f. Dissertação (Mestrado em Administração) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/23270/1/2016_PengYaohao.pdf. Acesso em: 18 abr. 2019.

ISSN 2358-4947

Problematização para abordar conceitos de Matrizes, no Ensino Médio, via Teoria de Grafos

Thalia Falquievicz Corassa
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
thaliacorassa@hotmail.com

Fabiana Magda Garcia Papani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste
fgarciapapani@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta didática para abordar alguns conceitos de matrizes, conteúdo inerente no Ensino Médio, por meio da Teoria dos Grafos, conteúdo que raramente é apresentado no ensino. Nesta proposta, buscamos relacionar o conteúdo de matrizes com a Teoria dos Grafos, por meio de uma atividade investigativa. Sendo assim, abordamos os principais conceitos relacionados à Teoria dos Grafos e também conceitos de matrizes, seguidos de exemplos, para, ter aporte na resolução da atividade. Além disso, foi realizado um estudo bibliográfico, referente a essa metodologia no ensino,isto é, um estudo referente à utilização de grafos para ensinar outros conceitos matemáticos. Concluímos que, esta abordagem por meio da Teoria dos Grafos é uma ferramenta muito útil para trabalhar conceitos de matrizes, pois, é uma maneira diversificada e instigante para o ensino aprendizagem, além de ser uma ferramenta que possui inúmeras aplicações à realidade.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Teoria de Matrizes. Proposta Didática.

1 Introdução

Este trabalho objetiva abordar conceitos de matrizes por meio da Teoria dos Grafos. Segundo Souza (2017) "o ensino de matrizes por meio da Teoria dos Grafos torna-se significativo por ser uma ferramenta que possui inúmeras aplicações no nosso dia-a-dia". Além disso, essa metodologia diversificada pode despertar o interesse na aprendizagem dos conceitos de matrizes, nos quais os alunos apresentam muitas dificuldades.

As ideias básicas de grafos foram introduzidas no século XVIII pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o problema hoje conhecido como "As sete pontes de Königsberg". A cidade de Königsberg, atual Kaliningrado, é cortada pelo Rio Prególia, onde existem duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que na época continha sete pontes, conforme ilustrado na Figura 1. O problema das sete pontes de Königsberg consistia em verificar a possibilidade de entrar e sair da cidade atravessando apenas uma vez todas às sete pontes. Euler mostrou, empregando argumentos que são essenciais à Teoria dos Grafos que é impossível realizar tal desafio.

ISSN 2358-4947

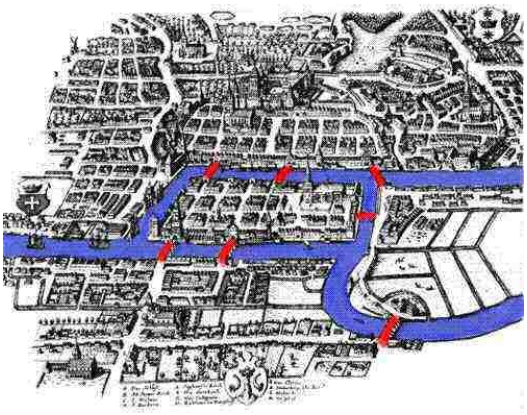


Figura 1: Esquema das pontes de Königsberg.
Fonte: https://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/ [2].

Com o grande avanço tecnológico a Teoria dos Grafos passou a ser usada para resolver problemas em muitos campos. Problemas que muitas vezes apresentam enunciados simples, porém soluções complexas. Problemas com aplicações importantes e variadas, tais como:

• O recolhimento de lixo de uma cidade, feito por um caminhão: uma maneira de economizar recursos públicos seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida, um problema bastante parecido com o das "sete pontes";

• Minimizar percursos na instalação de dutos de gás, energia ou água;

• A distribuições de correspondências ou encomendas;

• Os movimentos de uma peça em um jogo de xadrez;

• A busca de informações nas redes de comunicação.

O ensino por meio da Teoria dos Grafos propicia a participação efetiva dos alunos na construção do próprio conhecimento, despertando o interesse e a criatividade. Para Mauri (2013),

> A Teoria de Grafos pode proporcionar aos alunos a possibilidade de usar sua intuição e desenvolver suas próprias estratégias para encontrar a solução, sendo que, em alguns casos, não há necessidade de recorrer a conhecimentos matemáticos formais. A abordagem deste tema favorece a reformulação do ensino de matemática, proporcionando ao aluno espaço para o processo da descoberta, além de ser um tipo de assunto que atrai a atenção dos alunos devido ao grande número de aplicações importantes nos mais diversos campos, abrindo espaço para que seja trabalhado de forma interdisciplinar.

Por outro lado, o conteúdo matrizes, de suma importância para a formação dos alunos, é abordado no 2º ano do Ensino Médio, em geral de forma mecânica e sem conexão com a realidade dos alunos. De acordo com Souza (2017),

> É costume, na matemática, para maioria dos estudantes, decorar fórmulas e fazer cálculos que são úteis apenas para cumprir o cronograma da grade curricular impostas pelos sistemas de ensino. Com isso, os conhecimentos adquiridos por eles muitas vezes são esquecidos após a realização das atividades avaliativas.

ISSN 2358-4947

Na aprendizagem de conceitos relacionados às matrizes isso não é diferente. Souza (2017) coloca ainda que "o ensino de matrizes utilizando a teoria dos grafos, se for bem aplicado em sala de aula, proporcionará um conhecimento contextualizado dos conteúdos propostos".

Desta forma, na sessão 2.1 serão abordados conceitos de grafos, apresentando definições, e exemplos. Na sessão 2.2 serão abordados conceitos de matrizes, e por fim, na sessão 2.3 será abordada uma atividade que permite explorar a Teoria de Matrizes por meio da resolução de um problema relacionado à Teoria dos Grafos.

2 Metodologia

Neste trabalho, realizamos um estudo bibliográfico dos conceitos de grafos, assunto que raramente é apresentado no Ensino Básico, mas que proporciona, por ser um assunto com grande aplicabilidade em problemas cotidianos, interesse e envolvimento na resolução de problemas propostos em sala de aula. Realizamos ainda, um estudo bibliográfico a respeito de matrizes, conteúdo abordado no 2º ano do Ensino Médio e após estes estudos bibliográficos, visando maior interesse e melhor desempenho dos alunos na aprendizagem de matrizes, apresentamos uma atividade, que utiliza grafos para abordar conceitos de matrizes no Ensino Médio. Essa atividade foi motivada por estudos realizados por autores, tais como: Lucas (2017) que utilizou grafos para abordar conceitos de conjuntos e matrizes; Silva (2015) que apresentou grafos como uma ferramenta na resolução de problemas de análise combinatória e probabilidade; Costa (2017) que abordou alguns conceitos de matrizes, geometria espacial e análise combinatória por meio da Teoria dos Grafos.

2.1 Grafos

Definição 2.1. *Um Grafo $G(V; A)$ é uma estrutura matemática constituída pelos conjuntos V, finito e não vazio, de elementos denominados vértices; e A, constituído de pares não ordenados de elementos de V, denominados arestas.*

Grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto. Os vértices representam os elementos do conjunto e as relações entre esses elementos podem ser representadas por uma lista, dizendo quais vértices estão relacionados. Podemos ainda apresentar uma grafo utilizando uma representação gráfica. Desta forma, o que nos interessa num grafo é saber quem são os vértices e que pares de vértices estão ou não ligados. Veja o exemplo 2.1

Exemplo 2.1 : Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Alguns jogos foram realizados até agora: 6A jogou com 7A, 7B, 8B; 6B jogou com 7A, 8A, 8B; 7A jogou com 6A, 6B; 7B jogou com 6A, 8A, 8B; 8A jogou com 6B, 7B, 8B e 8B jogou com 6A, 6B, 7B, 8A.

Uma maneira mais simplificada e mais explicativa de representar a situação é através de uma figura. As turmas são representadas por pontos e os jogos realizados são representados por linhas.

ISSN 2358-4947

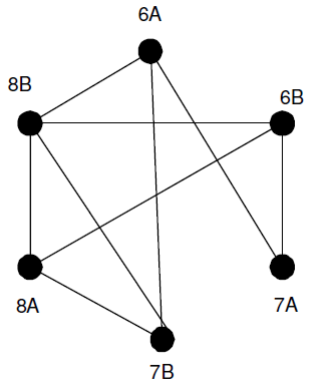


Figura 2: Grafo do Campeonato de Vôlei.
Fonte: Jurkieiwicz (2009) [5].

Note que os pares tais como (6A,6B) não são ordenados, ou ainda as arestas não precisam ser orientadas, uma vez que se 6A jogou com 7A é fato que 7A também jogou com 6A.

Definição 2.2. *Uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo. Neste caso a aresta é chamada de laço.*

Exemplo 2.2: Vamos construir o grafo em que $V = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ e dois vértices são ligados quando tiverem um divisor comum diferente de 1.

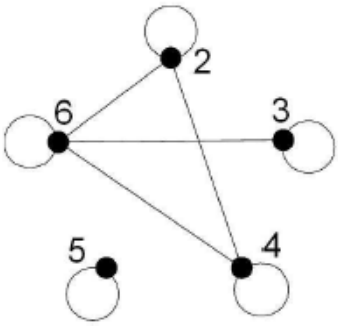


Figura 3: Grafo com laços.
Fonte: Jurkieiwicz (2009) [5].

Definição 2.3. *Um Grafo é definido como direcionado ou orientado (digrafo), quando possuir uma orientação no seu conjunto de arestas, ou seja, as arestas seguem uma direção ou sentido no Grafo. Dessa forma, cada aresta representa um par ordenado de vértices distintos.*

ISSN 2358-4947

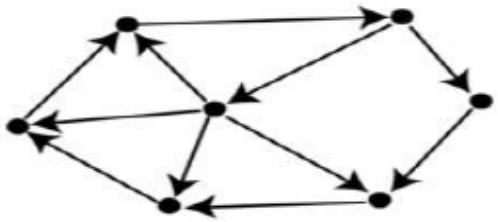


Figura 4: Digrafo.
Fonte: Alves (2016) [1].

Exemplo 2.3 : Vamos construir o grafo em que $V = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ e o vértice i é ligado ao vértice j se i for divisor próprio de j.

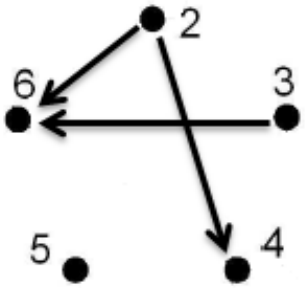


Figura 5: Grafo orientado.
Fonte: Acervo dos autores.

Assim, o conjunto das arestas é dado por $A = \{(2, 6), (2, 4), (3, 6)\}$. Note que $(2, 6) \in A$, porém $(6, 2) \notin A$, pois 2 divide 6 mas 6 não divide 2.

2.2 Matrizes

Definição 2.4. *Dados números naturais m e n, define-se uma matriz real de ordem m por n (escreve-se $m \times n$) como uma tabela formada por números reais, distribuídos em m linhas e n colunas.*

Exemplo 2.4 : Outra maneira de representar a situação problema apresentada no exemplo 2.1 é dispor os times em linhas e colunas, atribuindo o valor 1 no cruzamento caso os times já se enfrentaram no torneio e, 0 caso contrário. Assim,

Tabela 1: Tabela dos jogos do torneio de vôlei.

	6A	6B	7A	7B	8A	8B
6A	0	0	1	1	0	1
6B	0	0	1	0	1	1
7A	1	1	0	0	0	0
7B	1	0	0	0	1	1
8A	0	1	0	1	0	1
8B	1	1	1	0	1	0

Fonte: Acervo dos autores.

ISSN 2358-4947

Se omitirmos as nomenclaturas dos times das linhas e colunas podemos representar tal informação da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que é a matriz dos jogos já realizados.

Definição 2.5. *Indicamos as entradas de uma matriz qualquer A pelos símbolos a_{ij}, em que o índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento se encontra. Assim, uma matriz $m \times n$ é representada por:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou por $A = (a_{ij})_{m\times n}$, ou simplesmente por $A = (a_{ij})$, quando a ordem da matriz estiver subentendida.

Definição 2.6. *Toda matriz $n \times n$ é chamada de matriz quadrada, ou seja, uma matriz é dita quadrada quando possui n linhas e n colunas.*

Definição 2.7. *Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ij}, em que $i = j$, com $1 \leq i \leq n$, formam um conjunto denominado diagonal principal de A.*

Exemplo 2.5 : A matriz do exemplo 2.4 da sessão 2.2 é uma matriz quadrada de ordem 6×6. Note que na matriz os elementos da forma $a_{ii} = 0$, com $1 \leq i \leq 6$, ou seja, a diagonal principal, é igual a zero uma vez que um time não pode jogar com ele mesmo.

Definição 2.8. *Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são duas matrizes de mesma ordem, $m \times n$, a soma de A e B, denotada $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})$, $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 2.6 : Dada as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ temos $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Definição 2.9. *Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ duas matrizes. O produto de A por B, denotado por AB, é definido como a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj},\ \forall\ 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq p.$$

ISSN 2358-4947

Observações:

1. Note que, o elemento c_{ij} (elemento pertencente a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz (A) pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz (B), e somando esses produtos.

2. Só podemos efetuar o produto de duas matrizes se, o número de colunas da primeira for igual o número de linhas da segunda.

Exemplo 2.7 : Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, temos $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definição 2.10. *Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ e $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$, define-se a matriz potência como:*

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k \text{ vezes}}$$

Exemplo 2.8 : Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, temos $A \times A$, ou $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Definição 2.11. *Uma matriz, $n \times n$, é dita simétrica se, e somente se, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$.*

Exemplo 2.9 : As matrizes A e B do exemplo 2.7 são simétricas, porém, o produto das mesmas AB não é uma matriz simétrica, uma vez que, por exemplo $c_{12} \neq c_{21}$.

2.3 Atividade envolvendo grafos e matrizes - adaptado do problema nº 16, de Boldrini (1980), p.13

Uma rede de comunicação tem cinco estações distintas com transmissores de potências. O grafo orientado da figura a seguir representa tal rede de comunicação. Uma seta de i para j significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j.

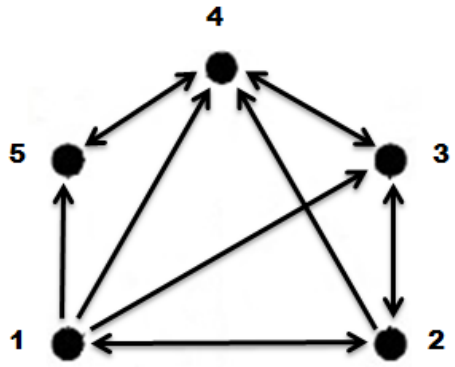


Figura 6: Grafo das transmissões.
Fonte: Acervo dos autores.

ISSN 2358-4947

Pede-se:

1. Estabelecendo que $a_{ij} = 1$, quando a estação i transmite para a estação j e que $a_{ij} = 0$ caso contrário, isto é, quando a transmissão da estação i não alcança diretamente a estação j, construa a matriz $A = (a_{ij})$ que representa o grafo.

   Nesta atividade o docente irá retomar os conceitos e definições de grafos orientados e matrizes, interligando os dois conteúdos. Para construir a matriz deve-se analisar o grafo, percebendo as transmissões diretas, que são representadas pelas setas, sendo assim a matriz que representa o grafo é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Espera-se que os alunos sejam capazes de interpretar o grafo, identificando quais são as estações e quais são suas transmissões diretas, ou seja, os vértices e as arestas do grafo, para que em sequência consiga organizar tais dados na forma matricial. Desta forma, o docente pode realizar perguntas como: O que representa cada linha da matriz? O que representa cada coluna da matriz? Para que assim, os alunos percebam que, por exemplo, a linha 1 da matriz A indica para quais estações a estação 1 transmite diretamente. Que a coluna 1 representa de quais estações a estação 1 recebe a transmissões diretas. Isto é, analisando a linha 1 da matriz A, podemos perceber que a estação 1 realiza transmissões diretas para as estações 2,3,4 e 5. Analisando a segunda coluna da matriz A, temos que a estação 2, recebe transmissões diretas das estações 1 e 3. O docente pode ainda retomar a diferença entre os elementos a_{ij} e a_{ji} de uma matriz. Por exemplo, $1 = a_{13} \neq a_{31} = 0$, pois a estação 1 transmite diretamente para a estação 3, porém a estação 3 não transmite para a 1.

2. Observando a construção da matriz A percebemos que a diagonal principal é nula. O que isso significa?

   A diagonal principal nula significa que uma estação não transmite diretamente para si mesma. Nesta atividade o docente irá retomar com os alunos os conceitos de diagonal principal de uma matriz. Instigando-os a perceber que a diagonal principal da matriz é composta pelos elementos a_ii, com $1 \leq i \leq 5$. Pode ainda retomar o conceito de laço em um grafo, instigando os alunos a perceberem que se não existem laços nas estações, isso significa que, uma estação não transmite diretamente pra ela mesma.

3. Se a matriz A fosse simétrica, o que isso significaria?

   Se a matriz A fosse simétrica, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, significa que se a estação i transmite para j, então j também transmite para i. Como ocorre no exemplo do campeonato de vôlei, se o time A joga com o time B então B joga com o A.

   Nesta atividade podem ser retomados os conceitos de matriz simétrica, a diferença dos elementos a_{ij} e a_{ji}. E ainda, o docente pode instigar os alunos a perceberem pelo grafo, que quando $a_{ij} = a_{ji}$, as setas possuem duas pontas. Por exemplo: $a_{12} = a_{21} = 1$, pois a estação 1 transmite para a estação 2, assim como, a estação 2 transmite para a 1. Pode também explorar a diferença de grafos orientados e não orientados. Por exemplo, o elemento a_{31} seria 1 ao invés de ser 0, pois a seta indica que a estação 1 transmite para a estação 3, porém, a estação 3 não transmite para a estação 1, caso não tivesse a seta, ou

ISSN 2358-4947

seja, o grafo fosse não orientado, a estação 1 transmitiria para a estação 3, assim como, a estação 3 transmitiria para a 1.

4. Calcule A^2. Qual o significado dessa matriz?

   Essa atividade retoma os conceitos de produto e potência de matrizes. A matriz

   $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra utilizando uma única retransmissão.

   O docente deve instigar os alunos a perceberem que a matriz A^2 representa o número de caminhos para se ir de uma estação a outra através de uma única retransmissão. Pode realizar a seguinte pergunta: o que significa os termos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 da matriz A^2? O objetivo desta pergunta é que os alunos entendam que o termo nulo significa que não é possível realizar transmissão entre as referidas estações por meio de uma retransmissão. Por exemplo, o elemento $a_{21} = 0$, pois não possui nenhum caminho indireto, passando por uma terceira estação, da estação 2 para a estação 1. Os termos iguais a 1, significam que é possível a retransmissão indireta por somente 1 caminho. Por exemplo, o elemento $a_{34} = 1$, pois só é possível a retransmissão saindo da estação 3, passando pela estação 2 e chegando na 4. Os termos maiores que 1 significam que é possível realizar a retransmissão entre as estações por mais de um caminho. Por exemplo, o elemento $a_{14} = 3$, pois é possível, saindo da estação 1, chegar na estação 4, passando pela estação 2, pela estação 3 ou ainda pela estação 5, veja a Figura 7. Para melhor compreensão dos alunos, o docente deve orienta-los a analisarem sempre o grafo, para perceber as possíveis retransmissões indiretas.

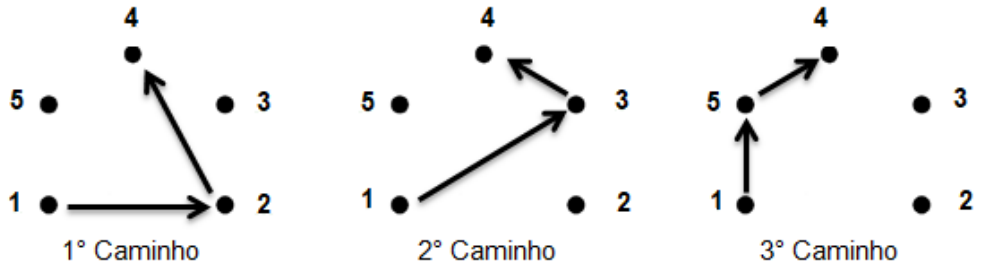


Figura 7: Caminhos da estação 1 para a estação 4.
Fonte: Acervo dos autores.

O docente pode ainda realizar a seguinte pergunta: é possível encontrar A^2 sem realizar o produto propriamente dito? A resposta afirmativa desta pergunta leva os alunos a perceberem que é possível encontrar A^2, pela forma que foi descrita anteriormente, isto é, analisando no grafo os possíveis caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra utilizando uma única retransmissão. Nesta atividade o docente pode ainda explorar a definição de produto de matrizes. Por exemplo, o elemento $a_{24} = 2$ na matriz A^2, é encontrado multiplicando a segunda linha da matriz A pela quarta coluna desta mesma matriz, da seguinte forma:

ISSN 2358-4947

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = a_{21}a_{14}+a_{22}a_{24}+a_{23}a_{34}+a_{24}a_{44}+a_{25}a_{54} = 1+0+1+0+0 = 2$$

Analisando a soma $1+0+1+0+0$, é possível descobrir por quais estações ocorre as retransmissões da estação 2 para a estação 4. Um dos caminhos sai da estação 2, passa pela estação 1 e chega na 4 ($a_{21}a_{14}=1$), e o outro caminho, sai da estação 2, passa pela 3 e chega na 4 ($a_{23}a_{34}=1$). O docente deve sempre propor aos alunos que voltem analisar o grafo para conferir os resultados ou para compreender melhor os conceitos.

5. Calcule $A+A^2$. O que essa soma representa?

$$A+A^2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 2\\1 & 2 & 3 & 3 & 2\\1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 1 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

A soma representa o número de caminhos disponíveis de uma estação para outra diretamente ou utilizando uma única retransmissão.

Nesta atividade serão retomados os conceitos de soma de matrizes. O docente pode ainda, instigar os alunos a entenderem o que de fato significa a transmissão direta e a retransmissão. Na transmissão direta não é permitido passar por outra estação, já na retransmissão indireta deve-se passar por outra estação. Por exemplo, o elemento a_{12} é a soma de uma transmissão direta com uma retransmissão passando por uma única estação, ou seja, é possível ir da estação 1 para 2 diretamente, ou retransmitindo o sinal por meio da estação 3.

6. Calcule A^3. Qual o significado da matriz A^3?

A matriz $A^3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 5 & 4\\2 & 2 & 4 & 6 & 2\\0 & 3 & 2 & 4 & 2\\1 & 0 & 3 & 1 & 2\\0 & 1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ representa o número de caminhos disponíveis para se ir de uma estação a outra utilizando duas retransmissões indiretas.

Esta atividade tem por objetivo reforçar os conceitos aprendidos na atividade anterior, como o produto de matrizes, pois os alunos irão realizar o produto da matriz A com a matriz A^2, obtendo a matriz A^3. O docente deve instigar os alunos a perceber que agora os valores da matriz A^3 representam a quantidade de caminhos para se ir de uma estação a outra passando por duas outras estações.

3 Discussões

De acordo com o estudo realizado percebemos a importância da Teoria dos Grafos para a resolução de problemas matemáticos, desde daqueles mais sofisticados até problemas mais simples, como o exemplo do campeonato de vôlei citado no texto, e também como tal teoria pode ser uma ferramenta útil no ensino de matemática a nível básico, como no ensino-aprendizagem de matrizes. A Teoria dos Grafos propicia uma prática docente diferenciada daquela na qual

ISSN 2358-4947

os alunos apenas decoram fórmulas e algoritmos, propicia ainda a percepção de como uma ou mais teoria associadas podem ser importantes na resolução de problemas. De acordo com Lima (2014),

> A Teoria dos Grafos contribui significativamente para um ensino de Matemática que privilegia a construção do conhecimento matemático através da investigação, desenvolvendo no aluno habilidades como explorar, conjecturar, analisar, generalizar, decidir, dentre outras.

Desta forma, a abordagem por meio da Teoria dos Grafos pode ser inserida no Ensino Médio, com o objetivo de promover uma aprendizagem com um caráter investigativo, e exigir do aluno uma capacidade interpretativa para buscar técnicas de resolução dos problemas.

4 Conclusões

O trabalho apresentado neste artigo é parte do resultado obtido num estudo teórico, de pesquisa bibliográfica, desenvolvido no programa de Iniciação Científica voluntária na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Embora, neste primeiro projeto abordando este assunto, não tenha sido possível desenvolver essa abordagem de forma prática, acreditamos que o trabalho com a Teoria de Grafos é uma ferramenta muito útil para explorar em sala de aula, nos níveis Fundamental e Médio, conceitos de matrizes e também outros conteúdos matemáticos, pois, o ensino por meio da Teoria dos Grafos é instigante e ajuda a trazer significado para outros conteúdos tratados de forma mecanizada. O estudo realizado serviu ainda, para despertar o interesse da autora, acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática, e portanto futura professora dos Ensinos Básicos, em utilizar Teoria de Grafos e também outras teorias pertinentes à Ciência Matemática, é claro que em grau menor de complexidade, como ferramenta pedagógica para o ensino de matemática.

Referências

[1] ALVES, V. L. Caminhos em grafos: uma experiência no ensino médio. Dissertação de Mestreado. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Rio de Janeiro, 2016.

[2] ARAÚJO, A. As pontes de Königsberg. Disponível em https://www.mat.uc.pt/ alma/escolas/pontes/.

[3] BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

[4] COSTA, R. V. Grafos: algumas aplicações a nível médio. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

[5] JURKIEWICZ, S. Grafos: Uma Introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[6] LIMA, J. F. A. Modelagem e resolução de problemas por meio de grafos: aplicações no ensino básico. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Feira de Santana, 2014.

ISSN 2358-4947

[7] LUCAS, T. M. Grafos no ensino médio: uma proposta de atividades. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciências e Tecnologia, Rio de Janeiro, 2017.

[8] MAURI, R. Uma abordagem da teoria de grafos no ensino médio. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Vitória, 2013.

[9] SILVA, A. Q. Grafos: uma ferramenta possível e necessária na educação básica. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Bahia, 2015.

[10] SOUZA, S. L. A. O ensino de matrizes utilizando teoria dos grafos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.

ISSN 2358-4947

Máquina de Diálise: Uma aplicação de Equações Diferenciais

Sthella Rayssa Biz dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
sthella_santos@hotmail.com

Tayssa Carolina Baccin Asakawa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
tayssa.asakawa@hotmail.com

Tiélen Prestes de Lima
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
tielen.pdl@gmail.com

Jocelaine Cargnelutti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
jocelainecargne@utfpr.edu.br

Resumo

Apresenta-se neste trabalho, um estudo de caso envolvendo o processo de funcionamento de uma máquina de diálise. Este processo é modelado por uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem. A máquina de diálise é utilizada para a realização do tratamento de pacientes com insuficiência renal. Quando o paciente possui apenas 10% da função inicial de filtração dos rins, é necessário o tratamento de diálise ou em casos graves o transplante de rim. Observa-se a relevância deste estudo de caso sob o ponto de vista da interdisciplinaridade, correlacionando importantes áreas da Medicina e os teoremas da Matemática, em particular, assuntos que envolvem o cálculo diferencial e integral, e equações diferenciais. Além disso, este estudo possui caráter motivacional, tornando estreita a relação entre a teoria e prática.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Fitração dos rins. Interdisciplinaridade.

1 Introdução

A falta de motivação e os altos índices de reprovação dos alunos durante as disciplinas do ciclo básico do curso de Matemática apresentam-se como um dos principais obstáculos nas instituições de ensino superior. A criação de mecanismos motivacionais se faz necessário por parte dos professores e da universidade. Inserir aplicações práticas e/ou cotidianas à disciplina estudada é uma das maneiras mais eficazes de instigar a curiosidade e a promover a motivação do aluno em estudar o conteúdo programático dessas disciplinas que servem de alicerce na formação acadêmica. Esforços no sentido de modernizar o currículo de ensino, incluindo novas metodologias de ensino e recursos didáticos, buscam garantir que os egressos tenham capacidade crítica de alto nível e que sua formação seja pertinente com a realidade [3].

Uma das disciplinas mais desafiadoras aos alunos do curso de Matemática é a de equações diferenciais, importante na modelagem de diversos fenômenos. A exigência de um bom domínio sobre o cálculo diferencial e integral é um dos requisitos para um aproveitamento satisfatório na disciplina de equações diferenciais. Estes estudos iniciais acabam resultando em aulas extensivamente teóricas. Com isso, a formação básica pouco aplicada, ou seja, com menos ou nenhuma aplicação é, de certa forma, responsável pela desmotivação dos alunos nessas disciplinas [6].

Para ZILL & CULLEN (2001) as equações diferenciais dão suporte matemático para diversas áreas da ciência e engenharia, elas surgem da tentativa de descrever alguns sistemas físicos

ISSN 2358-4947

em termos matemáticos. Problemas simples como um corpo rígido caindo em queda livre, osciladores harmônicos como sistemas massa-mola e pêndulos simples e até mesmo circuitos elétricos complicados são descritos em termos matemáticos por meio da aplicação de equações diferenciais.

No estudo das equações diferenciais ordinárias pode-se perceber que muitas relações e Leis que regem o universo são aplicações do cálculo diferencial e das equações diferenciais [2]. Em particular, o problema de misturas também pode ser modelado por equações diferenciais. Neste sentido, motivados com a possibilidade de encurtar a distância entre e teoria e a prática, buscou-se um problema real sobre misturas. Trata-se da modelagem e resolução analítica da equação que governa o processo de diálise.

> Os rins no corpo humano têm a função filtrar o sangue para eliminar substâncias nocivas ao organismo, como amônia, ureia e ácido úrico. Os rins recebem sangue das artérias renais, ramos da aorta que vêm diretamente do coração. Depois de circular pelo grande número de vasos existentes nesses órgãos, o sangue sai, livre das toxinas, pelas veias renais rumo ao coração, e a urina desce pelos ureteres até cair na bexiga [8].

Quando essa estrutura dos rins é prejudicada, os rins não funcionam em sua totalidade, surgindo assim a insuficiência renal sendo ela passageira ou crônica. A partir do momento em que a função renal é 10% da função inicial, torna-se necessário o processo de filtração por meio da diálise.

A máquina de diálise foi desenvolvida em 1941, pelo médico holandês, naturalizado estadunidense, Willem Johan Kolff (14/02/1911 − 11/02/2009), considerado *o pai dos órgãos artificiais*. A máquina de diálise, conhecida como "rim artificial", foi pensada após um jovem de 22 anos morrer devido a insuficiência renal. O paciente poderia ter sobrevivido se fosse possível remover 20g de ureia por dia.

> Kolff em suas primeiras criações idealizou uma máquina que utilizava cerca de quarenta metros de tubos de membrana de acetato de celulose enrolada num tambor rotatório, o qual mantinha-se mergulhado em uma bacia contendo a solução de diálise. Uma bureta coletava o sangue do paciente (não havia bomba de sangue), e pela ação da gravidade o impulsionava através da membrana dialisadora. O sangue, depois de purificado, retornava ao corpo do paciente. (NANINHO, 2010 Apud TUOTO, 2006) [4].

A máquina de diálise foi utilizada, inicialmente, em 15 pacientes. A primeira a passar pelo processo de diálise e sobreviver foi Sophia Schafstadt, em 1945.

O dialisador também chamado de filtros ou capilares, funciona da seguinte forma: O sangue escoa do corpo do paciente para a máquina de diálise. Nela está um fluido de limpeza chamado dialisato (composto geralmente por: potássio, sódio, cálcio, magnésio, cloro, acetato, bicarbonato, dextrose e dióxido de carbono) que escoa através da máquina em direção oposta ao sangue. O sangue e o dialisato são separados por uma membrana semipermeável que não permite a passagem do sangue, apenas dos poros residuais. Ocorrendo assim a vazão dos resíduos,

ISSN 2358-4947

retornando para o corpo humano o sangue purificado [1].

Após as pesquisas em relação ao processo de dialise, a análise será baseada na dependência da taxa de remoção (dos resíduos) com sua vazão.

2 Desenvolvimento

Para o desenvolvimento deste trabalho, é importante analisar a taxa na qual o material é removido, porém essa taxa depende de alguns fatores, como a vazão do sangue através do dialisador, vazão do dialisato através do dialisador, a capacidade do dialisador e a permeabilidade da membrana.

Considera-se a capacidade do dialisador e a permeabilidade da membrada como constantes fixas e busca-se analisar concentrando-se na dependência da taxa de remoção dos resíduos com a vazão.

Denota-se x como a posição horizontal do dialisador e a área transversal do dialisador como $x + \Delta x$. Assim, a região transversal de escoamento total denomina-se por *elemento* do escoamento, conforme Figura 1.

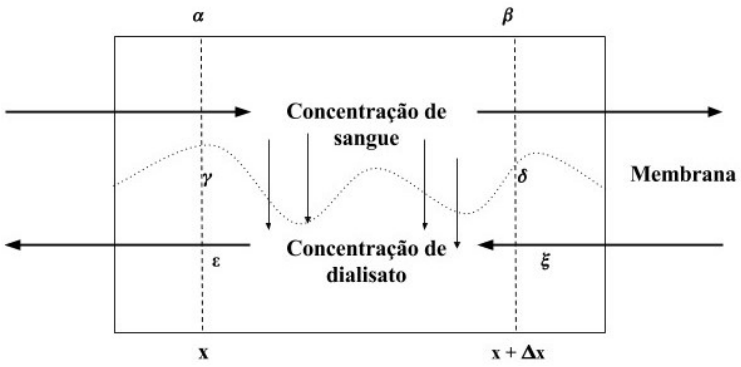


Figura 1: Ilustração da máquina de diálise
Fonte: SIMMONS, George F., STEVEN, Krantz G. [7]

Seja $p(x)$ a quantidade da concentração de resíduos no sangue e $q(x)$ a quantidade da concentração de resíduos no dialisador. A lei governando a passagem de material residual através da membrana é conhecida como Lei de Fick, "A quantidade de material passando através de ua membrana é proporcional à diferença das concentrações."[7].

Como o deslocamento é da parte superior para a inferior, a diferença de concentração através de α, ε é $p(x) - q(x)$. Logo, a transferência da massa residual através de uma área da membrana de largura 1 e comprimento Δx da solução de sangue para a solução dialisata é aproximadamente

$$p(x) = k[p(x) - q(x)]\Delta x \tag{1}$$

Considera-se a variação da massa no *elemento* α, β, δ e ε por unidade de tempo e k sendo a constante de proporcionalidade independente de x tem-se [7]:

ISSN 2358-4947

Massa escoando através de γ e α para dentro do elemento	=	Massa passando através da membrana γ e δ	+	Massa escoando através de β e δ para fora do elemento

A taxa constante de escoamento de sangue através do dialisador considera-se de F_B. Obtém-se,

$$F_B p(x) = k[p(x) - q(x)]\Delta x + F_B p(x + \Delta x) \tag{2}$$

Desenvolvendo a equação (2), tem-se

$$\frac{F_B p(x)}{\Delta x} = \frac{k[p(x) - q(x)]\Delta x}{\Delta x} + \frac{F_B p(x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{3}$$

$$\frac{F_B p(x)}{\Delta x} - \frac{F_B p(x + \Delta x)}{\Delta x} = k[p(x) - q(x)] \tag{4}$$

$$F_B \left(\frac{p(x) - p(x + \Delta x)}{\Delta x} \right) = k[p(x) - q(x)] \tag{5}$$

$$F_B \left(\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} \right) = -k[p(x) - q(x)] \tag{6}$$

Observe que na expressão (6), o termo representado por

$$\left(\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} \right) \tag{7}$$

é a definição de derivada, portanto reescreve-se a equação (6) fazendo o $\Delta x \to 0$. Assume-se $p(x) = p$ e $q(x) = q$. Logo,

$$F_B \left(\frac{dp}{dx} \right) = -k(p - q) \tag{8}$$

Da equação (8), tem-se a quantidade do escoamento de sangue. Analogamente obtém-se a quantidade do escoamento do dialisato.

$$-F_D \left(\frac{dq}{dx} \right) = k(p - q) \tag{9}$$

Na equação (8), efetua-se a divisão em ambos os lados por F_B e na equação (9) por F_D, assim segue

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-k(p - q)}{F_B} \tag{10}$$

$$-\frac{dq}{dx} = \frac{k(p - q)}{F_D} \tag{11}$$

Somando as equações (10) e (11), obtém-se

$$\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx} = -\frac{k(p - q)}{F_B} + \frac{k(p - q)}{F_D} \tag{12}$$

ISSN 2358-4947

Note que p e q são antissimétricos, então $r = p - q$ e $\alpha = \frac{k}{F_B} - \frac{k}{F_D}$, assim

$$\frac{dr}{dx} = -\alpha r \tag{13}$$

Pelo método de separação de variáveis,

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{r} &= -\alpha dx && (14)\\
\int \frac{dr}{r} &= -\alpha \int dx && (15)\\
ln|r| &= -\alpha x + C && (16)\\
e^{(ln|r|)} &= e^{(-\alpha x + C)} && (17)\\
r &= Ae^{(-\alpha x)} && (18)
\end{aligned}$$

Da equação (10), com o intuito de relaciona-se p e q, segue

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{k}{F_B} r \tag{19}$$

Como $r = Ae^{-\alpha x}$ da equação (18),

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{k}{F_B} Ae^{-\alpha x} \tag{20}$$

Pelo método de separação de variáveis,

$$\begin{aligned}
dp &= -\frac{k}{F_B} Ae^{-\alpha x} dx && (21)\\
\int dp &= -\int \frac{k}{F_B} Ae^{-\alpha x} dx && (22)\\
p(x) &= -\frac{k}{F_B} A \int e^{-\alpha x} dx && (23)
\end{aligned}$$

Utiliza-se o método da substituição, $u = -\alpha x$ então $du = -\alpha dx$, portanto $\frac{du}{-\alpha} = dx$.

$$p(x) = \frac{k}{\alpha F_B} Ae^{-\alpha x} + B_1 \tag{24}$$

Procede-se analogamente para a equação (11) obtém-se

ISSN 2358-4947

$$-\frac{dq}{dx} = \frac{k}{F_D}(p-q) \tag{25}$$
$$\frac{dq}{dx} = -\frac{k}{F_D}r \tag{26}$$
$$\frac{dq}{dx} = -\frac{k}{F_D}Ae^{-\alpha x} \tag{27}$$
$$dq = -\frac{k}{F_D}Ae^{-\alpha x}dx \tag{28}$$
$$\int dq = -\frac{k}{F_D}A\int e^{-\alpha x}dx \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

Assim, tem-se

$$q(x) = \frac{k}{\alpha F_D}Ae^{-\alpha x} + B_2 \tag{31}$$

supõem-se que o sangue tenha uma concentração inicial p_0 de resíduos e o dialisato tenha concentração inicial nula [7], ou seja

$$p = p_0 \,\text{em}\, x = 0 \tag{32}$$
$$q = 0 \,\text{em}\, x = L \tag{33}$$

Considera-se que L é o componente da máquina de dialise. Portanto, após algumas manipulações algébricas, tem-se

$$p(x) = p(0)\left(\frac{\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_D}\right) - \left(\frac{e^{-\alpha x}}{F_B}\right)}{\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_D}\right) - \left(\frac{1}{F_B}\right)}\right) \tag{34}$$

$$q(x) = \frac{p(0)}{F_D}\left(\frac{e^{-\alpha L} - e^{-\alpha x}}{\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_D}\right) - \left(\frac{1}{F_D}\right)}\right) \tag{35}$$

As duas equações acima, descrevem a concentração de resíduos no sangue e no dialisato.

Neste momento calcula-se a quantidade de concentração de limpeza denotada por Cl e está definida como

$$Cl = \frac{F_B}{p(0)}[p(0) - p(L)] \tag{36}$$

Para efetuar-se o cálculo da concentração da limpeza, substitui-se 0 e L na equação (34). Observe que ao substituir 0 em x, obtém-se $p(0) = 1$, então basta calcula-se o valor L em x.

ISSN 2358-4947

$$p(L) = p(0)\left(\frac{\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_D}\right)-\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_B}\right)}{\left(\frac{e^{-\alpha L}}{F_D}\right)-\left(\frac{1}{F_B}\right)}\right) \tag{37}$$

$$= p(0)\left(\frac{\left(\frac{F_B e^{-\alpha L}-e^{-\alpha L}F_D}{F_D F_B}\right)}{\left(\frac{F_B e^{-\alpha L}-F_D}{F_D F_B}\right)}\right) \tag{38}$$

$$= p(0)\left(\frac{F_B e^{-\alpha L}-F_D e^{-\alpha L}}{F_D F_B}\right)\left(\frac{F_D F_B}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{39}$$

$$= p(0)\left(\frac{F_B e^{-\alpha L}-F_D e^{-\alpha L}}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{40}$$

$$= p(0)\left(\frac{e^{-\alpha L}(F_B-F_D)}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{41}$$

Substitui-se 0 em $p(x)$ obtém-se, $p(0)=1$ e a equação (41) em (36), resulta-se em

$$Cl = F_B\left(1-\frac{e^{-\alpha L}(F_B-F_D)}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{42}$$

$$= F_B\left(\frac{(F_B e^{-\alpha L}-F_D)-e^{-\alpha L}(F_B-F_D)}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{43}$$

$$= F_B\left(\frac{F_B e^{-\alpha L}-F_D-e^{-\alpha L}F_B+e^{-\alpha L}F_D}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{44}$$

$$= F_B\left(\frac{-F_D+e^{-\alpha L}F_D}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{45}$$

$$= F_B\left(\frac{-F_D(1-e^{-\alpha L})}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right) \tag{46}$$

$$= F_B\left[\left(\frac{1-e^{-\alpha L}}{F_B e^{-\alpha L}-F_D}\right)\left(\frac{1}{-F_D^{-1}}\right)\right] \tag{47}$$

$$= F_B\left(\frac{1-e^{-\alpha L}}{-F_B e^{-\alpha L}F_D^{-1}+F_D F_D^{-1}}\right) \tag{48}$$

$$= F_B\left(\frac{1-e^{-\alpha L}}{-\frac{F_B e^{-\alpha L}}{F_D}+\frac{F_D}{F_D}}\right) \tag{49}$$

$$= F_B\left(\frac{1-e^{-\alpha L}}{-\frac{F_B e^{-\alpha L}}{F_D}+1}\right) \tag{50}$$

$$= F_B\left(\frac{1-e^{-\alpha L}}{1-\left(\frac{F_B}{F_D}\right)e^{-\alpha L}}\right) \tag{51}$$

Logo,

$$\alpha L = \frac{kL}{F_B}\left(1-\frac{F_B}{F_D}\right) \tag{52}$$

ISSN 2358-4947

É necessário ressaltar que no projeto real de um dialisador devem ser executados testes para os resultados teóricos experimentais, levando em conta os fatores de variação de k em relação a x, profundidade dos canais e variações na membrana.

3 Resultados e Discussão

Com o intuito de conhecer os cálculos no desenvolvimento das equações apresentadas pelo livro, buscou-se manipular os resultados mediante à utilização de cálculo diferencial e integral e métodos de resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando-se do método de separação de variáveis.

Nota-se a utilização de várias variáveis, para cada variável fez-se necessária uma incógnita específica, por isso a leitura do livro torna-se confusa, sendo necessário retomar os cálculos anteriores várias vezes para uma maior compreensão dos resultados.

Fez-se necessários vários encontros. No primeiro momento, buscou-se compreender o processo da máquina de diálise, como o estado do paciente, a função da máquina e o tratamento, a partir desse entendimento iniciou-se o desenvolvimento dos resultados. No segundo momento, durante as manipulações algébricas deparou-se com vários obstáculos para entender os passos que o livro não apresenta, como exemplo a falta da resolução detalhada.

Para possível aplicação considera-se os fatores não abordados, citados anteriormente e o conhecimento prévio sobre o assunto estudado.

4 Considerações Finais

Ao estudar-se a aplicação na máquina de diálise, observa-se aspectos fundamentais para a relação entre a Medicina e a Matemática, onde foi realizada a aplicação das Equação Diferencial Ordinárias em um ramo da Medicina, a Neufrologia. Através dessa interdisciplinarização entre Matemática e Medicina percebe-se o quanto a aplicação da Equações Diferenciais está presente em várias áreas.

Para completar-se o trabalho, seria interessante comparar os resultados obtidos com a aplicação das Equações Diferencias Ordinárias com dados reais. Durante o desenvolvimento do trabalho entrou-se em contato com um instituto responsável pelo tratamento dos pacientes com insuficiência renal, situado em Toledo/PR.

Para uma aplicação real, não havia tempo suficiente para a coleta de dados e todo o protocolo a ser seguido, para envolver dados reais de pacientes e instituição. Podendo então, ser aplicado futuramente para validação dos resultados.

Referências

[1] BERTOZZO, Luís A. Proposta de modelagem de um dialisador a partir de equações diferenciais. Linkedin. Disponível em : <https://www.linkedin.com/pulse/proposta-de-modelagem-um-dialisador-partir-equações-bertozzo>. Acesso em: 25 nov. 2018.

[2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Guanabara Dois, 1985.

ISSN 2358-4947

[3] MORAES, Andréa B de; LIRA, Hiran F de. Base teórica x prática profissional: como motivar o aluno?. IN: XXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2000, Ouro Preto. Anais. Brasília, 2000.

[4] NANINHO, Luiz E. O invertor da hemodiálise. Blog do Naninho: saúde e computação. Disponível em: <http://www.naninho.blog.br/saude/hemodialise/inventor-da-hemodialise.html>. Acesso em: 25 nov. 2018.

[5] NETO, Elias D. Entrevista: Diálise. Drauzio. Disponível em: < https://drauziovarella.uol.com.br/entrevistas-2/dialise-2/>. Acesso em: 25 nov. 2018.

[6] SOUZA, Henor Arthur de; RODRIGUES, Eliana Ferreira; TRIBESS, Arlindo. A motivação dos estudantes de engenharia diante da atual conjuntura sócio-econômica brasileira. IN: XXVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2000, Ouro Preto. Anais. Brasília, 2000.

[7] SIMMONS, George F., KRANTZ, Steven G. Equações diferenciais: teoria, técnica e prática. McGraw-Hill, São Paulo, 2008.

[8] VARELLA, Mariana. Corpo humano: Rim. Drauzio. Disponível em: < https://drauziovarella.uol.com.br/corpo-humano/rim/>. Acesso em: 25 nov. 2018.

[9] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações diferenciais. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001.

[10] ——————————. Medicina: Dialisadores. Portal da Educação. Disponível em: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/medicina/dialisadores/17558>. Acesso em: 25 nov. 2018.

VII ∫ε|αt UTFPR
ISSN 2358-4947

I WORKSHOP PROFMAT TOLEDO
7 de Junho de 2019
UTFPR

OFICINAS DE APRENDIZAGEM LÚDICAS E JOGOS NO ENSINO DE PORCENTAGEM PARA TURMAS DO ENSINO FUNDAMENTAL[1]

Gustavo Medeiros
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
utfpr.medeiros@gmail.com

Alienara Isabel Cristoferi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Anderson Alves Miguel
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Resumo

Como forma de se trabalhar de uma maneira mais agradável e simples a representação do conceito de porcentagem na forma fracionária e decimal com alunos do ensino fundamental, uma oficina de aprendizagem, incentivada pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID, foi elaborada e aplicada em uma escola pública no município de Toledo, para alunos de 6° e 7° ano. A oficina foi elaborada considerando o uso de materiais e métodos diferente dos usados tradicionalmente como livros didáticos, ábaco de frações entre outros do gênero, confeccionados pelos aplicadores, apresentando o conteúdo de forma lúdica trazendo ainda aspectos da representação semiótica, com a intenção de facilitar a compreensão de um conteúdo indispensável para o progresso escolar, a interrelação entre decimais e frações com a porcentagem. No decorrer da pesquisa são apresentados resultados e discussões relevantes a respeito da eficácia ou não da proposta, dos métodos e materiais didáticos utilizados, além das atividades aplicadas e resultados obtidos.

Palavras-chave: Representação Semiótica. Oficina. Porcentagem.

1 Introdução

Na sociedade atual, ensinar matemática vem se tornando cada vez mais uma tarefa complicada e difícil, pois os alunos não têm interesse pela matéria, obviamente

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

este não é o único motivo, mas é o trabalhado nesta proposta de ensino. Segundo D'Ambrósio (1991, p.1) "[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil". Ao fazer uma reflexão sobre essa afirmação, os professores percebem que há necessidade de se criar estratégias e atividades diferenciadas e até mesmo refletir sobre a prática docente, tendo como objetivo atrair a atenção dos alunos, reforçando o processo de ensino e aprendizagem.

Partindo dessa necessidade, o desenvolvimento de programas e projetos que permitam ao educador pensar e refletir sobre a prática docente, tem se tornado cada vez mais essencial. Nesse sentido, o PIBID, financiado com recursos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior – CAPES, surge como uma ótima opção, visto que um de seus objetivos é possibilitar a inserção do licenciando no contexto escolar. As atividades do PIBID – Matemática desenvolvidas pela UTFPR-TD são realizadas em três colégios da rede estadual de ensino da cidade de Toledo, na região oeste do Paraná. As atividades desenvolvidas são definidas em conjunto com os colégios parceiros, que apresentam suas demandas expondo as suas dificuldades e, partindo disso, é definido o cronograma de trabalho.

Segundo Fonseca *et al*. (2014), aulas de Matemática mais atrativas e motivadoras ajudam no interesse dos alunos pela aprendizagem, ajudando-os a ter pensamentos desafiadores, construindo o conhecimento e fazendo com que o aluno progrida intelectual, social e culturalmente. Uma das maneiras de tornar a aula de matemática mais atrativa aos alunos é trazer as oficinas de aprendizagem para o âmbito da sala de aula.

Em concordância com Zen e Caetano (2012), a oficina é um lugar de fabricação de conhecimento e de reparação de velhos conceitos com muito serviço braçal, visa a resolução de um desafio, que pode ser elaborado partindo das diversas formas de representação de um mesmo objeto.

Para Duval (2003) não há como um sujeito mobilizar qualquer conhecimento sem realizar uma atividade de representação. Além disso, para se estimar um conhecimento amplo é necessário que o indivíduo tenha o conhecimento de várias representações de um mesmo objeto. Isso remete a ideia de representação semiótica.

Duval (2003) ainda diz que os diferentes tipos de registros de representações semióticas utilizados em matemática foram designados como registros, e Patrício e Almeida (2011) reforçam a ideia do uso desses variados registros de um mesmo objeto para se ensinar e aprender matemática.

Com este embasamento, uma das atividades propostas pelo PIBID foi a elaboração de uma oficina, com o desafio de tornar a matemática mais atraente aos olhos dos alunos. Assim, neste trabalho, será relatado a aplicação de uma dessas oficinas de aprendizagem, elaboradas por um grupo de três acadêmicos bolsistas do PIBID, com o tema porcentagem.

2 Material e Métodos

Partindo de uma pesquisa com características qualitativas, buscou-se elaborar uma proposta de atividade para que alunos do ensino fundamental, em particular do sexto e sétimo anos, pudessem compreender a relação entre porcentagem, fração e número decimal, pois, segundo Ribeiro (2016), este é um grande desafio nas escolas hoje em dia. Dificilmente um aluno aprende a trabalhar com as várias formas de representação, o que torna a tarefa de escrever um número decimal em sua forma fracionária uma tarefa muito difícil a qual acaba se tornando pior devido a indisciplina e a falta de interesse pela matéria. De acordo com Silveira (2002), existe um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos de que a matemática é difícil. Com isso, o foco da oficina era olhar para diferentes formas de representar as mesmas quantidades numéricas, utilizando porcentagem, frações e decimais de um modo com que os alunos se sentissem à vontade com o conteúdo. Os materiais e métodos utilizados foram aplicados em duas turmas com alunos de 6° e 7° anos, tendo em média 20 estudantes por sala. A aplicação durou em média duas horas, ao fim de um turno as turmas trocavam de oficina.

Com métodos indutivos, foi trabalhada a retomada de conceitos no quadro através de desenhos e também numericamente, utilizando situação apresentadas com os materiais confeccionados, levando em consideração o princípio da conversão, presente na representação semiótica matemática. A ideia central girava em torno de um teatro interativo com a participação dos alunos. Neste teatro, com auxílio de um chocolate falso, confeccionado pelos aplicadores da oficina, foi introduzida a seguinte situação: ao dividir

uma barra de chocolate igualmente entre duas pessoas, qual será a porcentagem que cada pessoa receberá? E se for dividir o mesmo chocolate para três pessoas? E quatro?

Neste momento realizou-se uma contextualização/introdução, incorporando ao teatro uma breve história do surgimento da porcentagem e do símbolo que a representa. Com isso, pôde-se trabalhar a porcentagem como uma razão entre dois números, ou mais especificamente uma fração com denominador igual a cem.

Para realizar as explicações e evidenciar as relações entre as representações, os aplicadores optaram por utilizar materiais manipuláveis, que para Lorenzato (2006)[2] visa diretamente a ampliação de conceitos, a percepção da necessidade de símbolos e de um modo geral, os objetivos matemáticos.

Foram confeccionados materiais a partir de garrafas plásticas recicláveis, para que os alunos pudessem manipular e verificar a igualdade entre os diferentes modos de representar um número. O material manipulável consistia em litros descartáveis de 2 mil ml, com marcações pré-estabelecidas e contendo as três formas de representação, como mostram as Figuras 1 e 2.



Figura 1 – Representações de 20%.
Fonte: Elaborada pelos autores.

[2] Lorenzato (2006, p.18) considera materiais manipuláveis como sendo, “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”

VII Sempat UTFPR
ISSN 2358-4947



Figura 2 – Representações trabalhadas nas três formas distintas.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Os alunos manipulavam a água presente dentro de uma das garrafas transferindo-a para outra demarcada com uma representação diferente, olhando se a quantia era correspondente, como ilustrado na Figura 3. Todos os alunos foram convidados a participar das atividades, sendo chamados à frente da sala um por vez, estes constataram a igualdade entre, por exemplo: 50% de 2 litros com 1/2 de 2 litros assim como 0,5 de 2 litros.

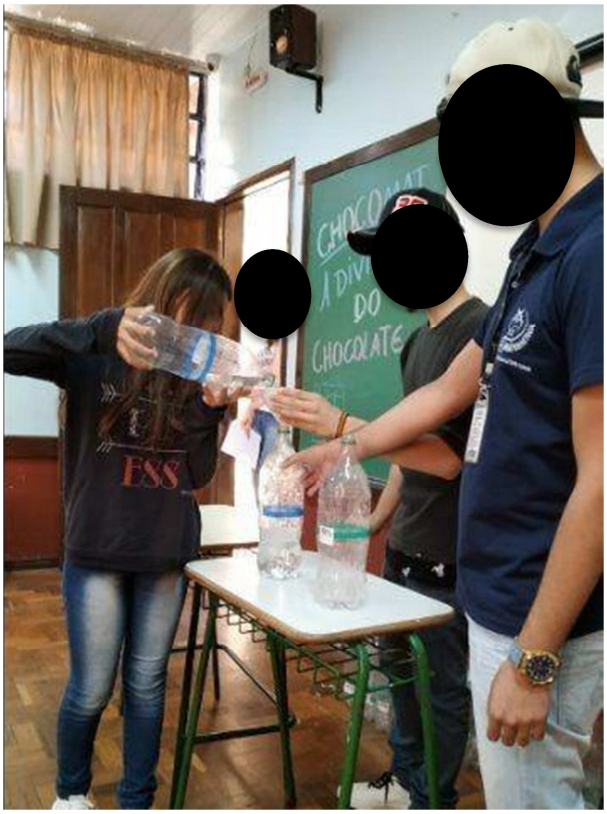


Figura 3 – Alunos participando das atividades propostas.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Além disso, também foi trabalhado com os alunos o conceito de soma de porcentagens, realizado com o auxílio das garrafas, na qual ficava visível os resultados das somas. Os alunos somaram apenas porcentagens, não foi trabalhado soma de decimais ou frações com denominador diferentes de 100, pois este não era o foco da oficina.

A atividade com o material manipulável construído com garrafas descartáveis apresentou resultados satisfatórios, os alunos se envolveram e compreenderam as relações entre frações e decimais com porcentagem. No decorrer do teatro e da atividade, a parte matemática era trabalhada de forma conjunta, havendo assim, uma sistematização de ideias e não a atividade apenas como um jogo.

Com o objetivo de analisar a compreensão dos alunos em relação à atividade com as garrafas descartáveis, foi utilizado, na sequência da oficina, o material dourado junto com pequenas questões nas quais os alunos deveriam, utilizando o que lhes foi ensinado anteriormente e trabalhando em grupos, apresentar as soluções com algum cálculo que

justificasse a resposta dada [3]. Os aplicadores responsáveis cada um por um grupo, conduziram os alunos com dificuldade até a reposta correta por meio de indagações e sugestões possibilitando que todos os grupos chegassem as respostas esperadas.



Figura 4 – material dourado.
Fonte: Bing imagens.

[3] No dia da aplicação das atividades, os coordenadores não tinham a necessidade de colher relações, as folhas com as repostas foram deixadas com os alunos.

1) Monte um retângulo com 12 barrinhas.
a) Divida o retângulo em dois retângulos iguais. Qual é a fração que representa cada retângulo, comparado ao retângulo inicial?
Reposta esperada, 1/2.
b) Cada retângulo representa quantos por cento do retângulo inicial?
Reposta esperada, 50%.
c) Agora, divida o retângulo inicial em 4 retângulos iguais. Qual é a fração que representa cada retângulo, comparado ao retângulo inicial? E a porcentagem?
Reposta esperada, 1/4 e 25%.

2) Separe um conjunto com 48 cubinhos.
a) Quantos cubinhos representam 25% do total?
Reposta esperada, 12 cubinhos.
b) Quantos cubinhos representam 50% do total?
Reposta esperada, 24 cubinhos.
c) Quantos cubinhos representam 75% do total?
Reposta esperada, 36 cubinhos.

3) Utilize as barrinhas para representar 240 unidades.
a) Para calcular 75% de 240 é necessário dividir 240 em quantos grupos iguais?
Reposta esperada, 4 grupos iguais.
b) E devemos considerar quantos desses grupos?
Reposta esperada, 3 grupos.

Figura 5 – Perguntas entregue aos alunos com as respostas esperadas.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para finalizar a oficina foi aplicado aos alunos um bingo matemático, constituído da seguinte forma: cada aluno recebeu uma cartela que possuía números representados em forma fracionária e decimal. Um dos aplicadores fazia o sorteio de uma “pedra”, que representava um número na forma de porcentagem e os alunos deveriam, caso houvesse em sua cartela, marcar a respectiva representação. O aluno que completasse a cartela primeiro, seria o vencedor do bingo.

VII ∫ε|αt UTFPR
ISSN 2358-4947

0,5	$\frac{30}{100}$	$\frac{23}{100}$	0,25	0,1
$\frac{73}{100}$	0,75	BINGO	0,01	$\frac{99}{100}$
$\frac{40}{100}$	0,45	0,04	$\frac{2}{100}$	0,05
0,55	$\frac{35}{100}$	$\frac{29}{100}$	0,2	0,1
$\frac{75}{100}$	0,78	BINGO	0,23	$\frac{1}{100}$
$\frac{45}{100}$	0,6	0,06	$\frac{12}{100}$	0,59

Figura 5 – Exemplos das tabelas de bingo.
Fonte: Elaborada pelos autores.

3 Resultados

Ao fim da oficina, uma folha foi entregue aos alunos, na qual eles deveriam avaliar a oficina e responder se haviam compreendido algo com as atividades. Inúmeros alunos mencionaram que com as atividades puderam relembrar conceitos trabalhados em sala de aula, de uma forma divertida e engraçada. Alguns, sendo menos do que a metade dos alunos em sala, relataram ter aprendido algo novo, que não tinham conseguido aprender em sala de aula. Um aluno relatou que as atividades aplicadas apresentavam um nível de dificuldade muito baixo. Neste momento, vale ressaltar que as atividades aplicadas eram fáceis, pois o tempo de aplicação era curto, sendo assim, atividades mais complexas iriam demandar muito tempo.

Segundo Duval (2003) as atividades de conversão de diferentes registros estão ligadas ao coração da atividade matemática, porém como estas transformações nem sempre são fáceis, acabam acarretando dificuldades na compreensão dos conteúdos. Durante a aplicação notou-se isto nos alunos, na dificuldade em escrever um número decimal como uma fração, fato que não ocorria quando escreviam uma fração como um número decimal. Outro ponto a se destacar é a dificuldade em diferenciar $0{,}5 = 50\% = 1/2$ com $0{,}05 = 05\% = 1/20$, e todas as outras porcentagens semelhantes. Os esboços feitos no quadro ligando os

conceitos ajudaram na percepção e, ao manipularem os materiais levados, o nível de compreensão aumentou.

4 Conclusões / Considerações Finais

Avaliando a aprendizagem dos alunos por meio do jogo de bingo e tendo trabalhado aspectos de representação semiótica, pode-se afirmar que ao ver as diferentes formas de representação e, trabalhando em um contexto mais ligado à vida infantil, com situações familiares às crianças, como a divisão de um chocolate, a matemática não se torna apenas mais fácil, mas também agradável.

Este é um ponto que os educadores, não apenas iniciantes, mas também aqueles que já tem uma trajetória maior no meio educacional devem levar em consideração. O aluno que se sente à vontade em sala de aula aprende mais, e isto em hipótese alguma significa deixar a parte matemática como segundo plano e sim, a conduzir junto, de forma a torná-la mais visível e compreensível aos alunos.

O jogo de bingo foi uma ótima escolha para se trabalhar as diferentes representações, pois de acordo com Baumgartel (2016) os jogos inseridos no contexto escolar propiciam o desenvolvimento de habilidades, bem como auxiliam no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, permitindo um caminho de construção do conhecimento, o professor, no papel de mediador do conhecimento, deve conduzir o conteúdo matemático, alcançando assim seus objetivos, da mesma forma com que os objetivos na oficina foram alcançados utilizando o bingo, sempre sistematizando o conteúdo.

REFERÊNCIAS

BAUMGARTEL, Priscila. O uso de jogos como metodologia de ensino da matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XX, 2016, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: <http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf>. Acesso em: 12 mai. 2019.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Matemática, ensino e educação:** uma proposta global. Temas & Debates, São Paulo, 1991.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

FONSECA, Fernanda Souza; LIMA, Juliana Diniz; MACHADO, Odete; DIAS, Olino Roger Kuffener; PINHEIRO, Jones; STAMBERG, Cristiane Silva. O ensino da matemática trabalhado através de oficinas lúdicas com atividades diferenciadas e jogos. In: ESCOLA DE INVERNO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IV, 2014, São Borja, **Anais...** São Borja: UFSM, 2014. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/RE/RE_Souza_Fernanda.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2019.

LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

PATRICIO, Rafael Silva; ALMEIDA, Maysa da Silva. O papel das representações semióticas no ensino de matemática. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2011, Ijuí, **Anais...** Ijuí: UNIJUÍ, 2011. Disponível em: <www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/DOC/CC41.doc>. Acesso em: 24 abr. 2019.

RIBEIRO, Tatiane Gomes. **Porcentagem: Uma abordagem dinâmica e lúdica**. 2016. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <http://licenciaturas.centro.iff.edu.br/cursoslicenciatura/licenciatura-em-matematica/trabalhode-conclusao-de-curso/2016/porcentagem-uma-abordagem-dinamica-e-ludica/at_download/file>. Acesso em: 25 set. 2018.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. “Matemática é difícil”: Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 25, 2012, Caxambú, **Anais...** Caxambú: MG, 2002. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf>. Acesso em: 13 mai. 2019.

ZEN, Priscila Dombrovski; CAETANO, Joyce Jaquelinne. O ensino da matemática no processo de oficinas de aprendizagem. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, 2013, jan.-abr., p. 139-152. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1529/983>. Acesso em: 25 abr. 2019.

ISSN 2358-4947

PROJETO SABER MAIS: PESQUISA EM EDUCAÇÃO E METODOLOGIA DO ENSINO DE MATEMÁTICA – UM RELATO DE EXPERIÊNCIAS

Maicon Schibilski
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
schibilski@hotmail.com

Sthella Rayssa Biz dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
sthella.santos@hotmail.com

Tayssa Carolina Baccin Asakawa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
tayssa.asakawa@hotmail.com

Aline Keryn Pin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Este artigo trata-se de um relato de experiência das oficinas ofertadas para o curso de Formação de Docentes de um Colégio Estadual da cidade de Toledo/Paraná, aplicado através do projeto de extensão “Projeto saber mais: Pesquisa em educação e metodologia do ensino de matemática”, desenvolvido por professores e acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Teve como objetivo contribuir para a ampliação dos conhecimentos matemáticos de alunos do curso de Formação de Docentes, com ênfase no uso de materiais manipuláveis que possam ser utilizados nas séries iniciais e no ensino de conceitos de Geometria de uma forma diferente e lúdica, proporcionando para estes alunos um aprendizado mais significativo para os alunos das séries iniciais.

Palavras-chave: Geometria. Materiais Manipuláveis. Formação de Docentes.

1 INTRODUÇÃO

O projeto teve início na data de 24 de Maio de 2018, a partir de uma necessidade do Colégio Estadual Presidente Castelo Branco (PREMEN) na cidade de Toledo-PR com o objetivo de reforçar o conhecimento matemático no curso de Formação de Docentes. O projeto ocorreu em parceria com o curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Toledo, onde foi realizada a primeira reunião de apresentação sobre as necessidades do Colégio e suas dificuldades na área. Na sequência formalizamos os membros da equipe, cronogramas de atividades a serem desenvolvidas.

No curso de Formação de Docentes ofertado pelo Colégio Estadual Presidente Castelo Branco (PREMEN) na cidade de Toledo-PR, a Matemática é trabalhada como disciplina curricular nos quatro anos, tempo mínimo de duração do curso, como no ensino médio regular.

ISSN 2358-4947

Durante o curso, apenas uma disciplina curricular inclui o ensino da matemática, ofertada no terceiro ano, denominada Metodologia do Ensino da Matemática. Na disciplina, os alunos são orientados a como ensinar a matemática na pré-escola e nos anos iniciais do ensino fundamental. Mesmo com a disciplina específica para o ensino da matemática, esse conhecimento ainda é restrito por parte dos alunos do curso, por muitas vezes não possuírem domínio adequado dos conteúdos matemáticos básicos. O que pode acarretar insegurança no processo de ensino desses conteúdos.

O ensino de Matemática em qualquer etapa da educação deve ser bem estruturada, pois a construção de conhecimentos matemáticos adequados serão o alicerce para todo o processo educacional da formação docente. Por isso a importância de se trabalhar, além dos conteúdos matemáticos, com a utilização de métodos e estratégias para o ensino de matemática. Dessa forma Nacarato (2005) destaca que é necessário que se faça o uso correto dos materiais manipuláveis em sala de aula, contribuindo com a aprendizagem matemática. Portanto não é o uso de materiais em si que possibilitará a elaboração conceitual do aluno, mas como esses materiais são utilizados e os significados que podem ser negociados e construídos a partir deles.

2 Procedimentos Metodológicos

A partir de uma reunião com a equipe pedagógica, professores do curso do Colégio PREMEN, três professoras e de três acadêmicos da UTFPR, foram levantadas as carências que o colégio tinha em relação ao ensino de matemática. Dentre os temas abordados, optamos por dar prioridade a três dos temas: o primeiro seria o ensino de conceitos de Geometria com a utilização de materiais manipuláveis para conhecimento dos próprios alunos do curso, o segundo como trabalhar as operações básicas com a utilização de materiais manipuláveis para que os alunos do curso pudessem utilizar no ensino desses conteúdos durante suas regências e o terceiro tema, discutir com os estudantes sobre a importância da metodologia de pesquisa na seleção de fontes confiáveis de pesquisa.

Durante a reunião foram disponibilizadas duas datas para a aplicação de oficinas, a primeira para o dia 29 de Outubro de 2018, e a segunda para o dia 5 de Novembro de 2018, ambas realizadas no próprio colégio no período matutino, pelo motivo de ser em contra turno e por ser o local de melhor acesso para os alunos.

Os encontros do projeto foram realizados quinzenalmente. No primeiro encontro foi discutido a reunião realizada no Colégio PREMEN e como poderíamos ajudá-los nas

ISSN 2358-4947

necessidades sobre o conteúdo de Matemática. Diante dos levantamentos, os integrantes do projeto dividiram-se em grupos de estudo para leituras de artigos e textos, para a melhor compreensão do tema proposto e estratégias a serem desenvolvidas.

Ainda com o objetivo de estruturar os conteúdos e materiais que seriam trabalhados nas oficinas, foi elaborado e aplicado um questionário com perguntas objetivas para que os alunos do curso de Formação Docente respondessem sobre o conhecimento a respeito de alguns materiais manipuláveis. Em cada pergunta havia as opções como: “conheço”, “já ouvi falar”, “conheço, mas nunca utilizei”, “não conheço”, dentre outras. Após a análise dos dados obtidos com o questionário, foram selecionados os seguintes materiais: Quadro de Valor Lugar, Ábaco de Frações e Escala Cuisenaire.

3 Resultados e Discussão

Para o Quadro de Valor Lugar[1], conforme a figura 1, focamos em apresentar e realizar, juntamente com os alunos, o processo construtivo do material manipulável e operações básicas, pois, boa parte dos alunos do curso sabiam do que se tratava um Quadro de Valor Lugar, mas não conheciam muito bem sua construção e utilização.



Figura 1: Quadro Valor Lugar.
Fonte: Blog Turma dos Espertos.

[1] Material didático utilizado para auxiliar na introdução dos conceitos de unidade, dezenas e centenas e no processo de contagem, formação dos números e operações matemáticas.

ISSN 2358-4947

Com o ábaco de frações[2], conforme a figura 2, realizamos o desenvolvimento de operações com frações sem o uso de algoritmos e trabalhando nas equivalências de frações.



Figura 2: Ábaco de Frações.
Fonte: Mundo Brink.

A Escala Cuisenaire[3] foi proposta as operações básicas, sucessão numérica, dobro e a metade de uma quantidade, frações, comparação e inclusão.



Figura 3: Escala Cuisenaire.
Fonte: UTFPR Cornélio Procópio.

[2] Material didático utilizado para estimular a aprendizagem de conceito básicos de matemática, como construção do número, noção de classificação, seriação, conservação e quantidade, além de relação métrica, frações e operações matemáticas.
[3] Material didático utilizado para construção dos conceitos básicos de matemática, como também sucessão numérica, comparação e inclusão, as quatro operações, o dobro e a metade de uma quantidade, frações.

ISSN 2358-4947

A primeira oficina aconteceu no dia 29 de Outubro de 2018 no período matutino. Onde dividimos a oficina em alguns momentos.

No primeiro momento trabalhamos a construção de um mapa conceitual[4] do texto “Eu trabalho primeiro no concreto” de Adair Mendes Nacarato, enviado aos alunos para leitura prévia. Durante a construção foram realizadas discussões a respeito do texto, levantados pontos necessários para a construção do mapa conceitual até a sua finalização.

No segundo momento a turma foi dividida em três grupos. Assim fizemos o revezamento dos grupos entre cada material manipulável abordado anteriormente, com um tempo estipulado para as apresentações simultâneas.

Na apresentação 1 estava a Escala Cuisenaire, onde separamos os alunos em duplas e disponibilizamos as peças do material. Apresentamos o material e alguns conceitos matemáticos que podem ser trabalhados com o material, sendo as operações básicas, sucessão numérica, dobro e a metade de uma quantidade, frações, comparação e inclusão, como também possibilidades de como trabalhar com os alunos nas séries iniciais, conforme figura 4.

[4]Um mapa conceitual é uma ferramenta que permite organizar e representar, graficamente e através de um esquema, o conhecimento de determinado assunto.

ISSN 2358-4947

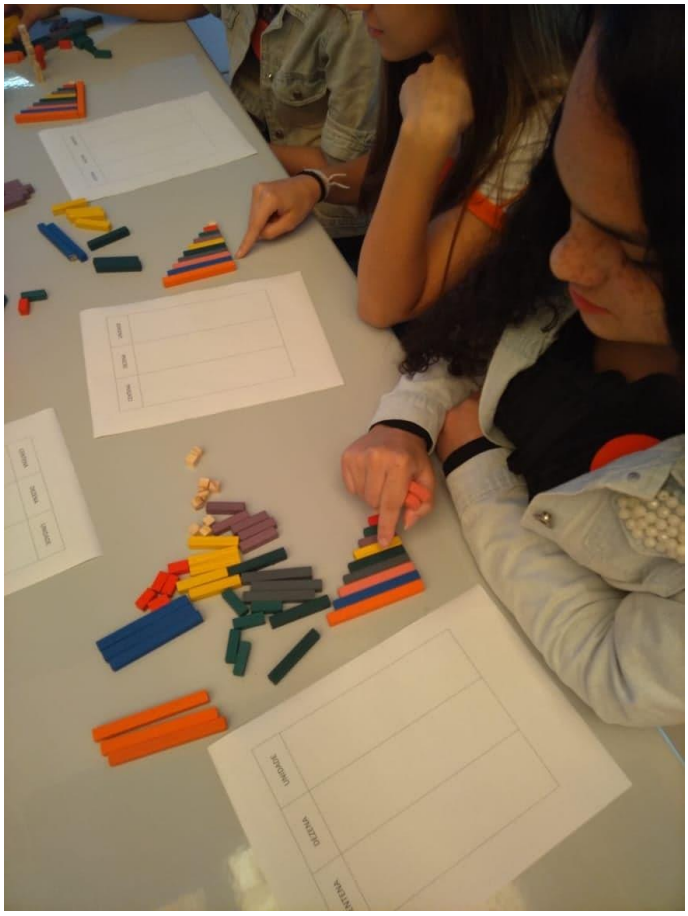


Figura 4: Imagem dos alunos na apresentação da Escala Cuisenaire.
Fonte: Dos autores.

Na apresentação 2 estava o Ábaco de Frações, onde os alunos trabalharam a soma e subtração de frações sem o uso do algoritmo, através de um processo de comparação entre as frações e buscando no Ábaco de Frações, as relações de equivalências para realizar as operações, apresentamos como pode ser ensinado para os alunos das séries iniciais e como poderia ajudar no desenvolvimento de entendimento dos alunos.

ISSN 2358-4947

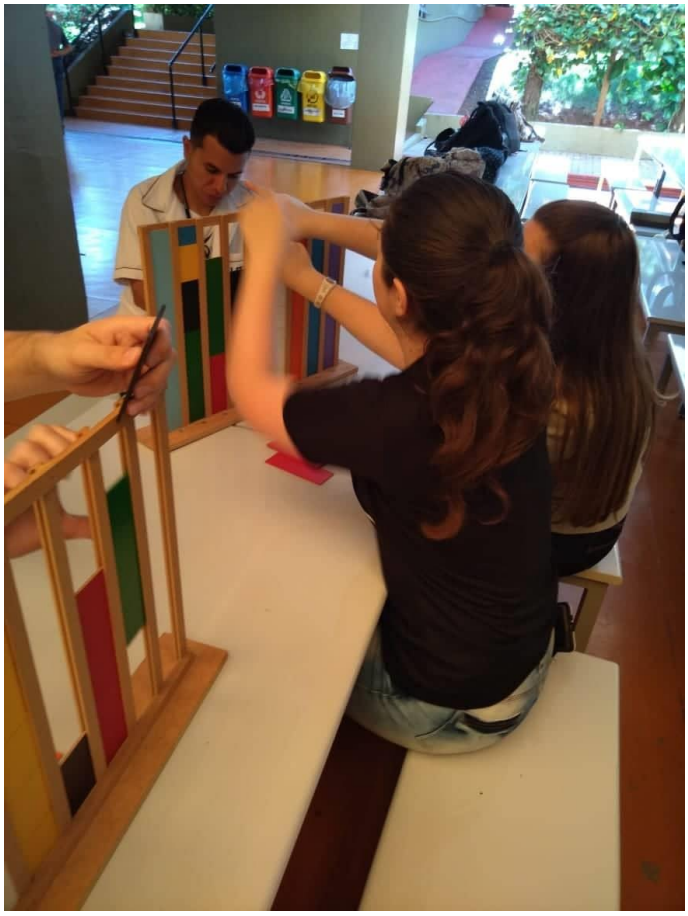


Figura 5: Imagem dos alunos na apresentação do Ábaco de Frações.
Fonte: Dos autores.

Na apresentação 3 estava o Quadro de Valor Lugar, onde foram discutidos os diferentes nomes atribuídos a ele como cartaz de pregas, Cavalu, entre outros. Na sequência os alunos confeccionaram os cartazes em duplas e foi apresentado aos eles possibilidade de realizar com as crianças a construção de quadros menores para que cada aluno pudesse ter o seu e alavancar a construção do pensamento nas operações. Para finalização da apresentação 3, foi mostrado na prática o processo de utilização do cartaz, alguns já conheciam e aprimoraram seu uso, outros aprenderam naquele momento suas possíveis utilizações e como se dá o processo de troca quando se atinge 10 ou mais palitos na unidade de cada classe.

ISSN 2358-4947



Figura 6: Imagem dos alunos na apresentação do Cavalu.
Fonte: Dos autores.

No terceiro momento da oficina, após um intervalo, iniciamos a atividade prática de origamis onde objetivo desta atividade foi de trabalhar conceitos de geometria na construção de um cubo. Separamos os alunos em grupos de 3 integrantes e cada um dos alunos construiu 2 faces do cubo e na finalização deveriam juntar suas partes para formar o cubo completo, conforme a figura 7.

ISSN 2358-4947

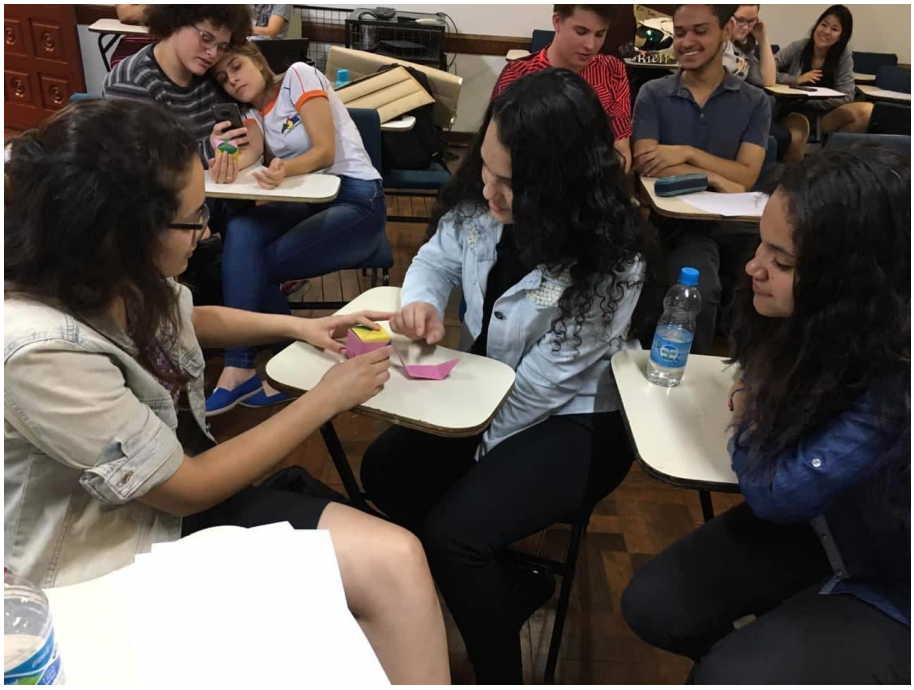


Figura 7: Imagem dos alunos construindo o cubo.
Fonte: Dos autores.

Durante cada etapa de construção foram observadas as formas geométricas geradas, a cada dobra e os conceitos matemáticos que poderiam ser abordados em cada etapa, como por exemplo o que aconteceu com os ângulos ao se dobrar o papel ao meio e quantos vértices ou quantas arestas obtivemos em determinado momento da construção, buscamos sempre utilizar os termos matemáticos para enfatizar a linguagem matemática com os alunos e explorar ao máximo a atividade.

Percebemos que com a aplicação desta oficina, houve bastante envolvimentos dos alunos e que haviam muitos questionamentos durante as etapas mostrando o interesse em aprender matemática de uma forma diferente.

Após a finalização da primeira oficina, partindo da experiência positiva, começamos os trabalhos para a preparação da segunda oficina, o que ocorreria na semana seguinte. Percebemos o interesse dos alunos e resolvemos em levar para eles um pouco sobre a UTFPR e mostrar os trabalhos que desenvolvemos na Universidade, como os materiais manipuláveis que confeccionamos durante as aulas de Laboratório de Ensino da Matemática. Pensamos também em aprofundar seus conhecimentos sobre Geometria para que assim não ficassem somente no que ensinar para os alunos das séries iniciais, e sim, para o

ISSN 2358-4947

conhecimento como alunos do Ensino Médio, assim os alunos da Formação de Docentes poderiam se sentir mais à vontade e confiante para lecionar sobre o tema.

A segunda oficina aconteceu no dia 5 de Novembro de 2018 no período matutino, durante as aulas de estágio dos alunos.

No primeiro momento trabalhamos uma mini-aula de Geometria, onde através de slides e manipulação de sólidos geométricos foram tratadas as particularidades de cada figura e de cada sólido geométrico, conforme figura 8.



Figura 8: Imagem da mini-aula sobre geometria.
Fonte: Dos autores.

No segundo momento, apresentamos aos alunos o Multiplano, constituído por um tabuleiro retangular operacional no qual são encaixados pinos, fixados elásticos, hastes de corpo circular para sólidos geométricos, hastes para cálculo em funções ou trigonometria, base de operação, barras para gráficos de Estatística, disco circular que apresenta em sua periferia uma sequência de orifícios circulares, onde podem ser combinadas duas ou mais peças pertinentes a uma determinada operação matemática que se pretenda aprender e compreender por meio da visão e ou do tato.

Em seguida dividimos a turma em dois grupos e propusemos aos alunos que utilizassem na primeira oportunidade de maneira que achassem conveniente para pegar certa afinidade com o material. Na sequência foram propostos problemas desafiadores para os dois grupos investigarem tarefas construtivas com o material.

ISSN 2358-4947

No terceiro momento da oficina trabalhamos com um jogo onde os dois grupos disputavam entre si. O jogo foi adaptado da versão “Quem sou eu?”, onde cada aluno passava o suporte que ficava na cabeça, contendo figuras geométricas e cada aluno na sua vez fazia uma pergunta para o grupo rival para adivinhar o sólido ou figura geométrica representada que estava no suporte, o grupo rival respondia sim ou não, cada representante que disputava podia fazer uma pergunta e na sequência o outro perguntava, alternando entre os grupos até acertarem a sua figura correspondente.

Após a disputa, o grupo com maior quantidade de acertos se tornava o vencedor do jogo. O objetivo desta competição era que os alunos usassem os conhecimentos apreendidos no primeiro momento da oficina e tornarem estes conhecimentos mais consolidados.

Para o último momento desta oficina, após o intervalo iniciamos com um vídeo sobre Geometria e após o termino do vídeo, falamos que este vídeo havia sido elaborado na universidade pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) anos atrás, apresentamos os cursos que a universidade oferece e como é a estrutura da Universidade, percebemos que alguns alunos se interessaram pelos cursos que são ofertados.

Na sequência trouxemos para apresentação alguns materiais manipuláveis confeccionados na UTFPR na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), dois Geoplanos, um Ábaco de Frações, dois conjuntos de Quadrados Mágicos, Origamis com diversos formatos e um conjunto de “Palitoches” que são fantoches colados em palitos acompanhados de um livro da história “Sete patinhos na Lagoa” para ser contadas para as crianças no processo de alfabetização matemática. Os alunos ficaram tão empolgados com a ideia que insistiram para que fizéssemos a apresentação da história encenando com os palitoches.

Falamos do processo construtivo de cada um deles, dos materiais empregados e frisamos que apesar de algumas escolas não possuírem os materiais manipuláveis que alguns poderiam ser facilmente confeccionados por eles e que o material manipulável é um recurso didático que pode auxiliar o aluno na construção dos conceitos matemáticos. Então, deixamos um tempo para que os alunos manuseassem e explorassem os materiais, o que os deixaram muito eufóricos para visualizar, verificar e testar seu funcionamento.

Após este tempo, dividimos a sala em trios e cada trio pegou um de nossos materiais e instruímos que deveriam apresentar uma aplicação na qual usariam este material em sala de aula como professores, conforme a figura 9. A apresentação dos alunos foi muito bem vista pelos colegas, rendendo comentários e trocas de experiências.

ISSN 2358-4947



Figura 9: Alunos manipulando os materiais produzidos na universidade.
Fonte: Dos autores.

Ao final da oficina os alunos responderam um questionário fazendo críticas e sugestões para as próximas atividades do projeto de extensão, avaliando o desempenho dos ministrantes e se as oficinas haviam atendidos suas expectativas. Para nossa surpresa os comentários foram muitos elogios e pedidos de temas para as próximas oficinas.

4 Conclusões / Considerações Finais

Ao interpretar o questionário final durante a reunião do grupo do projeto de extensão, pudemos perceber o quão importante foi nosso trabalho e a diferença que fizemos para aqueles alunos que puderam participar das nossas oficinas. Muitos dos alunos que fazem o curso de Formação de Docentes têm aversão pela Matemática, porém sabem que possuem a tarefa de ensinar para seus alunos esta disciplina. Durante toda a aplicação de nossas

ISSN 2358-4947

oficinas vimos o interesse e vontade em aprender a Matemática de uma forma diferente por parte dos alunos.

Para a elaboração das oficinas, realizamos vários encontros para estudar artigos relacionados a educação e o ensino dos materiais manipuláveis para as séries iniciais. Com isso, percebemos que o material manipulável é uma ferramenta importante no ensino da Matemática para as crianças e desenvolverem o raciocínio no qual é difícil de compreender algebricamente ou por gráficos.

Em uma conversa com a professora responsável pela disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, nos relatou que em sua formação não foram abordados os materiais manipuláveis da forma que tratamos durante as oficinas e por isto não se sentia insegura para ensinar os alunos o funcionamento de cada material, com isso percebemos que os professores dos cursos de Formação de Docentes não têm uma formação base para o ensino da Matemática. Futuramente, podendo instruir para estes professores, afim de aprimorar os conhecimentos deles e encorajar a repassarem os conhecimentos matemáticos para os seus alunos.

Temos certeza que este projeto de extensão e a troca de experiências não ajudou somente aos alunos do curso de Formação de docentes, mas também a nós enquanto idealizadores deste projeto, a refletir o como está o sistema educacional e proporcionar, mesmo que em proporções pequenas, a fazer algo pela educação.

Referências

Blog Turma dos Espertos. USO DO Q.V.L. Disponível em: <http://princesa42432009.blogspot.com/2009/03/uso-do-qvl.html>. Acesso em 29 de maio de 2019.

Mundo Brink. Ábaco de frações em madeira. Disponível em: <https://www.mundobrink.com/abaco-de-fracoes-em-madeira>. Acesso em 29 de maio de 2019.

NACARATO, Adair Mendes. **Eu trabalho primeiro no concreto.** Disponível em: < https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4291874/mod_resource/content/1/Nacarato_eu%20trabalho%20primeiro%20no%20concreto.pdf>. Acesso em 14 de maio de 2019.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio. Escala Cuisenaire. Disponível em: <http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-

ISSN 2358-4947

neste-Campus/matematica/laboratorios/material-didatico/escala-cuisenaire>. Acesso em 29 de maio de 2019.

ISSN 2358-4947

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI-PR

Vitória Fenilli Vidaletti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo
vitoria_fenilli@hotmail.com

Jahina Fagundes de Assis Hattori
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo

Resumo

Neste trabalho será realizado um estudo sobre o crescimento populacional da cidade de Tupãssi/PR ao longo do tempo, por meio da Modelagem Matemática. Serão utilizados o Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst, já existentes na literatura. O trabalho se iniciou com o estudo dos modelos que serão usados, e posteriormente a coleta de dados no site oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em seguida foram realizadas as simulações computacionais e uma comparação com os dados empíricos. Para a validação dos resultados utilizou-se do erro relativo e através dele pode-se concluir que o modelo que mais se adequa ao crescimento populacional de Tupãssi é o modelo de Verhulst.

Palavras-chave: Modelos Matemáticos. Crescimento Populacional. Malthus e Verhulst.

1 Introdução

A qualidade de vida tem sido uma preocupação constante nas sociedades mais contemporâneas, e um dos fatores preponderantes é o crescimento populacional. De acordo com Oliveira (2014) [4], a compreensão dos fenômenos naturais e as leis que o delimitam tem sido causas persistentes na sociedade, buscando favorecer a qualidade de vida do ser humano em seu meio social. Por isso, é de grande importância averiguar alternativas, as quais retratam melhorias no desenvolvimento populacional e social. Visto que a população é um elemento político essencial que caracteriza uma comunidade e que, consequentemente, tornam-se necessários compreender a fim de tornar possível o planejamento econômico, social, cultural ou político.

Uma das alternativas para a previsão de situações que podem fazer parte do nosso cotidiano é a Modelagem Matemática. Segundo Biembengut e Hein (2012) [1], "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Isto é, a Matemática e a realidade são conjuntos disjuntos que podem ser levadas à interação por meio da Modelagem. Assim, utiliza-se a modelagem como suporte para aplicações das definições, teoremas e propriedades, resultando em modelos matemáticos que contribuem para a estimativa de vários aspectos de nosso cotidiano e mais especificamente para esse trabalho o de crescimento populacional. Para tanto, serão empregados esses modelos matemáticos de Malthus e de Vehuslt para estimar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi.

ISSN 2358-4947

2 Fundamentação Teórica

2.1 Modelo de Malthus

De acordo com Henriques (2007) [2], o modelo de Malthus foi criado em 1798. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados por ele. Ao criar este modelo, Malthus tinha em mente a preocupação com a alta taxa de natalidade que estava acontecendo; provocando assim um aumento significativo da população, o que consequentemente provocaria fome e miséria. Umas das soluções que ele propõe para esse problema é a redução da taxa de natalidade por parte dos governantes de cada país. Devido ao fato relatado o modelo assume que à população cresce proporcionalmente a população total em determinado instante. Para Malthus o modelo poderia ser utilizado pelos governadores para ter uma ideia do comportamento da população por um período de ate 20 anos.

Porém segundo Pugens, Silva e Godinho (2012) [5], este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que causa a morte da população.

O Modelo Malthus, representado por uma equação diferencial ordinária que pode ser solucionada por meio da aplicação do método de variáveis separáveis. Matematicamente sua representação é dada pela equação (1),

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t) \tag{1}$$

onde, **P(t)**: a quantidade de indivíduos, **t**: o tempo, α : constante de proporcionalidade.

Observa-se que pelo fato de P(t) se tratar de população e ser uma função discreta em t, este só poderá assumir valores positivos. Deve-se observar também que quanto maior for a população mais próximo de uma função contínua estaremos tratando.

Para se resolver esta equação devem-se considerar alguns aspectos, como por exemplo:

1. Não se tem fatores inibidores;
2. A quantidade de indivíduos reprodutores sempre se mantém constante durante o crescimento da população;
3. A taxa de natalidade e de mortalidade é sempre constante.

Considerando os aspectos apresentados, tem-se que a taxa (α) de crescimento da população P(t) é sempre constante, e é obtida por meio da diferença entre a taxa de natalidade (n) e a taxa de mortalidade (m), isto é,

$$\alpha = n - m \tag{2}$$

Ou seja,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = \alpha \tag{3}$$

Resolvendo o modelo discreto obtém-se,

ISSN 2358-4947

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t) \tag{4}$$

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t) \Rightarrow P(t+1) = P(t)(\alpha + 1) \tag{5}$$

Considerando $P(0) = P_0$,

$$\begin{cases} P_{(t+1)} = P_t(\alpha + 1) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{6}$$

então,

$$P_{(0+1)} = P_0(\alpha + 1) \Rightarrow P_1 = P_0(\alpha + 1) \tag{7}$$

generalizando,

$$P_t = P_0(\alpha + 1)^t \tag{8}$$

sendo a expressão em (8) a solução da equação dada em (4).

Portanto conhecendo a população em $t = 0$ e o valor de t no instante desejado, isto é $P(0) = P_0$ e $P(t) = P_t$ é possível calcular a taxa demográfica (α) no instante, fazendo,

$$\frac{P_t}{P_0} = (\alpha + 1)^t \Rightarrow \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{9}$$

2.2 Modelo de Verhulst

De acordo com Tavoni (2013) [7], Pierre François Verhulst foi um matemático belga que, em 1838, introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modifcado, considerando que a variação de crescimento depende da própria população em cada instante e satisfaz algumas propriedades.

Segundo Sodré (2007) [6], a adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies populacionais, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \tag{10}$$

podendo ser reescrito como,

$$\beta = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \tag{11}$$

sendo, $r = n - m$, com $r > 0$, n taxa de natalidade, m taxa de mortalidade e P_∞ o valor de limite da população, isto é, o valor que P estabiliza.

Os valores de n e m devem ser obtidos realizando uma média das taxas de natalidade e mortalidade dos anos anteriores. O valor de P_∞, pode ser determinado através da comparação entre a linearização do Modelo de Verhust e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que nosso $\beta(P)$ tende a zero quando o P tende a P_∞. Substituindo 10 em 11 e considerando que nosso $P(0) = P_0$, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \Rightarrow rP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases} \tag{12}$$

ISSN 2358-4947

Deve-se observar que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P_\infty$, são ambas soluções para a equação diferencial obtida anteriormente. Com isso, e realizando separação de variáveis se obtém,

$$\frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)} = rdt \tag{13}$$

integrando ambos os membros da equação (13) obtém-se (14),

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)} = \int rdt \tag{14}$$

utilizando o método de frações parciais se adquire,

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{P_\infty}\right)} = \ln|\frac{P}{1-\frac{P}{P_\infty}}| \tag{15}$$

e

$$\int rdt = rt + c. \tag{16}$$

portanto,

$$\ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + c \tag{17}$$

usando a condição inicial $P(0) = P_0$,

$$\ln\left|\frac{P(0)}{1-\frac{P(0)}{P_\infty}}\right| = r\cdot 0 + c \tag{18}$$

$$c = \ln\left|\frac{P_0}{1-\frac{P_0}{P_\infty}}\right| = \ln\left|\frac{P_0}{\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty}}\right| = \ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right| \tag{19}$$

logo,

$$\ln\left|\frac{\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}}{\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}}\right| = rt \tag{20}$$

aplicando as propriedades de logarítmo e isolando $P(t)$ obtém-se,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \tag{21}$$

considerando $P(t) = P_t$, pode-se isolar o valor de r,

$$r = \frac{-1}{t}\cdot\left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln\left(P_\infty - P_0\right)\right] \tag{22}$$

ISSN 2358-4947

3 Resultados e Discussão

3.1 Crescimento Populacional

De acordo com IBGE (2017) [3], desde a época da colonização, que ocorreu no século XVI, a região de Tupãssi era povoada por índios guaranis e possuía uma intensa extração de erva mate. Em 30 de Janeiro de 1967 a pequena cidade do Oeste do Paraná se tornou um dos distritos do município de Assis Chateaubriand. Seu plebiscito ocorreu em 25 de Novembro de 1979 pela lei nº 7270 de 27 de Dezembro de 1979. Porém, foi apenas em 01 de Fevereiro de 1983 que a cidade se tornou município. Tendo em vista a rápida criação do município sua população teve uma variação considerável. Diante do fato de ter sido parte do município de Assis Chateaubriand, a taxa populacional inicial foi maior, porém com a ação de diversos fatores, sejam eles, ambientais, habituais, naturais, financeiros e territoriais, houve um decréscimo na quantidade da população da cidade.

Visto que os modelos visam um crescimento, se utilizará os dados a partir do ano de 2007, quando a população vislumbra o início de um aumento significativo em sua quantidade de habitantes.

Na Tabela 1 estão os dados da população referente aos respectivos anos. Serão utilizados os dados coletados para exemplificar dois modelos estudados, sendo eles, o de Malthus e o de Verhulst.

Tabela 1: Censo da População de Tupãssi/PR

Ano	População
2007	7755
2010	7997
2018	8128

Fonte: IBGE

3.2 Modelo de Malthus

Vale ressaltar que para Tavoni (2013) [7], o modelo de Malthus não considera a taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que pode causar a morte de parte da população. Para aplicar o modelo de Malthus precisa-se encontrar o α, ou seja,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{23}$$

Escolhemos $P_t = 7997$ e $P_0 = 7755$, deste modo,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{7997}{7755}} - 1 \tag{24}$$

$$\alpha = 0,0102955296 \tag{25}$$

Descoberto o valor de α pode-se calcular segundo Malthus a população nos respectivos anos a partir do resultado,

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha)\cdot t} \tag{26}$$

Substituindo os valores, tem-se,

ISSN 2358-4947

$$P_{2010} = P_{2007} \cdot e^{\ln(1+0{,}0102955296)\cdot 3} \tag{27}$$
$$P_{2010} = 7755 \cdot e^{\ln(1+0{,}0102955296)\cdot 3} \tag{28}$$
$$P_{2010} = 7755 \cdot e^{0{,}0307286749} \tag{29}$$
$$P_{2010} = 7755 \cdot 1{,}0312056739 \tag{30}$$
$$P_{2010} = 7997 \tag{31}$$

$$P_{2018} = P_{2007} \cdot e^{\ln(1+0{,}0102955296)\cdot 11} \tag{32}$$
$$P_{2018} = 7755 \cdot e^{0{,}0102428916\cdot 11} \tag{33}$$
$$P_{2018} = 7755 \cdot e^{0{,}1126718078} \tag{34}$$
$$P_{2018} = 7755 \cdot 1{,}1192645388 \tag{35}$$
$$P_{2018} = 8680 \tag{36}$$

3.3 Modelo de Verhulst

Para a aplicação deste modelo se faz necessário realizar um ajuste de curva, para isto dispõe-se dos pontos da Tabela 2,

Tabela 2: Pontos do ajuste de curva

P_n	P_{n+1}
7755	7997
7997	8128

Fonte: Autores (2019)

Utilizando o método ajuste de curvas do software Excel, tem-se a reta a seguir,

$$f(x) = 0{,}541x + 3799 \tag{37}$$

Tendo encontrado a reta que melhor se ajusta aos pontos acima, deve-se considerar $f(x) = x$, ponto fixo (p_∞)

$$x = 0{,}541x + 3799 \tag{38}$$
$$x - 0{,}541x = 3799 \tag{39}$$
$$x(1 - 0{,}541) = 3799 \tag{40}$$
$$x = \frac{3799}{1 - 0{,}541} \tag{41}$$
$$x = 8277 \tag{42}$$

Para encontrar o parâmetro r, foi utilizada a expressão encontrada na dedução do modelo de Verhulst, assim como deve-se considerar os valores para o tempo da Tabela 2.

$$r = \frac{-1}{t} \cdot \left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln\left(P_\infty - P_0\right)\right] \tag{43}$$

Para $t = 0$, r não está definido.

ISSN 2358-4947

Para $t = 3$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln (8277 - 7755) \right] \tag{44}$$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln (522) \right] \tag{45}$$

$$r \cong 0.217868886 \tag{46}$$

Para $t = 11$

$$r = \frac{-1}{11} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{8128} - 1 \right) \right) - \ln (522) \right] \tag{47}$$

$$r \cong 0,118245485 \tag{48}$$

Assim, obtém-se a Tabela a seguir,

Tabela 3: Valores de r

t	r
3	0,217869
11	0,118245485

Fonte: Autores (2019)

Para se descobrir o valor de r a ser utilizado precisa-se fazer uma média dos valores obtidos acima.

Assim, foi encontrado $r = 0,168057242$. Será utilizada todas as casas decimais para uma maior aproximação.

Então, encontra-se os parâmetros para substituí-los na equação de Verhulst.

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \tag{49}$$

$$P(t) = \frac{7755 \cdot}{(8277 - 7755)e^{-0,168057242t} + 7755} \tag{50}$$

$$P(t) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242t} + 7755} \tag{51}$$

Por fim, é necessário verificar o modelo encontrado. Para isto, basta substituir o tempo e assim encontrar o valor de $P(t)$.
Para $t = 3$

$$P(3) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 3} + 7755} \tag{52}$$

$$P(3) = 7954 \tag{53}$$

Para $t = 11$

$$P(11) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 11} + 7755} \tag{54}$$

$$P(11) = 8190 \tag{55}$$

ISSN 2358-4947

Tabela 4: Comparação dos Modelos

Ano	População	Malthus	Verhulst
2007	7755	7755	7755
2008	-	7835	7833
2009	-	7916	7898
2010	7997	7997	7954
2011	-	8079	8003
2012	-	8163	8004
2013	-	8247	8079
2014	-	8331	8109
2015	-	8417	8134
2016	-	8504	8156
2017	-	8591	8174
2018	8128	8680	8190

Fonte: Autores (2019)

3.4 Comparação dos modelos

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Malthus e do modelo de Verhulst para todos os intervalos de tempo, como se pode visualizar na Tabela 4.
Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 3.4, os dados do modelo e os dados empíricos.

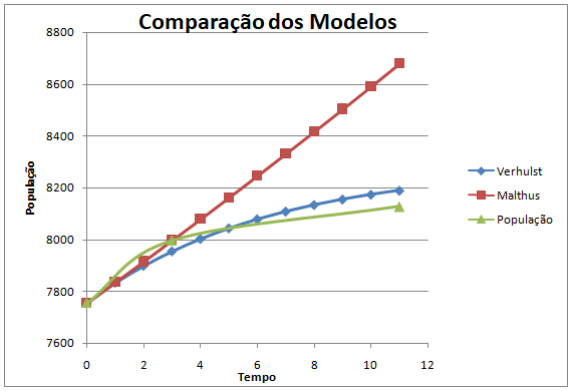


Figura 1: Comparação dos Modelos.
Fonte: Autores (2019)

3.5 Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos , procede-se com o cálculo do maior erro relativo.

1. **Malthus**

   - 2018

$$\left|\frac{8680 - 8128}{8128}\right| \cdot 100 = 6,8\% \tag{56}$$

ISSN 2358-4947

2. **Verhulst**

   - 2018

$$\left|\frac{8190 - 8128}{8128}\right| \cdot 100 = 0,8\% \tag{57}$$

Analisando a Tabela 4, a Figura 3.4 e os erros obtidos em (56) e (57) para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequou aos dados reais da população de Tupassi foi o modelo de Verhulst, pois nesse modelo foi constatado o menor erro relativo, 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado quando do uso do modelo de Malthus.

4 Conclusão

Ao analisar o estudo aqui abordado, percebe-se que a modelagem matemática, é uma ferramenta importante para resolução de problemas do cotidiano, além de perceber quão interessantes podem ser os problemas aplicados que podem ser descritos ou resolvidos a partir de modelos matemáticos.

Desse modo, ao aplicar modelos de crescimento populacional para o estudo em questão tivemos a oportunidade de verificar a proximidade que eles promovem dos dados reais, visto que isso pode auxiliar os gestores e servir de base para tomada de decisões.

O modelo de Malthus deve ser usado para simular o crescimento em pequenos intervalos de tempo. Variando-se os parâmetros, o modelo de Verhulst simula bem a população brasileira. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da cidade de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro relativo constatado sendo de 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado nas aplicações do modelo de Malthus.

Referências

[1] BIEMBENGUT, M. S. HEIN, D.: **Modelagem Matemática no ensino.** São Paulo. 2012.

[2] HENRIQUES, A.: **Thomas Robert Malthus, a teoria malthusiana.** Coimbra. 2007.

[3] IBGE.: **História de Tupãssi.** 2017.

[4] OLIVEIRA, V. A. B.: **O estudo da população na geografia escolar com o uso de tecnologias e metodologias diferenciadas.** PDE. 2014.

[5] PUGENS, B. P. SILVA, JF. GODINHO, D.: **Modelos Matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados no município de Osório.** 2012.

[6] SODRE, U. **Modelos Matemáticos.** Londrina. 2007.

[7] TAVONI, R.: **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais.** Rio Claro. 2013.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

PASSEIOS ALEATÓRIOS E O PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR

Andrey Felipe Kummer
UTFPR - *Câmpus* Toledo
andreyfk86@hotmail.com

Daniela Trentin Nava
UTFPR - *Câmpus* Toledo

Resumo

Este artigo estuda processos estocásticos e o caso particular de passeios aleatórios simples, por meio do estudo do problema da ruína do jogador. O problema da ruína do jogador é um problema clássico em processos estocásticos que é utilizado para calcular a probabilidade de um jogador, que possui um capital inicial cair em ruína após jogar independentemente até alcançar o fracasso ou um capital maior que o inicial. Nesse trabalho, foram destacados e analisados diversos cenários para estudar em quais casos o jogador apresenta vantagem e em quais desvantagem. Foi realizada uma simulação para diversos cenários com a finalidade de obter uma solução para o problema. Com uma forma geral para o cálculo das probabilidades estabelecida, têm-se três cenários possíveis para esse problema, as situações são referentes à chance de ganhar um jogo, divididas em um jogo desfavorável, honesto e favorável ao jogador. Com as chances em cada um dos casos, houve uma verificação de convergência em cada um dos casos, buscando confirmar o melhor cenário ao jogador, assim analisando mais do que a chance de ganhar apenas um jogo, mas ganhar jogos o suficiente para atingir um objetivo. Assim foi concluído que para apenas um caso, onde a probabilidade é de $p > 0.5$, o jogador tem chance real de vitória em quase todos os cenários.

Palavras-chave: Processos Estocásticos. Cadeias de Markov. Ruína do jogador. Probabilidade da ruína.

1 Introdução

Não são raras as vezes em que se observam situações quanto a variação de um período de tempo, situações estas influenciadas por efeitos aleatórios (ou de azar) não somente em um instante, mas por todo o período de tempo ou mesmo sequência de tempos que se está levando em conta na pesquisa. Essas situações são denominadas de processos estocásticos. De modo genérico, um processo estocástico é um fenômeno que varia em algum grau, de forma imprevisível na medida que o tempo passa. Pode-se citar como exemplo a variação da formação e dissipação de congestionamento do tráfego em um cruzamento; a variação do estoque diário de uma empresa; difusão radioativa; mutações genéticas; variação na atividade da bolsa de valores; entre tantos outros exemplos encontrados em livros de probabilidade como os de Albuquerque[1] e Stewart[9].

Em 1656 Blaise Pascal propôs a Fermat, que anos antes havia resolvido um problema probabilístico, um problema envolvendo a probabilidade de vitória em um jogo entre dois jogadores [3]. Esse problema acabou sendo solucionado, mas ele foi a gênese do que hoje se tem como o problema da ruína do jogador. Hoje esse problema esta formalizado e categorizado dentro de determinados tópicos de processos estocásticos.

A Ruína do Jogador é um problema clássico de passeios aleatórios estudado em processos estocásticos. O problema possibilita o cálculo da probabilidade de um jogador vir a falir, dado um determinado capital inicial. A Ruína do Jogador oferece aproximações válidas na análise

ISSN 2358-4947

de situações financeiras e pode ser aplicado em diversas situações práticas, como por exemplo, nas decisões gerenciais de empresas, bolsa de valores, mercado financeiro, mercado de apostas, etc. Isto decorre do mercado ter um comportamento aleatório, como o problema da ruína do jogador[2]. Nesses casos, por exemplo, o "jogador" é identificado como o empresário, a empresa, o investidor ou o apostador.

2 Materiais e método

Segundo Albuquerque [1] um processo estocástico pode ser definido como um mapeamento que associa os pontos da amostra $\omega \in \Omega$ a uma função real de parâmetro $t \in \Upsilon$ onde usualmente o parâmetro t representa tempo, constituindo assim uma família F de funções de t. O mapa criado é definido por:

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$\omega \longrightarrow x(t,\omega), \quad t \in \Upsilon$$

em que Υ é o intervalo de (0,T]. Denotaremos $x(t,\omega)$ como $x(t)$.

Note que, um processo deste tipo nada mais é do que uma função de duas variáveis que descreve um comportamento para um número de possibilidades, dependendo apenas dos valores respectivos a cada domínio. Desta forma temos um sistema que evolui transitando entre vários resultados, os quais são denominados estados, para determinados instantes t.

2.1 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um tipo especial de processo estocástico, que é definido por seguir a propriedade Markoviana, em que o processo estocástico depende apenas do instante presente, ou seja, o estado do processo no tempo futuro ocorre de forma independente do estado do processo no tempo passado. Tal propriedade é descrita por:

$$P = [X_{t+1} = j \mid X_t = i], \tag{1}$$

onde X_{t+1} e X_t são as variáveis nos momentos $t+1$ e t respectivamente, enquanto j e i são seus respectivos estados.

Os processos de Markov podem ser em tempo discreto ou em tempo contínuo.

Em uma cadeia de Markov de tempo discreto, temos $X(t)$ com t discreto, ou seja, o domínio $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$, possui apenas os números naturais. Então a transição entre estados ocorrerá apenas em valores discretos de t, dentro de um espaço enumerável. Neste caso temos que a propriedade de Markov é descrita para todo $t \in \mathbb{N}$.

O tempo contínuo em uma cadeia de Markov implica em uma quantidade inumerável de valores positivos para t, $T = \{t; t \geq 0\}$, transitando entre estados ou se mantendo no mesmo. Define-se então essa cadeia como um processo estocástico tal que, atende a propriedade com $\{X(t),\ t \geq 0\}$.

2.2 Passeios Aleatórios

Passeios aleatórios (*random walks* em inglês) são um tipo de processo markoviano geralmente associado com o andar de um bêbado, por se tratar de algo totalmente aleatório. O termo

ISSN 2358-4947

"random walk" foi proposto por Karl Pearson em 1905, em seu trabalho enviado para a Nature em que descreve um modelo para uma infestação de mosquitos em uma floresta [8].

Pode-se descrever um passeio aleatório simples unidimensional sobre a reta $\mathbb{Z}$ como um processo estocástico de tempo discreto, que transita com probabilidade p para o estado do processo em $t+1$ unidade na reta, e probabilidade $q = p - 1$, para o estado do processo em $t-1$ unidade na reta. A reta descrita é representada na Figura 1.

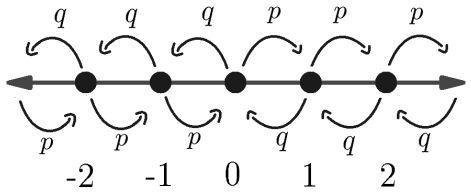


Figura 1: Exemplo de passeio aleatório na reta $\mathbb{Z}$.
Fonte: Autores.

Este processo sobre a reta $\mathbb{Z}$ muda de estado de acordo com a probabilidade de transição, conforme representado na Figura 1. A partir do que já foi estabelecido antes, podemos escrever essa probabilidade, para todo $t \geq 0$, como:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \begin{cases} p, & \text{se } j = i+1 \\ q, & \text{se } j = i-1 \\ 0, & \text{para outro caso} \end{cases}. \tag{2}$$

Perceba que como a probabilidade não depende do instante t, então o que temos aqui é a Equação (1), ou seja, a propriedade de Markov.

Ainda nesse passeio sobre $\mathbb{Z}$, segundo Rincón [7], poderíamos adicionar mais alguma outra condição como por exemplo r, que implica na ausência de movimento em $\mathbb{Z}$ com probabilidade $r = 1 - p - q$. Da mesma forma, como no processo anterior, a probabilidade pode ser descrita como o movimento em $\mathbb{Z}$, para $t \geq 0$, da seguinte forma:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \begin{cases} p, & \text{se } j = i+1 \\ q, & \text{se } j = i-1 \\ r, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{para outro caso} \end{cases}. \tag{3}$$

2.3 O problema da ruína do jogador

A ruína do jogador é um problema que possui diversas variações, uma delas é a descrição a seguir.

Um jogador joga, de forma independente, em um cassino. Neste ambiente o nosso jogador possui apenas duas possibilidades, a de ganhar m reais com probabilidade p, ou perder m reais com probabilidade q, sendo $q = 1 - p$. No instante t, seu capital é de R_t, sendo que no instante inicial do jogo o capital do jogador era $R_0 = n$. O objetivo é acumular um capital de valor $N > n$, caso em que o jogador sai do jogo vitorioso, mas ao chegar a 0 ele perde, e sai do jogo arruinado. Supõe-se ainda, que neste problema o jogador deve jogar por horas ilimitadas, até se aclamar vencedor ou cair na ruína de sua ambição. A questão é, qual a probabilidade desse jogador perder tudo?

ISSN 2358-4947

Vamos supor um caso de $p = q$, com valor recebido ou perdido de R$1,00, por jogada, com probabilidade de $p = q = 50\%$. Supondo ainda que o jogador almeja triplicar seu capital inicial $n = R\$10,00$, assim buscando sair do cassino com $N = R\$30,00$. Uma simulação computacional para estas condições em 250 jogadas utilizando o software R [6] é apresentada na Figura 2.

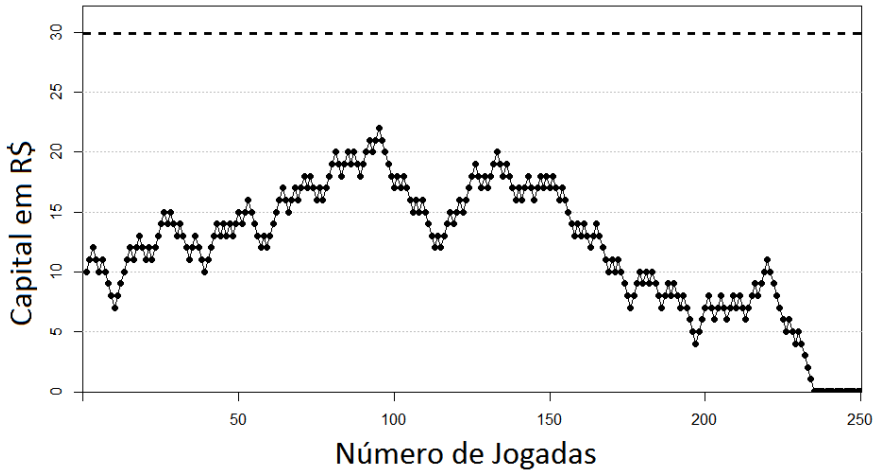


Figura 2: Exemplo de simulação para o problema da ruína do jogador, considerando $n = 10$, $N = 30$ e $p = q = 0,5$.

Fonte: Autores.

Conforme observado pela Figura 2, o jogador encontra a ruína, entretanto, é possível apresentar um modelo para solucionar esse problema de forma generalizada. Neste problema, tem-se que quando o jogador chegar a R$0 ou R$30,00 a cadeia entra em estado absorvente, ou seja, se torna constante naquele estado.

Seja α o instante que o jogador chega a ruína ou ao objetivo N, $\alpha = min\{t \geq 0 \mid X_t = 0 \text{ ou } X_t = N\}$. Portanto podemos reescrever a pergunta: "qual a probabilidade de que o jogador perca tudo?" em forma matemática como

$$P_n = P(X_\alpha = 0 \mid X_0 = n),$$

segundo [7] aplicando o teorema da probabilidade total, temos:

$$P_n = pP_{n+1} + qP_{n-1},$$

válido para $n = 1, 2, \cdots, N-1$. A probabilidade P_n segue que se o jogador vence com probabilidade p, será calculada a ruína a partir do estado $n+1$, ou se o jogador perde com probabilidade q a ruína é calculada a partir do estado $n-1$. Tem-se como condições da fronteira: $P_0 = 1$ e $P_N = 0$. Como $p + q = 1$, representa o elemento neutro da multiplicação, faz-se

$$\begin{aligned} pP_n + qP_n &= pP_{n+1} + qP_{n-1} \\ P_{n+1} - P_n &= \tfrac{q}{p}(P_n - P_{n-1}). \end{aligned}$$

Considerando alguns valores para n partindo de $n = 1$ até $n = 3$, tem-se

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \tfrac{q}{p}(P_1 - 1) = \tfrac{q}{p}P_1 \\ P_3 - P_2 &= \tfrac{q}{p}(P_2 - r_1) = \left(\tfrac{q}{p}\right)^2 (P_1 - 1) \\ P_4 - P_3 &= \tfrac{q}{p}(P_3 - P_2) = \left(\tfrac{q}{p}\right)^3 (P_1 - 1), \end{aligned}$$

ISSN 2358-4947

generalizando:

$$P_n - P_{n-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}(P_1 - 1), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Somando todas as $n-1$ equações anteriores, tem-se:

$$P_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}(P_1 - 1). \tag{4}$$

E da soma de todas as equações obtemos:

$$P_N = 1 + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}(P_1 - 1),$$

como P_N, pela condição de fronteira, é igual a 0:

$$P_1 - 1 = \frac{-1}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}}. \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), vem que

$$P_n = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{k}}.$$

Desta forma tem-se a probabilidade da ruína do jogador de forma generalizada. Esta fórmula pode ser otimizada distinguindo os cenários $p = q$ e $p \neq q$, a saber

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{k} = 1 + \frac{q}{p} + ... + \left(\frac{q}{p}\right)^{n} = \begin{cases} \frac{1-(\frac{q}{p})^{n+1}}{1-(\frac{q}{p})}, & \text{se } p \neq q \\ n+1, & \text{se } p = q \end{cases},$$

então:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{q}{p})^{n}-(\frac{q}{p})^{N}}{1-(\frac{q}{p})^{N}}, & \text{se } p \neq q \\ \frac{N-n}{N}, & \text{se } p = q \end{cases},$$

ou ainda,

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{q}{p})^{n}-(\frac{q}{p})^{N}}{1-(\frac{q}{p})^{N}}, & \text{se } p \neq q \\ 1 - \frac{n}{N}, & \text{se } p = q \end{cases}. \tag{6}$$

3 Análise do problema e resultados

Com a solução geral para o problema da ruína do jogador apresentada na equação 6, percebe-se que existem duas possibilidades para o jogador, a saber, um jogo igualitário em que $p = q$, e um jogo desbalanceado em que $p \neq q$. Ainda dentro dessas possibilidades podemos dividir a segunda em mais duas: $p > q$ e $p < q$. Na Figura 3 tem-se o gráfico da probabilidade P_n em função do parâmetro n para vários cenários e $N = 100$.

ISSN 2358-4947

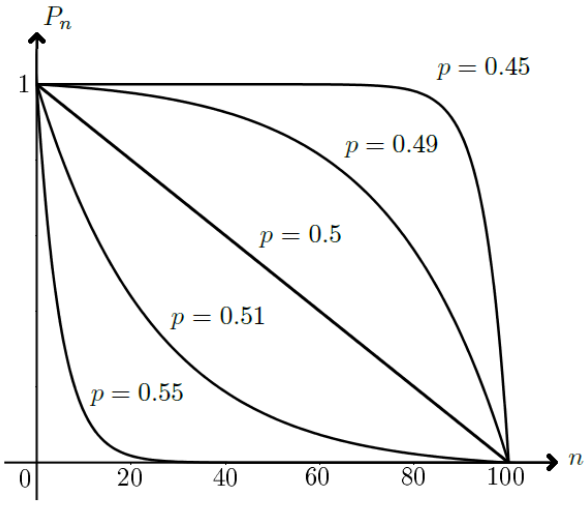


Figura 3: Exemplo do gráfico da probabilidade P_n em função do parâmetro n para vários cenários e $N = 100$.

Fonte: Autores.

Perceba que quanto maior é o valor de entrada no jogo menor se torna a probabilidade da ruína, e muitas vezes mesmo tendo um n muito alto a probabilidade da ruína é muito alta quando $p < q$. Tem-se ainda que no caso $p = q$ a solução é uma linha reta. Para encontrar-se o valor para qual os valores da probabilidade P_n convergem, considere o limite de N tendendo ao infinito. Desta forma para $p < q$,

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right) = 1.$$

Assim temos convergência para a ruína do jogador. Analogamente, se considerar o cenário $p > q$, a probabilidade da ruína se torna muito baixa.

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right) = 0.$$

Fica claro ver que pequenas mudanças no valor de p causam uma mudança enorme nas chances do jogador.

É interessante ainda salientar que no cenário $p = q$ o jogador tem vantagem sempre que possuir um investimento inicial superior à metade do que se almeja, porém quando possuir um capital inferior à metade do desejado, o jogador está em desvantagem. E no caso em que tal possui exatamente metade do capital almejado N ele tem probabilidade de vitória igual a 50%. Resta ainda verificar a convergência para o cenário $p = q$, mas

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{n}{N}\right) = 1.$$

Note que, jogar um jogo justo não significa que a convergência será de $0,5$.

É importante ter em mente que o fato das probabilidades serem convergentes não implica que seja impossível uma vitória ou derrota em cenários que adversos, tudo dependerá do capital

ISSN 2358-4947

inicial n em relação ao capital almejado N. Pensando no contexto do problema, pode-se imaginar que único cenário possível para fugir da ruína quando tem-se $p > q$, uma vez que o jogador neste cenário buscaria um valor muito superior ao da entrada, ou seja, n em relação N seria um valor baixo, estando assim fadado ao fracasso.

Agora que temos essa análise, pode-se calcular a probabilidade do problema para o caso particular simulado na Figura 2. Como neste caso $p = q$, vamos substituir os valores na probabilidade definida em (6):

$$P_{10} = 1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3},$$

ou seja, a probabilidade da ruína é muito maior que a da vitória, mesmo tendo $p = q$. Perceba que isso ocorre por que o valor do capital inicial do jogador n é menor que a metade do capital final almejado N.

É interessante calcular os valores fronteira entre a probabilidade de vitória e derrota, ou seja $P_n = 0.5$. Então vamos começar a encontrar esse valor para o cenário $p = q$, observe que esse valor já foi comentado, entretanto formalizando tem-se

$$P_n = 1 - \frac{n}{N} = \frac{1}{2},$$

assim como deduzido anteriormente, temos que para $P_n = 0,5$, $2n = N$. Para o caso de $2n < N$ tem-se que $P_n < 0,5$ e, consequentemente para $2n > N$ teremos $P_n > 0,5$.

Resta calcular os valores fronteiras para os cenários $p \neq q$, tal que $P_n = 0,5$. Da equação (6),

$$P_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} = 0,5,$$

e isolando n,

$$\begin{aligned} ln\left(\frac{q}{p}\right)^n &= ln\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p}{q}\right)^N\right) \\ ln\left(\frac{q}{p}\right)^n &= ln\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{q}{p}\right)^N\right) \\ n &= \frac{ln\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^N\right) - ln(2)}{ln(q) - ln(p)}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos encontrar qual o n ideal para que $P_n = 0.5$ e assim saber qual valor inicial para o jogador ter vantagem em determinado cenário. A fórmula é válida pois foi deduzida a partir da definição padrão do problema.

4 Algumas aplicações

Random walks possuem diversas aplicações, desde a resolução de fenômenos de população como uma infestação de mosquitos até o movimento de pequenas partículas, tal movimento é conhecido como movimento browniano [8]. Porém o foco deste trabalho foi aplicar os caminhos aleatórios ao problema da ruína do jogador, e este resultado encontrado na solução é aplicável além de um mero jogo.

ISSN 2358-4947

4.1 Crescimento de empresas

No artigo entitulado *Growth paths and survival chances: An application of Gambler's Ruin theory* de Coad, et al [2], mostra-se que empresas que renovam e alteram seus recursos e conceitos tendem a crescer mais que outras. Entretanto, existe também um grande número de pesquisas apontando que empresas que não persistem em fazer grandes mudanças, as mesmas ocorrerão de forma aleatória.

Considerando então que o fator dominante no crescimento é um fator aleatório e com base em trabalhos de econometria, tem-se que o tamanho da empresa segue um passeio aleatório, veja o artigo de Coad, et al [2]. Já que é observável que o crescimento de uma empresa é aleatório quando comparado a outra, e mais variado ainda sem considerar apenas a própria empresa. A ruína do jogador é de extrema utilidade nesse caso, já que ele combina o fator crescimento aleatório e de uma tentativa de sobrevivência.

4.2 Otimização de algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos (AG) são uma técnica de pesquisa muito eficiente, na área de ciências da computação, que busca encontrar soluções aproximadas para o que foi programado buscar [5]. Este tipo de algoritmo possui a grande desvantagem de possuir tempo de processamento considerado longo.

Segundo Harik [4] com o conhecimento correto sobre esse tipo de algoritmo é possível otimizar o tempo de processamento. Para tal, basta uma construção elaborada do código, o qual deve ser construído em blocos populacionais, estabelecendo uma analogia entre o AG e um passeio aleatório simples unidimensional. A população é definida como uma variável aleatória nos blocos. Esses blocos competem na simulação, como o próprio problema da ruína do jogador, porém somado ao algoritmo genético que determina a competição entre os blocos.

5 Conclusão

A partir de revisões bibliográficas foi possível estudar conceitos e definições sobre processos estocásticos e, de forma particular de passeios aleatórios. Este trabalho descreve soluções algébricas para o problema da ruína do jogador, o que permite visualizar o algoritmo de melhor forma. Com os resultados acerca do problema da ruína do jogador, concluímos que o único caso em que realmente o jogador tem alguma chance de sair vitorioso, é no cenário $p > q$, ou seja, as chances são sempre favoráveis ao jogador. Agora, no cenário $p < q$ o jogador não tem chances de vencer, o que é talvez o cenário mais comum no dia-a-dia. E por fim, a situação $p = q$ é totalmente simétrica, ou seja, a chance do jogador depende do seu capital inicial. Se $n > \frac{N}{2}$ o jogador possui vantagem, e desvantagem em caso contrário. Para o cenário $p \neq q$ temos que é possível encontrar o valor em que se tem 50% de chance de vitória do jogador, ou seja, encontrar um valor de segurança para jogar sem sair arruinado.

Note que qualquer situação problema associada a uma variável aleatória que evolui no tempo por meio de um vetor unidimensional, pode ter uma solução probabilística muito parecida com a da ruína do jogador. Além disso, como essas análises foram encontradas a partir do algoritmo da solução do problema, pode-se da mesma forma expandir a mesma análise para outras aplicações que se utilizam da mesma solução, apenas implementando o novo contexto.

ISSN 2358-4947

Referências

[1] ALBUQUERQUE, José Paulo de Almeida; FORTES, José Mauro Pedro; FINAMORE, Weiler Alves. Probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos. Editora PUC–Rio e Editora Interciência, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.

[2] COAD, Alex et al. Growth paths and survival chances: An application of Gambler's Ruin theory. Journal of Business Venturing, v. 28, n. 5, p. 615-632, 2013.

[3] EDWARDS, A. W. F. Pascal's problem: The'Gambler's Ruin'. International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, p. 73-79, 1983.

[4] HARIK, George et al. The gambler's ruin problem, genetic algorithms, and the sizing of populations. Evolutionary Computation, v. 7, n. 3, p. 231-253, 1999.

[5] LINDEN, Ricardo. Algoritmos genéticos (2a ediçao). Brasport, 2008.

[6] R DEVELOPMENT CORE TEAM. R: a language and environment for statistical computing, reference índex version 3.5.1. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria, ISBN, 2018.

[7] RINCÓN, Luis. Introducción a los procesos estocásticos. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México, p. 1, 2012.

[8] RYCROFT, Chris H.; BAZANT, Martin Z. Lecture 1: Introduction to Random Walks and Diffusion. Thecnical Report, Department of Mathematics-MIT, v. 2, 2005.

[9] STEWART, William J. Probability, Markov chains, queues, and simulation: the mathematical basis of performance modeling. Princeton university press, 2009.

ISSN 2358-4947

O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A PARTIR DO USO DO SOFTWARE R

Adson Ruan Gonçalves
UTFPR - *Campus* Toledo
adson@alunos.utfpr.edu.br

Andrey Felipe Kummer
UTFPR - *Campus* Toledo

Letícia Scussel Farias
UTFPR - *Campus* Toledo

Luiz Gabriel Martins
UTFPR - *Campus* Toledo

Aracéli Ciotti de Marins
UTFPR - *Campus* Toledo

Daniela Trentin Nava
UTFPR - *Campus* Toledo

Gustavo Henrique Dalposso
UTFPR - *Campus* Toledo

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR - *Campus* Toledo

Resumo

Este trabalho relata parte de um projeto de ensino maior que está sendo desenvolvido em consórcio entre professores da UTFPR *Câmpus* Toledo e alunos de graduação, denominados monitores, da mesma instituição que estão sendo orientados pelos professores proponentes do projeto. O projeto de ensino versa sobre conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I) aplicados ao *software* R®, o que é visto como algo atraente e instigante para melhorar o desempenho dos alunos nesta unidade curricular. O projeto é composto por diversos módulos de aprendizagem divididos conforme a ementa da disciplina de CDI-I. Estes módulos estão sendo preparados como aulas focadas nos tópicos da disciplina, a saber: introdução às funções, limites, derivadas e integrais, todos realizados a partir de algoritmos programados em linguagem R. A ideia é resolver problemas que envolvam os conteúdos já citados por meio de software R, uma vez que este simplifica o processo do cálculo e gera resultados que são de fácil observação e mais rápido que métodos convencionais.

Palavras-chave: Projeto de ensino. *Software* R®. Cálculo Diferencial e Integral. Uso de pacotes do R.

1 Introdução

É comum encontrar nos currículos de diversos cursos superiores da área de ciências exatas a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI-I). Ela serve de ferramenta matemática base para as demais unidades curriculares específicas de cada curso de graduação, pois contêm em sua ementa a oferta de conteúdos básicos essenciais de matemática.

ISSN 2358-4947

Entretanto, verifica-se que existe um grande nível de evasão e/ou reprovação nessa disciplina. Os acadêmicos apresentam uma grande dificuldade em compreender conceitos ligados ao cálculo, consequentemente levando à falta de motivação. As razões ligadas a essa problemática geralmente são: a defasagem na matemática de nível básico, a dificuldade no estabelecimento de relações dos conteúdos trabalhados na futura prática profissional, o modo como as aulas são normalmente desenvolvidas, dentre tantas outras razões.

Na busca por alternativas que possam amenizar a taxa de evasão/reprovação, bem como facilitar a compreensão de conceitos de CDI-I é que surgiu a proposta deste projeto de ensino, cujo objetivo é interferir diretamente nesse problema. O projeto denominado *O ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Probabilidade e Estatística a partir do uso do software R* foi elaborado, no segundo semestre de 2018, pelos professores Daniela Trentin Nava, Regiane Slongo Fagundes, Aracéli Ciotti de Marins e Gustavo Henrique Dalposso, e tem como objetivo principal utilizar o *software* livre R (R Core Team, 2018) como ferramenta que facilite o ensino de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e Probabilidade e Estatística para que, futuramente, isso venha reverter na diminuição dos índices de evasão e reprovação. Acredita-se que a inserção das tecnologias digitais na apresentação dos conceitos dessa disciplina torne-os mais compreensíveis e de mais fácil assimilação pelos acadêmicos, uma vez que esses recursos possibilitam múltiplas representações matemáticas (algébrica e gráfica), simulações, conjecturas, validações de hipótese e aprofundamento matemático (RICHIT, 2018, p.78).

A escolha pela plataforma livre R deu-se pois trata-se de um importante instrumento computacional para análise e manipulação de dados que pode se tornar expansível, por ser um *software* de código aberto que recebe contribuições da comunidade científica em geral, através da implementação de novos pacotes. Esses pacotes são bibliotecas para funções específicas ou áreas de estudo específicas, permitindo, que sejam trabalhadas, como nesse caso, as áreas de Cálculo, e futuramente Estatística.

Atualmente o projeto se encontra em desenvolvimento por um grupo de acadêmicos selecionados pelos professores proponentes que elaboraram a proposta do projeto. Portanto, o objetivo deste trabalho é apresentar resultados parciais a respeito das atividades realizadas até o momento.

ISSN 2358-4947

2 Material e Métodos

A aplicação do projeto será desenvolvida por meio de oficinas durante seu período de vigência (2019-2020) e serão ministradas por acadêmicos (monitores), selecionados pelos professores organizadores do projeto, que atenderão no máximo 24 discentes que cursam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral das diversas Engenharias da UTFPR - *Câmpus* Toledo.

As oficinas estão sendo planejadas e desenvolvidas pelos estudantes monitores sob supervisão dos professores Daniela Trentin Nava, Regiane Slongo Fagundes, Aracéli Ciotti de Marins e Gustavo Henrique Dalposso. Os encontros abordaram conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral com carga horária de 3 horas/aulas cada.

As atividades semanais consistem na elaboração de cada módulo que se refere aos conteúdos da ementa da unidade curricular de CDI-I, construído em conjunto que será aplicado com os professores supervisores.

3 Resultados e Discussão

Nesta seção apresentaremos recortes do que já foi produzido, contendo então elementos que serão trabalhados na oficina com os discentes ao longo dos encontros, que denominamos módulos. Estão previstos e agendados os quatro primeiros encontros com os alunos participantes do projeto, estes ocorrerão nos dias 21/05, 28/05, 04/06 e 11/06 com duração de 1,5 horas cada no laboratório C-202.

O primeiro módulo consiste, de maneira geral, em uma apresentação do *software* R, destacando sua importância e utilização dentro do ambiente acadêmico. Desse modo, mesmo os discentes que nunca tiveram um contato com esse *software* terão a oportunidade de se familiarizar com a interface e a linguagem utilizada. E ainda, serão apresentados neste primeiro momento os comandos básicos no R, como por exemplo operações entre números, matrizes e vetores, e os pacotes, que são bibliotecas para funções específicas ou áreas de estudo específicas. Destaca-se o pacote *school math* (SCHLARMANN e WIENAND, 2012) que permite com que o usuário simplifique frações, converta-as para decimais, verifique se um número é decimal, negativo, positivo, ímpar, par, primo, inteiro. Conforme apresentado na Figura 1.

ISSN 2358-4947

```
require(schoolmath)
cancel.fraction(36294638373861384, 48392851165148512)
3 / 4
```

Figura 1 - Uso do pacote *school math*, para simplificar uma fração.
Fonte: Autores.

No segundo módulo, são introduzidos os conceitos iniciais relativos ao conteúdo de CDI-I, ou seja, funções e limites. Fazer uso de um *software* que permita representar gráficos é uma boa escolha, pois de acordo com Romanello (2016) que utiliza a fala de um professor:

> O aplicativo é bom nisso, você coloca vários valores, vários gráficos e conforme o aluno tem uma dúvida sobre um ou outro [gráfico] o aplicativo permite fazer essa alteração e o aluno não fica mais com essa dúvida, porque na lousa, qualquer coisa que ele te pergunte você vai ter que parar e construir o gráfico. Se você quiser colocar seis gráficos na lousa é complicado, demanda tempo, seria interessante se você tivesse um giz colorido para cada gráfico e lá, automaticamente sai colorido. (p.10)

Nesse contexto, há um ganho de tempo no que se diz a abordagem de funções, uma vez que levam questões de segundos para que o R produza um gráfico desejado. Note que o *software* R pode facilitar a visualização gráfica de uma função extremamente complexa de ser esboçada manualmente, e como comentado pelo autor supracitado, tem ainda a vantagem de inserir diversos gráficos em uma mesma tela, ainda permite a customização a fim de deixar aos caprichos do seu usuário, como é o caso da função apresentada na Figura 2.

ISSN 2358-4947

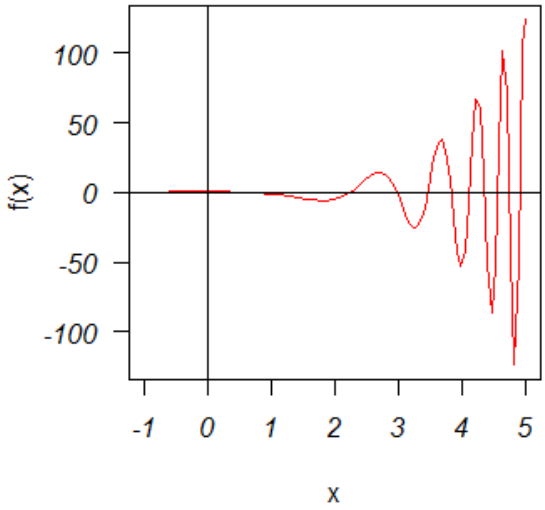


Figura 2 – (a) Exemplo de função e sua representação gráfica construída no *software* R.

Fonte: Autores.

```
f <- function(x){ cos(2^x)*exp(x)}
plot(f, -1, 5, col="red", font=3, ylab="f(x)")
abline(h=0,v=0)
```

Figura 2 – (b) Script utilizado para gerar a Figura 2 (a).

Fonte: Autores.

Este segundo módulo também abrange o conteúdo de limites, abordando as possibilidades e limitações para realizar seu cálculo. Dentro das possibilidades com o uso do *software*, é possível realizar diversas atividades, como por exemplo, realizar análises gráficas, tabular, bem como, utilizar o pacote *Ryacas* (GOEDMAN *et al*., 2019) para calcular o limite - que é a novidade a ser ensinada. Assim como pode-se esboçar funções complicadas, é possível calcular limites que sejam complexos (embora requeiram uma sequência exaustiva de procedimentos), como é mostrado na Figura 3.

ISSN 2358-4947

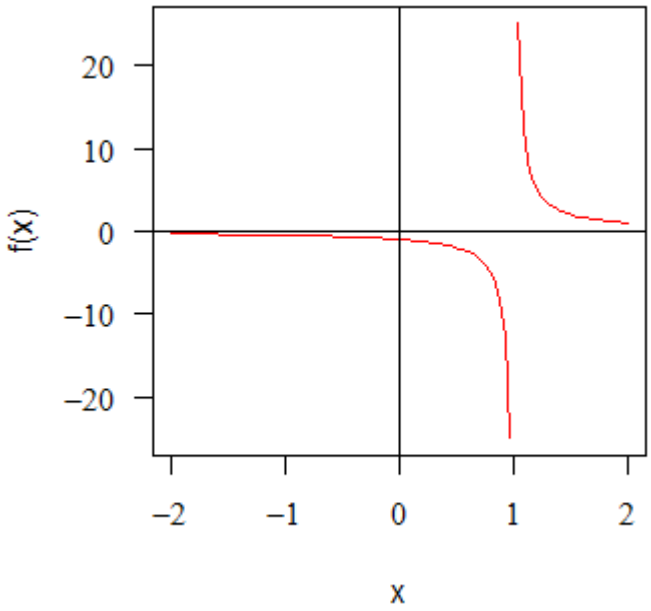


Figura 3 – Gráfico da função racional 1/x-1 usada para o estudo de limite e assíntotas verticais.
Fonte: Autores.

O terceiro módulo consta de conceitos de derivadas por meio do pacote *Deriv* (SOKOL, 2018). Este pacote também será utilizado para diferenciação numérica, que é um conteúdo presente nas ementas da disciplina de Cálculo Numérico, que serão abordadas futuramente pelo projeto de ensino. O pacote permite solucionar problemas que necessitam do conceito de derivada como, por exemplo, encontrar raízes reais o método de Newton-Raphson, máximos e mínimos, determinar pontos críticos, reta tangente, dentre outros. As Figuras 4 e 5 apresentam uma função e sua derivada, como também, uma aplicação direta de derivadas, respectivamente.

ISSN 2358-4947

```
require (Deriv)
f = function(x){exp(-0.005*x)*cos(0.05*sqrt(2000-0.01*x^2)) - 0.01}
f
function(x){exp(-0.005*x)*cos(0.05*sqrt(2000-0.01*x^2)) - 0.01}
Deriv(f)
function (x)
{
    .e3 <- sqrt(2000 - 0.01 * x^2)
    .e4 <- 0.05 * .e3
    (5e-04 * (x * sin(.e4)/.e3) - 0.005 * cos(.e4)) * exp(-(0.005 *
        x))
}
```

Figura 4 – Apresentação do cálculo da derivada de uma função por meio do pacote *Deriv*.

Fonte: Autores.

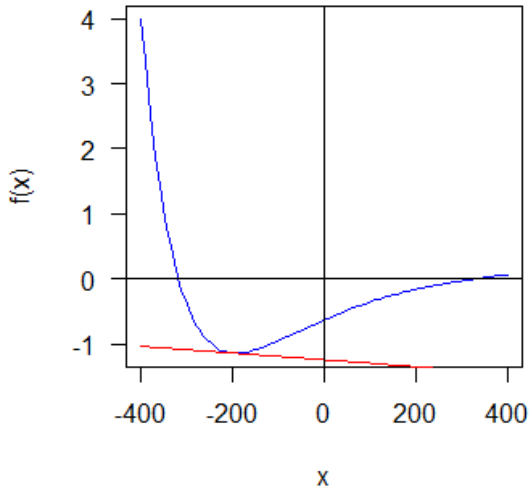


Figura 5 - Representação de reta tangente de uma função em um ponto do plano cartesiano utilizando o pacote *Deriv*.

Fonte: Autores.

O quarto módulo versa sobre conceitos relativos à operação de integração, estudada em CDI-I. Pode-se citar como exemplos do uso desse conteúdo a área da região abaixo de uma curva delimitada por um intervalo de números reais [a,b], a antiderivada e o volume de sólidos de revolução obtidos a partir da rotação em torno de um eixo e/ou uma dada reta.

ISSN 2358-4947

Eles serão trabalhados utilizando os pacotes *Pracma* (BORCHERS, 2019) e *Cubature* (NARASIMHAN *et al*., 2018). Na Figura 6 apresenta-se um exemplo função onde representa-se a área abaixo da curva que pode ser calculada a partir do pacote *Pracma.*

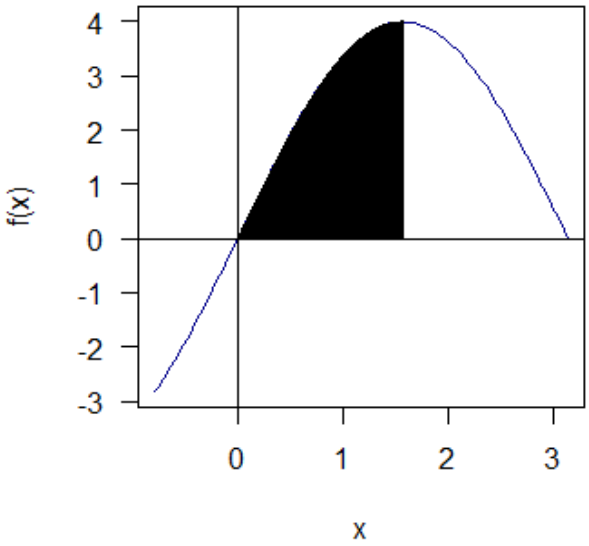


Figura 6 - Aplicação do pacote *Pracma* para o cálculo da área sob a curva encontrado por uma integral definida.

Fonte: Autores.

A Figura 7 representa o cálculo computacional de uma integral sem definição de intervalos de integração, integral indefinida. Para este cálculo utilizou-se o pacote *Ryacas* (GOEDMAN *et al*., 2019).

```
x <- Sym("x")
Integrate(sin(x),x)
expression(-cos(x))
```

Figura 7 - Apresentação do cálculo da integral indefinida de uma função utilizando o pacote *Ryacas*.

Fonte: Autores.

Perceba que em todos os exemplos acima apresentados, o software R foi de extrema utilidade e importância tanto na facilitação dos cálculos como exemplificação gráfica, dependendo apenas da necessidade e da adaptação do usuário.

ISSN 2358-4947

4 Considerações Finais

Portanto, a partir do apresentado podemos concluir que o *software* R, em conjunto com seus mais diversos pacotes, é capaz de realizar inúmeras operações matemáticas diferentes, aliás não somente matemáticas, mas também estatísticas, físicas e computacionais, e em diferentes graus de dificuldade, basta que o usuário adapte-o para a sua situação particular, tendo isso em conta, o projeto mostra sua pertinência visto que grande parte do corpo discente não tem conhecimento acerca desta ferramenta ou até mesmo conhece-a mas não sabe como utilizá-la de forma eficiente, além de que, pode se tornar de grande ajuda para os alunos dos períodos iniciais na disciplinas onde se utilizam dos conceitos de cálculo.

Referências

BORCHERS, H. W. **Pracma: Pratical Numerical Math Functions**. 2.2.5. [S.l.], 09 mar. 2019. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=pracma>.

CLAUSEN, A.; SOKOL, Serguei. **Deriv: R-based Symbolic Differentiation**. 3.8 [S.l], 11 jun. 2018. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=Deriv>.

GOEDMAN, Rob et. al. **Ryacas: R Interface to the Yacas Computer Algebra System.** 0.4.1. [S.l], 08 fev. 2019. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=Ryacas>.

NARASIMHAN, Balasubramanian et. al. **Cubature: Adaptive Multivariate Integration over Hypercubes.** 2.0.3. [S.l], 18 dez. 2018. Disponível em: <https://CRAN.R-project.org/package=cubature>.

R CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. Vienna, Austria, 2016. Disponível em: <https://www.r-project.org/about.html>.

RICHIT, A. - Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: reflexões histórico e teórico-metodológicas. In: SILVA, R.S.. **Diálogos e Reflexões sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018. p. 61-94.

ROMANELLO, L.A. - O celular como recurso didático nas aulas de Matemática: a visão do professor. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XX, 2016, **Anais...** Curitiba: UFPR, 2016. Disponível em: <http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_la%C3%ADs_romanello.pdf?fbclid=IwAR2Lt1QuSOjGlAGONdgDFPJ2Pl5Zh7ybCX-EcRCbIo8SJ6Hsjpsd7-vOhxw>.

SCHLARMANN, J.; WIENAND, J. **Schoolmath: Functions and datasets for math used in school**. 0.4. [S. l.], 23 jul. 2012. Disponível em: <https://cran.r-project.org/web/packages/schoolmath/index.html>.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

Modelagem da difusão do calor em uma placa de alumínio via método dos mínimos quadrados

Antonio Augusto Ignacio
Universidade Federal Tecnológica do Paraná, campus Toledo
ignacio@alunos.utfpr.edu.br

Evandro Alves Nakajima
Universidade Federal Tecnológica do Paraná, campus Santa Helena

Resumo

O problema da modelagem da difusão do calor vem sendo estudado há centenas de anos. Suas aplicações, principalmente motivadas pela expansão do setor industrial, ganharam grande importância no cenário mundial. Com base nisso, este trabalho apresenta o desenvolvimento de um aplicativo em linguagem *Visual Basic.Net* utilizando o método dos mínimos quadrados para fazer a previsão da temperatura em uma placa de alumínio anodizado, apresentando assim uma aplicação real de um método visto nas matrizes dos cursos de engenharia e matemática. Os resultados obtidos foram plotados no software Maple para visualização e se mostraram eficientes, com erro absoluto máximo próximo à 1°C.

Palavras-chave: Equação do calor. Métodos numéricos. Modelagem matemática.

1 Introdução

Motivado pelo problema de vibração de cordas, o estudo matemático da difusão de calor teve início em meados do século XVIII [1]. Diversos processos industriais tem ligação a esse estudo, tais como: sistemas de aquecimento e refrigeração, correntes elétricas alternadas, produção de energia (renováveis e/ou combustíveis fósseis), entre outros. A equação do calor é um modelo matemático para a difusão de calor em sólidos, atualmente são conhecidas diversas variações da equação do calor, mas a equação diferencial parcial que melhor descreve a difusão do calor em duas variáveis é escrita,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + G, \tag{1}$$

onde $T(t, x, y)$ é a temperatura, G é a função que representa uma fonte de calor e η^2 é a constante da difusividade térmica [2].

A modelagem matemática consiste, basicamente, em definir e identificar características de um sistema, e posteriormente construir o modelo a partir de equações que descrevam essas características. Esse modelo, após validado, é utilizado para descrever ou prever resultados, ajudando na tomada de decisões bem como na otimização do processo de produção. Para Biembengut [3] a modelagem envolve uma série de procedimentos que podem ser separados em três etapas: Interação (reconhecimento da situação/problema, referencial teórico); abstração (formulação das hipóteses, resolução do problema em termos do modelo); modelo (interpretação e validação do modelo).

Para este trabalho utilizou-se um método de modelagem empírica o qual consiste em observar os dados experimentais, fazendo uma análise desses dados, para assim realizar suposições inteligentes (quase sempre muito simples). Como foi observado um comportamento parabólico da temperatura ao longo do eixo-x (com t fixo e variando em função de y) escolheu-se polinômios de grau 2 para esta modelagem.

ISSN 2358-4947

2 O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) em uma Variável

Para a modelagem de um fenômeno físico, geralmente, valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são coletados em diferentes momentos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Com esses valores, o método dos mínimos quadrados visa obter uma aproximação $g(x)$ cujo gráfico tenha a menor distância possível dos pontos (x_i, y_i) [4].

O método dos mínimos quadrados consiste, primeiramente, em plotar os pontos (x_i, y_i) no plano cartesiano para identificar uma função que melhor se ajuste ao comportamento dos mesmos. Para este trabalho os dados foram aproximados por funções polinomiais de segundo grau na forma,

$$p(x) \;=\; a + bx + cx^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Define-se Q como o quadrado da soma dos desvios entre os valores da função e o polinômio determinado,

$$Q \;=\; ||f - p||^2. \tag{3}$$

Sejam $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n$, $n+1$ pontos distintos, deve-se encontrar o polinômio de grau menor ou igual a 2, tal que Q seja o mínimo possível. Sendo assim, para a determinação dos coeficientes, usa-se o produto escalar,

$$\langle f, p\rangle \;=\; \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot p(x_k), \tag{4}$$

onde, fazendo $y_i = f(x_i)$, obtém-se,

$$\begin{aligned} Q \;&=\; ||f-p||^2 = \langle f-p, f-p\rangle \\ &=\; \sum_{k=0}^{n}[f(x_k)-p(x_k)]^2 \;=\; \sum_{k=0}^{n}(y_k - p(x_k))^2 \\ &=\; \sum_{k=0}^{n}[y_k - (a+bx_k+cx_k^2)]^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Deve-se então encontrar os coeficientes de $p(x)$ de modo a minimizar Q e, para isso, define-se,

$$P \;=\; \begin{bmatrix} p(x_0)\\ p(x_1)\\ \vdots\\ p(x_n)\end{bmatrix},\quad X_0 \;=\; \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix},\quad X_1 \;=\; \begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad X_2 \;=\; \begin{bmatrix} x_0^2\\ x_1^2\\ \vdots\\ x_n^2\end{bmatrix},\quad Y \;=\; \begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Nota-se que é possível reescrever P na forma,

$$P = a\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \;c\begin{bmatrix} x_0^2\\ x_1^2\\ \vdots\\ x_n^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} \tag{7}$$

Sendo assim, para encontrar os coeficientes a, b, c que minimizam Q, basta resolver o sistema linear,

$$\begin{bmatrix} \langle X_0, X_0\rangle & \langle X_0, X_1\rangle & \langle X_0, X_2\rangle\\ \langle X_1, X_0\rangle & \langle X_1, X_1\rangle & \langle X_1, X_2\rangle\\ \langle X_2, X_0\rangle & \langle X_2, X_1\rangle & \langle X_2, X_2\rangle\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \langle Y, X_0\rangle\\ \langle Y, X_1\rangle\\ \langle Y, X_2\rangle\end{bmatrix}, \tag{8}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa o produto escalar usual em $\mathbb{R}^n$ [5].

ISSN 2358-4947

3 Materiais e Métodos

Peltier, assim chamada devido ao seu formato, retangular e achatada, é uma pastilha constituída por duas "placas"de material isolante, (normalmente de cerâmica) com uma malha de material condutor na superfície interna de cada placa. Entre elas, se encontram diversos pares de semicondutores de tipo n e p (cristal puro de silício ou germânio dopado de impurezas doadoras e receptoras respectivamente, denominadas negativa e positiva), que da início ao denominado efeito Peltier, onde é transformado energia proveniente de uma fonte de corrente contínua em energia térmica, onde em uma placa o calor é absorvido e em outra dissipado [6].

Para esse trabalho foi utilizada uma placa de alumínio anodizado (condutividade térmica igual a $204\frac{W}{mK}$) de tamanho $30\text{cm}\times30\text{cm}\times0,05\text{cm}$, e com o auxilio de pasta térmica e cola quente foi fixada ao centro uma pastilha Peltier, modelo TEC1-12706 [7], como na Figura 1.

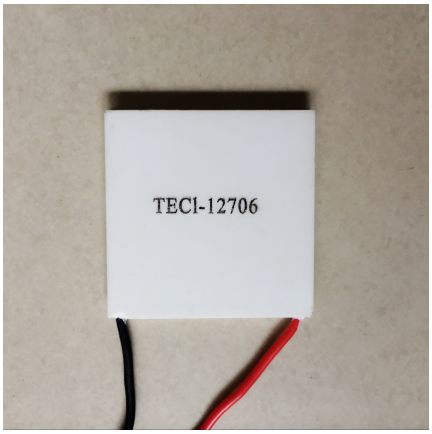


Figura 1: Peltier TEC1-12706.

A placa de alumínio foi ligada à uma fonte 9 volts e 3 amperes e foram feitas as divisões em duas direções x e y, com 4 e 6 intervalos respectivamente. Em cada interseção desses intervalos, em coordenadas (x, y) foi ligado um termômetro (Figura 2) para fazer as medições das temperaturas nos pontos. Iniciaram-se as medições em uma temperatura ambiente de $29,2°\text{C}$ e, para coleta dos dados, os termômetros foram filmados por 10 minutos, anotando-se as temperaturas a cada 10 segundos. Esses dados foram então compilados no software Excel [8], como disposto na Figura 3.

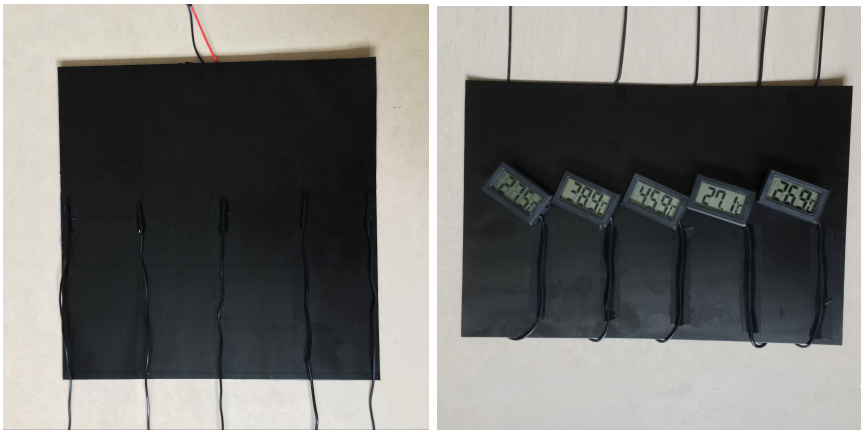


Figura 2: Placa de alumínio (esquerda) e termômetros (direita).

ISSN 2358-4947

240s	X	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
	Y	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3
	Temper.	29,4	30,5	30,9	31,8	32	30,2	30,8	29,5	30,7	32,4	34,6	35,4	30,6	31	30,8	33	37,4	54,6

240s	X	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
	Y	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
	Temper.	41,6	32,7	32,2	29,6	32,2	33,9	37,87	33,9	31,2	30,0	29,2	28,3	31,45	31,6	31,45	29,67	29,8

250s	X	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
	Y	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3
	Temper.	29,3	30,4	30,8	31,8	32	30,2	30,7	29,5	30,6	32,2	34	35,4	30,5	30,9	30,8	33,1	37,4	54,6

250s	X	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
	Y	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
	Temper.	41,4	32,8	32,1	29,7	29,3	33,8	37,6	33,8	30,13	30,03	29	28	31,4	31,57	31,4	29,53	29,67

260s	X	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
	Y	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3
	Temper.	29,3	30,3	30,8	31,8	32	30,2	30,8	29,6	30,4	32,3	34	35,3	30,5	30,9	30,6	32,1	37,9	54,6

260s	X	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4
	Y	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
	Temper.	41	32,8	32,1	29	29,3	33,8	37,63	33,8	30,07	29,83	29	28	31,4	31,5	31,4	29,5	29,7

Figura 3: Valores da temperatura coletados nos tempos 240s, 250s e 260s.

Para cada tempo e posição (t_i, x_j) foram obtidos três polinômios de segundo grau, na forma,

$$P_k(y) = A_k + B_k y + C_k y^2, \quad \text{com } k = 1, \ldots, 3. \tag{9}$$

através do MMQ, assim como explicado na seção 2 e disposto na Figura 4.

y	T	Y0	Y1	Y2
6	31,4	1	6	36
5	33,4	1	5	25
4	37,6	1	4	16

Y0	Y0	Prod.	Y0	Y1	Prod.	Y0	Y2	Prod.
1	1	1	1	6	6	1	36	36
1	1	1	1	5	5	1	25	25
1	1	1	1	4	4	1	16	16
		3			15			77

Y0	T	Prod.
1	31,4	31,4
1	33,4	33,4
1	37,6	37,6
		102,4

Y1	Y0	Prod.	Y1	Y1	Prod.	Y1	Y2	Prod.
6	1	6	6	6	36	6	36	216
5	1	5	5	5	25	5	25	125
4	1	4	4	4	16	4	16	64
		15			77			405

Y1	T	Prod.
6	31,4	188,4
5	33,4	167
4	37,6	150,4
		505,8

Y2	Y0	Prod.	Y2	Y1	Prod.	Y2	Y2	Prod.
36	1	36	36	6	216	36	36	1296
25	1	25	25	5	125	25	25	625
16	1	16	16	4	64	16	16	256
		77			405			2177

Y2	T	Prod.
36	31,4	1130,4
25	33,4	835
16	37,6	601,6
		2567

Matriz			
	3	15	77
	15	77	405
	77	405	2177

Vetor	
	102,4
	505,8
	2567

Inversa			
	901	-367,5	36,5
	-367,5	150,5	-15
	36,5	-15	1,5

Coef		
	76,4	A
	-14,1	B
	1,1	C

Figura 4: Método dos mínimos quadrados para $x = 2$ e $t = 300$.

ISSN 2358-4947

A partir dos dados obtidos no Excel foram montadas matrizes com os coeficientes dos polinômios que modelam a difusão do calor na placa. Desse modo, através desses coeficientes, os valores intermediários (de tempo (t) e posição (x, y)) foram calculados como a proporção dos valores não inteiros acima e abaixo. Por exemplo o valor da temperatura no instante $320,30s$, na posição $(2,48; 2,58)$ é calculado da seguinte forma:

i) Calculam-se os polinômios inferiores para $t = 100$ e $t = 110$, em $y = 2,58$,

$$P^{x=2}_{t=100}(2,58) = A^{x=2}_{t=100} + B^{x=2}_{t=100} \cdot 2,58 + C^{x=2}_{t=100}(2,58)^2 = 45,73 \tag{10}$$

$$P^{x=2}_{t=110}(2,58) = A^{x=2}_{t=110} + B^{x=2}_{t=110} \cdot 2,58 + C^{x=2}_{t=110}(2,58)^2 = 47,17 \tag{11}$$

ii) Toma-se a fração de cada P inferior em relação à $t = 104,3$ para encontrar $P^{x=2}_{t=104,3}(2,58)$,

$$0,57 \cdot 45,73 + 0,43 \cdot 47,17 \;=\; 46,3492 \;=\; P^{x=2}_{t=104,3}(2,58) \tag{12}$$

iii) Calculam-se os polinômios superiores para $t = 100$ e $t = 110$, em $y = 2,58$,

$$P^{x=3}_{t=100}(2,58) = A^{x=3}_{t=100} + B^{x=3}_{t=100} \cdot 2,58 + C^{x=3}_{t=100}(2,58)^2 = 32,42 \tag{13}$$

$$P^{x=3}_{t=100}(2,58) = A^{x=3}_{t=100} + B^{x=3}_{t=100} \cdot 2,58 + C^{x=3}_{t=100}(2,58)^2 = 33,32 \tag{14}$$

iv) Toma-se a fração de cada P superior em relação à $t = 104,3$ para encontrar $P^{x=3}_{t=104,3}(2,58)$,

$$0,57 \cdot 32,42 + 0,43 \cdot 33,32 \;=\; 32,807 \;=\; P^{x=3}_{t=104,3}(2,58) \tag{15}$$

v) Em seguida toma-se a fração de $P^{x=2}_{t=104,3}(2,58)$ e $P^{x=3}_{t=104,3}(2,58)$ em relação à $x = 2,48$ para encontrar $P^{x=2,48}_{t=104,3}(2,58)$, isto é,

$$0,48 \cdot 46,3492 + 0,52 \cdot 32,807 \;=\; 39,31 \;=\; P^{x=2,48}_{t=104,3}(2,58) \tag{16}$$

Esse algoritmo foi implementado no software Visual Studio [9] (Figura 5) para que em cada valor de (t, x, y) fosse possível obter a temperatura instantaneamente.

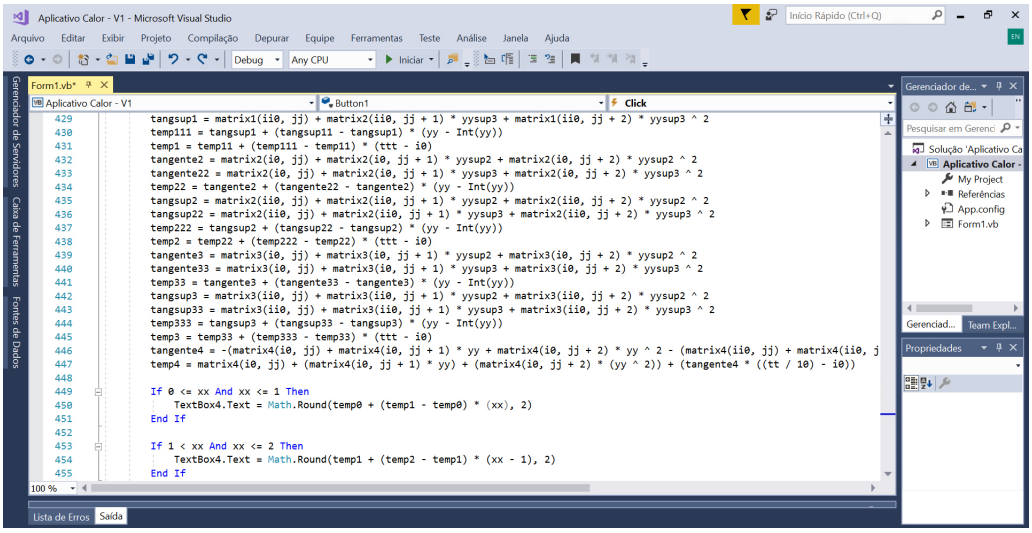


Figura 5: Código no Visual Studio.

ISSN 2358-4947

4 Resultados e Discussão

Como produto da implementação obteve-se o aplicativo desenvolvido apresentado na Figura 6, o qual pode ser utilizado para prever a temperatura em qualquer tempo e posição da placa de alumínio.

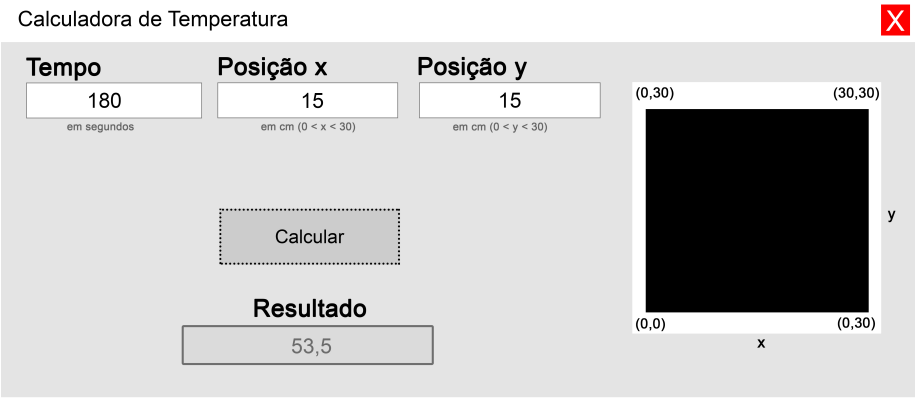


Figura 6: Programa desenvolvido em Visual Basic.

No teste de eficiência do aplicativo foram comparadas as temperaturas em diversos instantes de tempo e posições que não foram utilizadas para construção dos polinômios (Figura 7). Os resultados obtidos mostram um erro absoluto máximo próximo a 1°C.

	(0;0,5)			(1,5;0)			(2,5;0)		
	Medido	Estimado	Erro	Medido	Estimado	Erro	Medido	Estimado	Erro
0	29,2	29,2	0	29,2	29,2	0	29,2	29,2	0
30	29,3	29,1	0,2	29,2	29,15	0,05	29,3	29,12	0,18
50	29,1	29,2	0,1	29,4	29,25	0,15	29,3	29,2	0,1
80	29,6	29,34	0,26	29,7	29,34	0,36	29,5	29,23	0,27
130	29,5	29,35	0,15	30,4	30,1	0,3	30,5	29,87	0,63
150	30	29,46	0,54	31,1	30,5	0,6	31	29,98	1,02
210	30,5	29,94	0,56	31,6	31,45	0,15	31,8	30,87	0,93
240	30,8	30,2	0,6	32	31,5	0,5	32	30,97	1,03
300	31,4	30,41	0,99	32,2	32,05	0,15	32,5	31,55	0,95

	(0;1,5)			(0;2,5)			(1,5;3,5)		
	Medido	Estimado	Erro	Medido	Estimado	Erro	Medido	Estimado	Erro
0	29,2	29,2	0	29,2	29,2	0	29,2	29,2	0
30	29,2	29,2	0	29,3	29,31	0,01	31,3	30,59	0,71
50	29,2	29,2	0	29,5	29,31	0,19	33	33,09	0,09
80	29,1	29,39	0,29	29,9	29,55	0,35	36	35,5	0,5
130	29,2	30,05	0,85	30,6	30,41	0,19	39,3	39,04	0,26
150	29,5	30,31	0,81	31	30,74	0,26	39,9	39,71	0,19
210	30,3	30,59	0,29	31,9	31,91	0,01	41,3	41	0,3
240	30,4	30,8	0,4	32,1	32	0,1	41,7	41,62	0,08
300	30,6	31,26	0,66	32,4	32,65	0,25	42,5	41,68	0,82

Figura 7: Comparação entre as temperaturas medidas e estimadas.

ISSN 2358-4947

Para melhor visualização dos resultados os gráficos dos polinômios foram plotados no software Maple [10]. As curvas obtidas representam a temperatura da placa, sendo maior no centro (onde a pastilha Peltier está instalada) e menor nas bordas (Figuras 8, 9, 10 e 11).

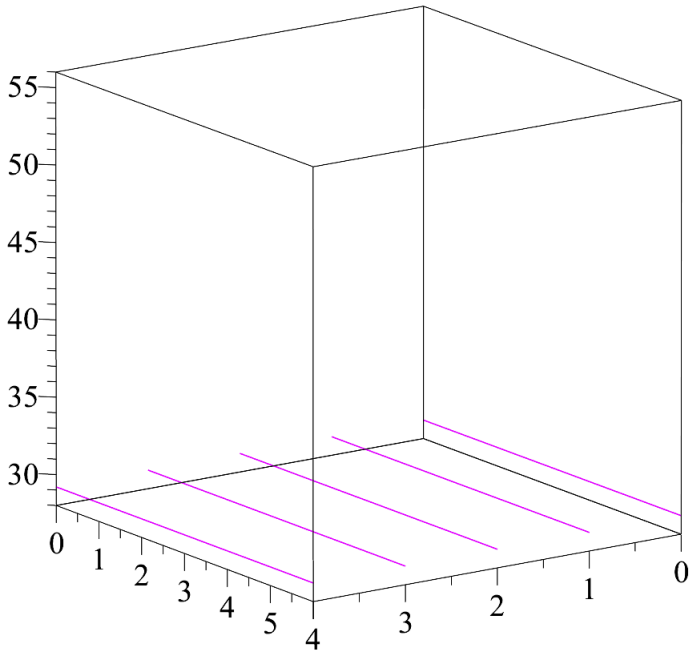


Figura 8: Gráficos dos polinômios para t = 0.

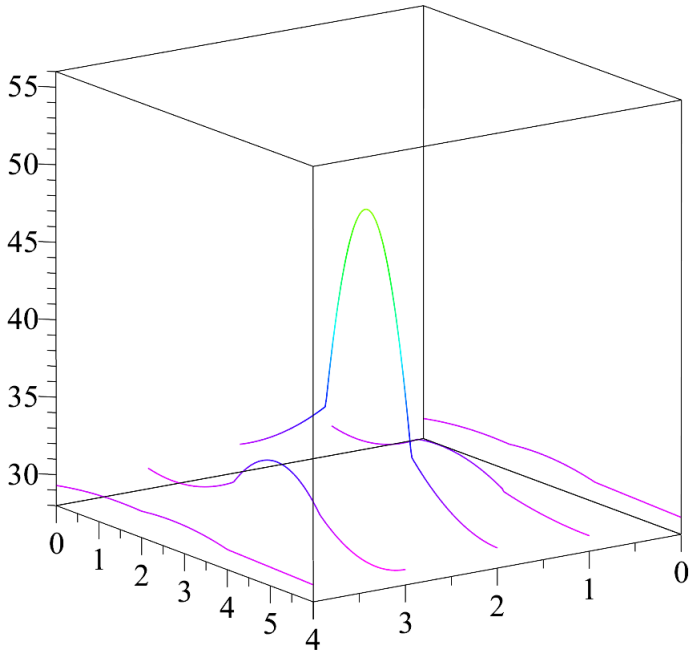


Figura 9: Gráficos dos polinômios para t = 100.

ISSN 2358-4947

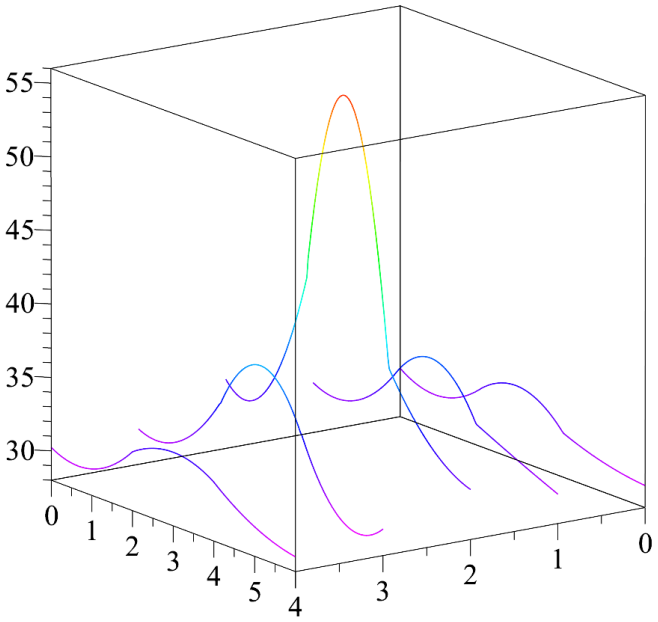


Figura 10: Gráficos dos polinômios para t = 300.

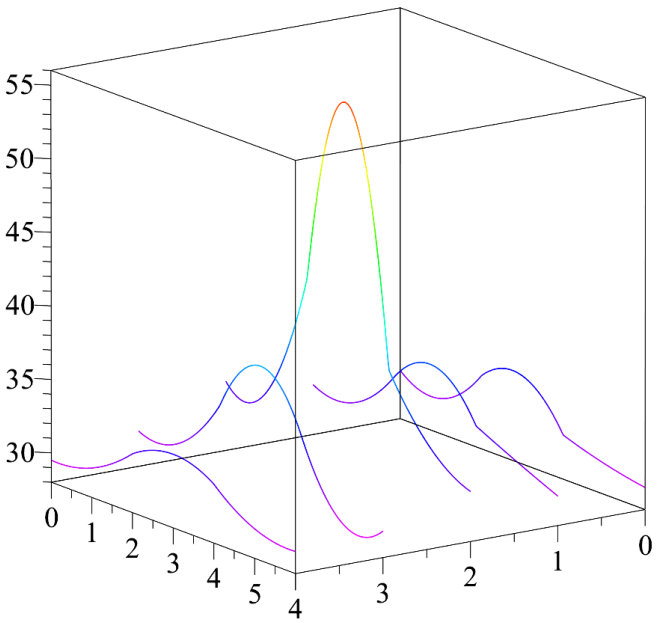


Figura 11: Gráficos dos polinômios para t = 500.

ISSN 2358-4947

5 Conclusão

Com o erro absoluto próximo de 1°C pode-se esperar que o aplicativo desenvolvido represente de forma satisfatória a difusão do calor na placa de alumínio anodizado nas condições especificadas. O método dos mínimos quadrados, em geral tópico da disciplina de cálculo numérico (presente em quase todos os cursos de engenharia), se mostrou eficiente para construção do modelo. Como resultados futuros espera-se obter um modelo resolvendo a equação do calor (Equação 1) por meio de um método numérico, como o método das diferenças finitas. Esse modelo auxiliará também na construção de um *watercooler* (sistema de resfriamento para computadores que utiliza água), cuja temperatura será controlada pela pastilha Peltier e uma plataforma Arduino (placa composta por um microcontrolador e circuitos de entrada e saída que posteriormente é usado de forma independente para controlar outros dispositivos) para auxiliar no funcionamento do dispositivo.

Referências

[1] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro,RJ, 2018.

[2] William E. Boyce e Richard C. Diprima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

[3] Maria Salett Biembengut. *Modelagem Matemática no Ensino*. Contexto, São Paulo, SP, 2000.

[4] Neide Maria Bertoldi Franco. *Cálculo Numérico*. Pearson, São Paulo, SP, 2006.

[5] José Luiz Boldrini. *Álgebra Linear*. Harbra, São Paulo, SP, 1984.

[6] Thakkar Mohit Pravinchandra. *Peltier Cooling Module*. PhD thesis, Pandit Deendayal Petroleum University, Índia, 2015.

[7] Peltier. http://www.peltier.com.br, acesso em março de 2019.

[8] Microsoft Corporation. Excel, 2019.

[9] Microsoft Corporation. Visual studio, 2017.

[10] Waterloo Maple Inc. Maple, 2018.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

USO DE FUNÇÃO PISO PARA MODELAR TARIFA DE ÁGUA

Thiago Welington Picinini
UTFPR
thiagopicinini@alunos.utfpr.edu.br

Regiane Slongo Fagundes
UTFPR
regianefagundes@utfpr.edu.br

Resumo

O trabalho a seguir descreve o uso da função piso para definir a função de cobrança da conta de água embasada na tarifa da SANEPAR, responsável pelo abastecimento de água no Paraná. A atividade foi proposta na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, com o objetivo de mostrar a aplicação do estudo de funções e limite. Para modelagem, conceitos de função definida por sentenças e função piso, para discretizar os valores do domínio, foram abordadas. Os valores utilizados nas funções foram retirados do site da SANEPAR e os gráficos foram construídos utilizando o teorema dos limites laterais, que levou a concluir que há descontinuidades do tipo salto em cada $k \in Z_+$. Ao observar os gráficos, conclui-se que a tarifa comercial só se torna mais vantajosa que a residencial para valores altos de consumo.

Palavras-chave: Continuidade, Função maior inteiro, Aprendizagem Significativa.

1 Introdução

A metodologia utilizada pelos professores de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) no Ensino Superior, em geral, não diferencia da abordagem utilizada no Ensino Fundamental e médio. Aulas teóricas, com exercícios repetitivos e sem aplicação. Como aluno, percebi que a falta de conhecimentos prévios, as notas baixas, a falta de rotina de estudo e a quantidade de conteúdos desvinculados da prática contribuem para reprovação e abandono do curso Superior.

Propondo uma abordagem diferente para funções, a professora de CDI do primeiro período, propôs a nós, calouros de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia, um trabalho de Aprendizagem Significativa em cálculo com base nas tarifas de cobrança de água praticada no estado do Paraná pela SANEPAR (AGEPAR, 2018). O trabalho consistia em analisar as tarifas e descrever as funções de cobrança para a Tarifa Residencial e Comercial/Pública.

Apesar de se ter conhecimento da forma como o consumo de água é calculado, nem sempre acaba sendo fácil conseguir modelá-la. Para definir a função custo, é importante notar, primeiramente, que o consumo de água é discretizado no processo. A discretização

ISSN 2358-4947

diz respeito ao processo de transferência de modelos contínuos e equações em homólogos discretos (MORGADO; CARVALHO, 2015). Por exemplo, se 14,78 m^3 são utilizados, somente 14 m^3 são cobrados, e o excedente é deixado para o mês seguinte. Como somente a parte inteira do gasto é considerada, o domínio da função acaba sendo restringido aos inteiros não negativos.

Dessa forma fica claro que é necessário usar o conceito de função parte inteira. Neste trabalho será usado a função "maior inteiro", cuja notação é $\lfloor x \rfloor$, que associa a um número real x o maior número inteiro que seja menor ou igual a x (THOMAS, 2012). Essa função é útil pois discretiza a variável x, fazendo com que uma função que só seria definida para os inteiros passe a ser definida para todos os reais. Nesse caso, ela faz o trabalho de transformar o nosso consumo contínuo de água no consumo discretizado utilizado como domínio para o cálculo da conta de água pela SANEPAR.

Outra questão é que diferentes consumos de água têm diferentes tarifas cobradas, o que dificulta modelar utilizando uma função única. Como nesse caso a função que relaciona o consumo (x) e o custo (y) é diferente dependendo do intervalo de consumo x, faz se necessário para a modelagem usar uma função definida por sentenças, também chamada de função híbrida (RIMSA, 2016).

Assim, o objetivo do presente trabalho é apresentar uma metodologia para abordar funções e limites por meio da modelagem matemática, utilizando informações sobre a tarifa de água praticadas pela SANEPAR.

2 Alguns conceitos preliminares

Anton (2014), define uma função como sendo "uma regra que associa uma única saída a cada entrada". Dados dois conjuntos não vazios A (consumo) e B (custo em reais), uma relação f de A em B recebe a denominação de função se, e somente se cada $x \in A$ associa um único $y \in B$. Assim, uma função liga um elemento do domínio D (conjunto A de valores de entrada) com um segundo conjunto, o contradomínio (conjunto B de valores de saída) de tal forma que a cada elemento do domínio D está associado exatamente a um, e somente um, elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio que são relacionados pela f a algum x do domínio é o conjunto imagem, denotado por $Im(f)$ (valor da conta de água).

ISSN 2358-4947

2.1 A função “maior inteiro” e “menor inteiro”

Até a década de 1960, o “maior inteiro menor ou igual a x” era comumente denotado por $[x]$ (lê-se “colchete de x”) e identificado com a “parte inteira de x”. Por volta de 1957, o canadense Iverson (1962), então na Universidade de Harvard, desenvolveu uma escrita simbólica para as funções “maior inteiro” e “menor inteiro” que facilitou a compreensão de conceitos matemáticos. Essas simbologias são chamadas de função piso (maior inteiro) e função teto (menor inteiro), e denotadas, respectivamente, por $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$.

A função piso de x é o maior inteiro que satisfaz a propriedade de ser menor ou igual a x, podendo ser definida como apresentado a seguir.

Definição 1: *A Função piso* $\lfloor \ \ \rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *é dada por*

$$\lfloor x \rfloor = max\{z \in \mathbb{Z}: z \leq x\}$$

em que “max” significa “o maior elemento de”.

Por igual modo, tem-se a definição da função teto de x é o menor inteiro que satisfaz a propriedade de ser maior ou igual a x, podendo ser definida como apresentado a seguir.

Definição 2: *A Função teto* $\lceil \ \ \rceil: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *é dada por*

$$\lceil x \rceil = min\{z \in \mathbb{Z}: z \geq x\}$$

em que “min” significa “o menor elemento de”.

Como consequência da Definição 1 tem-se as propriedades da função piso, descritas no Teorema 1.

Teorema 1 (Propriedades do piso): *Sejam* $x \in \mathbb{R}$ *e* $t \in \mathbb{Z}$.

$\lfloor \ \ \rfloor: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *satisfaz*

1. $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
2. $\lfloor x \rfloor = t \Leftrightarrow t \leq x < t + 1$;
3. $\lfloor x \rfloor = t \Leftrightarrow x - 1 < t \leq x$;
4. $\lfloor \ \ \rfloor$ *é não-decrescente em* $\mathbb{R}$
5. $\lfloor x + t \rfloor = \lfloor x \rfloor + t$;
6. *Se* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua, monótona crescente e tal que* $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, *então*
   $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$

2.2 A função definida por sentenças

Como diferentes consumos de água têm diferentes tarifas de cobrança, faz-se necessário o uso de funções definidas por sentenças. Uma função é definida por mais de

ISSN 2358-4947

uma sentença quando cada uma das sentenças está associada à um subdomínio $D_1, D_2, D_3 \ldots D_n$,e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original, ou seja, cada domínio D_i é um subconjunto de D (RIMSA, 2016).

De acordo com Chumpitaz (2013), as definições atualmente aceitas estão baseadas em Dirichlet (1805 - 1859). De acordo com o autor, inicialmente fixamos uma família de funções $F \subset \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, que denomina-se funções básicas e uma família Y de subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}, Y \subset P(\mathbb{R})$. Assim:

Definição 3: *Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, onde $A \subseteq \mathbb{R}$ é uma função definida por sentenças se existe uma família de funções $\{f_i: A_i \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$ na forma $f_i = |_{A_i}$, onde $f \in F$ e $A_i \in Y, i \in I$, onde I é um conjunto de índices enumeráveis, de modo que:*

1. *$f(x) = f_i$ se $x \in A_i, i \in I$ (propriedade da regra de sentenças);*
2. *$A = U_{i \in I} A_i$ (propriedade do domínio);*
3. *$A_i \cap a_j = \emptyset$ para $i, j \in I, i \neq j$ (propriedade da não sobreposição;*
4. *Dados $i, j \in I, i \neq j, f_i = f|A_i, f_i = g|A_j$ com $f, g \in F$, tem que $f \neq g$ (propriedade de não redundância)*. (CHUMPITAZ, 2013).

3 Metodologia da Intervenção pedagógica

A prática foi aplicada para a turma de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia da UTFPR – Câmpus Toledo, logo no início do semestre letivo de 2018/2.

Inicialmente foi solicitado aos alunos que obtivessem as informações das tarifas praticadas pela SANEPAR (AGEPAR, 2018). Após a leitura detalhada do documento, os alunos retiraram as informações da Tarifa Residencial e Comercial/Público. Os dados são apresentados no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Tarifas de saneamento básico aplicado pela SANEPAR – 2018

	TARIFA RESIDENCIAL					
	Até 5m^3	**6 a 10**	**11 a 15**	**16 a 20**	**21 a 30**	**>30**
Água	34,58	1,07/m^3	5,96/m^3	5,99/m^3	6,04/m^3	10,22/m^3
Esgoto (80% consumo água)	27,66	0,86/m^3	4,77/m^3	4,79/m^3	4,83/m^3	8,18/m^3
Água e Esgoto	62,24	1,93/m^3	10,73/m^3	10,78/m^3	10,87/m^3	18,40/m^3
TARIFA COMERCIAL/UTILIDADE PÚBLICA/PODER PÚBLICO						
Água	62,25	1,60/m^3	7,93/m^3	7,99/m^3	8,04/m^3	8,10/m^3
Esgoto (80% consumo água)	52,91	1,36/m^3	6,74/m^3	6,79/m^3	6,83/m^3	6,89/m^3
Água e Esgoto	115,16	2,96/m^3	14,67/m^3	14,78/m^3	14,87/m^3	14,99/m^3

Fonte: AGEPAR, 2018

ISSN 2358-4947

Com as informações, vinculou-se a definição do domínio para construção da função de cobrança de água para a tarifa Residencial, a representação algébrica e a representação gráfica.

Como os valores eram diferentes dependendo do intervalo de consumo, dividiu-se a função em partes, e já que a variável de entrada – o consumo de água – era discretizada, utilizou-se da função piso.

Na segunda etapa do trabalho, hipoteticamente, foi considerado que o consumo de água era uma variável contínua, ou seja, se uma pessoa consumisse 12,92m^3 o consumo centesimal era cobrado mensalmente. Então, foi necessário retirar a função piso. Além disso, os intervalos foram trocados. Nesta etapa, foi modelada a função considerando a Tarifa comercial, definido o domínio e a imagem.

Durante a primeira e segunda etapa da formulação da função, questões relacionadas a funções, domínio, imagem, representação gráfica, limites laterais e continuidade foram abordados.

Na terceira etapa foi plotado no mesmo plano cartesiano as funções que descrevem a conta de água Residencial e Comercial/Pública e em seguida foi resolvido o sistema de equações para determinar o ponto do domínio em que é mais viável a tarifa Comercial/Pública em relação a Residencial. As representações gráficas foram construídas com o auxílio do Geogebra.

4 Resultados e Discussão

Com base no Quadro 1, note que nos primeiros $5m^3$ o valor da conta de água é $R\$\ 34{,}58$, independente do consumo, portanto, a regra da função para o primeiro intervalo é $y = 34{,}58$. Essa função pode ser definida como constante, ou seja, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = k$ (k, constante real).

Como apenas a parte inteira do consumo é considerada, um consumo de $5{,}99m^3$ é cobrado como $5m^3$, define-se o primeiro intervalo como sendo o intervalo fechado em 0 e aberto em $6m^3$.

No próximo intervalo, o preço por metro cúbico é $R\$\ 1{,}07$, mas como $5\,m^3$ já foram considerados, então precisamos descontar esse valor de entrada, colocá-lo na função piso para discretizar a variável, multiplicá-lo por $R\$\ 1{,}07$ e então somar o valor acumulado. Seguindo as propriedades do Teorema 1, a sentença será dada por $1{,}07\lfloor x - 5 \rfloor + 34{,}58$. O mesmo raciocínio foi aplicado para criar as sentenças para os próximos demais intervalos.

ISSN 2358-4947

A função obtida para calcular a tarifa de água ficou como segue:

$$g(x) = \begin{cases} 34.58, & 0 \leq x < 6 \\ 1{,}07\lfloor x-5 \rfloor + 34.58, & 6 \leq x < 11 \\ 5{,}96\lfloor x-10 \rfloor + 39.93, & 11 \leq x < 16 \\ 5{,}99\lfloor x-15 \rfloor + 69.73, & 16 \leq x < 21' \\ 6{,}04\lfloor x-20 \rfloor + 99.68, & 21 \leq x < 31 \\ 10{,}22\lfloor x-30 \rfloor + 160.08, & x \geq 31 \end{cases}$$

em que, $D = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 0\}$, sendo o gráfico da função $g(x)$ representado na Figura 1.

Para as despesas da coleta e tratamento do esgoto, a SANEPAR acresce sobre a função $g(x)$ um adicional 80%. Assim, a função para Tarifa Residencial para cobrança de água e esgoto será dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 62{,}24, & 0 \leq x < 6 \\ 1{,}93\lfloor x-5 \rfloor + 62{,}24, & 6 \leq x < 11 \\ 10{,}73\lfloor x-10 \rfloor + 71{,}89, & 11 \leq x < 16 \\ 10{,}78\lfloor x-15 \rfloor + 125{,}54, & 16 \leq x < 21 \\ 10{,}87\lfloor x-20 \rfloor + 179{,}44, & 21 \leq x < 31 \\ 18{,}40\lfloor x-30 \rfloor + 288{,}14, & x \geq 31 \end{cases}$$

Note que o domínio da função $g(x)$ não se altera em relação a $f(x)$, porém a imagem modifica, ou seja, fica multiplicada por 0,8.

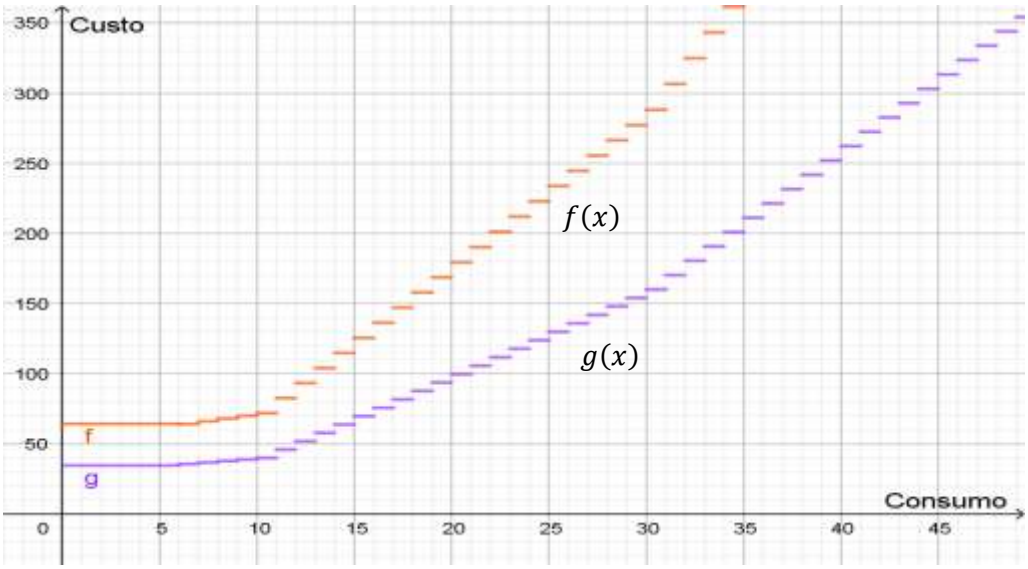


Figura 1 – Gráfico da função $g(x)$ e $f(x)$
Fonte: Autores (2018)

ISSN 2358-4947

Por meio da função $f(x)$ é possível associar os conceitos de limites laterais e continuidade. Por definição uma função será contínua se o $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Como a função obtida é uma função de várias sentenças, porém definidas por uma função "maior inteiro", é necessário verificar a continuidade nos pontos que passam de um intervalo de consumo para o outro. Por exemplo, verificando a continuidade em $x = 6$ para a função $f(x)$=$1{,}93\lfloor x-5\rfloor + 62{,}24$ (uma das sentenças da função por parte $f(x)$) e considerando as propriedades 3 e 5 do Teorema1, tem-se que:

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = 62{,}24 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 6^+} f(x) = 64{,}17.$$

Como os limites laterais não coincidem, pelo Teorema dos Limites Laterais, não existe $\lim_{x\to 6} 1{,}93\lfloor x-5\rfloor + 62{,}24$ e, portanto, a função não é contínua neste ponto.

Observando o gráfico da função $f(x)$ apresentada na Figura 1, nota-se que a descontinuidade é do tipo salto, e que a descontinuidade ocorre em cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Para avaliar a tarifa Comercial/Pública, raciocínio semelhante foi aplicado.

Na abordagem de continuidade, foi proposto considerar o consumo de água como variável contínua. Note que ocorre uma mudança no domínio da função, uma vez que $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$p(x) = \begin{cases} 62{,}24, & 0 \le x < 5 \\ 1{,}93(x-5) + 62{,}24, & 5 \le x < 10 \\ 10{,}73(x-10) + 71{,}89, & 10 \le x < 15 \\ 10{,}78(x-15) + 125{,}54, & 15 \le x < 20 \\ 10{,}87(x-20) + 179{,}44, & 20 \le x < 30 \\ 18{,}40(x-30) + 288{,}14, & x \ge 30 \end{cases}$$

Agora, verificando a continuidade do caso anterior $f(x)$=$1{,}93(x-5) + 62{,}24$ em $x = 5$, tem-se que:

i) $f(5) = 1{,}93(5-5) + 62{,}24 = 62{,}24$

ii) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 62{,}24$ e $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 62{,}24$

e pelo Teorema dos Limites Laterais, $\lim_{x\to 5} 1{,}93(x-5) + 62{,}24$

Como $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$, a função é contínua neste ponto. Raciocínio similar pode ser aplicado na análise da conta de água e esgoto da tarifa Comercial/Pública.

A terceira etapa do trabalho consistia em comparar as Tarifas Residencial $p(x)$ e Comercial/Pública $q(x)$, por meio da análise das funções e do comportamento gráfico (Figura 2), e encontrar o ponto do domínio em que é mais viável a tarifa Comercial/Pública em relação a Residencial.

A função $q(x)$ é dada por:

ISSN 2358-4947

$$q(x) = \begin{cases} 112.05, & 0 \leq x < 5 \\ 2.88 * (x-5) + 112.05, & 5 \leq x < 10 \\ 14.27 * (x-10) + 126.45, & 10 \leq x < 15 \\ 14.38 * (x-15) + 197.8, & 15 \leq x < 20 \\ 14.47 * (x-20) + 269.7, & 20 \leq x < 30 \\ 14.58 * (x-30) + 414.4, & x \geq 30 \end{cases}.$$

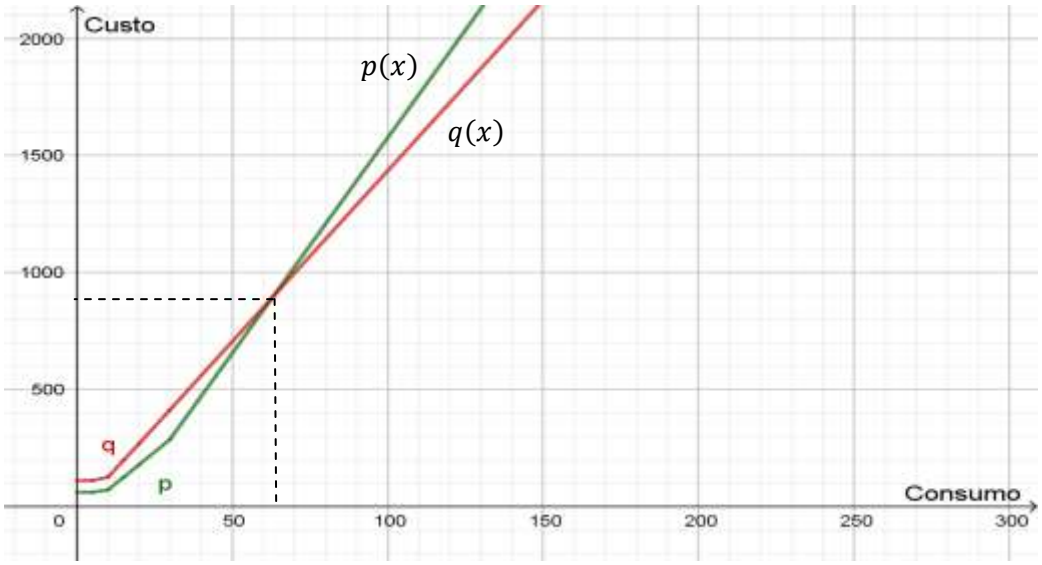


Figura 2 – Gráfico comparativo de $p(x)$ e $q(x)$

Fonte: Autores (2018)

Como pode-se observar, o intercepto do gráfico ocorre um valor alto de x, próximo de 60. Para achar o ponto exato de intersecção, igualou-se as funções no intervalo no qual 60 está contido.

$$18{,}40(x-30) + 288{,}14 = 14{,}58(x-30) + 414{,}4$$

$$18{,}40x - 552 + 288{,}14 = 14{,}58x - 437{,}4 + 414{,}4$$

$$18{,}40x - 263{,}86 = 14{,}58x - 23$$

$$3{,}82x = 240{,}86$$

$$x \cong 63{,}05m^3$$

Aplicando o ponto x do domínio na função, tem-se que o valor a ser pago será.

$$18{,}40(63{,}05 - 30) + 288{,}14 = R\$896{,}26$$

As coordenadas do ponto de intercepto são, portanto, aproximadamente $(63{,}05m^3, R\$896{,}26)$.

ISSN 2358-4947

5 Considerações Finais

É possível concluir que em um curso de Cálculo Diferencial e Integral 1, faz-se necessário o uso de metodologias como a utilizada não apenas para mostrar aos alunos aplicações práticas do que está sendo ensinado como também para familiarizar os estudantes com as técnicas de análise de continuidade aplicadas à função por partes.

A criação de uma função que pudesse descrever a cobrança da tarifa de água foi uma boa escolha, pois possibilitou, além do que já foi descrito, a utilização de uma função com a qual os alunos não costumam ter contato, que é a função piso. O uso desta função traz também ao aluno noções intuitivas do conceito de variáveis discretas, um assunto importante para cursos mais avançados como Probabilidade e Estatística.

Em relação à cobrança da tarifa de água, pode-se concluir que a Tarifa Comercial/Pública só é mais vantajosa para consumos bastante altos, já que o intercepto das funções $p(x)$ e $q(x)$ só ocorre em um valor de x próximo a 60m^3. Ademais, a cobrança de 80% sobre o consumo de água, para o tratamento do esgoto, gera acréscimo significativo sobre a conta final a ser pago pelo consumidor.

REFERÊNCIAS

AGEPAR, Agência Reguladora do Paraná. **RESOLUÇÃO HOMOLOGATÓRIA Nº 005.** Disponível em: https://www.documentador.pr.gov.br/documentador. Acesso em 06 set. 2018.

ANTON, H. B., Irl; DAVIS, S.. **Cálculo.** Editora Bookman, Porto Alegre, 2014.

CHUMPITAZ, L. D. M. *La génesis instrumental: Un estudio de los processos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingenería*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica do Peru, Lima, Peru, 2013.

IVERSON, K. E. **A Programming Language**, John Wiley & Sons Inc, 1962

MORGADO, Augusto César.; CARVALHO, Paulo Cezar P. Matemática Discreta. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

RIMSA, L.G. A continuidade da função imposto de renda: desfazendo mitos. **Educação & Tecnologia**, v.21, n.3, p. 58-64, 2016.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12ª edição, São Paulo: Pearson, 2012.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

FORMAS CANÔNICAS DE JORDAN VIA MÓDULOS SOBRE DOMÍNIOS DE IDEAIS PRINCIPAIS

Luana Demarchi Grassi
UTFPR
luana-grassi@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
UTFPR
robsonw@utfpr.edu.br

Resumo

Na Álgebra Linear, as formas canônicas de Jordan são estudadas utilizando espaços vetoriais sobre corpos. Neste trabalho, apresentamos alguns resultados relacionados a teoria de módulos sobre domínios de ideais principais e suas aplicações na construção da forma canônica de Jordan de um operador linear. Este trabalho é resultado dos estudos realizados no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME/CNPq).

Palavras-chave: Módulos; Domínios de Ideais Principais; Forma Canônica de Jordan.

1 Introdução

Na Álgebra Linear, lidamos com transformações lineares, que são mais facilmente observadas e trabalhadas quando representadas por matrizes. Conforme a dimensão do espaço vetorial aumenta, a ordem destas matrizes também aumenta, fazendo com que os cálculos se tornem mais complicados.

Devido a isto, busca-se diagonalizar as matrizes de transformações lineares. É possível fazer isto encontrando uma base de autovetores, cujas transformações são dadas pela forma $T(v) = \lambda v$, onde v é um autovetor associado ao autovalor λ. (Ver [1], página 134).

Em alguns casos, porém, não é possível obter uma base de autovetores. Isso acontece quando os autovalores tem multiplicidade algébrica maior do que sua multiplicidade geométrica. Nestes casos, podemos obter uma matriz que se aproxima da forma diagonal: uma matriz de Jordan.

Na Álgebra Linear, pode-se construir esta forma através da decomposição do espaço vetorial em subespaços T-invariantes, cuja restrição do operador T a estes subespaços é nilpotente.

Neste trabalho, construiremos esta forma canônica por meio de resultados de Módulos sobre Domínios de Ideais Principais.

Primeiramente, traremos os conceitos de Domínios de Ideais Principais e Módulos. Em seguida, apresentaremos resultados importantes de módulos sobre domínios de ideais principais. Por fim, aplicaremos estes resultados para obter uma construção da forma canônica de Jordan.

2 Domínios de Ideais Principais

Primeiramente, definiremos os conceitos de anel e de domínio de integridade.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio A com operações*

$$\begin{array}{rccc} +: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot: & A\times A & \longrightarrow & A \\ & (x,y) & \longmapsto & x\cdot y \end{array}$$

ISSN 2358-4947

é um ***anel*** *se, para todo* $x, y, z \in A$*, satisfaz as seguintes propriedades:*

i. $x + (y + z) = (x + y) + z$

ii. $x + y = y + x$

iii. $\exists 0 \in A$ *tal que* $x + 0 = x = 0 + x$

iv. $\forall x \in A, \exists -x \in A$ *tal que* $x + (-x) = 0 = -x + x$

v. $x(yz) = (xy)z$

vi. $x(y + z) = xy + xz$

vii. $(x + y)z = xz + yz$

Se, além disso, em A *ocorre que* $xy = yx$*, para todo* $x, y \in A$*, dizemos que* A *é um anel comutativo. Quando existir* $1 \in A$ *tal que* $x1 = 1x = x$*, para todo* $x \in A$*, dizemos que* A *é um anel com unidade.*

Neste trabalho, A sempre denotará um anel comutativo com unidade.

Os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de anéis comutativos com unidade. Ademais, o conjunto dos polinômios na variável x sobre um anel A, denotado por $A[x]$, é um anel com as operações de adição e multiplicação usuais de polinômios. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar [**?**, Construção do anel de polinômios, p. 282].

Definição 2.2. *Seja* A *um anel comutativo com unidade.*

1. *Dizemos que* A *é um* ***domínio de integridade*** *se, dados* $x, y \in A$*, temos que* $x.y = 0$ *então* $x = 0$ *ou* $y = 0$*.*
2. *Dizemos que* A *é um* ***corpo*** *se todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo.*

É fácil ver que todo corpo é um domínio de integridade, porém a recíproca não é valida, pois $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade e não é um corpo.

Veremos agora um tipo de subconjunto importante dos anéis: os ideais.

Definição 2.3. *Um subconjunto não vazio* I *de um anel* A*, é um* ***ideal*** *se:*

$(i.)$ $0 \in I$

$(ii.)$ $\forall a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$

$(iii.)$ $\forall x \in A$ *e* $\forall a \in I \Rightarrow xa \in I$

Dizemos que um ideal I de A é principal se $I = \{xa | x \in A\}$ para algum $a \in I$. Neste caso, denotamos $I = Aa$ ou $I = (a)$. Por exemplo, todos os ideais de $\mathbb{Z}$ são principais da forma $n\mathbb{Z} = \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Este exemplo motiva a próxima definição.

Definição 2.4. *Um domínio de integridade* A *é chamado de* ***domínio de ideais principais (DIP)*** *se todo ideal de* A *é principal.*

Conforme vimos acima, o anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é um DIP. A verificação deste fato é análoga ao caso dos anéis de polinômios $K[x]$ sobre um corpo K, que será apresentada a seguir.

ISSN 2358-4947

Proposição 2.1. *O anel de polinômios $K[x]$ é um DIP.*

Demonstração. Dados $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ e $g = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m \in K[x]$ não nulos, ou seja, $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, temos

$$f.g = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \ldots + a_nb_mx^{n+m}$$

Assim $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$ então $a_nb_m \neq 0$, pois K é um domínio de integridade. Isto mostra que $K[x]$ é um domínio de integridade.

Para mostrar que $K[x]$ é um DIP, seja I um ideal qualquer de $K[x]$. Temos

1. Se $I = \{0\}$, então $I = K[x]0$, ou
2. Se $I \neq \{0\}$, então existe $f \in I \setminus \{0\}$

Desta forma, o conjunto $\{n \in \mathbb{N} | n = grf \text{ e } f \in I\}$, onde grf denota o grau do polinômio f, é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Pelo Princípio da Boa Ordem, podemos considerar $f \in I$ o polinômio não nulo de menor grau em I. Afirmo: $I = K[x]f$.

($\supseteq$) Dado $gf \in K[x]f$, como I é ideal e $f \in I$, segue que $gf \in I$.

($\subseteq$) Dado $h \in I$, pelo algoritmo da divisão, existem $q, r \in K[x]$ tais que $h = qf + r$ com $r = 0$ ou $gr\ r < gr\ f$. Se $r = 0$, $h = qf \in K[x]f$. Se $r \neq 0$, então $r = h - qf \in I$, pois $h, f \in I$ e I é ideal. O fato que $r \in I$ e $gr\ r < gr\ f$ contraria a minimalidade de f.

Portanto, $I = K[x]f$. Ou seja, $K[x]$ é um DIP. □

Notemos que $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ não é um DIP, pois $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$ com $\overline{2} \neq \overline{0}$.

As próximas definições tratam de elementos irredutíveis e de domínio de fatoração única, encerraremos esta seção enunciando um resultado que mostra de todos os elementos de um DIP possui uma escrita única como produto de elementos irredutíveis.

Definição 2.5. *Um elemento $p \in A$ é dito irredutível se p é não nulo, p é não inversível e quando escrevemos $p = ab$ então a ou b é inversível.*

Quando olhamos para $\mathbb{Z}$, os elementos irredutíveis serão os números primos, pois quando tomamos p primo e escrevemos $p = ab$ teremos que $a|p$ e $b|p$. Como os únicos divisores de um número primo são p e 1, concluímos que ou $a = 1$ e $b = p$, ou $a = p$ e $b = 1$. Logo, p é irredutível.

Definição 2.6. *Dizemos que A é um **domínio de fatoração única** se dado $a \in A$, existe um elemento inversível $u \in A$ e elementos irredutíveis $p_1, \ldots, p_r \in A$ tais que $a = up_1 \ldots p_r$, além disso, duas fatorações de um mesmo elemento diferem apenas pelo elemento inversível.*

Teorema 2.1. *Todo Domínio de Ideais Principais A é um domínio de fatoração única.*

Demonstração. Ver [2] [Teorema 3.1, página 34]. □

Pela Proposição 2.1, temos que $K[x]$ é um DIP. Aplicando o Teorema 2.1, concluímos que $K[x]$ é um domínio de fatoração única.

ISSN 2358-4947

3 Módulos

Nesta seção falaremos de uma estrutura que pode ser vista como um generalização dos espaços vetoriais: os módulos. Enquanto os espaços vetoriais possuem operação produto por escalar definida sobre um corpo, nos módulos esta operação pode estar definida apenas sobre um anel. Em geral, este anel não necessita ser comutativo, porém, para nossos propósitos, consideraremos os módulos sobre um anel comutativo com unidade A.

Definição 3.1. *Chamamos de A-**módulo** um grupo abeliano $(M,+)$ que possui a operação de multiplicação por escalar*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & (a,m) & \longmapsto & a \cdot m \end{array}$$

de forma que, para todo $a,b \in A$ e $m,n \in M$, satisfazem:

$(i.)$ $(a+b)m = am + bm$

$(ii.)$ $a(m+n) = am + an$

$(iii.)$ $(ab)m = a(bm)$

$(iv.)$ $1m = m$.

Se V um K-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear, então V possui uma estrutura de $K[x]$-módulo com a ação por escalar definida a seguir.

Exemplo 1. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K de dimensão finita, $T : V \to V$ um operador linear e $p(x) \in K[x]$ da forma $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Assim, $p(T)$ será definido por*

$$p(T) := p(x) = a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^n$$

onde I é o operador identidade e $T^k = T \circ T \circ \ldots \circ T$ k vezes. Desta forma, V pode ser considerado um $K[x]$-módulo em relação a adição usual de V e a multiplicação por escalar dada por

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & K[x] \times V & \longrightarrow & V \\ & (p(x),v) & \longmapsto & p(T)(v) \end{array}$$

Veremos agora alguns subconjuntos importantes dos módulos.

Definição 3.2. *Seja M um A-módulo. Chamamos de **submódulo** um subconjunto $N \subseteq M$ se N é um subgrupo aditivo de M e se, para todo $a \in A$ e $n \in N$, temos $an \in N$.*

No caso de V com a estrutura de $K[x]$-módulo definida acima, a próxima proposição mostra que os $K[x]$-submódulos de V são exatamente os K-subespaços T-invariantes de V.

Proposição 3.1. *Sejam V um K-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Então $W \subseteq V$ é um submódulo de V se, e somente se, W é um K-subespaço T-invariante, ou seja, $T(W) \subseteq W$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que W é um $K[x]$-submódulo, assim W é fechado para a adição. Agora dados $\alpha \in K$ e $w \in W$, como $p(x) \cdot w \in W$, para todo $p(x) \in K[x]$ e $w \in W$, tomando em particular $p(x) = \alpha \in K[x]$, temos $p(x) \cdot w = \alpha \cdot w = \alpha \cdot I(w) = \alpha w \in W$. Logo, W é um K-subespaço. Note que $T(W) \subseteq W$, pois dado $w \in W$, considere $q(x) = x$, assim temos $q(x) \cdot w = q(T)(w) = T(w) \in W$. Logo, W é T-invariante.

ISSN 2358-4947

($\Leftarrow$) Assumimos agora que W é um K-subespaço T-invariante, assim claramente é um subgrupo aditivo. Além disso, dado $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ e $w \in W$, como $T(W) \subseteq W$, temos que $a_iT^i(w)$, para todo $a_i \in K$ e $i > 0$, e, portanto, $p(x) \cdot w = a_0w + a_1T(w) + \ldots + a_nT^n(w) \in W$. Isto mostra que W é um $K[x]$-submódulo. □

Definição 3.3. *Um módulo M é **finitamente gerado** (f.g.) se $\exists m_1, \ldots, m_n$ tal que $M = \{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i \,|\, x_i \in A\}$. Quando $M = \{am \,|\, a \in A\}$, dizemos que M é cíclico e denotamos $M = \langle m \rangle$.*

A observação abaixo nos ajuda a obter uma base excepcional para um $K[x]$-submódulo W que será responsável pela configuração especial dos elementos na Forma Canônica de Jordan.

Observação 1. *Com as notações do Exemplo 1, se W é um $K[x]$-submódulo cíclico de V, existe $w \in W$ tal que $\{w, T(w), \ldots, T^{n-1}(w)\}$ é uma base do K-subespaço W. Neste caso, $W =< w >$ como um $K[x]$-módulo.*

Análoga às transformações lineares sobre espaços vetoriais, conseguimos definir funções sobre módulos que preservam suas respectivas operações, como veremos abaixo.

Definição 3.4. *Sejam M e N dois A-módulos. Uma aplicação $f : M \to N$ é um **homomorfismo** se para todo $m_1, m_2 \in M$ tivermos $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ e para todo $a \in A$ e todo $m \in M$ tivermos $f(am) = af(m)$.*

*Dizemos que um homomorfismo $f : M \to N$ é um **isomorfismo** quando f é bijetor. Neste caso, dizemos que N e M são isomorfos e escrevemos $N \simeq M$.*

Se M é um A-módulo qualquer, a função nula $m \longmapsto 0$ e a função identidade $m \longmapsto m$ são exemplos triviais de homomorfismos.

Finalizaremos esta seção com o conceito de anulador e de módulo de torção.

Definição 3.5. *Sendo M um A-módulo, chamamos de **anulador** de M o conjunto $Ann(M) = \{a \in A | am = 0,\ \forall m \in M\}$.*

O $Ann(M)$ é um ideal de A. Por exemplo, $\mathbb{Z}_4$ como $\mathbb{Z}$-módulo tem anulador $Ann(\mathbb{Z}_4) = 4\mathbb{Z}$.

Proposição 3.2. *Seja $N = \langle m \rangle$ um submódulo cíclico sobre um DIP A e $Ann(\langle m \rangle) = (a)$. Então $N \simeq \dfrac{A}{(a)}$.*

Definição 3.6. *Seja M um A-módulo. Se existe $a \in A \setminus \{0\}$ tal que $am = 0$ dizemos que $m \in M$ é um **elemento de torção**. Se todo elemento de M é de torção, dizemos que M é um **módulo de torção**.*

Exemplo 2. *Com as notações do Exemplo 1, dado $v \in V$, considere $m_T(x) \in K[x]$ o polinômio minimal de T. Temos que*

$$m_T(x) \cdot v = m_T(T)(v) = 0.$$

Logo, V é um $K[x]$-módulo de torção e $Ann(V) = \langle m_T(x) \rangle$.

4 Módulos sobre Domínios de Ideais Principais

Nesta sessão iremos considerar M como um módulo sobre um DIP A. Apresentaremos dois resultados de Módulos sobre Domínios de Ideais Principais que possibilitarão nossa construção na próxima seção. Tais resultados não serão demostrados neste trabalho, porém o leitor poderá consultar suas respectivas demonstrações em [3].

ISSN 2358-4947

Definição 4.1. *Seja p um elemento irredutível de A. Se $\forall m \in M$, $\exists r \geq 0$ tal que $p^r m = 0$, M é um p-**módulo de torção**.*

Claramente $M(p) := \{m \in M \,|\, \exists r \geq 0 \text{ e } p^r m = 0\}$ é um p-submódulo de torção de M. Tais submódulos aparecem na decomposição de um módulo de torção finitamente gerado sobre um DIP:

Teorema 4.1. *Seja M um módulo de torção finitamente gerado e $Ann(M) = (a)$ com $a = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$, onde cada $p_i \in A$ é irredutível e $r_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, t$. Então*

$$M = M(p_1) \oplus \dots \oplus M(p_t).$$

Demonstração. Ver [3], [Proposição 10.9, página 193]. □

Estes p-submódulos de torção também podem ser decompostos, como nos mostra o teorema a seguir:

Teorema 4.2. *Seja $M(p)$ um p-módulo de torção finitamente gerado. Então*

$$M(p) \simeq \langle m_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle m_s \rangle,$$

onde $\langle m_i \rangle \simeq \frac{A}{(p^{r_i})}$, para todo $i = 1, \dots, t$ e $r_1 \geq \dots \geq r_s > 0$.

Demonstração. Ver [3] [Corolário 10.11, página 194]. □

5 Aplicação

Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ um operador linear. Nesta seção, apresentaremos a Forma Canônica de Jordan de T aplicando os resultados da seção anterior sobre V com a estrutura de $K[x]$-módulo. Iniciamos definindo um bloco de Jordan.

Definição 5.1. *Um bloco de Jordan $n \times n$ é a matriz triangular inferior da forma*

$$J_n(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Uma matriz está na Forma Canônica de Jordan quando ela é uma matriz triangular inferior, com blocos de Jordan na diagonal principal e demais elementos iguais a 0.

Segue do Exemplo 1 que V possui uma estrutura de $K[x]$-módulo com multiplicação por escalar $p(x) \cdot v = p(T)(v)$ e, neste caso, denotaremos V por V_T. Como $K[x]$ é um DIP, podemos aplicar os resultados da seção anterior sobre V_T para construir a Forma Canônica de Jordan associada a T.

1. Seja $m_T(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}(x) \in K[x]$ a decomposição do polinômio de minimal de T em fatores irredutíveis. Vimos no Exemplo 2 que V_T é um $K[x]$-módulo de torção finitamente gerado e $Ann(V_T) = \langle m_T(x) \rangle$.

ISSN 2358-4947

2. Pelo Teorema 4.1, podemos escrever

$$V_T \simeq V(p_1) \oplus \ldots \oplus V(p_r),$$

onde

- $V(p_i)$ é um $K[x]$-submódulo de V_T;
- $V(p_i)$ é um K-subespaço T-invariante de V (ver 3.1);
- $V(p_i)$ é um p_i-módulo de torção.

3. Como cada $V(p_i)$ é um p_i-módulo de torção f.g. sobre $K[x]$, segue do Teorema 4.2 que:

$$V(p_i) \simeq W_{i1} \oplus \cdots \oplus W_{it_i},$$

onde $W_{ij} \simeq \frac{K[x]}{(p_i^{\beta_{ij}})}$ com $\alpha_i = \beta_{i1} \geq \beta_{i2} \geq \ldots \geq \beta_{it_i} > 0$. Pela Proposição 3.2,

$$Ann\left(\frac{K[x]}{(p_i^{\beta_{ij}})}\right) = (p_i^{\beta_{ij}})$$

4. Como W_{ij} é um $K[x]$-submódulo cíclico e $n_{ij} := dim_K(W_{ij}) = gr\,(p_i^{\beta_{ij}})$, pela Observação 1, existe $w \in W_{ij}$ tal que $\mathcal{B}'_{ij} = \{w, T(w), \ldots, T^{n_{ij}-1}(w)\}$ é uma base de W_{ij} como K-subespaço vetorial de V. Para esta construção, porém, é mais pertinente tomarmos a base

$$\mathcal{B}_{ij} = \{w, (T - \lambda_i I)(w), \ldots, (T - \lambda_i I)^{n_{ij}-1}(w)\}$$

que é base de W_{ij}, pois $\#\mathcal{B}'_{ij} = \#\mathcal{B}_{ij}$ e $\mathcal{B}_{ij}$ é um conjunto linearmente independente. Ver [2, página 60].

5. Como $V(p_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^{t_i} W_{ij}$ então, $\mathcal{B}_i = \bigcup_{j=1}^{t_i} \mathcal{B}_{ij}$ é uma base de $V(p_i)$ sobre K.

6. Da mesma forma, como $V_T \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} V(p_i)$ então, $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ é uma base de V_T sobre K.

7. Sendo $V_T \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} V(p_i)$ e cada $V(p_i)$ T-invariante, segue que

$$M = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_r \end{bmatrix}$$

onde $M_i = [T_{|V(p_i)}]_{\mathcal{B}_i}$.

8. Novamente, sendo $V(p_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^{t_i} W_{ij}$ e cada W_{ij} T-invariante, obtemos que

$$M_i = [T_{|V(p_i)}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} N_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_{i2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & N_{it_i} \end{bmatrix}$$

onde $N_{ij} = [T_{|W_{ij}}]_{\mathcal{B}_{ij}}$.

ISSN 2358-4947

9. Já a matriz de $T - \lambda_i I$ com respeito a base $\mathcal{B}_{ij}$ será:

$$[T - \lambda_i I]_{\mathcal{B}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pois, $(T - \lambda_i I)(w) = 0.w + 1.(T - \lambda_i I)(w) + \ldots + 0.(T - \lambda_i I)^{n_{ij}-1}(w)$
$(T - \lambda_i I)((T - \lambda_i)(w)) = 0.w + 0.(T - \lambda_i I)(w) + 1(T - \lambda_i I)^2(w) \ldots + 0.(T - \lambda_i I)^{n_{ij}-1}(w)$

$$\vdots$$

$(T - \lambda_i I)((T - \lambda_i I)^{n_{ij}-1}(w)) = 0.w + 0.(T - \lambda_i I)(w) + \ldots + 1.(T - \lambda_i I)^{n_{ij}-1}(w)$
Assim,

$$N_{ij} = [T - \lambda_i I]_{\mathcal{B}_{ij}} + \lambda_i I = [T]_{\mathcal{B}_{ij}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

10. Calculando o polinômio característico $c_T(x)$:

$$c_T(x) = det(M - xId) = \prod_{i=1}^{r} det(M_i - xId).$$

Por outro lado,

$$h_i(x) = det(M_i - xId) = \prod_{j=1}^{t_i} det(N_{ij} - xId).$$

Como $Ann(W_{ij}) = (p_i^{\beta_{ij}})$ temos que $m_{T|W_{ij}} = p_i^{\beta_{ij}}$. Mas $dim_K(W_{ij}) = gr\,(p_i^{\beta_{ij}}) = gr\,(c_{T|W_{ij}})$. Dessa forma podemos afirmar que $c_{T|W_{ij}} = m_{T|W_{ij}} = p_i^{\beta_{ij}}$, pois ambos são polinômios mônicos e $m_T(x)$ divide $c_T(x)$. Consequentemente,

$$c_T(x) = \prod_{i=1}^{r} h_i(x) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{i=1}^{t_i} p_i^{\beta_{ij}} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\gamma},$$

onde $\gamma = \sum_{j=1}^{t_i} \beta_{ij}$.

11. Concluindo, se $c_T(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\gamma_i}(x)$ e $m_T(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}(x)$ são os polinômios característicos e minimais de T respectivamente, a forma canônica de Jordan associada a T é formada por submatrizes M_i de ordem $gr\,(p_i^{\beta_{ij}})$, onde os β_{ij} formam uma partição de γ_i e $\beta_{i1} = \alpha_i$, ou seja, a submatriz de maior ordem corresponde a α_i.

Exemplo 3. *Considerando $c_T(x) = (x - \alpha)^4(x - \beta)^2$ e $m_T(x) = (x - \alpha)^2(x - \beta)$. Sabemos que a ordem de M_1 será igual a $gr\,((x - \alpha)^4) = 4$ e a ordem de M_2 será igual a $gr\,((x - \beta)^2) = 2$.*

ISSN 2358-4947

Sabemos ainda que a submatriz N_{ij} de maior ordem deverá ter ordem igual ao gr $((x-\alpha)^2)$. Portanto, as possíveis formas de Jordan serão:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Exemplo 4. *Seja $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$, dada por $T(x, y, z, w) = (8x - y, 4x + 12y, 9z + 2w, 2z + 6w)$. Queremos encontrar sua forma canônica de Jordan.*

Temos que a matriz de transformação com relação a base canônica de T é a seguinte:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

A partir desta matriz, pode-se obter o polinômio característico $c_T(x) = (x-10)^3(x-5)$ e o polinômio minimal $m_T(x) = (x-10)^2(x-5)$.

Desta forma, $\mathbb{C}^4 := V \simeq V_{(x-10)} \oplus V_{(x-5)}$.

Da mesma forma,

$$V_{(x-10)} \simeq \frac{K[x]}{(x-10)^2} \oplus \frac{K[x]}{(x-10)}$$

$$V_{(x-5)} \simeq \frac{K[x]}{(x-5)}$$

Podemos afirmar que

$$dim\left(\frac{K[x]}{(x-10)^2}\right) = 2 \quad dim\left(\frac{K[x]}{(x-10)}\right) = 1 \quad dim\left(\frac{K[x]}{(x-5)}\right) = 1$$

Assim, existem $v, u, w \in V$ tais que

$\mathcal{B}_{11} = \{v, (T-10I)(v)\}$ *é base de* $\frac{K[x]}{(x-10)^2}$

$\mathcal{B}_{12} = \{u\}$ *é base de* $\frac{K[x]}{(x-10)}$

$\mathcal{B}_{21} = \{w\}$ *é base de* $\frac{K[x]}{(x-5)}$

Aplicando a transformação $T - \lambda_i I$ nos vetores das bases acima chegamos ao seguinte:

$(T-10I)(v) = 0.v + 1.(T-10I)(v)$

$(T-10I)((T-10I)(v)) = 0.v + 0.(T-10I)$

$(T-10I)(u) = 0.u$

$(T-5I)(w) = 0.w$

Assim, a matriz $[T - \lambda_i I]_{\mathcal{B}_{ij}}$ será

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ISSN 2358-4947

E a matriz dada por $[T]_{\mathcal{B}_{ij}} = [T - \lambda_i I]_{\mathcal{B}_{ij}} + [\lambda_i I]$ *será*

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

6 Conclusão

Este trabalho é fruto de um estudo bibliográfico ainda em andamento, realizado por meio do PICME. Neste projeto, estudamos por meio de apresentação de seminários as teorias de Álgebra Linear e de Módulos sobre Ideais Principais. Através das duas, construímos a forma canônica de Jordan.

Desta forma, pudemos perceber que um mesmo resultado pode ser obtido por mais de um modo: por Espaços Vetoriais sobre corpos, ou por Módulos sobre Ideais Principais. Assim, foi possível obter uma visão mais geral do processo de obtenção desta forma.

Como continuidade, pretende-se estudar com mais profundidade os resultados e conceitos de Módulos sobre Ideais Principais, afim de criar condições para demonstrar os teoremas que apenas foram enunciados.

Referências

[1] Coelho, F. U., Lourenço, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2005.

[2] Hernandes, M. E., *Notas de aula sobre módulos*, UEM.

[3] Sharp, R. Y., *Steps in commutative algebra*, C. U. Press, 2000.

VII Semana da Matemática da UTFPR - Toledo
I Workshop do PROFMAT - Toledo
Toledo, 3 a 7 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

Relações entre a Matemática e a Música: Alguns estudos sobre a Teoria dos Conjuntos de Forte

Fernanda Venites Buzinaro
UTFPR
fernandavbuzinaro@gmail.com

Adriano Gomes de Santana
UTFPR
adrianosantana@utfpr.edu.br

Resumo

O presente trabalho apresenta algumas relações entre a matemática e a música, realizando uma breve passagem pela história da música. Na sequência trabalhamos com a escala pitagórica e a escala temperada, passando das músicas tonais como as composições de Wolfgang Amadeus Mozart e Johann Sebastian Bach para as atonais como as obras de Arnold Schoenberg e vendo alguns exemplos dessas músicas. Trabalha com conteúdos específicos da música como campos harmônicos. Também apresentamos um pouco sobre a física e afinação de um instrumento de corda, assim como a estrutura de um teclado. O trabalho estuda os conceitos das teorias de Forte e de grupos.

Palavras-chave: Matemática e música. Escalas. Teoria de Forte. Física do som.

1 Introdução

O tema de nossa pesquisa são as relações entre a Matemática e a Música, mas especificamente as relações da teoria de grupos com a teoria de Forte e como ambas se estão interligadas com as composições pós modernas.

A música vem sofrendo constantes mudanças e até o século XX, composições como as de Mozart seguiam determinadas regras que caracterizam as músicas tonais. Com os constantes avanços na área musical a mesma acabou chegando ao seu limite, abrindo assim caminho para compositores como Schonberg, a fugirem do tonalismo criando assim o atonalismo.

2 História da Música e a Escala Pitagórica

A música vem a muitos séculos fascinando o homem, mas foi em 500 a.C com Pitágoras que a música começou a ser relacionada com a Matemática. Através de um instrumento chamado monocórdio os pitagóricos descobriram que o som obtido através das variações do comprimento de sua corda geravam sons agradáveis com o som original. O instrumento possuía uma corda de comprimento L tencionada sob um suporte de madeira com ambas as extremidades fixas, ilustrado na Figura 1.

Ao pinçar a corda é produzido um som cuja frequência fundamental f está relacionada com o material da corda, unidade linear de massa μ, a tenção τ e seu comprimento L pela equação:

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{1}$$

ISSN 2358-4947

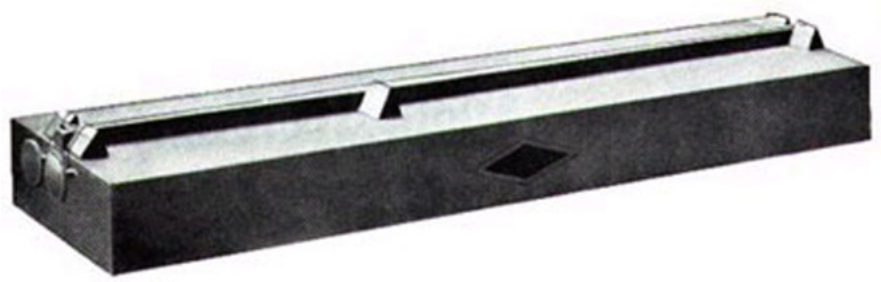


Figura 1: Monocórdio
Fonte: Souza (2012) [5].

Quando o valor da tenção τ aumenta, a frequência f do som produzido também aumenta, produzindo sons mais agudos. A variação da tenção é utilizada na afinação dos diversos instrumentos de corda como o violão e o violino. Já quando o comprimento L ou a unidade linear de massa μ aumenta a frequência f diminui, produzindo sons mais graves[4]. Assim com modifições do comprimento da corda com frações simples os pitagóricos geraram sons agradáveis de se ouvir em conjunto, sons considerados harmoniosos.

> Segundo Pereira (2013) [3] Ao pinçarmos a corda deste instrumento em seu comprimento total conseguimos um som que serve como nota base para encontrar as demais notas da escala pitagórica. Esta primeira nota pode ser denominada como fundamental ou tônica e é dada pela fração $\frac{1}{1}$ de seu comprimento. Ao dividirmos esta mesma corda ao meio obtemos um som equivalente ao primeiro, isto é, um novo som que tem as mesmas características do som fundamental soando como se fosse a mesma nota, esta se denomina oitava. Ao dividir a corda em três partes iguais e tocar $\frac{2}{3}$ de seu comprimento obtemos um som que não é mais idêntico ao fundamental mas soa de forma agradável em conjunto com este som, o som assim obtido é denominado de quinta, o mesmo acontece para a fração $\frac{3}{4}$ a qual é denominada como quarta.

Para encontrar as demais notas da escala pitagórica utilizarei as quintas de cada nota. Como não é possível saber exatamente qual foi a afinação que os pitagóricos utilizaram quando desenvolveram a escala pitagórica, vamos supor que a corda esteja afinada em Dó. Se a corda possui afinação em Dó então $\frac{1}{1}$ seria equivalente a esta nota, a quinta de Dó é o Sol que em fração seria $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda. Como sabemos que a quinta de Dó é agradável de se ouvir quando tocadas simulteneamente então outro possível som agradável que pode surgir nessa sequência seria a quinta de Sol que é a nota ré portanto se $\frac{2}{3}$ de Dó é Sol então Ré será $\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, porém este valor se encontra uma oitava acima assim como o $\frac{1}{2}$ de Dó que é o próprio Dó uma oitava acima, devido a isso iremos multiplicar este por 2 para que o mesmo caia dentro da primeira oitava, deste modo teremos $2.\frac{4}{9} = \frac{8}{9}$ que será equivalente ao Ré uma oitava abaixo. De forma análoga encontraremos a quinta de Ré que é o Lá de forma fracionário temos $\frac{2}{3}.\frac{8}{9} = \frac{16}{27}$. A quinta de Lá é o Mi, de forma fracionaria temos $\frac{2}{3}.\frac{16}{27} = \frac{32}{81}$. Como o Mi encontrado está uma oitava acima multiplicaremos ele por dois para que ele desça uma oitava, então teremos $2.\frac{32}{81} = \frac{64}{81}$. Analogamente encontramos a quinta de Mi que é o Si $\frac{2}{3}.\frac{64}{81} = \frac{128}{243}$.

Portanto as sete frações equivalentes as sete notas são:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243} e \frac{3}{4}$$

ISSN 2358-4947

. Colocando as frações em ordem crescente teremos :

$$\frac{1}{1}, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27} e \frac{128}{243}$$

. Assim obtemos as sete notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si da escala pitagórica com afinação em Dó.

3 Escala Temperada

Em 1691 com a renascença e o avanço dos estudos na área da música, Andreas Werckmeister desenvolveu a escala temperada. A escala temperada surgiu devido as falhas que existiam na escala pitagórica, já que um mesmo instrumento não poderia gerar músicas em diferentes tonalidades. Essa falha ficou conhecida como coma pitagórico. Segundo Pereira (2013, p.13)[3] "O temperamento consiste na divisão da escala musical de forma que as distância das notas tanto na corda como nas frequências sejam iguais em uma escala logarítmica".

Na escala temperada foram adicionadas cinco notas chamadas de acidentes para que deste modo o erro que ocorria, coma pitagórico, fosse espalhado por toda a escala de modo a tornar possível reproduzir músicas de diferentes tonalidades em um mesmo instrumento. Assim a escala temperada possui em sua composição as sete notas da escala pitagórica e mais cinco notas totalizando as doze notas que compõe a escala. A Tabela 1 mostra os comprimentos para as notas da divisão da corda nas escalas pitagórica e temperada.

Tabela 1: Escala Pitágorica e Escala Temperada

X	Pitágoras intervalos de 5º	Temperada exponencial $0,5^{\frac{1}{12}}$
Tônica	$\frac{1}{1} = 1$	$0,5^{\frac{0}{12}} = 1$
		$0,5^{\frac{1}{12}} = 0,944$
II	$\frac{8}{9} = 0,88$	$0,5^{\frac{2}{12}} = 0,891$
		$0,5^{\frac{3}{12}} = 0,841$
III	$\frac{64}{81} = 0,790$	$0,5^{\frac{4}{12}} = 0,794$
IV	$\frac{3}{4} = 0,750$	$0,5^{\frac{5}{12}} = 0,749$
		$0,5^{\frac{6}{12}} = 0,707$
V	$\frac{2}{3} = 0,667$	$0,5^{\frac{7}{12}} = 0,667$
		$0,5^{\frac{8}{12}} = 0,629$
VI	$\frac{16}{27} = 0,592$	$0,5^{\frac{9}{12}} = 0,595$
		$0,5^{\frac{10}{12}} = 0,561$
VII	$\frac{128}{243} = 0,527$	$0,5^{\frac{11}{12}} = 0,529$
VII	$\frac{1}{2} = 0,5$	$0,5^{\frac{12}{12}} = 0,5$

Fonte: Os Autores (2019).

4 Músicas Tonais e Atonais

As composições escritas anteriormente ao século XX eram ditas tonais. Segundo [5] Algumas composições de Wolfgang Amadeus Mozart realizadas no século VIII utilizavam se de analise combinatória e probabilidade. Essas obras possuíam também os fatores da tonalidade.

ISSN 2358-4947

As músicas tonais seguem duas regras; o agrupamentos de notas tocadas de forma harmônica e a ordenação dos acordes reproduzidos.

A seguir temos a Figura 2 que exemplifica um teclado musical, a parte que esta dentro do retângulo vermelho representa uma oitava começando em Dó e finalizando na nota Dó.



Figura 2: Teclado
Fonte: Os autores (2019)

As notas que compõem o teclado ilustrado na Figura 2 são Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si e Dó nessa ordem.

A distância existente entre essas notas\sons é chamada de intervalo. Dentro dos intervalos temos os tons e semitons, sendo que um semitom corresponde a menor distância possível entre duas notas e o tom corresponde ao dobro de um semitom. Para denotar tom e semitom usaremos a seguinte notação: T para tom e ST para semitom.

As notas brancas quem compõe o teclado possuem uma harmonia própria gerando o campo harmônico de Dó maior. Este campo harmônico, como qualquer campo harmônico maior, satisfaz a sequência de intervalos T T ST T T T ST entre suas notas. Essa sequência corresponde a um dos modos gregos denominado Jônio, também conhecido como escala maior.

Embora existam 12 notas na escala temperada, a maioria das composições clássicas e populares utilizam apenas um pequeno conjunto delas, em particular as sete notas de um campo harmônico. Essas notas são enumeradas utilizando algarismos romanos o qual ilustramos na Figura 3 a seguir.

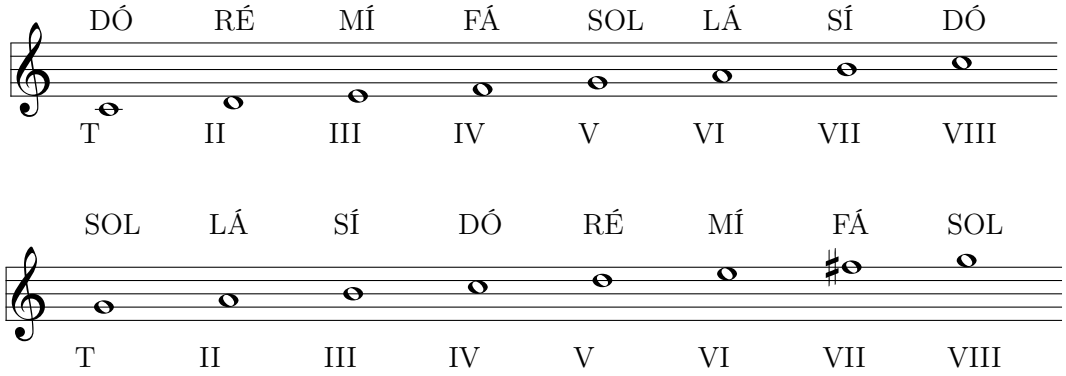


Figura 3: Escala de Dó maior e Sol maior
Fonte: Do autor.

Os campos harmônicos mais conhecidos atualmente são o Jônio que é a escala maior e o Eólio que corresponde a escala menor. Porém, esses não são os únicos campos harmônicos existentes, temos também o Dórico, Frígio, Lídio, Mixolídio e Lócrio que juntos ao Jônio e o Eólio compõem os sete modos gregos, todos os modos gregos podem ser obtidos com a rotação

ISSN 2358-4947

da sequência de intervalos T T ST T T T ST. A Tabela 2 apresenta os sete modos gregos e seus respectivos nomes.

Tabela 2: Modos Gregos

Modo	Seqüência de intervalos	Intervalos em relação à tônica
Jônio	T T ST T T T ST	2M, 3M, 4J, 5J, 6M, 7M
Dórico	T ST T T T ST T	2M, 3m, 4J, 5J, 6M, 7m
Frígio	ST T T T ST T T	2m, 3m, 4J, 5J, 6m, 7m
Lídio	T T T ST T T ST	2M, 3M, 4aum, 5J, 6M, 7M
Mixolídio	T T ST T T ST T	2M, 3M, 4J, 5J, 6M, 7m
Eólio	T ST T T ST T T	2M, 3m, 4J, 5J, 6m, 7m
Lócrio	ST T T ST T T T	2m, 3m, 4J, 5dim, 6m, 7m

Fonte: http://www.pensandomusica.com.br/2015/12/modos-gregos.html

Um exemplo de composição que segue fortemente o camo harmônico é a Jesus Alegria dos Homens de Johann Sebastian Bach como mostra a Firgura 4



Figura 4: Partitura de Bach
Fonte: https://musescore.com.

5 Teoria de Forte e Teoria de Grupos

Foi no século XX que a música tonal alcançou o seu limite, abrindo caminho para compositores com Schonberg que começaram a fugir das composições tonais. De acordo com [5] a transição entre o tonalismo e o atonalismo não ocorreu de forma brusca, a autora cita que Wagner, Brahms e Liszt já apresentavam traços de atonalismo em suas composições.

Segundo Souza (2012) [5] Schoenberg foi um dos percursores do atonalismo. Ao contrário do tonalismo, o atonalismo não segue as duas regras citadas anteriormente. No atonalismo busca-

ISSN 2358-4947

se uma combinação não usual das notas. Nas obras de Schonberg, por exemplo, Suite op. 25, ilustrada na Figura 5, o compositor buscava utilizar de todas as doze notas do teclado antes de começar a repetir notas.



Figura 5: Partitura de Schonberg
Fonte: https://everynote.com/goods.pic/Scho_P_SuiPi25.gif.

Allen Forte foi um teórico musical americano e musicólogo, especializado em música atonal e análise musical do século XX.

Segundo Souza (2012) [5] Allen Forte utilizou-se dos números inteiros para modelar as notas musicais do sistema igualmente temperado. Souza (2012) [5] diz que segundo a teoria de Forte, cada nota do sistema temperado pertence a uma classe de notas.

A Figura 6 a seguir representa uma parte de um teclado de um piano no qual substituímos as notas por números inteiros. A Figura 7 representa as mesmas notas do teclado escritas na partitura.



Figura 6: Teclado
Fonte: Souza (2012)[5]

Algumas notas possuem um único som, porém recebem nomes distintos, estas notas são

ISSN 2358-4947

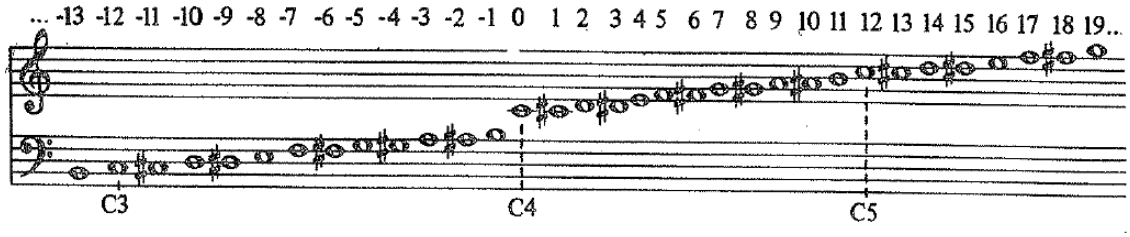


Figura 7: Substituição das notas por números na partitura
Fonte: Souza (2012)[5]

conhecidas como enarmônicas. Um exemplo de nota enarmônica são as notas Dó# e Réb, essas notas recebem um mesmo número.

Substituindo a nominação das notas obtemos o seguinte: Dó = 0, Dó# \Réb = 1, Ré = 2, Ré# \Mib = 3, Mi = 4, Fá = 5, Fá# \Solb = 6, Sol = 7, Sol#\Láb = 8, Lá = 9, Lá#\Síb = 10, Sí = 11. Deste modo Souza (2012)[5] afirma que uma possível generalização é:

> Se uma nota é representada por um número inteiro n, a nota que estiver acima será representada pelo número $n+1$ e a nota que estiver meio tom abaixo pelo número $n-1$. Esta correspondência, naturalmente, preserva a relação de ordem do conjunto dos números inteiros de forma que, se progredirmos cromaticamente na direção das notas mais agudas, progredimos crescentemente nos valores numéricos correspondentes e vice-versa. Desse modo, o espaço que contém todas as notas musicais fica representado pelo conjunto dos números inteiros. [5]

Isso significa que o conjunto de todas as notas musicais está intimamente relacionado com o conjunto dos números inteiros, sua operação de adição e sua ordem.

Embora o conjunto de notas musicais possa ser pensado como um conjunto infinito, algumas notas possuem o mesmo nome mesmo estando em localizações distintas, por exemplo as notas representadas pelos números 0 e 12 que são notas Dó com diferentes frequências. Isso significa que existe uma relação de equivalência entre as notas musicais, onde duas notas são equivalentes se possuem o mesmo nome. Essa mesma relação dá origem, na teoria dos grupos, ao grupo Z_{12}.

Estas doze classes de notas musicais podem ser organizadas em um dodecágono conforme a Figura 8. Em sua teoria, Forte mostra que as simetrias desta figura representam tranformações musicais que são utilizadas em composições pós modernas. Essas simetrias são as rotações e as reflexões do dodecágono, ou seja, os elementos do grupo diedral D_{12}.

ISSN 2358-4947

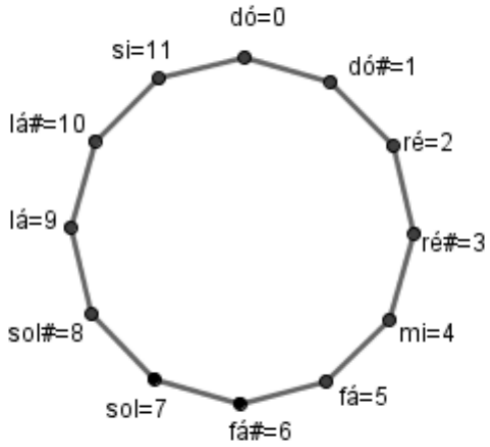


Figura 8: Classes de equivalência das notas musicais
Fonte: Souza (2012) [5].

Sendo $a =< 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 >$, que é a sequência que gera o campo harmônico de Dó maior, uma tranposição é nada mais do que somar um certo valor n a todas as notas da sequência, por exemplo, a trasposição de sete semi-tons dá como resultado $T_7(a) =< 0+7, 2+7, 4+7, 5+7, 7+7, 9+7, 11+7 >=< 7, 9, 11, 0, 2, 4, 6, 7 >$ que gera o campo harmônico de Sol maior.

6 Conclusão

O presente trabalho é parte do meu trabalho de conclusão de curso, O qual tem por objetivo estudar as relações da teoria dos conjuntos de Forte e a teoria de grupos.

Já realizamos estudos sobre a fisíca do som e sobre a teoria de grupos, porém como realizamos poucos estudos sobre a teoria de Forte não desenvolvemos a fundo o tema no presente trabalho.

O trabalho resliza um compilamento de alguns dos estudos que já realisados, de modo a iniciar uma pequena analise sobre o tema que é bastante amplo. Trazemos alguns estudos sobre a influência da física na música, como já citado anteriormente, e também um pouco de como a música se desenvolveu com o passar dos tempos.

O estudo teve início com o estudo de física do som, passando pela história da música que está conectada com a matemática e ainda algumas relações mais recentes que são desenvolvidas por Allen Forte.

Referências

[1] DOMINGUES, H.; IEZZI, G. Álgebra moderna, volume único ,4 ª edição reformada. São Paulo, 2003.

[2] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentos da Física, 8ª edição, vol. 2, LTC. [SL]: Wiley, 2008.

[3] PEREIRA, M. D. C. M. Matemática e Música: de Pitágoras aos dias de hoje. 2013.

ISSN 2358-4947

[4] SANTANA, A. G. Matemática e Educação Matemática: Algumas Relações Matemáticas na Música In: QUINELATO A. L. [at al]. 1ªED. Dez anos UTFPR Câmpus Toledo: Cresimento em pesquisa, endino e extensão. Toledo Pr: Osni Hoss-Ed . DRHS, 2016. pag:276 à 290.

[5] SOUZA, L. G. S.Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

MODELAGEM MATEMÁTICA E A LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: RELATO DE EXPERIÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR

Daiane Maria Seibert
UTFPR-TD
daiane-seibert1@hotmail.com

Alexandre Welter
UTFPR-TD
pocabrascorp@hotmail.com

Tatiany Mottin Dartora
UTFPR-TD
tatianym@hotmail.com

Resumo

O presente artigo propõe relatar algumas considerações realizadas a partir de atividades desenvolvidas na disciplina de Modelagem Matemática II, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal *campus* Toledo. Tendo como objetivo promover, por meio da Modelagem Matemática, o uso da teoria e prática para resolver problemas acerca da Lei de Resfriamento de Newton, especificamente do resfriamento de um bolo de caneca. Para tanto, os acadêmicos buscaram conciliar uma atividade experimental e o estudo e discussões de textos acerca de Modelagem Matemática. Concluímos que a Tendência Modelagem Matemática proporciona um ambiente de construção de conhecimentos na busca de resolução de situações problemas no cotidiano.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ensino Superior. Lei de Resfriamento de Newton.

1 Introdução

Este artigo que integra um estudo acerca do uso de Modelagem Matemática no Ensino Superior, especificamente no Curso de Licenciatura em Matemática, apresenta o relato da atividade decorrente de uma disciplina de Modelagem Matemática, cujas atividades envolviam o desenvolvimento de atividades experimentais, estudo de textos, e discussões de modelos matemáticos clássicos, como a Lei de Resfriamento de Newton.

A disciplina de Modelagem Matemática II no Ensino Superior apresenta como ementa a análise de modelos clássicos e do conteúdo matemático correspondente (Equações Diferenciais, Equações de Diferenças, Ajuste de Curvas, etc.). Neste sentido, trabalhamos com as Equações Diferenciais, que segundo ZILL (2001, p. 01) as mesmas “surgem a partir de tentativa de formular, ou descrever, certos sistemas físicos em termos matemáticos”.

Assim, a Lei de Resfriamento de Newton envolvendo variação de temperatura em relação ao tempo pode solucionar diversas situações-problemas, desde as mais simples até as mais complexas, por meio de Equação Diferencial Ordinária (EDO).

ISSN 2358-4947

Visando a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento crítico, buscamos no referencial teórico Registros de Representação Semiótica modos para representar o fenômeno da Lei de Resfriamento de Newton. De acordo com Vertuan (2007, p.18),

> Entendemos a aprendizagem como um processo que depende de múltiplos fatores, entre os quais se encontram as diversas interações que o estudante tem com o meio, com os professores, com os demais alunos e com as ferramentas a que tem acesso. Entre estas ferramentas estão os sistemas de representação externa, tais como os signos matemáticos, as representações gráficas, a escrita em língua natural.

Temos ainda o objetivo presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao qual buscamos alcançá-lo de forma a obter a concretização do pensamento próprio utilizando os meios citados por Vertuan (2007).

> Analisar e valorizar informações de diferentes fontes utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade (BRASIL, 1999, p. 84-85).

Assim, a atividade proposta na disciplina e o modo de aplicação, podem fortalecer o pensamento crítico sobre o assunto, de forma a ver, compreender e questionar fatos ainda não esclarecidos para a compreensão do mesmo.

2 Material e Métodos

A ciência tem como objetivo fazer predição e explicar fenômenos, verificar a veracidade dos fatos mediante a aplicação de métodos científicos que definem as diretrizes e orientações de como desenvolver o trabalho de pesquisa, as técnicas que devem ser empregadas, a sequência adequada de atividades, além de outros fatores inerentes e que conferem o grau pertinente de confiabilidade aos resultados obtidos (MARCONI; LAKATOS, 2000).

Inserida neste âmbito, esta pesquisa tem um caráter pragmático e constitui um processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico (GIL, 2001), sendo que seu principal objetivo consiste em descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos (MARCONI; LAKATOS, 2000). A abordagem metodológica utilizada neste trabalho foi de cunho qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Inicialmente, os alunos da disciplina de Modelagem Matemática II realizaram a construção de um mapa conceitual acerca do tema Modelagem Matemática, uma vez que todos os alunos da disciplina, já cursaram a disciplina de Modelagem I, voltada para modelos na Educação Básica. A partir dessa atividade, foi possível observar os conhecimentos prévios

ISSN 2358-4947

dos alunos, relatando também o fato de terem realizado a disciplina de Matemática Aplicada, em que realizaram atividades de Modelagem Matemática.

Na sequência, fizemos o estudo de textos sobre Modelagem Matemática e realizamos uma discussão de possíveis problemas que poderiam ser resolvidos por meio da Modelagem Matemática e após escolherem um assunto em comum acordo, sobre o resfriamento do bolo de caneca, iniciaram uma investigação para responder as seguintes questões: Qual a temperatura do Bolo após 12 minutos de seu preparo? Qual modelo matemático pode expressar sua temperatura no decorrer do tempo? Após o aceite dos alunos pela investigação proposta, percebemos que esse problema solicitava uma atividade experimental para que seus dados fossem analisados.

Para realização da atividade experimental os alunos utilizaram materiais como caneca, micro-ondas, massa para bolo e termômetro (Figura 1).

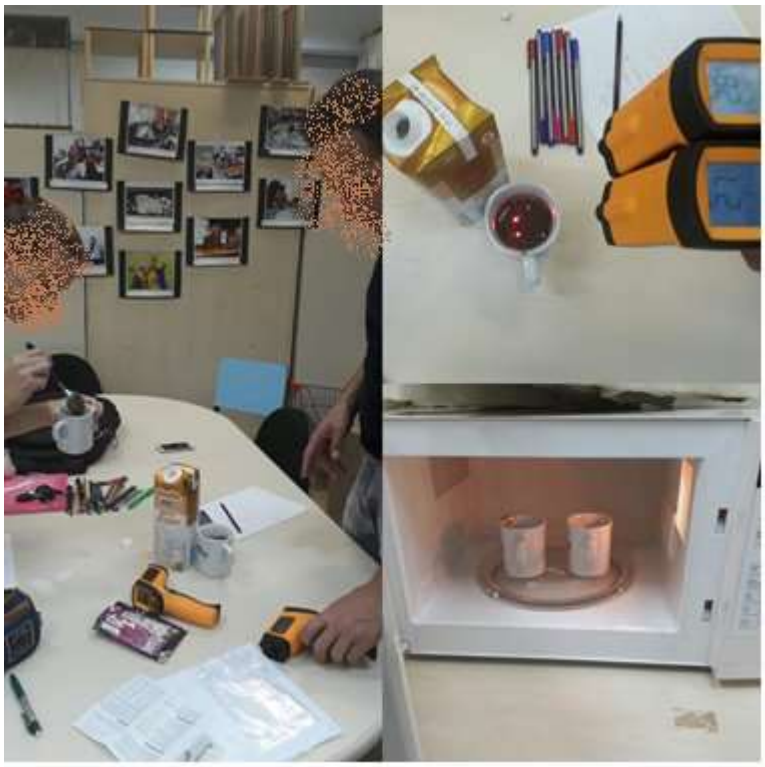


Figura 1: Procedimentos realizados para o estudo
Fonte: Dos Autores

Inicialmente fomos ao Laboratório de Ensino de Matemática da instituição e preparamos uma quantidade de bolo de caneca para assar no micro-ondas. Para a resolução desse problema admite-se que a temperatura de uma xícara de bolo quente segue a Lei de Resfriamento de Newton, pois de acordo com ZILL (2003, pág. 22) “uma lei empírica de

ISSN 2358-4947

resfriamento atribuída a Isaac Newton assegura que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional a diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio". Na realização do experimento foi verificado que a temperatura ambiente é de 30 graus, e a temperatura inicial do bolo é de 76,8°C conforme apresentado na Tabela 1, foram coletados dados sobre o resfriamento do bolo a cada 1 minuto.

Tabela 1: Tabela de coleta de dados da atividade experimental realizada no Laboratório de Matemática

Tempo (minutos)	Temperatura Empírica (C°)
0	76,8
1	69,6
2	67,5
3	61,7
4	59,4
5	58,9
6	55,7
7	54,5
8	54,1
9	51,1
10	48,6
11	46,9
12	46,5
13	45,9
14	44,7
15	43,5
16	43,2
17	43
18	42,6
19	41,3
20	40,8

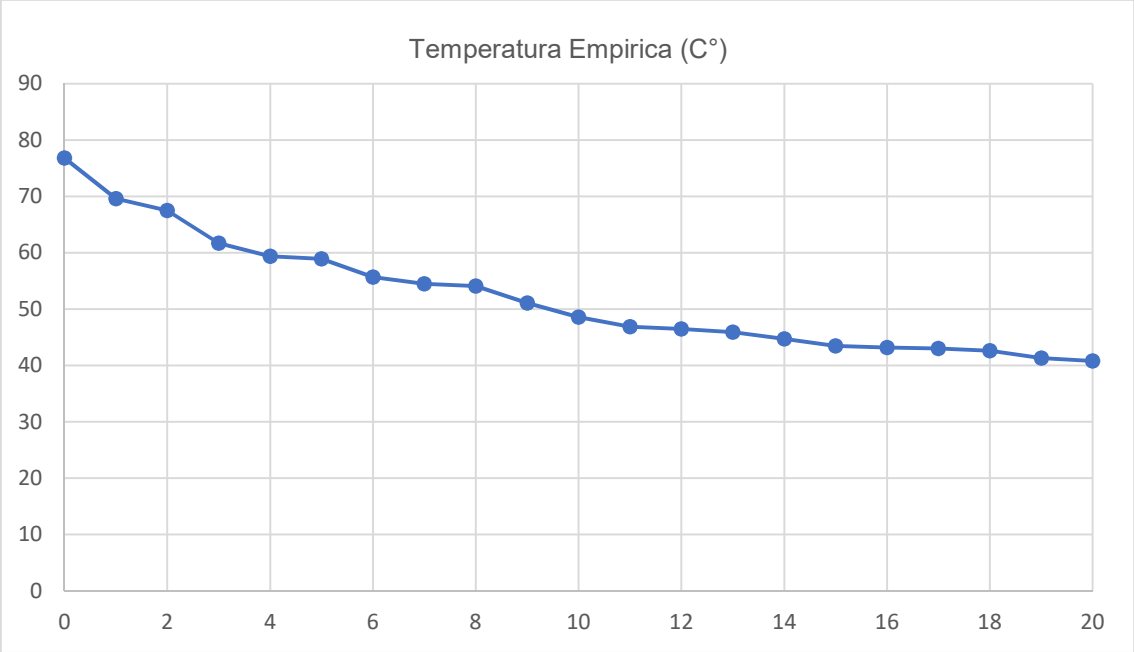
Fonte: Dos autores

3 Resultados e Discussão

A partir dos dados coletados os alunos construíram o gráfico com auxílio do computador e o software Excel. O Gráfico 1 apresenta a relação Tempo x Temperatura, para os dados coletados a partir dos experimentos realizados pelos alunos para verificar a temperatura do bolo ao longo do período do experimento realizado.

ISSN 2358-4947

Gráfico 1: Relação tempo x temperatura do bolo durante o experimento



Fonte: Dos Autores

Após a construção da Tabela 1 e do Gráfico 1 os alunos continuaram as atividades por meio da manipulação algébrica utilizando as concepções e formulações discutidas.

Segundo ZILL (2003), a Lei de Resfriamento de Newton nos diz que a taxa da variação da temperatura de um corpo em um determinado ambiente, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente. Sendo T a temperatura do corpo, t o instante em que se dá a temperatura T e T_a a temperatura do ambiente. Assim pela Lei de Newton a taxa de variação da temperatura se dará pela derivação de dt e como ela é diretamente proporcional a $(T - T_a)$ obtemos a equação (1):

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \qquad (1)$$

em que, $\frac{dT}{dt}$ é a variação da temperatura em relação ao tempo;

k é um coeficiente de proporcionalidade, que depende da superfície exposta, do calor específico do corpo e também das características ambientais e climáticas;

ISSN 2358-4947

T é a temperatura inicial do corpo;

T_a é a temperatura ambiente, supostamente constante no período do experimento.

Para resolução da equação diferencial ordinária correspondente, temos dos dados de laboratório, que a temperatura ambiente durante o experimento é $T_a = 30$ °C. Logo

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 30)$$

Ou seja, $\int \frac{dT}{(T-30)} = \int k\, dt$

Ou seja, $ln|T - 30| = kt + C$

$$T - 30 = e^{kt+C}$$

Que pode ser escrita a solução como em (2):

$$T(t) = 30 + Ce^{kt} \qquad (2)$$

Conforme dados coletados, podemos observar que a temperatura inicial do bolo é 76,8 °C, dessa forma temos:

$$T(0) = 30 + Ce^{k0}$$

$$76{,}8 = 30 + Ce^{0}$$

$$C = 46{,}8$$

Assim encontramos a solução para o problema do resfriamento do bolo para a caneca sendo (3):

$$T(t) = 30 + 46{,}8e^{kt} \qquad (3)$$

Dos dados apresentados na Tabela 1, em $t = 12$ minutos, temos que $T(12) = 46{,}5$ °C, e com essa informação é viável encontrar a constante de proporcionalidade k perante a equação (3):

$$T(12) = 30 + 46{,}8e^{12k}$$

$$46{,}5 = 30 + 46{,}8e^{12k}$$

$$e^{12k} = 0{,}35256$$

$$12k = -1{,}042523$$

Ou seja, obtendo-se (4):

$$k = -0{,}08688 \qquad (4)$$

Assim, com a obtenção da constante k podemos explicitar a solução para calcular a temperatura do bolo em qualquer tempo coerente determinado, como segue em (5):

$$T(t) = 30 + 46{,}8e^{-0{,}0868} \qquad (5)$$

ISSN 2358-4947

E pode-se estimar qual será a temperatura do bolo, por exemplo, após 20 minutos de seu preparo.

$$T(20) = 30 + 46{,}8e^{-0{,}08688\,.\,20}$$

$$T(20) = 30 + 46{,}8e^{-1{,}7376}$$

Ou seja, como em (6):

$$T(20) \cong 38{,}23\ °\text{C} \quad (6)$$

Portanto, o bolo de caneca estará com a temperatura de aproximadamente $38{,}23$ °C após 20 minutos do seu preparo.

Para compararmos os valores obtidos por meio da equação (5) com os dados experimentais, elaboramos a Tabela 3, com a temperatura empírica sendo a coletada pelos alunos com termômetro digital a laser e a experimental a obtida a partir da resolução da Lei de Resfriamento de Newton:

Tabela 3: Comparação entre Temperatura Empírica X Temperatura Experimental

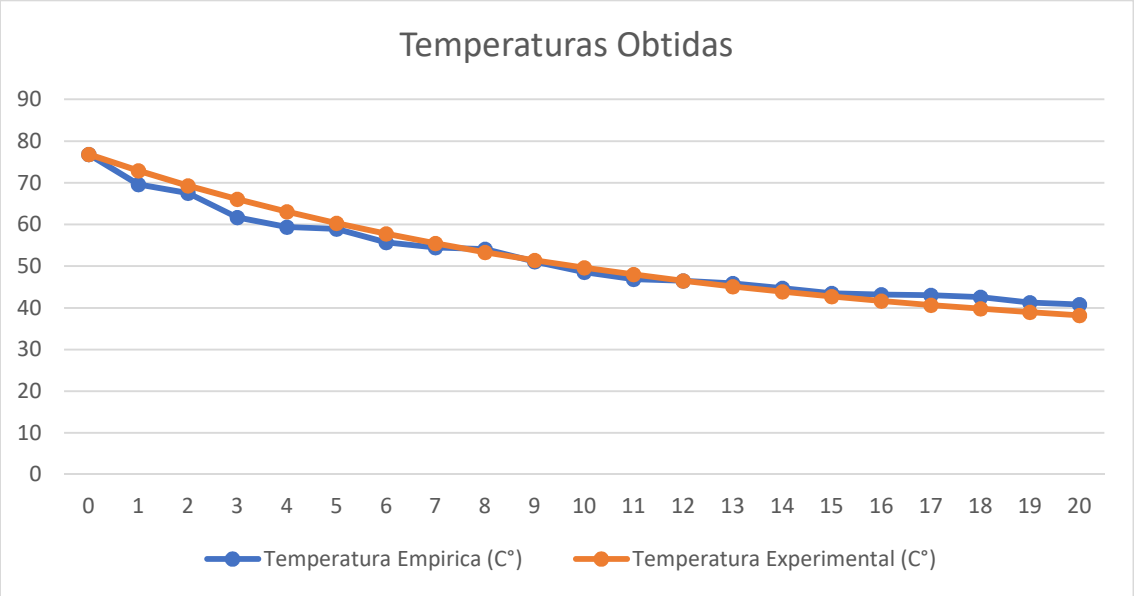
Tempo (minutos)	Temperatura Empírica (C°)	Temperatura Experimental (C°)
0	76,8	76,80
1	69,6	72,91
2	67,5	69,34
3	61,7	66,06
4	59,4	63,06
5	58,9	60,31
6	55,7	57,79
7	54,5	55,48
8	54,1	53,36
9	51,1	51,41
10	48,6	49,63
11	46,9	48,00
12	46,5	46,50
13	45,9	45,13
14	44,7	43,87
15	43,5	42,71
16	43,2	41,66
17	43	40,69
18	42,6	39,80
19	41,3	38,98
20	40,8	38,23

Fonte: Dos Autores

ISSN 2358-4947

A seguir, o gráfico com os dados apresentados na Tabela 3 compilados para melhor visualização e acompanhamento do resfriamento com os dados obtidos pelos alunos (temperatura empírica) e a temperatura obtida pela Lei de Newton (temperatura experimental).

Gráfico 2: Relação Temperatura Empírica x Temperatura Experimental



Fonte: Dos Autores

De acordo com Vertuan (2007), para a elaboração da modelagem matemática proposta, transitamos entre diversos registros de representação, construindo uma tabela com os dados obtidos por meio do experimento e na sequência a partir dos dados coletados construímos o gráfico de segmentos. Nesse momento, pode-se perceber a capacidade de mobilização entre os registros, realizando transformações entre dois registros do registro tabular para o registro gráfico, realizando a conversão.

A segunda etapa consistiu na elaboração do modelo, representação algébrica e alguns cálculos realizados para confrontar a temperatura empírica com a temperatura experimental, durante a realização dos cálculos os acadêmicos realizaram um processo de tratamento, realizando a transformação dentro do mesmo registro de representação.

Assim, voltaram a utilizar a semiótica para continuação dos estudos referentes a Lei de Resfriamento de Newton, entre registros tabulares, gráficos, algébricos e língua materna.

4 Conclusões / Considerações Finais

ISSN 2358-4947

Este trabalho sobre a Lei de Resfriamento de Newton contribuiu para ampliar os conhecimentos sobre modelagem matemática, e aplicação de EDO's em situações do dia a dia. Podemos reconhecer a importância da experimentação, discussão e compreensão dos conteúdos estudados para futuramente podermos aplicar em sala de aula buscando visar e compreender as diferentes formas de representações apresentadas pelos alunos resultantes das práticas sobre o conteúdo.

Situações problemas possibilitam um maior envolvimento por parte dos alunos, despertando sua participação em sala quando aplicamos uma atividade diferente das aulas tradicionais. Desta forma podemos proporcionar motivação e construção do pensamento tanto para quem ministra a aula quanto para quem está participando da aula.

Como questionado incialmente podemos obter a temperatura aproximada para os 12 minutos, sendo essa exclusivamente a mesma tanto para a medição real quanto para a previsão estipulada pela lei estudada devido ao seu uso para determinação da constante de proporcionalidade, mas se estendendo a previsão para qualquer tempo conveniente o resultado a partir do resultado alcançado, ao qual enrijece o pensamento sobre a Lei do Resfriamento de Newton e o próprio pensar através da experiência realizada, proporcionada em aula comum da disciplina de Modelagem Matemática II.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2001.

MARCONI, M.A.; e LAKATOS, E.M. **Metodologia Científica**. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2000.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. 2007. Tese de Doutorado. Dissertação – Programa Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ZILL, D. G. CULLEN M. R. **Equações Diferenciais - Vol. 1**. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2003.

ISSN 2358-4947

GINCAMAT – Relato de experiência da gincana de matemática aplicada pelos acadêmicos participantes do PIBID em 2018

Maria Eduarda de Bastos Marques
UTFPR - TD
mariaedubastos@gmail.com

Ana Maria Costa Spohr
UTFPR - TD

Anderson Alves Miguel
UTFPR - TD

Eduarda Debortoli da Silva
UTFPR - TD

Maria Luiza Doebber
UTFPR - TD

Resumo

No presente trabalho será apresentado um relato da experiência vivenciada com a realização da gincana de matemática – GINCAMAT, em três colégios da rede estadual de ensino da cidade de Toledo – PR. A referida gincana foi elaborada e desenvolvida pelos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do Câmpus Toledo da UTPFR bolsistas do PIBID, juntamente com os professores coordenadores e supervisores participantes do programa. A gincana teve como objetivo principal, estimular o desenvolvimento e a retomada de diversos conceitos matemáticos entre os estudantes de forma lúdica e atrativa, fazendo-os perceber o quanto a matemática pode ser divertida. Para tanto, nos encontros destinados para discussão e preparação de tal atividade, os acadêmicos participantes do PIBID discutiram e elaboraram um conjunto composto de oito provas que envolviam diferentes temas da matemática básica. Nessas provas, procurou-se privilegiar e instigar o espírito esportivo e a competitividade entre os alunos, através de questões que exigissem deles conhecimento a respeito de vários conceitos elementares da matemática. Contudo, vale ressaltar que houve uma grande participação dos alunos nos colégios onde a gincana foi realizada e que os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios. Além da experiência vivenciada com o desenvolvimento da gincana, o texto apresentado a seguir, traz discussões a respeito da importância do uso de jogos e de como eles podem ajudar o professor no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Palavras-chave: Competitividade. Jogos. Matemática.

1 Introdução

A necessidade de utilização de estratégias e atividades diferenciadas, para tornar o processo de ensino e aprendizagem mais atraente nos diferentes níveis da Educação Básica tem sido um desafio constante para os educadores. Sendo assim, o desenvolvimento

ISSN 2358-4947

de programas e projetos que permitam aos educadores pensar e refletir sobre a prática docente tem se tornado cada vez mais necessário. Nesse sentido o Programa Institucional de Iniciação a Docência – PIBID, financiado com recursos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior – CAPES, surge como uma excelente alternativa, pois um dos seus principais objetivos é possibilitar a inserção do licenciando no contexto escolar, para que o mesmo possa compreender e vivenciar a dinâmica da ação docente no cotidiano. Além disso, o PIBID promove a aproximação entre os ambientes de formação universitária e o ambiente escolar, campo de atuação do futuro licenciando.

Os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo que participam do PIBID desenvolvem inúmeras atividades nos colégios estaduais atendidos pelo programa. Essas atividades desenvolvidas são definidas em conjunto com os colégios parceiros, que apresentam suas demandas, expondo suas sugestões e dificuldades, e a partir destas, os professores coordenadores, supervisores e os licenciandos definem o cronograma de trabalho a ser desenvolvido.

Nesse trabalho pretende-se relatar a experiência que os acadêmicos participantes do PIBID tiveram com a aplicação da atividade de gincana de matemática para os alunos da Educação Básica de três colégios estaduais do município de Toledo - PR. O objetivo desse trabalho é demonstrar como a atividade de gincana pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, assim como avaliar os impactos que esse tipo de atividade promove entre os estudantes da Educação Básica.

2 Material e Métodos

Um dos maiores desafios dos educadores na atualidade, é tornar o processo de ensino e aprendizagem atraente, fazendo com que os alunos se sintam parte desse processo e não simplesmente atuem como meros expectadores. Cunha (2007) afirma que o estímulo aos processos criativos, a manutenção do prazer na atividade e o cultivo ao autoconceito positivo são princípios fundamentais no processo educacional. Visando isso, a ideia de fazer uso do lúdico no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem vem sendo cada vez mais difundida, dentre elas, os jogos e materiais manipulativos ganham cada vez mais espaço no processo educacional, assim, de acordo com Alves (2006), a educação por meio de jogos vem se tornando uma alternativa metodológica bastante pesquisada, sendo abordada de diversas formas e com aspectos variados.

ISSN 2358-4947

Trazer a gincana para dentro da sala de aula para ensinar a matemática, é uma tentativa de estimular o aluno a aprender de maneira mais atrativa, fazendo com que ele veja a matemática como uma disciplina interessante. O divertimento junto ao processo de aprendizagem leva o aprendiz à condição de participante ativo do processo educativo.

O ato de jogar é uma atividade voluntária que estimula a criatividade. É uma atividade desinteressada e fictícia, de caráter simbólico e de desenvolvimento social, gerando prazer e tendo efeito estimulante. (SOUZA et. al. 2014). Dentre as possibilidades lúdicas, a gincana surge como opção muito interessante, pois permite colocar em prática os conhecimentos desenvolvidos em sala de aula.

Em concordância com Ferreira (2008), gincana é uma competição entre equipes em que ganha a que completar as tarefas com mais rapidez e habilidade. Outro aspecto interessante da gincana é a possibilidade de promover com maior eficiência o trabalho interdisciplinar, já que nesse tipo de atividade lúdica é possível envolver desafios e problemas, aliando ainda à sua aplicação com a tendência de ensino jogos.

Com este embasamento, a Gincana da matemática – GINCAMAT, realizada pelos licenciandos do curso de Licenciatura em Matemática bolsistas do PIBID, em 2018, teve como objetivo principal estimular o desenvolvimento e a retomada de diversos conceitos matemáticos entre os estudantes de forma lúdica e atrativa, fazendo-os perceber o quanto a matemática pode ser divertida e com isso promover maior interesse dos alunos por essa disciplina.

Para dar início à construção da GINCAMAT, Os acadêmicos participaram de várias reuniões com o intuito de discutir e elaborar o regulamento e as provas da Gincana, sendo definido ao final que seriam realizadas um total de oito provas, considerando o tempo disponível para a realização de tal atividade em cada colégio participante. Em cada um dos colégios, antes do início da aplicação da gincana, os alunos foram distribuídos em cinco grupos, cada um tendo um acadêmico como responsável. Após essa separação foi dado início às provas da gincana.

A primeira prova recebeu o nome de “Calpulando”, que visava fazer uma revisão das quatro operações básicas, juntamente com uma competição adaptada da divertida corrida no saco. A equipe que chegasse ao final do trajeto primeiro seria a vencedora da prova.

A segunda prova foi o “Passe e Repasse” e tinha como conteúdo matemático os conceitos básicos de geometria plana e espacial, na qual os alunos deveriam responder corretamente as questões propostas sobre o conteúdo. Respondendo as questões

ISSN 2358-4947

corretamente, os alunos poderiam encher um copo com água e correr até um balde posicionado à uma certa distância. A equipe que enchesse o balde mais rapidamente seria a vencedora da prova.

A terceira prova foi nomeada “Olho no lance” e a matemática trabalhada também eram sobre as operações básicas, visto que esse assunto, de acordo com Silva (2014) é o eixo norteador da disciplina de matemática e vários alunos apresentam muita dificuldade justamente nesse quesito. A prova consistia em o aluno responder uma questão de cálculo simples e em seguida

A quarta prova foi chamada de “Carrinho de mão”, cujo objetivo era recordar os conceitos de perímetro e área de figuras planas elementares. Após responder corretamente a questão feita, os alunos, em posição de “carrinho de mão” deveriam correr até uma certa distância e recolher uma peça de tangram. A equipe que recolhesse todas as peças mais rapidamente e montasse a figura pré-estabelecida seria considerada a equipe vencedora da prova.

A quinta prova recebeu o nome de “Eliminando o inimigo” e teve como conteúdo matemático envolvido a revisão básica de potências, na qual, o aluno deveria fornecer a resposta correta da potência sorteada, assim poderia eliminar um dos competidores dos times rivais arremessando no “alvo” um balão com água. Caso errasse, ele estaria eliminado da prova. O vencedor seria a equipe do último participante na prova.

A sexta prova foi denominada “Montando o Tangram” e seu objetivo era relembrar o conteúdo de frações e interpretar questões contextualizadas sobre o mesmo assunto. Essa contextualização acerca do tema frações se torna importante e necessária, pois de acordo com Monteiro (2014), os alunos apresentam muita dificuldade na representação das frações. Esta prova, além de tratar de forma contextualizada o tema fração, também é trabalhado o raciocínio lógico do aluno no momento em que o mesmo faz a montagem do jogo na tentativa de vencer a prova. A equipe que montasse o Tangram de forma correta mais rápida era considerada vencedora.

A sétima prova recebeu o nome de “Gol no Ângulo” e tinha como objetivo matemático rever o tema ângulos e compreender questões contextualizadas acerca desse tema, além de envolver futebol, que é um motivador extra para os alunos se envolverem com a prova. Ao responder corretamente a questão dada, os alunos teriam a oportunidade de chutar uma bola ao gol, na tentativa de fazê-la passar por entre alguns arcos presos ao gol, que representavam a pontuação obtida pela equipe do aluno.

ISSN 2358-4947

A oitava e última prova foi a “Torta na cara versão matemática/geral” e seu objetivo era recordar assuntos variados, estudados do sexto ao sétimo ano, além de avaliar o conhecimento geral dos alunos. A prova foi realizada na forma de corrida. Primeiramente era feito uma questão matemática e só então os alunos corriam até uma certa marca. Quem chegasse primeiro, tinha a preferência para responder. Ao fornecer a resposta correta, sua equipe pontuava e o aluno ganhava o direito de dar uma torta na cara de algum colega.

Todas as provas, nos três colégios foram filmadas e registradas. Um exemplo de como foram as provas está registrado nas figuras 1 e 2 logo abaixo:



Figura 1: Prova Passe e Repasse

Fonte: dos autores.

ISSN 2358-4947



Figura 2: Montando o Tangram

Fonte: dos autores.

3 Resultados e Discussão

Os educadores buscam incansavelmente novas metodologias e dinâmicas que possam atrair cada vez mais a atenção dos alunos em suas aulas. Educar nos tempos atuais tem sido uma tarefa complexa, pois vivemos na era digital, a tecnologia avança rapidamente e o professor precisa acompanhar esse avanço, buscando novos métodos e técnicas para prender a atenção do aluno e ao mesmo tempo desenvolver no aluno o gosto pelos estudos, dessa forma, de acordo com Matta, Pontes e Souza (2013), esse pensamento fica distante quando o assunto é a disciplina de Matemática, considerada pelos alunos o “bicho papão” das escolas. Nessa busca por novos métodos de ensino, muitos educadores matemáticos estão aplicando em suas aulas diferentes recursos ligados a tendência metodológica dos jogos.

Definir o que é jogo não é simples pois cada pessoa pode entender a palavra jogo de uma maneira diferente, referindo-se a diversos tipos, como jogos políticos, xadrez, amarelinha, adivinhas, entre outros. Verificando a origem da palavra, Grando (1995, p.30) *apud.* Baumgartel (2016), enfatiza que “etimologicamente a palavra jogo vem do latim locu, que significa facejo, zombaria e que foi empregada no lugar de ludu: brinquedo, jogo,

ISSN 2358-4947

divertimento, passatempo". Com isso, pode-se deduzir que jogo é uma atividade que implica em uma forma de divertimento e que serve para passar o tempo, mas sabe-se que essa atividade pode ir além disso. O jogo pode ser utilizado como uma forma de entretenimento e de socialização, assim como pode ser utilizado como uma potencial ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem.

Relacionado a isso, a GINCAMAT foi desenvolvida, visando proporcionar atividades diferenciadas nos colégios, promovendo uma troca de experiência entre alunos, professores e os licenciandos do PIBID, evidenciando, desse modo que o estudo da matemática pode ser divertido e aplicado fora da sala de aula conforme enfatiza Grando (2000, p.15.) *apud.* Baumgartel (2016):

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

As atividades foram desenvolvidas pensando em unir a tendência jogos com a gincana, a fim de potencializar a atração dos alunos com o intuito de fazê-los recordar e assimilar conceitos elementares da Matemática de forma lúdica e divertida. A GINCAMAT foi realizada nos três colégios da cidade de Toledo – PR que estão vinculados ao programa PIBID, tendo um rendimento satisfatório em todos eles. Os alunos participantes tiveram bom envolvimento com todas as atividades propostas, demonstrando interesse, competitividade, e o mais importante de todos: a vontade de compreender os conceitos da matemática.

4 Considerações Finais

Ao final das atividades da GINCAMAT nos três colégios onde as mesmas foram desenvolvidas, foi possível destacar quão importante foi à oportunidade concedida aos licenciandos do PIBID de estar em contato direto com os alunos, pois isso, fará muita diferença no processo de formação desses futuros professores. Outro ponto a destacar foram os comentários positivos, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores

ISSN 2358-4947

dos colégios. Ambos elogiaram a aplicação da gincana e demonstraram interesse e entusiasmo com as provas e com o conteúdo matemático contextualizado envolvido.

O objetivo inicial da gincana era mostrar como as atividades envolvendo jogos podem auxiliar de forma efetiva no processo de ensino e aprendizagem, pois elas mobilizam os alunos e esses por sua vez, sentem-se partícipes do processo. Os resultados observados foram muito próximos do almejado, visto que, motivados pelo espírito competitivo que a gincana proporciona e o ambiente de diversão que os jogos trazem, os alunos acabaram retomando diferentes conteúdos matemáticos ao longo das provas e com isso puderam garantir o melhor desempenho das equipes ao final da gincana.

Ficou nítido que grande parte dos alunos demonstraram dificuldades nas atividades cujo conteúdo envolvido eram sobre as operações básicas, o que comprova a ideia de Silva (2014). Na tentativa de sanar essa dificuldade, de acordo com Sousa, Silva e Segundo (2016), se torna necessário alguns fatores com forte poder de influenciar o aprendizado dos discentes nas operações básicas, sendo esses fatores os significados atribuídos a linguagem matemática, mito de que a matemática é a disciplina mais difícil e concentração.

No que tange a concentração, Sousa, Silva e segundo (2016) apontam que um fator que vem a acarretar na queda da mesma, é a forma tradicional de passar as informações para os alunos, ou seja, o modelo típico de uma aula expositiva, na qual o professor passa para o quadro negro aquilo que por ele é considerado importante. Analisando essa ideia, fica explícito a grande contribuição que as atividades diferenciadas, como as que foram desenvolvidas durante a GINCAMAT, possuem no processo de aprendizagem do aluno.

Em suma, elaborar e desenvolver as provas de uma gincana não é uma tarefa fácil. Para uma atividade desse tipo obter o êxito que teve, foram necessárias inúmeras reuniões do PIBID para a preparação da mesma e dedicação total dos acadêmicos durante a montagem e aplicação das atividades nos colégios.

A aplicação da GINCAMAT oportunizou aos acadêmicos do PIBID um contato direto com a realidade dos alunos, assim como favoreceu um contato mais divertido da matemática com os alunos do ensino básico, o que contribui de certa para que os alunos peguem gosto por esta disciplina tão importante.

ISSN 2358-4947

REFERÊNCIAS

ALVES, Eva Maria Souza. **A ludicidade e o ensino de matemática.** Campinas: Papirus, 2006.

BAUMGARTEL, Priscila. **O uso de jogos como metodologia de ensino da matemática.** XX EBRAPEM. Curitiba: 2016. Disponível em: < http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf> Acesso em: 24 abr. 2019.

CUNHA, N. H. S. **Criar para Brincar**. São Paulo: Aquariana. 2007.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio:** o minidicionário da língua portuguesa. 7 ed. Curitiba: Ed. Positivo: 2008.

MATTA, Cléia Ferreira da Costa; PONTES, Antônio Carlos Fonseca; SOUZA, Geirto. **Jogos no ensino da matemática: uma experiência na formação inicial com a disciplina oficina de matemática em parceria com o PIBID.** XI ENEM. Curitiba:2013. Disponível em: < http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3572_2046_ID.pdf> Acesso em: 19 abr. 2019

SILVA, Robson Wesslen de Souza. **O ensino aprendizagem das quatro operações com números naturais no ensino fundamental.** Dissertação. UEPB. Guarabira: 2014. Disponível em: < http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/4907/1/PDF%20-%20Robson%20Wesslen%20de%20Sousa%20Silva.pdf> Acesso em: 27 abr. 2019.

SOUSA, Lucas Raphaell Rodrigues; SILVA, Everaldo Ismael; SEGUNDO, Edvan Alves Canuto. **Fatores que influenciam o aprendizado dos alunos nas quatro operações fundamentais.** IX EPBEM. 2016. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD4_SA4_ID253_30102016211356.pdf> Acesso em: 26 abr. 2019.

SOUZA José Ricardo (org.). **Atividades matemáticas na formação na formação de professores: aprendendo com o lúdico.** 2014. Foz do Iguaçu

VII Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
I Workshop do PROFMAT – Toledo
Toledo, 03 a 07 de junho de 2019
ISSN 2358-4947

ABORDAGENS DO CONTEÚDO ELIPSE EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1953 ATÉ 1975

Bruno Elian
UTFPR – Câmpus Toledo
brunomibe@hotmail.com

Matheus Pereira
UTFPR – Câmpus Toledo

Hugo Jose
UTFPR – Câmpus Toledo

Barbara W. Diesel Novaes
UTFPR – Câmpus Toledo

Clayton Baseggio
UTFPR – Câmpus Toledo

Resumo

O presente trabalho relata a análise de dois livros didáticos um da década de 1950 e outro da década de 1970 no que tange as abordagens para o ensino de Cônicas, especificamente o conteúdo de Elipse, no então Ensino Colegial (MAEDER,1953) e Curso de Segundo Grau (BEZERRA,1975). O mesmo tem a finalidade do entendimento de como a matéria era amestrada na época, identificando tópicos ensinados e também o modo que o assunto era abordado. Para análise dos livros didáticos utilizamos como referencial teórico-metodológico Choppin (2004). Após a análise desses livros podemos constatar que após duas décadas o tema passa a ser menos exigido no livro didático da década de 1970 em relação ao de 1950. O assunto aparece mais compactado, escrito de forma pragmática e objetiva.

Palavras-chave: Cônicas. Elipse. Livros didáticos.

1 Introdução

Este trabalho é um resultado parcial do estudo feito na disciplina de História da Educação Matemática no Brasil, juntamente com a disciplina Projeto Integrador 1[1], com o intuito de comparar como o ensino das cônicas se transformou no período de 1953 – 1975, por meio da análise de livros didáticos da época, e também o panorama educacional brasileiro.

O principal motivo para a elaboração desse trabalho é compreender sobre nosso passado profissional de professor de matemática e como era ensinado o conteúdo de elipse em livros didáticos dirigidos ao atual Ensino médio. O trabalho tem relação com o conteúdo proposto na disciplina “Projeto Integrador 1”, pois o conhecimento das abordagens para o

[1] Projeto Integrador 1: Disciplina com a finalidade da interação entre matérias, estando presente nesse trabalho as disciplinas de Geometria 1, Lógica e Conjuntos, Tópicos Matemática A e História da Educação Matemática no Brasil. Além da análise dos livros didáticos e a história das cônicas serão desenvolvido e elaborado novos materiais didáticos para o ensino das Cônicas, mais especificamente, a Elipse.

ISSN 2358-4947

ensino desse conteúdo em outros tempos pode auxiliar na tomada de decisão de que tipo de materiais didáticos seriam mais efetivos para o ensino desse conteúdo nos dias atuais.

Desenvolvemos o trabalho com objetivo de compreender como naquela época (1953-1975) a Elipse era tratada no então "Ensino Médio" da época, como era abordado esse tema e como foi se modificando no decorrer dos anos.

De acordo com MOREIRA (2010), a partir da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano obtêm-se formas geométricas (Figura 1), as cônicas, sendo uma delas a elipse, "curva plana tal que a soma das distâncias de qualquer de seus pontos a dois pontos fixos no plano é constante" (QUINTELLA[2], 1969, p. 229).

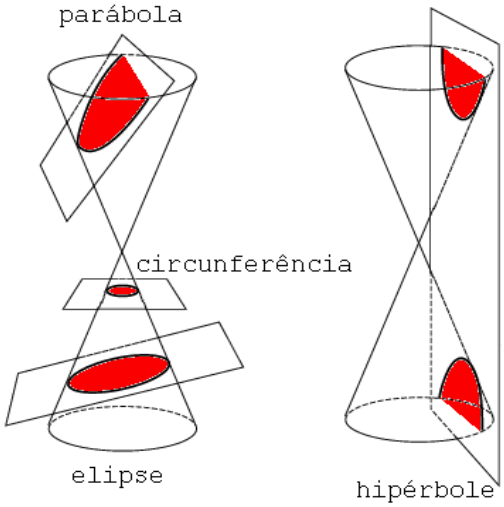


Figura 1 – Cônicas.
Fonte: MOREIRA (2010).

Para este trabalho inicial pretendemos responder a seguinte questão norteadora: De que modo o conteúdo Elipse era abordado nos livros didáticos no período de 1953 – 1975?

2 Sobre os autores e editoras

Uma das razões para a análise de livros didáticos é:

[2] Ary Quintella (1906 – 1968), professor catedrático do Colégio Militar, era autor de livros nas décadas de 1950-1970. No ano de 1969, o livro Matemática – primeiro ano colegial, foi considerado um *Best Seller*, editado pela Companhia Editora Nacional de São Paulo, estava na sua 29ª edição. As secções cônicas eram abordadas no último capítulo do livro. Apesar de sua importância, optamos por analisar o livro do professor Algacyr Munhoz Maeder (1953) (vide próxima sessão), por ser uma autor paranaense de destaque nacional em que a abordagem do conteúdo assemelha-se a de Quintella (1969).

ISSN 2358-4947

> [...] o peso considerável que o setor escolar assume na economia editorial nesses dois últimos séculos. É impossível para o historiador do livro tratar da atividade editorial da maior parte dos países sem levar isso em conta: em um país como o Brasil, por exemplo, os livros didáticos correspondiam, no início do século XX, a dois terços dos livros publicados e representavam, ainda em 1996, aproximadamente a 61% da produção nacional (CHOPPIN, 2004, p. 551).

Desta forma, o livro didático constitui-se como uma fonte privilegiada para compreensão da matemática ensinada num determinado tempo histórico. Para o desenvolvimento do trabalho serão analisados como eram tratados os conteúdos referentes à Elipse nos livros: “Curso de Matemática (1° Livro – Ciclo Colegial – 7° Edição)” de Algacyr Munhoz Maeder (1903 – 1975), distribuído pela editora “Melhoramentos de São Paulo” e publicado em 1953; e o livro “Curso de Matemática para os Cursos de Segundo Grau (Antigos cursos Clássico e Científico) Curso Completo – 32° Edição” de Manoel Jairo Bezerra (1920 – 2010), distribuído pela editora “Companhia Editora Nacional de São Paulo” e publicado em 1975 (Figura 2).

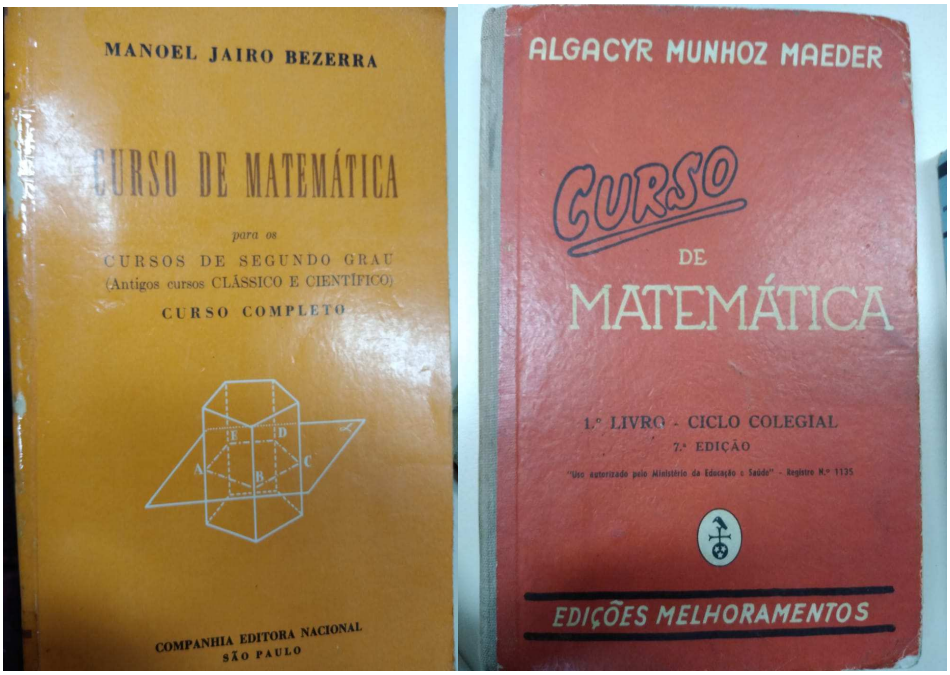


Figura 2 – Capas dos livros didáticos analisados.
Fonte: BEZERRA (1975); MAEDER (1953).

Algacyr Munhoz Maeder era “lente catedrático do Colégio Estadual do Paraná, da Faculdade de Engenharia do Paraná e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Paraná” (MAEDER, 1953). Segundo Longen (2007), Algacyr Munhoz Maeder iniciou seus

ISSN 2358-4947

trabalhos como autor de livros didáticos para o ensino da Matemática em 1928. Ao todo, o mesmo elaborou 28 livros, sendo que quatro coleções foram editadas até o ano de 1962. Essas coleções testemunharam a transição do compêndio ao livro didático, além de acompanhar a unificação dos vários ramos da matemática, assim nascendo a disciplina de Matemática.

Muito conhecida no Brasil, a editora Melhoramentos[3], em 1915, já na condição de editores, produziram aquele que seria um marco da literatura infantil brasileira. O livro "O Patinho Feio (1843), de Hans Christian Andersen, com ilustrações de Franz Richter. Trata-se do primeiro livro editado em quatro cores no Brasil. Em 1946, técnicos da empresa produziram celulose a partir do eucalipto. Até os dias atuais destaca-se como uma das principais editoras nacionais. A Melhoramentos reúne entre seus autores nada menos que Ziraldo e seus mais de 135 títulos, sucesso absoluto entre o público jovem de todo o mundo que já bateu um recorde histórico: mais de 3,5 milhões de exemplares vendidos de O Menino Maluquinho.

De acordo com o Site "somatematica.com", nascido em 1920, na cidade de Macau no Rio Grande do Norte, Manoel Jairo Bezerra[4] foi um importante Matemático brasileiro, com 53 livros escritos, também ocupou importantes cargos em instituições públicas e ao longo de sua vida recebeu várias homenagens. Seu livro mais conhecido é o Curso de Matemática para o primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos Clássico e Científico, editado pela Companhia Editora Nacional, que teve mais de 60 edições e vendeu mais de 1 milhão de cópias. Manoel Jairo Bezerra faleceu no dia 11 de março de 2010, com 90 anos.

> A Companhia Editora Nacional[5] foi fundada em 1925, por Monteiro Lobato, em um movimento de vanguarda, que revolucionou o até então inócuo mercado editorial brasileiro. Desde 1980 a Nacional faz parte do grupo IBEP (Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas), no que hoje se constitui um dos maiores grupos editoriais do país. Em seu início, e por muito tempo, a Nacional se voltou majoritariamente para a produção de livros didáticos, proporcionando grandes avanços ao sistema educacional brasileiro. Ao longo dos últimos anos, porém, a editora optou por priorizar os livros do chamado segmento trade, de maneira complementar ao que o IBEP já produz na área de didáticos e paradidáticos (EDITORA NACIONAL, 2019).

Por meio das informações apresentadas nesta seção podemos observar que os livros produzidos pelas editoras tinham uma grande aceitação no mercado editorial, o que é

ISSN 2358-4947

comprovado pelo grande número de edições e que os autores possuíam notoriedade e eram considerados *Best Sellers* no seu segmento. Na próxima seção estaremos elucidando algumas diferenças de abordagens entre os dois livros didáticos analisados.

3 Abordagens sobre o conteúdo Elipse

Em ambos os livros o conteúdo de elipse estava previsto para o primeiro ano do Colegial (MAEDER, 1953) e para o primeiro ano do segundo grau (BEZERRA, 1975). Por meio do Quadro 1 podemos observar quais eram os conteúdos abordados nos livros e o grau de profundidade dado aos mesmos.

Quadro 1 - Comparativo entre os conteúdos abordados nos dois livros

Capítulo XVI - Elipse (MAEDER, 1953, p.233-244)	Capítulo IX – Secções cônicas; definições e propriedades fundamentais (BEZERRA, 1975, p.466-469, 476)
-Definição de Elipse. (p.233) -Traçado da Elipse. *Por movimento contínuo; *Construção por pontos. -Eixos e centro da elipse. -Relação entre os eixos e a distância focal -Excentricidade. -Círculo principal e círculos diretores -Valores dos raios vectores. -Forma da curva. -Tangente à elipse. -Área da elipse. Capítulo XIX – As seções cônicas (MAEDER, 1953, p.264-272) - Seções cônicas - Teorema de Dandelin - Cônicas Semelhantes Obs: não há indicação de exercícios ao final do capítulo.	-Preliminares. -Excentricidade da elipse. -Traçado da Elipse; * Traçado contínuo da elipse: *Traçado da elipse por pontos. -Círculos diretores e círculo principal de uma elipse. - Teorema de Dandelin Obs: não há indicação de exercícios ao final do capítulo.

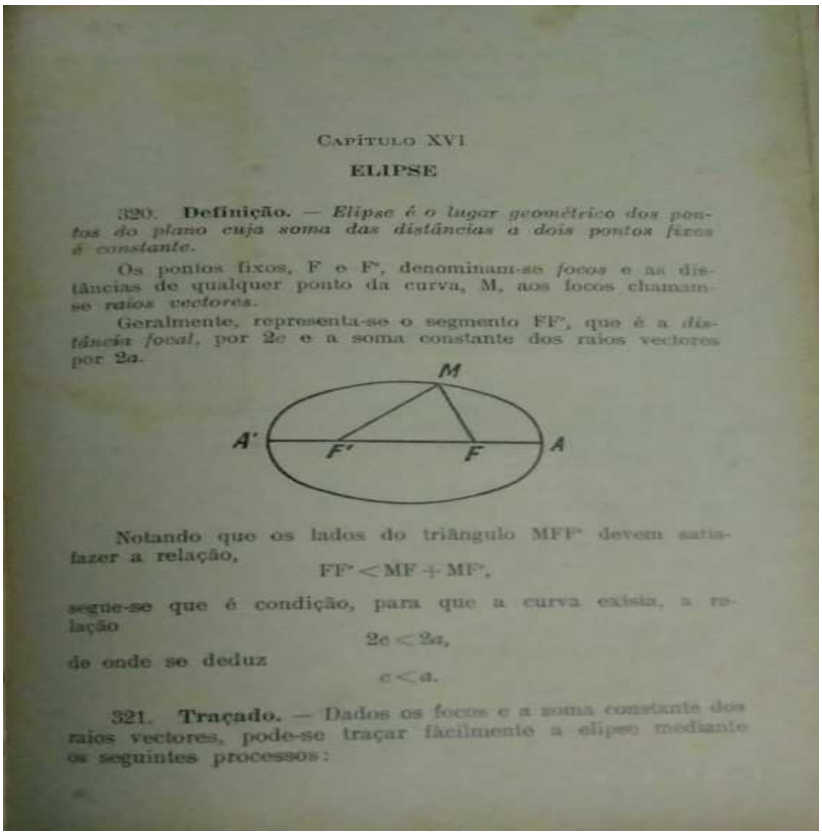
Fonte: BEZERRA (1975); MAEDER (1953)

O livro de Maeder (1953) afirma que está “de acordo com os novos programas oficiais (Portarias n. º 966, de 2 de outubro de 1951, e n. º 1045, de 14 de dezembro de 1951) do Ministério da Educação”. Segundo VECHIA e LORENZ (1998, p. 400) esta

ISSN 2358-4947

legislação previa para o primeiro ano do Curso Colegial “seções cônicas; definições e propriedades fundamentais”.

A partir da análise dos livros citados, Maeder, cujo livro foi publicado no ano de 1953, apresenta o conteúdo inicial mais superficial, exibindo uma imagem para a compreensão, e a relação entre pontos e segmentos (Figura 3).



CAPÍTULO XVI

ELIPSE

320. **Definição.** — *Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.*

Os pontos fixos, F e F', denominam-se *focos* e as distâncias de qualquer ponto da curva, M, aos focos chamam-se *raios vectores*.

Geralmente, representa-se o segmento FF', que é a *distância focal*, por 2c e a soma constante dos raios vectores por 2a.

Notando que os lados do triângulo MFF' devem satisfazer a relação,

$$FF' < MF + MF',$$

segue-se que é condição, para que a curva exista, a relação

$$2c < 2a,$$

de onde se deduz

$$c < a.$$

321. **Traçado.** — Dados os focos e a soma constante dos raios vectores, pode-se traçar facilmente a elipse mediante os seguintes processos:

Figura 3 – Conteúdo inicial por Maeder.
Fonte: MAEDER (1953).

Depois vai detalhando todo o conteúdo, dedicando onze páginas para isso e mais oito para falar de forma geral de secções cônicas. Bezerra, no qual o livro foi publicado em 1975, desenvolveu o conteúdo inicial de forma mais detalhada, com imagem para melhor entendimento, de maneira objetiva e clara (Figura 4).

ISSN 2358-4947

um eixo e à própria cônica.

Chama-se *centro* de uma *cônica* a interseção de dois eixos perpendiculares.

Uma reta é *secante* a uma cônica, quando tiver dois pontos em comum com essa cônica. A *tangente* é a posição limite da secante, quando os pontos de interseção da secante se aproximam indefinidamente.

ELIPSE

3. Preliminares. Chama-se *elipse* a uma curva plana cuja soma das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos de seu plano é constante.

Podemos dizer, também, que *elipse* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano é constante.

Esses pontos fixos chamam-se *focos* da elipse.

Denomina-se *distância focal* a distância entre os focos.

Raios vetores de um ponto da elipse são os segmentos de reta que unem esse ponto aos focos.

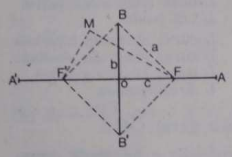


FIG. 117

Seja M um ponto qualquer de uma elipse (fig. 117), cujos focos sejam F e F', cuja constante da definição seja $2a$ e cuja distância focal seja $2c$.

$$\overline{OF'} = \overline{OF} = c \quad \text{e} \quad \overline{F'F} = 2c$$

então:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a \qquad (1)$$

Marquemos sobre a reta FF' dois pontos A' e A, tais que $\overline{OA} = \overline{OA'} = a$.

Esses pontos A' e A pertencem à curva pois satisfazem à relação (1).

Se traçarmos a mediatriz do segmento $\overline{F'F}$, como todos os seus pontos são eqüidistantes de F' e F, os pontos da elipse pertencentes a essa mediatriz têm raios vetores iguais a a, pois a soma dêsses raios vetores é, pela (1), igual a $2a$.

Figura 4 – Conteúdo inicial do exemplar de Bezerra.
Fonte: BEZERRA (1975).

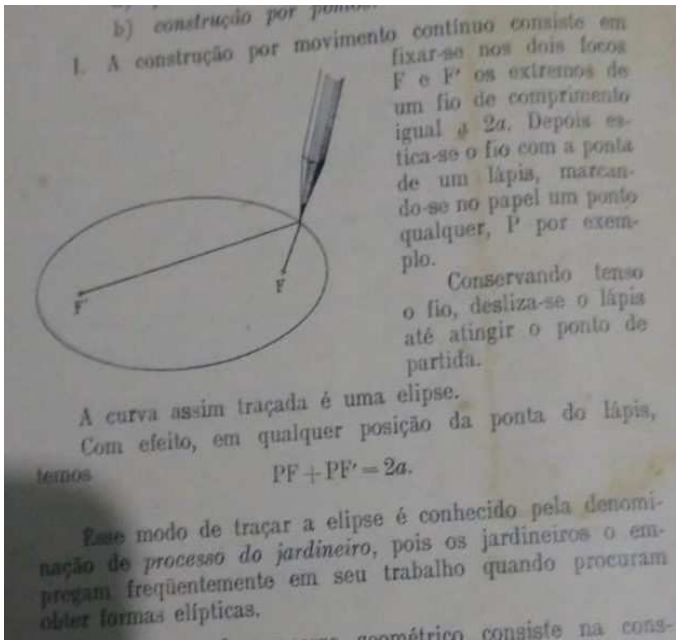
Percebe-se que o conteúdo de elipse não é um dos focos principais do livro, pois são dedicadas somente cinco páginas para o assunto. Muito conhecido pelos livros preparatórios aos exames, na apresentação do livro Bezerra deixa claro a principal finalidade. Se o livro era direcionado a preparação aos vestibulares, talvez o conteúdo de elipse não seja tão cobrado nos mesmos.

> Esperamos que este nosso trabalho, contendo todo o programa de Matemática do 2º Grau (antigo 2º Ciclo), venha facilitar aos nossos colegas e ajudar aos estudantes. Além de estar menos sujeito às modificações de programas, facilitará a revisão da matéria nas vésperas dos vestibulares, auxiliará ao professor quando (numa série mais adiantada) desejar recordar um assunto da série anterior, e possibilitará ao estudante a compra dos livros do 2º Grau por um preço mais acessível (BEZERRA, 1975, p. 9).

Em relação à construção da elipse, ambos apresentam as duas maneiras para o desenvolvimento da Elipse por movimento contínuo e por pontos dados, porém enquanto o exemplar de Algacyr Munhoz Maeder expõe os passos para a construção no papel, exibindo uma imagem como exemplificação (Figura 5), e indicando relações algébricas para

ISSN 2358-4947

conferência do procedimento, Manoel Jairo Bezerra em seu livro, no primeiro método descreve a construção sem imagens para orientação, mas ainda apresenta dicas para realizar a construção no quadro negro, apenas no segundo método há demonstração geométrica para o leitor, também apresentando relações algébricas para o esclarecimento da construção.



b) *construção por*

I. A construção por movimento contínuo consiste em fixar-se nos dois focos F e F' os extremos de um fio de comprimento igual a $2a$. Depois estica-se o fio com a ponta de um lápis, marcando-se no papel um ponto qualquer, P por exemplo.

Conservando tenso o fio, desliza-se o lápis até atingir o ponto de partida.

A curva assim traçada é uma elipse.

Com efeito, em qualquer posição da ponta do lápis, temos $PF + PF' = 2a$.

Este modo de traçar a elipse é conhecido pela denominação de *processo do jardineiro*, pois os jardineiros o empregam freqüentemente em seu trabalho quando procuram obter formas elípticas.

geométrico consiste na cons-

Figura 5 – Construção por movimento contínuo por Maeder.
Fonte: MAEDER (1953).

Seguindo em frente, Maeder retrata os Eixos e o Centro da Elipse, apresentando diversas relações algébricas, enquanto Bezerra já havia citado o mesmo conteúdo de maneira mais sucinta no conteúdo inicial.

O livro de Algacyr apresenta a Relação entre Eixos e a Distância Focal, já referida no conteúdo inicial de maneira vasta, tema também já descrito no conteúdo inicial do exemplar de Bezerra. A seguir, Maeder expõe a Excentricidade da Elipse com fórmulas, que não são apresentadas por Manoel J. Bezerra, o qual demonstra o assunto de maneira mais objetiva e mostrando apenas a fórmula principal para revelação do resultado esperado. Desse modo, Algacyr cita de maneira sucinta o Círculo Principal e Círculo Diretor, indicando uma imagem para melhor compreensão, da mesma forma que Bezerra, porém o mesmo não indica imagens.

Por fim, no livro de Algacyr são apresentados os conteúdos de Vetores dos Raios Vetores, teoremas, problemas e um Corolário, com imagens, relações algébricas e o

ISSN 2358-4947

desenvolvimento das mesmas, enquanto Manoel Jairo Bezerra não apresenta os conteúdos citados, nem demonstrações.

De maneira geral, o exemplar de Algacyr Munhoz Maeder abrange uma gama maior de conteúdos de maneira mais extensa, com imagens para demonstração e relações algébricas para o melhor entendimento do leitor. Enquanto o exemplar de Manoel Jairo Bezerra envolve os principais conteúdos de maneira mais sucinta e objetiva, sendo assim claro e de fácil entendimento, compreendendo a construção e resolução de problemas relacionados à Elipse.

Considerações Finais

É notável que durante esse período do exemplar “Curso de Matemática – 1° Livro Colegial” de Algacyr Munhoz Maeder e do exemplar “Curso de Matemática para os cursos de segundo grau (Antigos cursos Clássico e Científico)” de Manoel Jairo Bezerra o ensino da Elipse foi ficando mais básico. De fato, cônicas são conteúdos considerados complexos, na década de 1950, as cônicas eram retratadas de maneira bem complexa, como visto no exemplar de Maeder, já na década de 1970, as cônicas eram abordadas de forma mais superficial, mais simples e de fácil entendimento, ficando perceptível então que os matemáticos filtraram as partes mais importantes dos conteúdos e foram deixando de lado as partes mais complexas que poderiam ser muito avançadas para alunos do Colegial.

A matemática se adapta ao longo do tempo, neste trabalho percebemos como em apenas 20 anos um conteúdo didático se modificou tanto, e isso não é um problema. Apesar de cônicas ser um conteúdo pouco tratado atualmente, não deixa de ser importante, para isso é necessário que seja transmitido de maneira eficaz, de modo que os alunos compreendam e passem a gostar de tal conteúdo.

É glorificante usufruir de tais materiais para o desenvolvimento do trabalho, dois grandes autores de livros didáticos brasileiros nos mostraram um pouco da História da educação matemática no nosso país, nos fazendo refletir sobre como o ensino mudou e vai continuar mudando ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Manuel. *Curso de Matemática – Curso Completo.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1975. p. 466-469.

ISSN 2358-4947

CHOPPIN, Alain. *História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte.* Educação e pesquisa, São Paulo, v. 30, n.3, p. 549-566, 2004.

LONGEN, Adilson. *Livros Didáticos De Algacyr Munhoz Maeder Sob Um Olhar Da Educação Matemática.* Curitiba: 2007. p. 11.

MAEDER, Algacyr. *Curso de Matemática – 1° Livro Colegial.* São Paulo: Editora Melhoramentos, 1953. p. 233-243.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. "O que são cônicas?"; *Brasil Escola*. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conicas.htm>. Acesso em 30 de maio de 2019.

QUINTELLA, Ary. *Matemática – Primeiro Ano Colegial.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969. p. 229-241.

QUEM SOMOS?, Editora Nacional, 2019. Disponível em:< https://editoranacional.com.br/page/11/quem-somos>. Acesso em 30 de maio de 2019.

VECHIA & LORENZ, Ariclê & Karl*. Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira*. Curitiba: Editora do Autor, 1998.

.

ISSN 2358-4947

MODELO ESTATÍSTICO HYDROSTATIC SEASON TIME PARA O MONITORAMENTO DE BARRAGENS

Giovanna de Oliveira Moreira
UTFPR
giovannadomoreira@gmail.com

Raphael Fernando de Melo
UTFPR
raphael.nando1515@hotmail.com

Suellen Ribeiro Pardo Garcia
UTFPR
suellenpardo@utfpr.edu.br

Resumo

Os riscos atrelados ao rompimento de uma barragem são de grandes proporções, envolvendo riscos a vida humana, riscos materiais, ambientais e sociais.O monitoramento dessas grandes estruturas consiste na inspeção visual dos engenheiros e técnicos realizada periodicamente e também do acompanhamento das leituras realizadas por instrumentos instalados na estrutura. Os instrumentos são instalados em pontos estratégicos da estrutura, de acordo com especificações e indicações do projeto de construção. Essa instrumentação instalada gera uma enorme massa de dados que permitem avaliar a estabilidade da estrutura, possibilitando verificar e confirmar hipóteses que assegurem ou não a segurança na obra. É de interesse dos engenheiros e técnicos conhecer a previsão das leituras desses instrumentos, para em tempo hábil fazer tomadas de decisões, evitando acidentes. Os modelos estatísticos são geralmente utilizados para fazer essas previsões, particularmente, os modelos de regressão. O modelo é ajustado a partir de dados de monitoramento onde o sistema foi considerado estável e novas leituras são comparadas à essas previsões. Apresenta-se neste artigo um pouco sobre monitoramento e instrumentação em barragens e a teoria matemática do modelo de regressão HST (Hydrostatic Season Time) que é utilizado para descrever o comportamento do deslocamento dessa estrutura considerando o efeito da pressão hidrostática na barragem, o efeito das variações de temperatura ambiente e os eventuais efeitos irreversíveis devido a deformações permanentes na estrutura.

Palavras-chave: Deslocamentos. Regressão linear múltipla. Pêndulos.

1 INTRODUÇÃO

A geração de hidrelétricas e o controle de enchentes e secas incentivaram a construção de muitas barragens. Por conter grande volume de água, as barragens proporcionam uma quantidade de energia que é canalizada para mover mecanismos que vão de rodas d'água e moinhos à turbinas de usinas hidrelétricas. As barragens podem ser de vários tipos e tamanhos, desde pequenas represas para uso localizado, para abastecimento rural e recreação, até algumas das maiores estruturas construídas pelo homem.

Construídas com vários materiais e técnicas diferentes, as barragens podem ser feitas de terra, de rocha, de concreto e combinações desses materiais. Elas estão em toda parte e são muito importantes porque trazem benefícios para todos, como guardar água em períodos de seca e controlar as cheias dos rios nos períodos de chuvas. Mas essas obras também podem envolver grandes impactos e riscos. Ao ser construída, uma barragem sempre representa um interferência ambiental e social, grandes áreas são alagadas, impactando a flora e obrigando a migração da fauna. Muitas vezes cidades e comunidades inteiras tem que ser realocadas.

ISSN 2358-4947

Além disso, a ruptura de uma barragem pode liberar em segundos uma enorme quantidade de água causando grandes prejuízos materiais e perda de vida humana e animal. No Brasil, o número de barragens rompidas nos últimos anos é alarmante, 6 barragens se romperam nos últimos 15 anos, principalmente no Estado de Minas Gerais (MACHADO, 2018; AZEEZ, 2018). Tragédias vinculadas ao rompimento de barragens, como aconteceu em Mariana e, recentemente, em Brumadinho, apontam para a urgência em reavaliar as normas que regem as atividades no país, a fim de evitar novos acidentes e impactos ambientais.

A barragem de Fundão rompeu no dia 5 de novembro de 2015, destruiu Bento Rodrigues, em Mariana, Minas Gerais, não obstante, tragédia similar voltou a acontecer em 25 de janeiro de 2019, com o rompimento da Barragem 1 da Mina do Córrego do Feijão, em Brumadinho, também em Minas Gerais.

No caso da barragem de Fundão, a empresa responsável pela segurança da estrutura não tinha conhecimento da iminência do rompimento, mas estava ciente de diversas falhas que a estrutura apresentava e de sua utilização acima da capacidade. Já no caso de Brumadinho, foi consequência de erros no monitoramento e falhas na identificação de "ruptura iminente". O laudo mostrava alteração nas medidas de 11 instrumentos existentes. O engenheiro assumiu que a situação dos piezômetros era incomum, mas afirmou que isso se deve a um “erro de configuração” do sistema que fazia a leitura deles. Os funcionários alegaram ainda que os equipamentos defeituosos não mediam a estabilidade da barragem, mas davam informações sobre o impacto de uma possível ruptura no lençol freático. Já os engenheiros, ressaltaram que o tempo de resposta de cada instrumento pode ser de até 20 horas, e não pediam ação preventiva de manutenção da empressa porque eram utilizados para outra função, justificando assim, que três minutos antes da ruptura da barragem, não houve alteração em nenhum deles.

Esses dois casos indicam como pode ser catastrófico um acidente nesses tipos de grandes estruturas, no entanto, as barragens são importantes para a humanidade e podem ser seguras, desde que sejam bem planejadas, bem construídas e, principalmente, monitoradas constantemente. É essencial a regularização das normas e fiscalização constante nessas construções. Ações que os responsáveis pela obra adotam como segurança são por exemplo, monitorar e registrar situações observadas na estrutura, construir planos de ações de emergenciais, relatório de inspeções de segurança, etc.

O monitoramento de barragens caracteriza-se por inspeções visuais e regulares na estrutura e a coleta e análise dos dados da instrumentação instalada nos blocos com o objetivo de identificar eventuais alterações no comportamento observado, gerando alertas para as equipes responsáveis pela gestão da segurança (PENNA, 2015; ARAGÃO, 2015; FUSARO, 2015).

A análise de dados da instrumentação, segundo Balbi (2008), é a definição de valores de controle para as leituras dos instrumentos pode ser feita através de métodos determinísticos ou estatísticos. Os métodos estatísticos estão associados, basicamente, ao monitoramento realizado na fase de operação, já que verifica ou não mudanças de tendências no comportamento das estruturas, permitindo detectar precocemente alguns problemas. Balbi (2008) ressalta que o fundamental é que os instrumentos possuam níveis de controle estabelecidos de forma adequada ao tipo de monitoramento desejado para permitir análises técnicas mais rápidas e confiáveis.

Os modelos estatísticos em dados de monitoramento de barragens, mais especificadamente, os modelos de regressão visam prever as leituras dos instrumentos e assim ser possível construir intervalos de confiança para essas leituras que são utilizados como referência para as leituras atuias. É possível detectar anomalias no comportamento da estrutura, seas leituras atuais estiverem além das leituras estabelecidas pelo modelo no intervalo de confiança. nem sempre essas leituras que excedem os limites no intervalo, representam algum perigo real, podem ocorrer falsos

ISSN 2358-4947

alarmes, mas de fato, se a estrutura está instável, as leituras da instrumentação vão acusar.

Entre os modelos de regressão utilizados no contexto de barragens, está o modelo de regressão linear múltipla HST (Hydrostatic Season Time) proposto inicialmente em 1958 por Ferry, Will e Beaujoint (GARCIA; et al., 2015). Esse modelo é geralmente utilizado para monitorar deslocamentos, considerando funções que descrevem o efeito da pressão hidrostática na barragem, o efeito das variações de temperatura ambiente e os eventuias efeitos irreversíveis devido a deformações permanentes.

O modelo HST é de grande relevância, pois segundo Ahmadi-Nedushan (2002) pequenos deslocamentos na estrutura são de pouco interesse, mas seu aumento ou mudança na direção deve ser avaliado com atenção, pois impacta negativamente a estrutura.

Na sequência, apresenta-se um pouco sobre a instrumentação e o monitoramento em barragens, sobre os modelos estatísticos no monitoramento, detalhando o HST e, exemplificando com um conjunto de dados, como este modelo se caracteriza como de regressão linear múltipla.

2 INSTRUMENTAÇÃO E MONITORAMENTO DE BARRAGENS

A instrumentação de barragens é principalmente necessária para duas finalidades, para comparar os parâmetros durante execução do projeto com os parâmetros projetados e para detectar qualquer comportamento incomum ou anormal da estrutura da construção e pós-construção para que quaisquer perigos futuros possam ser previstos (MATHUR, 2017).

A instrumentação consiste em equipamentos de sistemas elétricos e mecânicos utilizados para medir a pressão, fluxo, deslocamento, tensão, deformação e temperatura que são parâmetros relacionados a segurança da estrutura. Já o monitoramento consiste na coleta, redução, apresentação e avaliação destes dados de instrumentação. Portanto, essas duas atividades, instrumentação e monitoramento são insdispensáveis para avaliar continuamente a segurança de uma barragem (FERC, 2008).

Segundo Silveira (2003), entender como se relacionam as medidas obtidas pela instrumentação pode auxiliar na determinação de ações que objetivam remediar efeitos indesejados por meio da atenuação de suas causas. A Figura 1 traz um esquema representando os principais fenômenos monitorados e os respectivos instrumentos utilizados.

O pêndulo direto, por exemplo, instalado na estrutura de concreto, está relacionado aos seguintes tipos de deterioração: escorregamento (descontinuidades na fundação), recalque diferencial, subsidência do terreno e reatividade álcaliagregado. Segundo Silveira (2003), este instrumento é utilizado na medição dos deslocamentos horizontais da crista da barragem, que são afetados pelas seguintes grandezas físicas:

- Deflexão da estrutura de concreto;
- Rotação da base da estrutura, devido à deformabilidade da fundação;
- Influências térmicas ambientais.

Enquanto o pêndulo invertido, instalado na fundação, está relacionado ao escorregamento Figura 1. Este instrumento é utilizado na medição de deslocamentos cisalhantes da base da barragem (deslocamentos horizontais), que segundo Silveira (2003) , refletem diretamente as condições de estabilidade da barragem, em termos de escorregamento.

ISSN 2358-4947

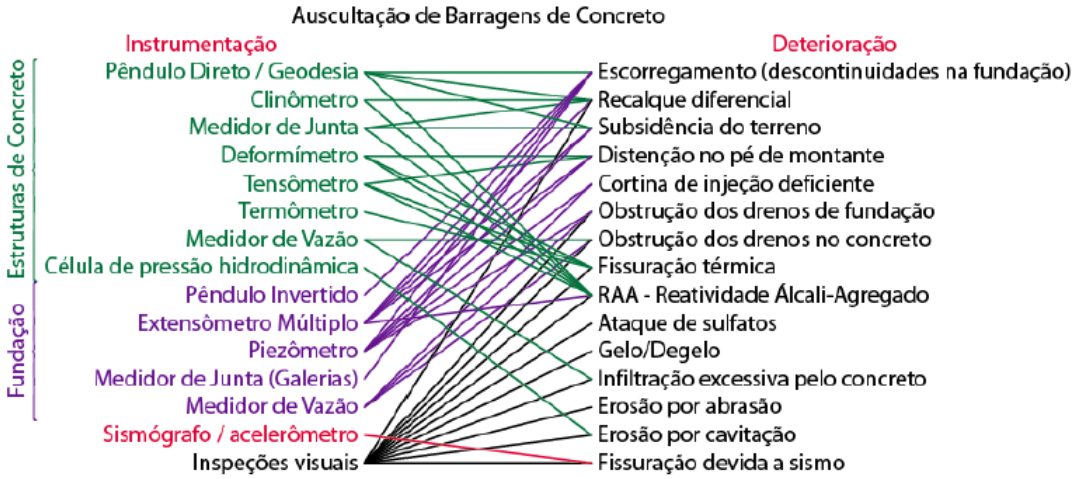


Figura 1: Instrumentação e tipo de deterioração detectada.
Fonte: SILVEIRA (2003)

Destaca-se agora, em resumo, a definição de alguns instrumentos instalados no concreto:

- Pêndulo direto: Mede deslocamentos horizontais em determinadas cotas em relação à fundação da estrutura.
- Pêndulo invertido: Mede deslocamentos da fundação em relação a um ponto da fundação suficientemente produndo para ser considerado fixo.
- Base de alongâmetro: Mede abertura,fechamento, recalque e deslizamentro entre blocos.
- Deformímetro de armadura: Mede as tensões em barras de armadura no interior das estruturas de concreto.
- Tensômetro de concreto: Como o próprio nome já diz, mede a tensão no interior do concreto.
- Deformímetro de concreto: Mede a deformação do concreto.
- Termômetro de resistência: Mede a temperatura no interior da estrutura de concreto.

Segundo FERC (2008) cada instrumento deve ser revisado, com localização e profundidade adequada para fornecer informação de confiança, assim o instrumento vai fornecer leituras válidas. O número total e os tipos de instrumentação devem ser suficientes para avaliar a estrutura total e as seções críticas da estrutura, que são áreas definidas como mais importantes pelos engenheiros, que merecem maior atenção.

3 MODELOS ESTATÍSTICOS NO MONITORAMENTO DE BARRAGENS

As análises dos deslocamentos nas barragens, além da avaliação dos engenheiros e técnicos, podem ser baseadas em métodos determinísticos ou estatísticos, nos quais um modelo matemático

ISSN 2358-4947

do comportamento da estrutura é construído, incluindo relações constitutivas dos diferentes materiais, geometria do problema, condições iniciais e de contorno, etc (LOMBARDI, 2088; AMBERG, 2008; DARBRE, 2008).

Entre os métodos estatísticos utilizados nesse contexto, tem os modelos de regressão linear, com o objetivo de verificar a existência de uma relação funcional entre uma variável dependente com uma ou mais variáveis independentes. Como as barragens normalmente estão sob ação de três efeitos: a carga hidrostática do reservatório, temperatura e tempo, então, esses efeitos são considerados no modelo HST (Hydrostatic Season Time). O HST é um modelo de regressão linear múltipla que descreve a relação de efeitos reversíveis (efeitos da pressão hidrostática e da temperatura) e efeitos irreversíveis (efeitos do tempo) no deslocamento da estrutura. Na Figura 2 segue o sistema com um bloco de uma barragem de concreto sob a ação de variáveis ambientais e as respostas da estrutura com relação a essas ações.

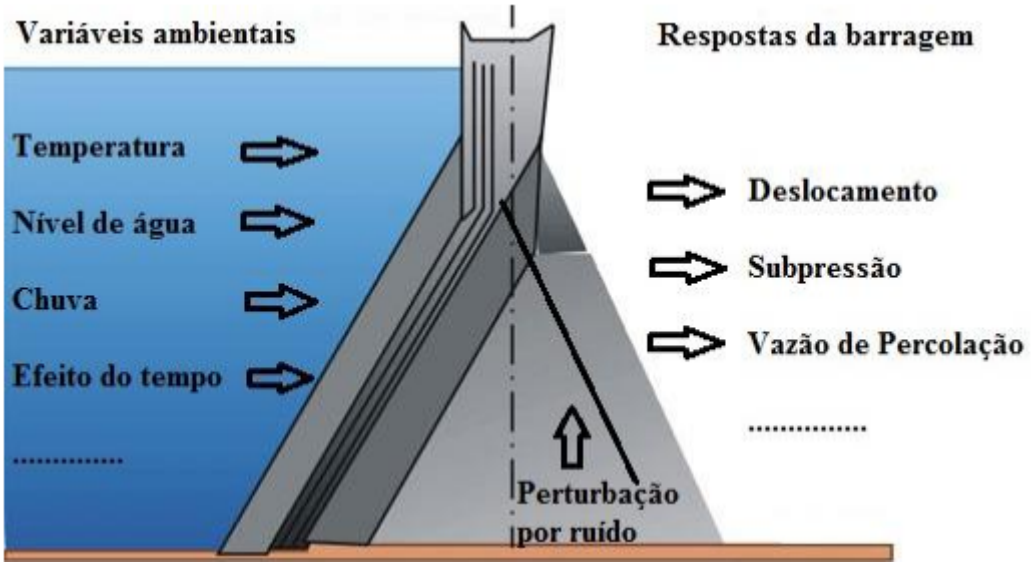


Figura 2: Esquema do sistema de uma barragem de concreto.
Fonte: Adaptado de CHENG e ZHENG (2013)

Esse relacionamento das ações das variáveis ambientais no bloco de uma barragem e sua resposta pode ser modelado matematicamente e correspondem a um período em que a configuração da estrutura permanece a mesma. A resposta do bloco de concreto (por exemplo, o deslocamento), no instante $i = 1, ..., n$ (n é o número de observações), pode ser modelada da seguinte forma (AHMADI-NEDUSHAN, 2002):

$$D_i(t) = F_i(t) + G_i(H) + H_i(T) + \epsilon_i, \quad i = 1, ..., n \tag{1}$$

onde: $F(t)$ é a função que descreve o efeito irreversível (efeitos do tempo na estrutura); $G(H)$ é a função do nível do reservatório (carga hidrostática); $H(T)$ é a função da temperatura e ϵ é o erro.

No HST, a função do nível do reservatório (carga hidrostática) é dada por um polinômio de quarto grau, a função da temperatura dada por uma soma de funções trigonométricas e, a função dos efeitos irreversíveis por uma função polinomial de terceiro grau (AHMADI-NEDUSHAN, 2002) da seguinte forma:

$$D(t) = H(z) + S(\theta) + T(t) \tag{2}$$

ISSN 2358-4947

onde:

- $$H(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 \tag{3}$$
- $$S(\theta) = a_5 sin(\theta) + a_6 cos(\theta) + a_7 sin(\theta) cos(\theta) + a_8 sin^2(\theta \tag{4}$$
- $$T(t) = a_9 t^1 + a_{10} t^2 + a_{11} t^3 \tag{5}$$

a variável t é o número de dias desde que se iniciou a análise, as variáveis z e θ são definidas como $z = \frac{H - H_{min}}{H_{max} - H_{min}}$, z é o nível do reservatório, onde H_{min}, H_{max}, respectivamente, o nível mínimo e máximo da água do reservatório, e $\theta = \frac{2\pi j}{365}$, $j = 1, ..., 365$. A variável θ é desta forma, pois a temperatura é considerada uma função periódica, de período anual, pois cada estação tem uma variação de temperatura diferente. Os coeficientes $a_i, \quad i = 1, ..., 11$ são geralmente estimados por mínimos quadrados ou outra técnica de estimação de parâmetros em um modelo de regressão linear múltipla. Isto fica mais claro no exemplo colocado no final dessa seção.

Na literatura existem variações do modelo HST para representar melhor os fenômenos que estão envolvidos, pois cada barragem possui suas especificidades e localização diferentes. Segue abaixo algumas dessas variações encontradas na literatura.

De Sortis e Paoliani (2007) utilizam esse modelo supondo a função do efeito irreversível como uma linha de tendência, assim o modelo é dado por, (2), (3) e (4), substituindo a equação (5) por:

$$T(t) = a_9 + a_{10} t \tag{6}$$

Em Xi *et al.* (2011), a equação (5) é substituída por:

$$T(t) = a_9 t + a_{10} \ln(t) \tag{7}$$

onde t é o número de dias desde o começo da análise e cada dia posterior é representado com um acréscimo de 0,01.

Mata (2011) utiliza como função para explicar o efeito irreversível da seguinte forma:

$$T(t) = a_9 t + a_{10} e^{-t} \tag{8}$$

Já Li, Wang e Liu (2013) utilizam:

$$T(t) = a_9 t + a_{10} ln(t + 1) \tag{9}$$

Ainda assim, Simon *et al.* (2013) utilizam a função:

$$T(t) = a_9^{-t} + a_{10} t + a_{11} t^2 + a_{12} t^3 + a_{13} t^4 \tag{10}$$

Normalmente esses modelos utilizam hipóteses sobre a resposta da barragem, que acabam não sendo válidas, como considerar os efeitos reversíveis e irreversíveis como independentes. É

ISSN 2358-4947

bem conhecida a existência de certa colinearidade, por exemplo, o nível do reservatório afeta a resposta térmica da barragem. Assim, a precisão da previsão do modelo fica comprometida. Outra limitação da forma original do modelo HST é que a temperatura do ar não é considerada, o que reduz a precisão da previsão para um ano de temperaturas extremas, por exemplo (SALAZAR et al., 2015).

Uma alternativa comum na literatura é substituir a função periódica da temperatura pela temperatura no concreto da barragem. Este modelo denomina-se Hydrostatic Temperature Time (HTT). Segundo Léger e Leclerc (2007), quando há variação sazonal do nível do reservatório em fase com a variação sazonal de temperatura, as variáveis de $H(z)$ e $S(\theta)$ na equação (2) são correlacionadas, ficando difícil separar os efeitos hidrodinâmicos e sazonais. Os autores utilizam dados dos termômetros embutidos na barragem, substituindo a função da temperatura $S(\theta)$ de HST (equação 4) por:

$$S(T) = \sum_{i=1}^{m} a_i T_i \tag{11}$$

onde a_i são os coeficientes e T_i são os dados dos termômetros $1, 2, ..., m$. Assim,

$$D(t) = H(z) + S(T) + T(t) \tag{12}$$

Outro aspecto relevante é que a barragem de concreto responde com algum atraso (delay) às solicitações externas, por exemplo, deslocamentos da estrutura de uma barragem em arco não dependem exclusivamente da variação instantânea do nível do reservatório, mas também de seus valores passados (LOMBARDI, 2008; AMBERG, 2008; DARBRE, 2008). Outro exemplo é a influência da temperatura do ar no corpo da barragem de concreto entre as temporadas de inverno e verão.

Enfim, existem na literatura muitos modelos estatísticos com a proposta de prever deslocamentos sob ações das variáveis ambientais, muitos deles são variações do modelo HST que é um modelo estatístico de regressão múltipla. Mesmo que o modelo HST seja uma soma de funções não lineares, como os valores das variáveis de entrada são conhecidos o modelo se torna linear conforme os valores dos dados das observações são substituídas nas funções. A Tabela 1 apresenta um exemplo de conjunto de dados, onde cada coluna é um termo das funções presentes no HST.

A coluna "sensor"são as leituras de um sensor do pêndulo direto que mede deslocamentos relativos do bloco do concreto, cuja unidade é em mílimetros. A coluna "nível"é a altura da coluna d'água do reservatório, dada em metros e, logo na sequência vem os termos da função do nível do reservatório (z, z^2, z^3, z^4). As três próximas colunas representam a função da temperatura. São leituras de termômetros instalados na superfície do bloco, temperaturas em graus Celsius. Ou seja, consideramos aqui um exemplo de dados para o modelo proposto por Léger e Leclerc em 2007, uma variação do HST denominada HTT. Por fim, nas duas útimas colunas, a função que representa o efeito irreversível proposta por Xi *et al.* (2011), onde t é o número de dias desde o começo da análise e cada dia posterior é representado com um acréscimo de $0,01$.

ISSN 2358-4947

Tabela 1: Exemplo de como os dados são substituídos nas funções do modelo.

Observações	Sensor	Nível	z	z^2	z^3	z^4	T_1	T_2	T_3	t	$\ln(t)$
1º dia	1,30	215,88	0,09	0,01	0,00	0,00	18,94	20,03	20,02	1,00	0,00
2º dia	1,60	218,24	0,56	0,31	0,17	0,10	18,83	20,42	20,52	1,01	0,01
3º dia	1,80	218,55	0,62	0,39	0,24	0,15	18,78	20,59	20,68	1,02	0,02
4º dia	1,90	219,33	0,78	0,60	0,47	0,37	18,72	20,59	20,68	1,03	0,03
5º dia	2,00	219,2	0,75	0,56	0,42	0,32	18,66	19,25	19,35	1,04	0,04
6º dia	1,90	219,37	0,79	0,62	0,48	0,38	18,66	18,31	18,13	1,05	0,05
7º dia	2,40	219,56	0,82	0,68	0,56	0,46	18,83	14,80	14,62	1,06	0,06
8º dia	2,10	219,74	0,86	0,74	0,64	0,55	18,78	17,25	17,35	1,07	0,07
9º dia	2,20	220,38	0,99	0,98	0,96	0,95	18,39	17,75	17,90	1,08	0,08
10º dia	2,00	219,95	0,90	0,81	0,73	0,66	18,11	18,31	18,46	1,09	0,09
11º dia	2,10	219,49	0,81	0,66	0,53	0,43	18,00	18,42	18,57	1,10	0,10
12º dia	1,90	219,17	0,75	0,56	0,41	0,31	17,94	18,92	19,02	1,11	0,10
13º dia	1,60	220,28	0,97	0,94	0,91	0,88	17,78	19,53	19,63	1,12	0,11
14º dia	1,30	220,15	0,94	0,89	0,84	0,79	17,72	19,98	20,02	1,13	0,12
15º dia	1,40	219,3	0,77	0,60	0,46	0,35	17,61	20,37	20,41	1,14	0,13
16º dia	2,10	219,69	0,85	0,72	0,61	0,52	17,66	20,53	20,57	1,15	0,14

Com essa substituição dos dados de entrada apresentada na Tabela 1 temos as variáveis para o modelo de regressão linear múltipla, pois temos uma resposta (coluna sensor) associada a $k = 9$ variáveis, $\mathbf{x}_1 = z, \mathbf{x}_2 = z^2, \mathbf{x}_3 = z^3, \mathbf{x}_4 = z^4, \mathbf{x}_5 = T_1, \mathbf{x}_6 = T_2, \mathbf{x}_7 = T_3, \mathbf{x}_8 = t, \mathbf{x}_9 = \ln(t)$. A equação é dada por:

$$\mathbf{Y}_i = a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + a_3 x_{i3} + ... + a_9 x_{i9} + \epsilon_i, \quad i = 1, ..., 16 \tag{13}$$

Os parâmetros desconhecidos do modelo, no caso do exemplo, seriam eles, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$, podem ser estimados por vários métodos, sendo o método dos mínimos quadrados o mais utilizado. Esse método minimiza a soma dos quadrados dos resíduos, ou seja, $\sum_{i=1}^{16} \epsilon^2 \longrightarrow$ mínimo (GAMSE; et al., 2018).

A partir de uma tabela com os dados de entrada substituídos nas funções do modelo HST, assim como mostra o exemplo, toda a teoria de regressão linear múltipla deve ser explorada e modelos ajustados para escolha de um modelo que melhor descreva como se comporta o deslocamento de um bloco de concreto de uma barragem. Feito isso, o modelo escolhido deve ser validado por meio de testes estatísticos apropriados e por fim, ser possível realizar previsões para estes deslocamentos. Ao realizar as previsões para estas observações pode se construir limites inferiores e superiores para as mesmas, limites que auxiliam na verificação da estabilidade da estrutura.

4 Conclusão

A instrumentação de barragens de concreto é importante para monitorar a estrutura da obra e sua fundação. Parâmetros como tensão, temperatura, movimento da estrutura ou fundação, pressão da água, devem ser constantemente monitorados para não prejudicar o desempenho da barragem e principalmente, para manter a estrutura em segurança, quanto à um possível rompimento. O modelo HST é um modelo amplamente utilizado na literatura no contexto de segurança de barragens e modela os deslocamentos de um bloco de concreto sob a ação de variáveis ambientais. Para os efeitos dessas variáveis ambientais são colocadas funções não lineares, mas

ISSN 2358-4947

como os valores das variáveis de entrada são conhecidos devido as observações obtidas (tempo e nível do reservatório) o modelo se torna linear conforme os valores dos dados das observações são substituídas nas funções. Portanto, o modelo HST é um modelo de regressão linear múltipla e pode ser utilizado para estabelecer limites inferiores e superiores para as previsões de instrumentos como o pêndulo, por exemplo. Neste trabalho, apresentou-se apenas a teoria do modelo HST e como ele fica definido como um modelo de regressão linear múltipla. Em um próximo trabalho, pretende-se utilizar um banco de dados reais e estimar os parâmetros do modelo, bem como realizar a validação e construir limites para as previsões. Por fim, o presente trabalho abordou aspectos e teoria relevante ao contexto de segurança de barragem, por meio da explicação de um modelo conhecido na literatura.

ISSN 2358-4947

Referências

[1] AHMADI-NEDUSHAN, B. Multivariate Statistical Analysis of monitoring data for concrete dams. Tese de Doutorado do Departamento de Engenharia Civil e Mecânica Aplicada, McGill University. Montreal, p. 211. 2002.

[2] BALBI, D. A. F. Metodologias para a Elaboração de Planos de Ações Emergenciais para Inundações Induzidas por Barragens. Estudo de Caso: Barragem de Peti – MG. 337 f. Dissertação (Mestrado em Saneamento, Meio Ambiente e Recursos Hídricos). Escola de Engenharia. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2008

[3] DE SORTIS, A.; PAOLIANI, P. Statistical analysis and structural identification in concrete dam monitoring. Engineering Structures, v. 1, n. 29, p. 110-120, Janeiro 2007.

[4] FEDERAL ENERGY REGULATORY COMMISSION - FERC. Engineering Guidelines for the Evaluation of Hydropower Projects. Washington. 2008.

[5] GAMSE, Sonja et al. Hydrostatic-season-time model updating using Bayesian model class selection. Reliability Engineering and System Safety n.169 p.40–50, 2018.

[6] GARCIA, S. R. P. (2016). Modelagem e previsão de deslocamentos em barragens de concreto: aplicação a dados de instrumentação da usina hidrelétrica de Itaipu. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

[7] GARCIA, Suellen et al. Modelo estatístico para o monitoramento de movimentos relativos na barragem da uhe itaipu. Foz do Iguaçu, 2015.

[8] LOMBARDI, G.; AMBERG, F.; DARBRE, G. R. Algorithm for the prediction of functional delays in the behaviour of concrete dams. The international journal on hydropower & dams, v. 15, n. 3, p. 111-116, 2008.

[9] LOPES, A. C Romulo et al. Emprego de modelo regressivo linear e rede neural artificial no controle da segurança de barragens de concreto. Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo, v. 5, n. 2/3, p. 65-80, maio/dez. 2008

[10] MACHADO, LUCAS V. T., AZEEZ, DOLPAO G. Incidentes e acidentes em barragens. Rio de Janeiro 2018.

[11] MATA, J.; DE CASTRO, A. T.; DA COSTA, J. S. Constructing statistical models for arch dam deformation. Structural Control and Health Monitoring, v. 21, n. 3, p. 423-437, 2014.

[12] MATHUR, R. K ET AL. Instrumentation of concrete dams. International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS), Shahpura, 2017.

[13] ORO, S. R. (2016). Índice de monitoramento do comportamento estrutural dos blocos de concreto de barragens – uma abordagem multivariada. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

[14] PENNA, Daniel C. R.; ARAGÃO, Giani A. S.; FUSARO, Teresa C.Complementariedade entre o monitoramento e análise de risco na gestão da segurança de barragens. Foz do Iguaçu, 2015.

[15] SALAZAR, F.; MORÁN, R.; TOLEDO, M. Á.; OÑATE, E. Data-Based Models for the Prediction of Dam Behaviour: A Review and Some Methodological Considerations. Archives of Computational Methods in Engineering, Barcelona, p. 1-21, 2015.

ISSN 2358-4947

[16] SEWARD, LORI E.; DOANE, DAVID P. Estatística Aplicada à Administração e Economia-4. AMGH Editora, 2014.

ISSN 2358-4947

UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE GAMIFICADO

Gustavo Henrique Zanette
UTFPR-TD
ghenrique35@gmail.com

Carlos Henrique Smek
UTFPR-TD

Emerson Tortola
UTFPR-TD

Resumo

Neste artigo relatamos o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática sobre a área de um espaço escolar, na perspectiva de um ambiente gamificado. A atividade foi desenvolvida em um colégio municipal de Toledo, parceiro de um projeto de pesquisa e extensão intitulado Clube da Matemática e de um projeto de pesquisa, apoiado pelo CNPq, que visa investigar a transição do 5º para o 6º ano do Ensino Fundamental. Na ocasião, participaram da atividade alunos do 4º e 5º anos, no contraturno. A atividade foi desenvolvida na biblioteca da escola, local disponibilizado pela direção. O ambiente foi estruturado em um sistema gamificado, utilizando as mecânicas de jogos que idealizam a gamificação, a saber: objetivo, feedback, regras e participação voluntária (VIANNA, et al., 2013). Dessa forma, a pontuação foi organizada de acordo com cinco parâmetros, com base nas considerações teóricas sobre modelagem matemática de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo Tortola (2016): coleta de dados, confecção da planta da sala, produção do modelo matemático, validação dos resultados e trabalho em grupo. Essa experiência nos levou a refletir sobre as potencialidades e dificuldades de se trabalhar com a modelagem matemática na perspectiva de um ambiente gamificado, sinalizando o envolvimento dos alunos na atividade, particularmente com relação aos aspectos considerados para pontuação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Gamificação.

1 Considerações Iniciais: Gamificação e Modelagem Matemática

A gamificação (do inglês *gamification*) traz o conceito de se utilizar aspectos dos jogos em outros ambientes e plataformas. Busarello et al. (2014) acreditam que a gamificação é a ação de se pensar como em um jogo, utilizando suas mecânicas, estratégias e estruturas em um contexto fora dele, neste caso a sala de aula, importando características típicas como pontuação, recompensas, feedback, estética, objetivos, conquistas, entre outras.

ISSN 2358-4947

Segundo Vianna et al. (2013), uma atividade é considerada gamificada se houver pelo menos quatro características: meta/objetivo, regras, feedback e participação voluntária. Considerando que um jogo é um conjunto de regras em prol de um objetivo, temos as duas primeiras características apontadas pelos autores inerentes ao jogo, já o feedback e a participação voluntária são associados ao engajamento dos jogadores, pois a motivação pela atividade deve partir do sujeito, o que é subjetivo, alguns podem se motivar por fatores internos (interesse pela atividade, busca por diversão ou mesmo por socialização), outros por fatores externos (status, recompensas), enquanto que o feedback indica ao jogador se está no caminho certo, como está o seu desempenho e lhe atribui mais segurança de suas decisões conforme supera os obstáculos e se aproxima do objetivo estabelecido.

A gamificação tende a se destacar no quesito engajamento, pois segundo Malaby (2008), sob um ponto de vista antropológico, jogar/brincar é uma disposição inerente do ser humano, ao invés de um costume ou influência exclusiva do ambiente onde vive. Assim é plausível supor que a disposição ao jogo possa ser reproduzida em um ambiente gamificado, podendo fazer com que o engajamento seja quase natural a este ambiente.

Com isto em mente é possível explorar novas estratégias e atividades que estimulem os alunos a saírem de suas zonas de conforto e que os desafiem a pensar além do esperado. Nesse sentido, uma alternativa pedagógica para as aulas de matemática que atende a essa demanda é a modelagem matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), que além de propor o aluno como corresponsável de sua aprendizagem, proporciona-lhe momentos de reflexão sobre o meio em que vivemos (TORTOLA, 2016).

A modelagem matemática pode ser trabalhada de diversas formas e as razões pelas quais devem ser incluídas no currículo são fomentadas por cinco argumentos, que segundo Barbosa (2004) são: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática.

Ao olharmos para os argumentos apresentados por Barbosa (2004), podemos inferir uma convergência entre um ambiente constituído a partir de uma atividade de modelagem matemática e um ambiente gamificado, com potencial de motivar os alunos e de engajá-los em discussões voltadas para o conhecimento matemático e situações oriundas da realidade.

Em linhas gerais, uma atividade de modelagem matemática parte de uma problemática inicial em direção a uma situação final desejada, mediada por um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para tornar possível esse caminho, nada linear ou

ISSN 2358-4947

exclusivo. Ou seja, para resolver a "problemática", diferentes resoluções podem ser empreendidas, as quais não possuem procedimentos previamente conhecidos ou preestabelecidos, não há um algoritmo a seguir.

Nesse sentido, diante das possíveis convergências sinalizadas, foi desenvolvida uma pesquisa com a intenção de investigar como uma atividade de modelagem matemática pode ser abordada no contexto de um ambiente gamificado. Dessa forma, foi organizada uma atividade de modelagem matemática, sobre a área de um espaço escolar, segundo as características de um ambiente gamificado. As características levadas em consideração na hora de pontuar as ações dos alunos foram a participação, considerando em particular, o trabalho em grupo, a coleta de dados, a confecção da planta da sala em que a atividade foi desenvolvida, a produção do modelo matemático e a validação dos resultados encontrados.

2 Aspectos Metodológicos e Contexto da Pesquisa

A atividade desenvolvida pelos autores ocorreu em um colégio municipal de Toledo, parceiro do projeto de pesquisa e extensão intitulado Clube da Matemática e do projeto de pesquisa, apoiado pelo CNPq, que investiga a transição do 5º para o 6º ano do Ensino Fundamental[1]. Essa atividade foi desenvolvida com alunos do 4º e 5º anos da Escola (9 e 10 anos), no contraturno. A atividade foi desenvolvida na biblioteca, local disponibilizado pela direção.

O ambiente, estruturado em um sistema gamificado, utilizou as mecânicas de jogos que idealizam a gamificação, a saber: objetivo, feedback, regras e participação voluntária (VIANNA, et al., 2013). Outras atividades matemáticas foram desenvolvidas com os alunos participantes em outros momentos, também na perspectiva da gamificação, foram 12 encontros no total, por isso o interesse em investigar como uma atividade de modelagem matemática pode ser abordada nesse contexto. As mecânicas de níveis (a cada nível superado os obstáculos tendem a ficar mais difíceis) e *badges* (conquistas) não foram utilizadas, pois funcionam melhor em períodos de tempo maiores.

[1] Ambos os projetos são desenvolvidos por docentes e estudantes do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática do Câmpus Toledo da UTFPR. O Clube da Matemática tem por objetivo promover ações nas escolas parceiras, escolas públicas da Educação Básica, no sentido de desmistificar a imagem negativa da matemática e estreitar a relação dos estudantes com ela. O projeto "Da passagem do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental: uma investigação acerca da cultura escolar, dos processos de ensino e aprendizagem e das concepções docentes e discentes", foi aprovado em edital universal pelo CNPq e objetiva investigar aspectos de ruptura e continuidade que emergem na transição entre estas séries, desenvolvendo pesquisas em parceria com 5 escolas do município de Toledo.

ISSN 2358-4947

Desde o primeiro encontro o objetivo dos alunos, organizados em duplas, foi vencer o “Clube da Matemática”, sendo que cada atividade desenvolvida foi pontuada e registrada em um placar, que se encontrava na entrada da sala, o qual atualizavam semanalmente, conforme os encontros, e utilizavam para acompanhamento dos pontos, podendo ver seu progresso em relação às outras duplas (Figura 1). Para obtenção dos pontos da semana, pelo menos um dos integrantes da dupla teria que realizar a atividade. Toda atividade tinha suas regras, e o cumprimento delas garantia os pontos. Conforme novos alunos ingressavam no projeto, eles eram integrados ao sistema.

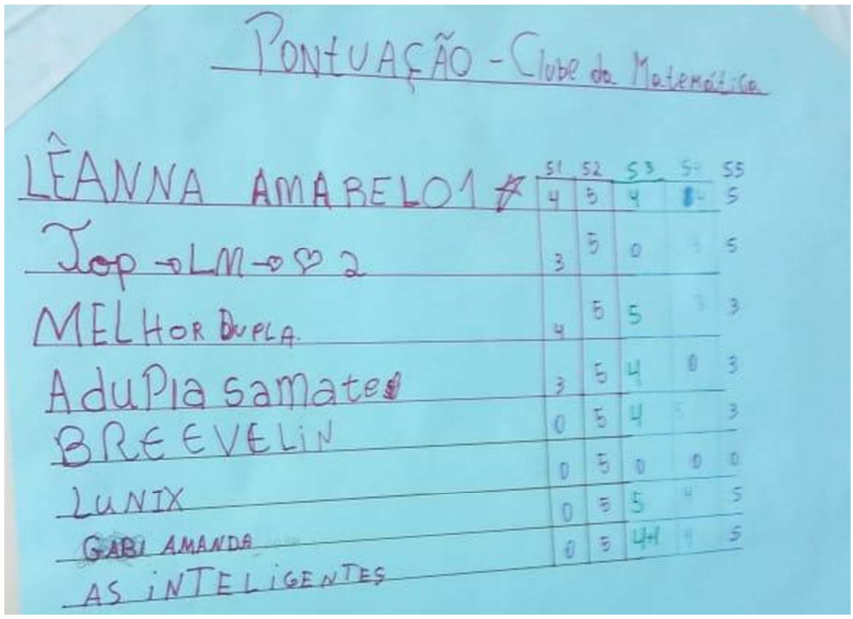


Figura 1 – Tabela de pontos.
Fonte: Dos autores.

Solicitamos que os alunos escrevessem os nomes das duplas e ajudassem na construção da tabela. Em todos os encontros eles verificavam os pontos que ganharam. Não foi utilizado nenhum sistema de demérito, ou seja, os alunos não perdiam pontos, apenas deixavam de obtê-los, caso não cumprissem as tarefas.

Neste ambiente foram utilizadas atividades diversificadas, nas quais buscamos explorar elementos que contribuíssem com a gamificação, além disso, em nenhum momento foi utilizado um quadro (lousa) ou apresentados conteúdos de maneira expositiva.

No que tange ao uso da modelagem matemática nesse contexto, a pontuação foi dada conforme os cinco critérios mencionados, com base nas considerações teóricas de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme Tortola (2016):

ISSN 2358-4947

trabalho em grupo, coleta de dados, confecção da planta da sala, produção do modelo matemático e validação dos resultados. Os pontos foram estipulados por nós, conforme a riqueza de suas ações e produções, observando sempre a adequabilidade de seus resultados à situação-problema investigada.

3 Resultados e Discussão

Não encontramos na literatura nenhuma pesquisa que abordasse atividades de modelagem matemática em um ambiente gamificado, assim quando a ideia da atividade surgiu não havia muitas referências para se basear, ou uma direção a seguir. Sendo assim foi necessário repensar a estrutura de uma atividade de modelagem matemática para que pudesse ser desenvolvida na perspectiva de um ambiente gamificado.

A primeira característica abordada foi a organização em etapas, o que antes era subjetivo agora teria que ficar explícito, assim fazendo com que os alunos tivessem uma noção clara de algumas ações que precisavam realizar. Apesar de não ser convencional foi a melhor forma encontrada para trabalhar com ambas as estratégias em harmonia, já que seria o primeiro momento de muitos alunos a trabalhar com a modelagem matemática. Outra forma que poderia ter sido abordada é a de se fazer a atividade e estabelecer critérios e pontos após sua conclusão, porém isso pareceu contraditório com os mecanismos de jogo, dada a premissa de que em um jogo todos sabem as regras e suas mecânicas são bem claras e, desta forma, isso acarretaria em uma falta de esclarecimento do que estava acontecendo ou sendo pontuado.

Dessa forma, o primeiro ponto de discussão foram os critérios de avaliação e como pontuá-los, decidiu-se por cinco critérios: coleta de dados; criação da planta da sala; criação do modelo matemático; validação dos resultados; e trabalho em grupo. Esses foram os tópicos que consideramos mais relevantes em consonância com a caracterização de uma atividade de modelagem matemática, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) e o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme Tortola (2016). Uma observação importante é que os critérios adotados são gerais, não delimitam ou determinam *a priori* as ações dos alunos, foram apenas adaptados para orientar a atividade. Assim, o critério “criação da planta da sala” pode ser muito bem substituído por “organização dos dados coletados”, ou até mesmo como um “cartel de informações obtidas sobre o problema”.

ISSN 2358-4947

Além disso, esses foram os critérios considerados pertinentes para essa atividade, que objetiva investigar a área de um espaço escolar. Essa escolha é suscetível a mudanças e adaptações conforme o professor que deseja utilizar essas ideias considerar necessárias, assim, a adição ou remoção de critérios é algo também a ser pensado, porém, deixamos claro que em nosso contexto, esses se mostraram os critérios mais que se mostraram mais coesos e apropriados. É, portanto, a partir deles que analisamos a atividade de modelagem que desenvolvemos. O problema que orientou a investigação dos alunos foi: *Quantos alunos podemos ter no clube da matemática?* Ou seja, até quantos alunos comporta o espaço disponibilizado para atender os alunos que participam dos projetos?

3.1 Coleta de Dados

Para a coleta de dados consideramos pertinente conhecer as medidas da sala, dessa forma, “medidas” seria um conceito para discussão com os alunos, e, considerando importante a utilização de instrumentos de medidas e realização dessas medições, foi atrelada a pontuação da Tabela 1, de acordo com a quantidade de medições.

Tabela 1 – Sistema de pontuação para a coleta de medidas.

5 medidas	1 ponto
10 medidas	2 pontos
...	...
5X medidas	X pontos

Fonte: Dos autores.

Como o interesse é saber quantos alunos podem ser recebidos naquela sala, as medidas de altura das paredes ou dos objetos não foram consideradas necessárias, as medidas que, de fato, nos interessavam nessa situação foram as medidas de largura e comprimento, dando assim coesão aos dados coletados em relação ao problema proposto.

3.2 Criação da planta da sala

Após a coleta de dados, que foi registrada na forma de uma lista de medidas (escolha dos alunos), foi solicitado que eles organizassem esses dados na forma de um desenho, nesse caso de uma planta da sala, para que ficassem visíveis de onde os dados

ISSN 2358-4947

foram coletados, por isso a representação pictórica. Consideramos essa forma de organização dos dados importante para os alunos, principalmente levando em conta suas idades, 9 e 10 anos, momento em que ainda se amparam fortemente em artifícios visuais para elaborar entendimentos e compreensões.

Na planta foram utilizados para pontuação os objetos indicados pela Tabela 2, prezando pela coesão do registro do objeto em relação à sua influência na determinação da quantidade de alunos na sala, que se tratava do problema sob investigação.

Tabela 2 – Sistema de pontuação para a criação da planta da sala.

Obter paredes	1 ponto
Obter prateleiras	1 ponto
Obter mesas	1 ponto
Obter cadeiras	1 ponto
Obter a porta	1 ponto

Fonte: Dos autores.

Nesse contexto, uma discussão interessante foi com relação à porta, que apesar de na planta aparentar não ocupar espaço, para que seja aberta não pode haver pessoas ou objetos obstruindo sua abertura, por isso a importância de considerar determinados objetos, já que eles podem restringir a área da sala com seu uso ou funcionamento.

3.3 Criação do modelo matemático

Considerando que o modelo matemático é uma estrutura matemática utilizada para descrever, explicar ou prever aspectos com relação à situação-problema sob investigação e que, para isso, deve preservar características dessa situação, neste critério atribuímos a pontuação de maneira mais objetiva, conforme Tabela 3, avaliando particularmente a pertinência do modelo matemático obtido e a coerência nos cálculos realizados.

Tabela 3 – Sistema de pontuação para a criação do modelo matemático.

Coesão do modelo matemático	3 pontos
Coesão nos cálculos desenvolvidos	2 pontos
Não coesão de qualquer um dos anteriores	0 pontos

Fonte: Dos autores.

ISSN 2358-4947

3.4 Validação dos resultados

Após a obtenção de um modelo matemático é importante verificar sua adequabilidade com relação à situação-problema. Com esse critério, portanto, estávamos interessados em fazer com que os alunos refletissem sobre a produção do modelo matemático e interpretassem seus resultados, avaliando a validade do modelo matemático. Nesse contexto, a pontuação foi atribuída conforme a coesão do modelo matemático com a realidade que deu origem à situação-problema, como indica a Tabela 4.

Tabela 4 – Sistema de avaliação para a validação dos resultados.

Coesão com a realidade	2 pontos
Não coesão com a realidade	0 pontos

Fonte: Dos autores.

3.5 Trabalho em grupo

Por fim, considera-setambém para pontuação o trabalho em grupo, uma vez que se espera que atividades de modelagem matemática sejam desenvolvidas em grupo, para que os alunos possam discutir suas ideias e juntos pensar em uma solução para o problema. Para atribuição da pontuação, consideramos três casos, conforme indica a Tabela 5.

Tabela 5 – Sistema de avaliação para o trabalho em grupo.

Participação total da dupla no grupo	5 pontos
Participação parcial da dupla no grupo	3 pontos
Não participação da dupla	0 pontos

Fonte: Dos autores.

Trata-se de um critério com certa subjetividade, pois avalia a participação dos alunos no desenvolvimento da atividade, dessa forma, a atribuição da pontuação às duplas ficou a cargo dos professores que acompanharam o desenvolvimento da atividade, dois primeiros autores do artigo, e que chegaram a um consenso, a partir de suas observações, quanto à participação das duplas nos três encontros em que a atividade foi desenvolvida.

ISSN 2358-4947

4 Desenvolvimento da atividade

A atividade foi desenvolvida em três encontros, nos quais foi discutida a problemática de quantos alunos comportaria a sala em que ocorrem os encontros do clube da matemática. Deixamos os alunos a vontade para realizar as discussões, cabendo a nós a mediação, questionando e provocando a exposição de suas ideias sobre como resolver o problema. Ficamos admirados com os encaminhamentos e soluções apresentadas pelos alunos, que até então ainda não haviam desenvolvido atividades de modelagem matemática, portanto, consideramos pertinente discuti-las neste artigo.

Em um primeiro momento os alunos sugeriram conhecer o espaço que tínhamos disponível na sala, que no caso era uma biblioteca. Com o auxílio de trenas os alunos mediram a sala e os objetos que ocupavam seu espaço. A Figura 2 ilustra essa ação.



Figura 2 - Medição da sala.
Fonte: Dos autores.

As medidas realizadas foram anotadas pelos alunos em uma lista. Observamos que os alunos tiveram dificuldades quanto à organização dos dados, diante disso, sugerimos que as medidas coletadas fossem registradas a partir da construção de uma planta da sala (biblioteca), onde poderiam ordenar os dados, facilitando sua visualização. A Figura 3 apresenta uma planta da sala construída por um dos alunos.

ISSN 2358-4947

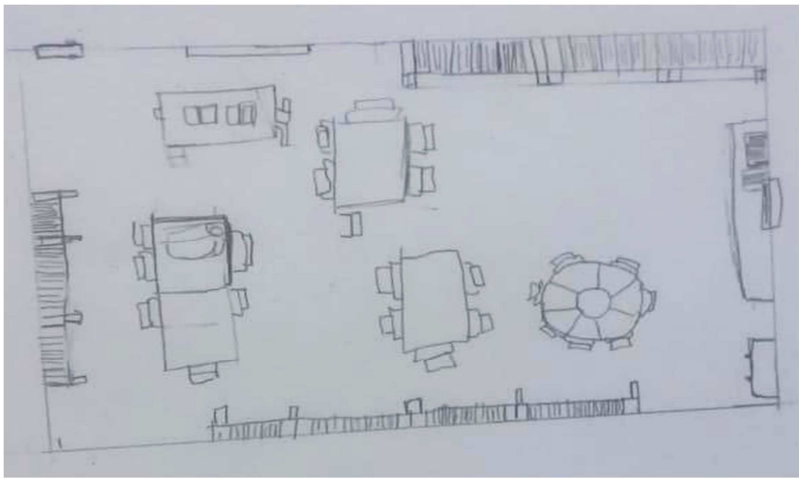


Figura 3 - Planta da sala.
Fonte: Dos autores.

Nesse momento os alunos investigaram a área da sala e a área que eles ocupavam. Os professores intervieram para ensinar como calcular a área de quadrados e retângulos. Esse momento, sem dúvida, foi o mais desafiador, afinal eles ainda não haviam estudado o conteúdo de área. Representamos um quadrado no chão, feito com fita adesiva, para explicar o que indica a medida de um metro quadrado. Logo após fizemos ao lado um quadrado idêntico para indicar a medida de dois metros quadrados. Por meio de questionamentos e conversas, explicamos aos alunos como calcular a área de quadrados e de retângulos.

A partir daí continuaram seus trabalhos e determinaram a área total da sala, o que foi feito em conjunto com os alunos. Na sequência cada grupo determinou quanto espaço ocupavam na sala. Neste momento coube uma observação que na sala estudada as mesas eram para quatro alunos, assim calcularam quanto espaço ocupavam as mesas com as cadeiras e as pessoas sentadas nelas. Um grupo utilizou réguas para calcular, outro utilizou os pisos no chão, obtendo diferentes resultados, porém ambos muito próximos.

Nesse momento os alunos produziram um modelo matemático para indicar quantas mesas caberiam naquele espaço, para posteriormente calcular a quantidade de alunos. Os professores tiveram que participar assiduamente nas discussões para que os alunos percebessem que para determinar essa quantidade de mesas eles precisavam dividir a área total da sala pela área que ocupava cada mesa, conforme modelo que apresentamos a seguir.

ISSN 2358-4947

$$\frac{área\ da\ sala}{área\ de\ uma\ mesa} = número\ de\ mesas$$

Como cada mesa suporta quatro alunos temos:

$$número\ de\ mesas\ x\ 4 = número\ de\ alunos$$

Observamos nesse momento a importância da mediação dos professores, pois os alunos apresentaram dificuldades com relação ao entendimento da noção de divisão e para explicar os cálculos apresentados com relação ao modelo matemático. Dessa forma os professores auxiliaram nessas ações.

5 Considerações Finais

São notórias as diferenças de se trabalhar modelagem matemática em um ambiente gamificado, visto que, como abordamos na introdução, jogos têm regras e normas pré-estabelecidas, já a modelagem permite várias abordagens, caminhos e ideias, e por não ter um único algoritmo considerado “correto”, há um leque de opções a serem desenvolvidas.

Com isso, uma forma que se encontrou para viabilizar o desenvolvimento da atividade de modelagem nessa perspectiva foi recompensar os alunos pelos modelos matemáticos, apresentação, registros, resoluções, participação nas atividades, etc. que se figuraram nos cinco critérios que indicamos. Ao adotar esse estilo de recompensas, com a pontuação organizada em etapas e previamente explicada aos alunos, pudemos abordar com certa atenção alguns procedimentos característicos da modelagem matemática, auxiliando, inclusive, na aprendizagem de habilidades matemáticas que vão para além do conteúdo, como a resolução de problemas, por exemplo, uma vez que os alunos se mostraram motivados a conquistar sempre a pontuação máxima, para assim conseguir um montante de pontos que os deixariam na liderança da competição.

Com relação aos critérios adotados para a pontuação, ressaltam-se duas observações. Em relação ao primeiro critério, coleta de dados, a cada cinco medições realizadas foi atribuído 1 ponto à atividade. Foi interessante notar os objetos que os alunos observaram para suas coletas, eles focaram em móveis grandes e pesados e acabaram desconsiderando móveis menores ou objetos dispersos no interior da biblioteca, mas que também preenchiam seu espaço. Já com relação ao critério da construção da planta da sala, observamos que alguns alunos se sobressaíram, pois fizeram seus desenhos com riqueza de detalhes, mostraram que entenderam como os objetos se apresentam a partir de

ISSN 2358-4947

uma vista panorâmica. Alguns alunos cometeram o equívoco de desenhar a planta quadrada, sem se atentar ao fato de que estavam desenhando a planta de um local retangular. No entanto, em linhas gerais, todos alunos conseguiram apresentar pelo menos uma planta para o local.

Com o desenvolvimento dessa atividade, particularmente envolvendo um tema associado ao espaço escolar que frequentam, ficou evidente o envolvimento dos alunos nas discussões e a competitividade na realização das tarefas, particularmente aquelas que eles relacionavam diretamente às pontuações. Nesse contexto, consideramos que, ainda que seja uma primeira experiência com a modelagem matemática nessa perspectiva, ela sugere que o ambiente gamificado pode ter feito diferença no engajamento dos alunos na atividade e em seus encaminhamentos, dessa forma, mantemos em nossa agenda outras pesquisas com relação à modelagem matemática na perspectiva da gamificação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BUSARELLO, R, I. et al. A gamificação e a sistemática de jogo: conceitos sobre a gamificação como recurso motivacional. In: FADEL, L. M. et al. **Gamificação na Educação.** São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. p. 11-37.

MALABY, T. M. Anthropology and Play: The Contours of Playful Experience. **Ssrn.** Wisconsin, p. 1-16. dez. 2008. Disponível em: <https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1315542>. Acesso em: 09 maio 2019.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VIANNA, Y; VIANNA, M.; MEDINA, B.; TANAKA, S. **Gamification**, Inc.: como reinventar empresas a partir de jogos. MJV Press: Rio de Janeiro, 2013.

ISSN 2358-4947

O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Frederico Braida
UTFPR - Toledo / UFJF
frederico.braida@ufjf.edu.br

Rodrigo Manoel Dias Andrade
UTFPR - Toledo

Rodolfo Eduardo Vertuan
UTFPR - Toledo

Resumo

Este artigo aborda o tema do ensino das transformações geométricas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O principal objetivo é apresentar os jogos de blocos de montar como recursos didáticos que podem ser explorados pelos professores a fim de criar cenários de aprendizagem lúdicos, capazes de despertar o interesse dos alunos. Metodologicamente, este artigo é resultado tanto de uma revisão de literatura quanto de uma reflexão crítica sobre o emprego dos blocos de montar tipo LEGO no ensino da Geometria. Ao final, pondera-se que os blocos de montar, por serem materiais concretos, manipuláveis e lúdicos, contribuem para a superação do ensino da Matemática (em especial da Geometria) fundamentado meramente na abstração e podem participar de um cenário propício para o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas.

Palavras-chave: Jogos. Blocos de montar. Geometria. Transformações geométricas.

1 Introdução

A Geometria pode ser considerada como uma área da Matemática que “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, [2017], p. 271). A Geometria relaciona-se diretamente com os campos das artes, do design e da arquitetura, entre outros, e contribui para o desenvolvimento da percepção espacial. Portanto, o ensino da Geometria se mostra extremamente relevante na formação dos alunos da Educação Básica.

No entanto, diversos autores, tal como relatado por Rossi (2009), afirmam que o ensino da Geometria na Educação Básica encontra muitas dificuldades. De acordo com Rossi (2009, p.20), generalizando, “as grandes dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos geométricos” advêm “de uma prática pedagógica baseada unicamente na memorização de conteúdos e, tendo o quadro verde e giz como única ferramenta pedagógica utilizada”. É nesse sentido que a autora afirma que “os professores se sentem

ISSN 2358-4947

desafiados a buscar novas estratégias de ensino que despertem o interesse dos alunos e que os auxiliem a transpor os obstáculos".

Diante desse quadro, este artigo se debruça sobre a seguinte questão: Como os professores de Matemática (em especial os de Geometria) podem contribuir para a construção de cenários educativos inovadores que busquem superar os obstáculos existentes no processo de ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica? Vislumbra-se que parte da resposta para essa questão encontra-se na utilização de material didático concreto, manipulável e lúdico, que seja capaz de ressignificar o espaço da sala de aula.

Portanto, a busca por materiais didáticos que sensibilizem os alunos e auxiliem na conformação de um ambiente favorável para a construção de novos conhecimentos apresenta-se como um desafio para os licenciados em Matemática. Assim, a utilização de material didático que extrapole o quadro de giz (e as suas variações) deve ser assimilada como uma constante na prática docente.

Partindo-se dessa premissa, este artigo tem por objetivo principal apresentar os jogos de blocos de montar como material didático para o ensino das transformações geométricas, objetos do conhecimento pertencentes, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio.

2 Materiais e métodos

Este artigo é fruto de uma pesquisa predominantemente qualitativa, de cunho exploratório, e é resultado de parte de uma pesquisa de pós-doutorado realizada no Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), no campus de Toledo, cujo objetivo geral é investigar o ensino na Geometria para os cursos de Engenharia Civil e de Arquitetura e Urbanismo, a partir de uma perspectiva de diálogo com a Educação Básica.

Levando-se em conta os procedimentos de coleta de dados, bem como as fontes consultadas, este artigo é decorrente de uma pesquisa bibliográfica e documental. A revisão de literatura incluiu, principalmente, trabalhos científicos que versam sobre o ensino das transformações geométricas na Educação Básica e a utilização de material didático concreto, manipulável e lúdico. A pesquisa documental contemplou a legislação (e suas disposições normativas complementares) que diz respeito à educação brasileira, sobretudo aquela vinculada ao Ministério da Educação (MEC).

ISSN 2358-4947

Para a ilustração das possibilidades do estudo das transformações geométricas, foram utilizadas as peças de um jogo de blocos de montar semelhante ao LEGO, intitulado Block Mania da marca Alfem Plastic. A versão utilizada é comercializada em uma embalagem (balde de14 cm altura e 16 cm diâmetro) contendo 104 peças de polipropileno atóxico e reciclável (referência 6.000). De acordo com o site da "Distribuidora de Brinquedos", o Block Mania trata-se de um "brinquedo educativo com blocos para montar que estimulam a percepção de cores e coordenação motora e diversão da criança"[1].

Ao todo, levando-se em consideração o formato e dimensões das peças, o conjunto é composto por quatro tipos diferentes, sendo todas prismáticas, de base retangular, cujas dimensões são: 1,2 x 2,4 cm, 2,4 x 2,4 cm, 2,4 x 3,6 cm e 2,4 x 4,8 cm. A altura das peças é de 1,3 cm, desprezando os 5 mm dos pinos de encaixe. As peças são monocromáticas, porém, no conjunto, há peças das seguintes cores: azul, vermelho e amarelo (cores primárias), verde (cor secundária), preto e branco (cores neutras) (Figura 1).

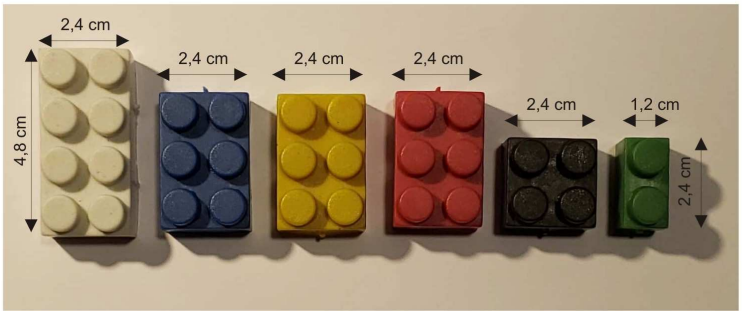


Figura 1 – Peças do jogo de blocos de montar Block Mania.
Fonte: Dos autores.

Essas peças foram utilizadas devido ao seu menor custo, quando comparado com as peças de LEGO, o qual possui valores consideravelmente mais elevados, podendo inviabilizar o seu uso como material didático. No entanto, cabe destacar que, ao se comparar as peças das duas marcas citadas, as da Block Mania apresentam maiores deformações, menor rigor no acabamento e menor rigidez. No entanto, essas características não comprometem sua utilização como material didático para fins do ensino das transformações geométricas.

[1] Disponível em: https://www.distribuidoradebrinquedos.com.br/none-14117542. Acesso em: 5 mar. 2019.

ISSN 2358-4947

Cumpre ressaltar que, para além das finalidades mencionadas pelo fabricante, no âmbito deste artigo, o jogo selecionado é compreendido como um material didático concreto, manipulável e lúdico.

3 As transformações geométricas e a BNCC

A partir de uma análise de conteúdo, pode-se verificar que, ao se buscar, no texto da "Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional" (LDB), a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, pela quantidade de vezes que aparece a palavra "geometria", encontramos o resultado nulo. Ou seja, a palavra "geometria" não está presente no referido texto. No entanto, pode-se admitir que a Geometria está subliminarmente contemplada quando se menciona, de maneira geral, o estudo da Matemática, bem como, indiretamente citada quando se aborda "o conhecimento do mundo físico" (BRASIL, [2019]). Também deve-se ressaltar que, tal como na LDB, o termo "geometria" não se encontra nas "Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica" (BRASIL, 2013).

Já nos documentos vinculados ao MEC para a educação brasileira, a palavra geometria se faz presente na BNCC. Cumpre salientar, inclusive, que a Geometria também está consideravelmente contemplada no "Referencial curricular nacional para a educação infantil" (BRASIL, 1998), nos Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e para o Ensino Médio (BRASIL, [1999]), especialmente no documento intitulado "PCN Ensino Médio +: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias" (BRASIL, [2002]).

Na terceira versão da BNCC, o vocábulo "geometria" é mencionado 50 vezes. As variações "geométrica(s)" aparecem nesse documento 55 vezes e as variações "geométrico(s)", 17 vezes. Como pode-se observar, as questões vinculadas à Geometria ganham uma grande importância na BNCC, onde, além de ser considerada um campo da Matemática, está explicitamente presente no campo de experiências "Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações" da Educação Infantil – quando é mencionado o "reconhecimento de formas geométricas" (BRASIL, [2017], p. 43) – e é entendida como uma das cinco unidades temáticas da área da Matemática do Ensino Fundamental.

Sobre a unidade temática Geometria, a BNCC para a etapa do Ensino Fundamental afirma que "estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos"

ISSN 2358-4947

(BRASIL, [2017], p. 271). Por sua vez, no texto da BNCC do Ensino Médio, o radical “geom-” está presente 23 vezes. A Geometria é explicitamente mencionada nos textos explicativos dos seguintes pares de ideias fundamentais: “Certeza e incerteza”, “Movimento e posição” e “Relações e inter-relações” (BRASIL, [2018]). Também, de acordo com esse documento, são, entre outras, competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, *Geometria*, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, *geométrico*, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, [2018], p. 523, grifos nossos).

Sobre o tópico específico do ensino das transformações geométricas, a BNCC lhe atribui um caráter “funcional”, afirmando que deve estar presente no Ensino Fundamental, sobretudo ao que diz respeito ao estudo das simetrias, o qual “deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica” (BRASIL, [2017], p. 271 e 272). Esse tópico está explicitamente mencionado na BNCC conforme o quadro a seguir:

Quadro 1 – Habilidades da área de Matemática – Unidade temática “Geometria”

ISSN 2358-4947

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
7º ano	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
7º ano	Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
8º ano	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Fonte: Brasil ([2017], p. 308 e 308; p. 314 e 315).

Com relação à BNCC do Ensino Médio, as transformações geométricas aparecem no par de ideias fundamentais intitulado “Movimento e posição”, o qual contempla as “transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas)”, e no par denominado “Relações e inter-relações”, que inclui “os movimentos de figuras, como as reflexões em retas, rotações e translações, [que] podem ser expressos por funções, em trabalhos no plano cartesiano, por exemplo” (BRASIL, [2018], p. 521). Também estão relacionadas à seguinte habilidade vinculada à Competência Específica 1: “(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras” (BRASIL, [2018], p. 525).

Ainda relacionado a esse tópico, a BNCC do Ensino Médio menciona que

> em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, [2018], p. 517).

ISSN 2358-4947

Como se vê, o tópico sobre as transformações geométricas se faz presente de forma explícita, tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Portanto, a busca por materiais didáticos que visem superar as estratégias baseadas unicamente no pensamento abstrato se faz necessária e se apresenta como um desafio para os licenciados em Matemática.

4 Transformações geométricas e o uso dos blocos de montar

Mabuchi (2000) apresenta uma trajetória histórica, epistemológica e matemática das transformações geométricas, recuperando diversos nomes de pensadores que contribuíram para o desenvolvimento desse tópico, lembrando-se da forte relação entre as artes e a Matemática, por exemplo, no Renascimento.

De forma geral, pode-se dizer que as transformações geométricas dizem respeito às transformações que, quando realizadas, a partir de uma forma geométrica inicial, chega-se a outra forma geometricamente igual ou equivalente, podendo-se, por exemplo, ser preservadas as medidas ou as formas. Translações, reflexões, rotações, ampliações e reduções são exemplos de transformações geométricas.

Constata-se que o ensino das transformações geométricas tem feito parte das preocupações dos professores de Matemática. Silva (2017) apresenta o estado da arte das transformações geométricas ou da geometria das transformações no Brasil, a partir de algumas das pesquisas de mestrado e doutorado mais recentes que abordam esse tema. O quadro abaixo sumariza os resultados encontrados:

Quadro 2 – Estado da arte das pesquisas sobre as transformações geométricas a partir de algumas das mais recentes dissertações e teses

Título da pesquisa	Autor (data)	Abordagem
O ensino e aprendizagem de polígonos e de transformações geométricas no plano: relacionando arte e matemática por meio de frisos e dos ladrilhos.	Rossi (2009)	Ensino Fundamental
Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre.	Bilac (2008)	Ensino Fundamental
Potencialidades e possibilidades no ensino das transformações geométricas no ensino fundamental	Rodrigues (2012)	Ensino Fundamental
Robótica e as transformações geométricas: um estudo	Accioli (2005)	Ensino Fundamental

ISSN 2358-4947

exploratório com alunos do ensino fundamental.		
As transformações isométricas no GeoGebra com a motivação etnomatemática.	Evangelista (2011)	Ensino Médio
Ensinar e aprender transformações isométricas no ensino médio.	Freitas (2010)	Ensino Médio
Estudando matrizes a partir das transformações geométricas.	Stormowski (2008)	Ensino Médio
Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço.	Salazar (2009)	Ensino Médio
Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas.	Miranda (2009)	Ensino Médio

Fonte: Silva (2017).

No que diz respeito às abordagens que consideram o ensino das transformações geométricas na Educação Básica, verifica-se a adoção de diversos materiais didáticos e estratégias pedagógicas, tais como o uso do Cabri-Géomètre, do Cabri 3D e do GeoGebra. É dentro dessa mesma perspectiva que se vislumbra, neste artigo, o uso dos jogos de blocos de montar como material didático.

Deve-se recuperar que os jogos de blocos de montar foram amplamente explorados pela pedagogia construtivista de Montessori (BRAIDA et al., 2015) e que, sejam eles de encaixe ou de sobrepor, sobretudo aqueles que possuem formas volumétricas primárias ou simples, prestam-se muito para o ensino da Geometria. Vele também mencionar que, em 1980, George Stiny publicou um artigo intitulado “Gramáticas do Jardim de Infância: projetando com os blocos de montar de Froebel” (“*Kindergarten Grammars: Designing with Froebel's Buildings Gifts*”), em que utilizou os blocos de Froebel no estudo da Gramática da Forma, evidenciando algumas das potencialidades dos blocos de montar no estudo das transformações geométricas (STINY, 1980).

Assim, é dentro dessa perspectiva que se vislumbra a adoção dos blocos de montar como recurso didático, dentro de uma abordagem que privilegia a utilização de materiais concretos, manipuláveis e lúdicos nos processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

ISSN 2358-4947

5 Resultados e discussão: o uso dos blocos de montar como recurso didático para o ensino das transformações geométricas

Recorrentemente, as transformações geométricas são ensinadas a partir da manipulação de figuras planas. A própria BNCC propõe que o ensino das transformações inicie por meio do trabalho com as figuras geométricas planas (BRASIL, [2017], p. 272). No entanto, para além da construção geométrica, utilizando-se instrumentos de desenho a mão e computadores, devem ser empregados materiais concretos e manipuláveis. É nesse sentido que os jogos se destacam como materiais didáticos pertinentes, pois, além de serem manipulados pelos alunos, podem contribuir para a construção de um ambiente de ensino e aprendizagem lúdico. O uso do Tangram, entendido como material didático manipulável (SCOLARO, [s.d.]), por exemplo, pode ser empregado para o estudo das transformações geométricas no plano.

No entanto, a utilização de formas espaciais pode agregar um maior grau de complexidade, além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento espacial, mais próximo da tridimensionalidade do mundo físico. Portanto, os blocos de montar do tipo LEGO podem ser empregados em sala de aula em exercícios que explorem as transformações geométricas, associando-se formas volumétricas e o uso das cores nos processos de transformação geométrica no espaço.

Com os jogos de blocos de montar, podem ser elaboradas composições que contemplem as translações, reflexões, rotações, ampliações e reduções (Figura 2). Trabalhando em pares, por exemplo, pode-se solicitar que os alunos reproduzam as composições uns dos outros de forma espelhada, fazendo-os empiricamente introjetar a noção de simetria. Assim, a construção do conhecimento teórico pode advir do exercício prático.

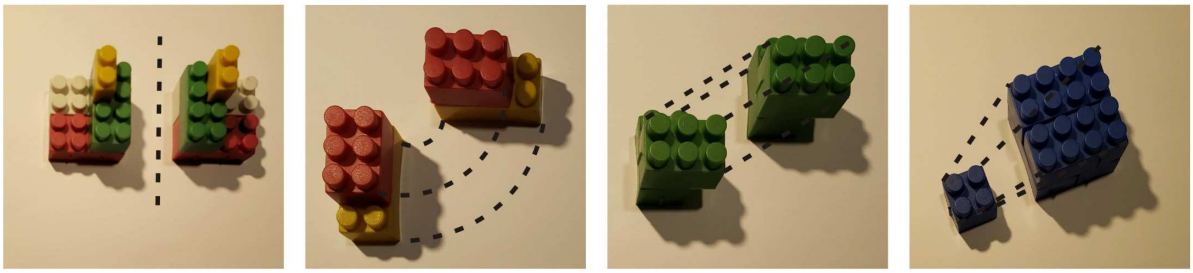


Figura 2 – Transformações: reflexão, rotação, translação e ampliação.
Fonte: Dos autores.

ISSN 2358-4947

Ressalta-se que não se tem a pretensão, neste artigo, de apresentar um rol de atividades possíveis. No entanto, o que se propõe é a evidenciação dos blocos de montar como recursos didáticos concretos e possíveis para o ensino das transformações geométricas.

Vale recuperar a afirmação de Braida e Fonseca (2017):

> A construção do conhecimento por parte dos alunos se realiza na dialética entre a prática e a teoria, entre o saber individual e o coletivo, entre o concreto e o abstrato. Assim, a proposição de materiais concretos se apresenta como uma via possível para se chegar à construção dos conceitos de forma plenamente introjetada. Como se sabe, dificilmente um conteúdo é assimilado se não for verdadeiramente construído conciliando-se a abstração à experimentação empírico-material.

O uso dos blocos de montar como recurso didático conecta os alunos ao mundo real e palpável. É com essa finalidade que os professores devem esforçar-se para levar para as salas de aula diversos materiais, a partir dos quais se explorem os conceitos matemáticos e geométricos, ampliando as possibilidades de um pensamento indutivo (da prática para teoria) em oposição ao prevalecente pensamento dedutivo (da teoria para a realidade).

Os jogos de blocos de montar podem ser entendidos também como materiais manipuláveis. De acordo com Silva (2017, p. 37), “os materiais didáticos manipuláveis podem ser ferramentas úteis ao processo de ensino-aprendizagem de matemática”. “De fato, os materiais podem tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação entre a teoria matemática e a constatação na prática, por meio da ação manipulativa (SILVA, 2017, p. 37). De acordo com Leandro, Barbosa e Oliveira (2016, p. 1), “os materiais manipuláveis e concretos ganham relevância, sobretudo, no ensino da geometria, que deve basear-se na experimentação e na manipulação, privilegiando o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial”.

Deve-se também ponderar que os blocos de montar funcionam como jogos lúdicos, que facilitam a construção de um cenário de ensino-aprendizagem divertido. Alguns autores, dentre os quais destacam-se Alves (2015), Burke (2015) e Huizinga (2007), apontam para as qualidades que os jogos proporcionam no meio social. Já autores como Alexandre e Sabbatini (2013) e Volpato (2002) versam sobre os benefícios dos jogos no contexto da Educação.

ISSN 2358-4947

De acordo com o professor de Geometria Gildo Montenegro, “pode-se ensinar por meio de jogo, a aula pode ser alegre e divertida e você pode aprender assim. Por sinal, aprende mais” (MONTENEGRO, 2007, p.128). Também Santos (2014, p.109), por exemplo, defende a utilização dos jogos em contexto de ensino, como ferramenta pedagógica e afirma que “... os jogos, o lúdico e as brincadeiras devem ser parceiros do professor, que deve valorizar os aspectos positivos que atividades lúdicas podem trazer aos alunos que participam delas”. Nesse sentido, os jogos (de montar), dentro de uma perspectiva construtivista, funcionam como poderosos instrumentos pedagógicos (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2008), o qual também pode estar a serviço do ensino da Geometria e, mais especificamente, das transformações geométricas.

6 Considerações Finais

Como foi recuperado neste artigo, o ensino das transformações geométricas está previsto na BNCC, especialmente para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. O conhecimento sobre esse conteúdo da Geometria contribui para o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas ao julgamento estético, tão requerido pelos campos das artes, do design, da arquitetura e das engenharias, entre outros. Portanto, os professores devem esforçar-se para que, de fato, sejam incorporados tais conhecimentos em suas disciplinas, sobretudo propondo sequências didáticas lúdicas e atividades que levem para a sala de aula recursos didáticos diversificados.

É dentro desse contexto que os jogos de blocos de montar do tipo LEGO se apresentam como material que pode ser empregado no ensino das transformações geométricas que ultrapassem a exploração de figuras planas, mas que incorpore formas volumétricas e o uso das cores. As possibilidades de uso dos jogos de montar como materiais didáticos para o ensino da Geometria são inúmeras. O que se buscou neste artigo foi evidenciar os blocos de montar no contexto do ensino das transformações geométricas, entendendo-os como materiais concretos e manipuláveis.

Por fim, destaca-se que a manipulação dos jogos de montar aliada ao uso de outros recursos didáticos e estratégias de ensino das transformações geométricas pode fazer com que esse conteúdo seja verdadeiramente introjetado pelos alunos, fazendo com que o conhecimento geométrico seja construído a partir da interface entre a prática e a teoria.

ISSN 2358-4947

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) – Processos TEC APQ 01041/14 e TEC PPM 00766/15 – pelo financiamento da pesquisa que viabilizou a aquisição do jogo de blocos de montar utilizado nas ilustrações deste artigo.

REFERÊNCIAS

ACCIOLI, R. M. **Robótica e as transformações geométricas:** um estudo exploratório com alunos do ensino fundamental. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

ALEXANDRE, C.; SABBATINI, M. **A contribuição dos jogos digitais nos processos de aprendizagem.** 2013. Disponível em: http://nehte.com.br/simposio/anais/Anais-Hipertexto-2013/A%20contribui%C3%A7%C3%A3o%20dos%20Jogos%20Digitais%20nos%20processos%20de%20aprendizagem.pdf. Acesso em: 17 jun. 2016.

ALVES, F. **Gamification**: como criar experiências de aprendizagem engajadoras. São Paulo: DVS Editora, 2015.

BILAC, C. U. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre.** Programa de Pós-Graduação em Ensino Matemática (Mestrado Profissional). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

BRAIDA, F.; FONSECA, J. F. O uso do lego na representação gráfica do projeto de arquitetura e urbanismo. In: GRAPHICA, 12. **Anais...** Araçatuba: UNIP, 2017. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/anais/49745.pdf. Acesso em 5 fev. 2019.

BRAIDA, F. et al. A exploração do mundo projetual dos blocos de montar por meio do jogo digital interativo Minecraft. In: SIGraDi, 2015. **Anais...** São Paulo: Blucher, 2015. p.371-377.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** [2019]. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 4 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. [2017]. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: Ensino Médio. [2018]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 5 jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file >. Acesso em: 5 mar. 2019.

ISSN 2358-4947

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-03-matematica.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais Ensino Médio:** Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, [1999]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN Ensino Médio +:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. [2002]. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 5 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Referencial curricular nacional para a Educação Infantil.** Brasília: MEC/SEF, 1998. v.3. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/volume3.pdf >. Acesso em: 5 fev. 2019.

BURKE, B. **Gamificar**: como a gamificação motiva as pessoas a fazerem coisas extraordinárias. São Paulo: DVS Editora, 2015.

EVANGELISTA, M. C. S. **As transformações isométricas no GeoGebra com a motivação etnomatemática**. Programa de pós-Graduação em Ensino de Matemática (Mestrado Profissional). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

FREITAS, A. L. V. E**nsinar e aprender transformações isométricas no ensino médio.** Programa de pós-Graduação em Ensino de Matemática (Mestrado Profissional). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2010.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**: o jogo como elemento da cultural. São Paulo: Perspectiva, 2007.

LEANDRO, B. C.; BARBOSA, D. M. J.; OLIVEIRA, C. G. de. **O geoplano como ferramenta no ensino de geometria plana**. 2016. Disponível em: http://sites.pucgoias.edu.br/puc/pibid/wp-content/uploads/sites/17/2016/04/artigo.pdf. Acesso em: 2 abr. 2019.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas:** a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MIRANDA, G. M. H. **Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas**. Programa de Pós-Graduação em

ISSN 2358-4947

Educação Matemática (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MONTENEGRO, G. **Geometria Descritiva**. 3. reimp. São Paulo: Blucher, 2007.

RODRIGUES, C. R. F. **Potencialidades e possibilidades no ensino das transformações geométricas no ensino fundamental.** Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (Mestrado profissional). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ROSSI, G. da R. **O ensino e aprendizagem de polígonos e transformações geométricas no plano:** relacionando a arte e matemática por meio dos frisos e dos ladrilhos. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática (Mestrado Profissional). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

SALAZAR, J. V. F. **Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D:** um estudo de transformações geométricas no espaço. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

SANTOS, V. R. **Jogos na escola:** os jogos nas aulas como ferramenta pedagógica. Petrópolis/RJ: Vozes, 2014.

SCOLARO, M. A. **O uso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** [s.d.]. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf. Acesso em: 2 maio 2019.

SILVA, P. H. da. **Transformações geométricas no contexto escolar:** uma experiência de aprendizagem no 8º ano do ensino Fundamental. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado profissional). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

STINY, G. Kindergarten Grammars: Designing with Froebel's Buildings Gifts. **Environment and Planning B**, v. 7, 409-62, 1980.

STORMOWSKI, V. **Estudando matrizes a partir das transformações geométricas.** Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Mestrado profissional). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

VOLPATO, G. Jogo e brinquedo: reflexões a partir da teoria crítica. **Educ. Soc**., Campinas, n. 23, v. 81, 2002, p.217-226. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em: 5 fev. 2016.