ANAIS

VIII SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

A matemática presente nas tecnologias: abordagens para o ensino

Página do Evento:

http://www.td.utfpr.edu.br/semat/VIII_semat/

Toledo – PR

Junho - 2021

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (8: 2021:
Toledo, PR)

Anais da VIII Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR), 21 a 25 de junho de 2021. / organizado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. - Toledo, PR, 2021.
218 f.

Modo de Acesso: World Wide Web:
http://www.td.utfpr.edu.br/semat/VIII_semat/
ISSN 2358-4947

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo - Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo
Bibliotecária Carla Rech Ribeiro – CRB 9/1685

Sumário

1. INTRODUÇÃO 4

2. OBJETIVOS 5

3. PÚBLICO ALVO 5

4. PERÍODO DE REALIZAÇÃO 5

5. PERIODICIDADE DO EVENTO 5

6. REALIZAÇÃO 5

6.1. Comissão Organizadora 5

6.2. Comissão de Apoio 6

6.3. Comissão Científica 6

6.4. Comissão de Pareceristas 6

7. CRONOGRAMA 7

8. MINICURSOS 7

9. TRABALHOS 8

1. Introdução

A Semana da Matemática da UTFPR – Toledo (SEMAT) iniciou no ano de 2013 e estará, em 2021, na sua VIII edição, cujo tema discutirá "A Matemática presente nas tecnologias: abordagens para o ensino". Toda programação foi desenvolvida de forma remota, pois é fundamental considerar todas as medidas de segurança devido a pandemia.

O evento surgiu com o intuito de complementar a formação dos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores, com atitudes críticas e reflexivas nas áreas de Educação Matemática, Matemática Aplicada e Matemática Pura. O evento promoveu a integração entre acadêmicos, professores de Matemática e pesquisadores permitindo aos profissionais socializar suas práticas pedagógicas, divulgar suas pesquisas e promover a formação continuada por meio de minicursos, palestras e comunicações orais.

Participam do evento os acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Câmpus Toledo e de outras instituições de Ensino Superior, professores do Ensino Fundamental e Médio das redes pública e privada de ensino, professores universitários e pesquisadores, não apenas da região, mas também de outros estados do Brasil.

Assim, a VIII SEMAT visa aproximar alunos de graduação e de pós-graduação, professores da rede pública de ensino da região e das universidades e pesquisadores, oportunizando o diálogo e o compartilhamento de ideias, conhecimentos e experiências. Além disso, o evento oportuniza a participação de estudantes e professores do Mestrado e Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Câmpus Cascavel e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade proponente, que neste ano realizará paralelamente ao evento, o Segundo Workshop do Mestrado Profissional em Matemática – Câmpus Toledo (II Workshop PROFMAT), com o objetivo de divulgar trabalhos de alunos e professores do programa.

Dessa forma, o evento garante forte relação com o ensino, pesquisa e extensão na graduação e na pós-graduação. Assim, a VIII SEMAT e II Workshop PROFMAT visam aproximar alunos de graduação e de pós-graduação, professores da rede pública de ensino da região e das Universidades e pesquisadores, oportunizando o diálogo e o compartilhamento de ideias, conhecimentos e experiências.

A palestra de abertura foi ministrada pelo Prof. Dr. Francisco César Polcino Milies - USP / São Paulo – SP, que falou sobre Códigos que Detectam Erros.

No segunda dia do evento, tivemos uma palestra com a Profa. Julia Jaccoud e mesa de discussões com a presença da palestrante e de egressos do curso de Licenciatura da UTFPR de Toledo, Edinéia Brum, Guilherme De Martini e Geise Thaiana Santos Braga, mediada pelo Prof. Ivan Coser.

No dia seguinte, ocorreu a realização dos 9 minicursos.

No quinto dia do evento, alunos, professores e demais pesquisadores inscritos puderam divulgar suas pesquisas e trabalhos por meio de comunicações orais.

No último dia da semana acadêmica, tivemos o II Workshop do PROFMAT Toledo com a palestra Experiências e resultados do PROFMAT Cornélio Procópio ministrada pelo Prof. Dr. Thiago Pinguelo de Andrade - UTFPR / Cornélio Procópio – PR. Na sequencia foram realizadas apresentações culturais no V Sarau da Matemática.

2. Objetivos

- apresentar a matemática "escondida" nas tecnologias cotidianas, como por exemplo, GPS, criptografia, códigos de barras, celulares, informática, mecanismos de busca como o GOOGLE e possibilidades de atuação profissional do licenciado em matemática em áreas tecnológicas;
- refletir sobre uso das tecnologias para o ensino/aprendizagem da matemática;
- apontar possíveis temas relacionados à atualidade para desenvolvimento de trabalhos científicos;
- promover discussões teóricas sobre ações, concepções, pesquisas e fundamentos da Matemática, em suas diferentes áreas;
- viabilizar o intercâmbio e a divulgação de investigações e produção científica nas áreas da matemática, assim como experiências educacionais realizadas nesse contexto.

3. Público Alvo

Graduandos, pós-graduandos e profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura, Matemática Aplicada e Estatística.

4. Período de Realização

O evento foi realizado nos dias 21 a 25 de junho de 2021.

5. Periodicidade do Evento

Esta foi a VIII Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo, cuja periodicidade se dá anualmente. Devido a pandemia, a semana acadêmica não foi realizada em 2020 e em 2021 foi desenvolvida de forma remota.

6. Realização

O evento foi realizado pela Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pela portaria nº 13, de 12 de fevereiro de 2021.

6.1. Comissão Organizadora

Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Me. Ivan José Coser
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso

Profa. Dra. Dione Ines Christ Milani
Profa. Dra. Rosangela Aparecida Botina Assumpção

6.2. Comissão de Apoio
Jorge Otta Junior
Matheus Fernando Alberoni
Ana Paula Oliveira da Silva
Alienara Isabel Cristoferi
Larissa Arianna Mekelburg Da Silva
Maria Eduarda de Bastos Marques
Nilson Liberato Neto
Thais Paula Prunzel
Gustavo Henrique Zanette

6.3. Comissão Científica
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti – Responsável pela comissão científica
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Me. Ivan José Coser
Profa. Dra. Dione Ines Christ Milani
Profa. Dra. Rosangela Aparecida Botina Assumpção

6.4. Comissão de Pareceristas
Profa. Ma. Aline Keryn Pin
Profa. Dra. Aracéli Ciotti de Marins
Profa. Dra. Bárbara W. D. Novaes
Profa. Dra. Daniela Trentin Nava
Profa. Dra. Dione Ines Christ Milani
Prof. Dr. Emerson Tortola
Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso
Prof. Me. Ivan José Coser
Profa. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori
Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti
Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira
Prof. Dr. Leandro Antunes
Prof. Me. Loreci Zanardini
Profa. Ma. Marcia Regina Piovesan
Prof. Dr. Márcio Paulo de Oliveira
Profa. Me. Milena Soldá Policastro
Profa. Dra. Regiane Slongo Fagundes
Prof. Me. Renato Francisco Merli
Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra
Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade
Profa. Dra. Rosangela A. B. Assumpção
Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Prof. Dr. Vanderlei Galina
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

7. Cronograma

Data	Horário	Programação	Local
21/06/2019	19:00 – 23:00	Solenidade e Palestra de Abertura	Zoom
22/06/2019	19:00 – 23:00	Palestra e mesa de discussão com egressos do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR - TD	Zoom
23/06/2019	19:00 – 23:00	Minicursos	Zoom
24/06/2019	19:00 – 23:00	Comunicações Orais e vídeos sobre curiosidades matemáticas produzidos pelos alunos de residência pedagógica.	Zoom
25/06/2019	13:30 – 17:30	II Workshop do PROFMAT	Zoom
	19:00 – 23:00	II Workshop do PROFMAT e Sarau	Zoom

8. Minicursos

A VIII Semat contou com a apresentação de nove minicursos das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada, que foram ministrados por docentes da UTFPR e outras instituições de ensino.

MINICURSO [01] - O teorema de Pitágoras e suas generalizações com o uso do Geogebra.
Responsável: Profa. Dra. Loreni Aparecida Ferreira - SEED/PR - Apucarana - PR
Público alvo: Alunos do 1º e 2º período

MINICURSO [02] - Matemática, softwares e um pouco de criatividade.
Responsável: Prof. Me. Marcelo Gimenes - SEED/PR - UNIPAR - Toledo - PR
Público alvo: Alunos do 1º e 2º período

MINICURSO [03] - Introdução aos sistemas dinâmicos discretos.
Responsável: Prof. Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade - UTFPR - Toledo – PR
Público alvo: Alunos a partir do 7º período

MINICURSO [04] - Equações a diferenças a partir de resolução de problemas.
Responsável: Profa. Ma. Marivane de Souza Martin, UNIPAR - Cascavel – PR
Público alvo: Alunos a partir do 4º período

MINICURSO [05] - Aplicações, modelagem e atividades para o ensino médio.
Responsável: Prof. Dr. Wellington Donizeti Previero, UTFPR - Londrina – PR
Público alvo: Alunos a partir do 7º período

MINICURSO [06] - Ensino de trigonometria com auxílio do software Geogebra.
Responsáveis: Profa. Dra. Claudete Cargnin e Profa. Ma. Angela Mognon, UTFPR - Campo Mourão – PR
Público alvo: Alunos do 1º e 2º período

MINICURSO [07] - Tenho um aluno com deficiência, e agora? tecnologia e inclusão.

Responsável: Prof. Dr. Luiz Renato Martins da Rocha, UTFPR - Cornélio Procópio – PR
Público alvo: Alunos a partir do 3º período

MINICURSO [08] - Ferramentas para o ensino remoto.
Responsável: Profa. Sarah Elisa de Melo Menoncin, APPFCPF - Toledo – PR
Público alvo: Alunos a partir do 3º período

MINICURSO [09] - Jogos e matemática: articulações e possibilidades.
Responsáveis: Matheus Fernando Albertoni e Gustavo Henrique Zanetti, UTFPR - Toledo – PR
Público alvo: Alunos a partir do 3º período

II Workshop do PROFMAT TOLEDO
Explorando os códigos de barras nas aulas de Matemática.
Responsável: Profa. Jaíne Carneiro – Mestre pelo PROFMAT - UEPG - Ponta Grossa – PR
Público alvo: Alunos do PROFMAT

9. Trabalhos

Nesta oitava edição da Semat, alunos, docentes e pesquisadores da UTFPR e de outras instituições de ensino submeteram resumos expandidos e trabalhos completos, que foram apresentados na modalidade de comunicação oral e/ou pôster.

Na sequência, são apresentados os 07 (sete) trabalhos completos e os 19 (dezenove) resumos expandidos apresentados, totalizando 26 (vinte e seis) trabalhos.

SOBRE O FECHO INJETIVO DE R-MÓDULOS

Adina Veronica Remor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adinaremor@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
robsonw@utfpr.edu.br

Resumo

O presente trabalho busca apresentar o estudo desenvolvido no PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado, na área de teoria de módulos, desenvolvido sob orientação do professor Robson Willians Vinciguerra. Em 1940, o matemático Reinhold Baer percebeu que poderia estender a propriedade do somando direto de grupos divisíveis para módulos. Intuitivamente, Baer estava definindo módulos injetivos. Ele também mostrou que qualquer módulo pode ser injetado em um módulo injetivo. Continuando os estudos de Baer, os matemáticos Von B. Eckmann e A. Schopf mostraram que para qualquer módulo existe um módulo injetivo minimal que o contém, conhecido atualmente como fecho injetivo. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a noção de fecho injetivo de um módulo, bem como alguns exemplos. Para tal, foram estudados tópicos como módulos injetivos, módulos divisíveis e extensões essenciais, e, após, definimos o fecho injetivo de um R- módulo qualquer.

Palavras-chave: Módulos injetivos. Extensões essenciais. Fecho injetivo.

1 Introdução

Em 1940, o matemático Reinhold Baer generalizou para a teoria de módulos o seguinte teorema: "Um grupo abeliano divisível é um somando direto de todo grupo abeliano que o contém". Como pode-se "enxergar" qualquer grupo abeliano com estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo, Baer definiu módulos completos como os módulos que satisfazem o critério que hoje leva seu nome.

Além disso, ele mostrou que um módulo é completo se e somente se é um somando direto de qualquer módulo que o contém. Em 1953, os matemáticos Von B. Eckmann e A. Schopf usaram o termo "módulo injetivo" para se referir aos módulos completos. Baer também mostrou que todo módulo pode ser injetado em um módulo injetivo (resultado que era válido na época para grupos abelianos). A partir disso, Von B. Eckmann e A. Schopf mostraram que para qualquer módulo existe um módulo injetivo minimal que o contém, conhecido atualmente como fecho injetivo.

Prosseguindo o estudo do fecho injetivo, novas definições surgiram, como módulos divisíveis (a partir da noção de grupos divisíveis) e extensões essenciais. Tais conceitos estão profundamente ligados ao fecho injetivo, como será visto neste material. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a noção do fecho injetivo, bem como alguns resultados e exemplos relacionados a esse conceito. Para tal, apresentaremos resultados da teoria de módulos e por fim, a definição de fecho injetivo e alguns exemplos como o grupo de Prüfer.

2 Fundamentação teórica

O presente material possui cunho bibliográfico, dessa forma foi realizado um estudo utilizando-se os materiais [1], [2] e [3]. Vamos iniciar esta seção apresentando alguns resultados básicos para a compreensão deste trabalho, como a definição de módulos, submódulos, homomorfismos de módulos e sequências exatas. Também apresentaremos alguns exemplos que nos acompanharão até o fim deste trabalho. Vamos considerar R um anel com elemento identidade 1.

Definição 2.1. *Um R-**módulo à direita** é um grupo abeliano aditivo M, dotado de uma multiplicação por escalar $\cdot : M \times R \to M$ dada por $m \cdot r$ tal que, para quaisquer $a, b \in R$ e $m, n \in M$ as seguintes propriedades sejam válidas:*

1. $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$;
2. $(m + n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a$;
3. $m \cdot (a \cdot b) = (m \cdot a) \cdot b$;
4. $m \cdot 1 = m$.

A fim de facilitar a notação, a partir de agora denotaremos o produto por escalar $m \cdot a$ apenas por ma.

Exemplo 2.1. *Todo anel R possui uma estrutura de R-módulo, basta considerar neste caso o produto escalar pelo produto do próprio anel. No caso em que R é um corpo, então os R-módulos são os R-espaços vetoriais.*

Por meio do Exemplo 2.1 vemos que a noção de módulo generaliza a noção de espaço vetorial.

Exemplo 2.2. *Todo grupo abeliano $(G, +)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo com a seguinte ação:*

$$na = \begin{cases} n + n + \ldots + n & a \text{ parcelas se } a > 0; \\ 0 & \text{se } a = 0; \\ (-n) + \ldots + (-n) & a \text{ parcelas se } a < 0, \end{cases} \qquad \forall\, a \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall\, n \in G.$$

Vamos apresentar um exemplo muito interessante, conhecido como Grupo de Prüfer, representado por $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, que será importante para compreender a noção de fecho injetivo.

Exemplo 2.3 (Grupo de Prüfer)**.** *Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo fixo, definimos o subgrupo aditivo $P := \left\{\frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\mathbb{Q}$ que contém $\mathbb{Z}$ e o grupo quociente*

$$\frac{P}{\mathbb{Z}} = \left\{\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \mid \frac{a}{p^n} \in P, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por outro lado, dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos o subgrupo $\mathbb{Z}_{p^n} := \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle = \left\{\left(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \frac{P}{\mathbb{Z}}$ e definimos $\mathbb{Z}_{p^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$. Vamos mostrar que $\frac{P}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. De fato, seja $\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} \in \frac{P}{\mathbb{Z}}$, temos

$$\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} + \ldots \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} + \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Reciprocamente, dado $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{x} \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$, ou seja, $\overline{x} = (\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}) \cdot a = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}$, para algum $a \in \mathbb{Z}$. Logo $\overline{x} \in \frac{P}{\mathbb{Z}}$, donde segue $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \frac{P}{\mathbb{Z}}$. Este é o grupo de Prüfer, que neste trabalho será visto como um $\mathbb{Z}$-módulo.

Definição 2.2. *Um subconjunto não vazio N de um R-módulo M é dito **submódulo** de M se:*

i) *N é subgrupo aditivo de M;*

ii) $\forall\ r \in R$ *e* $\forall n \in N$ *temos* $nr \in N$.

Exemplo 2.4. *No Exemplo 2.3 apresentamos o Grupo de Prüfer. Observe que sempre vale* $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle \subseteq \left\langle \overline{\frac{1}{p^{n+1}}} \right\rangle$. *De fato, dado* $\left(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot a \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$, *temos:*

$$\left(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot a = \frac{a}{p^n} + \mathbb{Z} = \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot 1 = \left(\frac{a}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot \frac{p}{p} = \frac{ap}{p^{n+1}} + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{p^{n+1}} + \mathbb{Z}\right) \cdot ap \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^{n+1}}} \right\rangle.$$

Exemplo 2.5. *Afirmamos que os únicos submódulos não triviais de* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *visto como* $\mathbb{Z}$*-módulo são da forma* $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$ *para* $n \in \mathbb{N}$.

Se G é um subgrupo finito de $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$, então estará contido em algum $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$ para algum $n \in \mathbb{N}$. De fato, a ordem de $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$ é p^n. Logo, pelo Teorema de Lagrange, G deve ser um subgrupo com ordem $p^k, k \leq n$. Afirmamos que $G = \left\langle \overline{\frac{1}{p^k}} \right\rangle$. De fato, seja $\overline{g} = \frac{t}{p^n} + \mathbb{Z} \in G \subseteq \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Como $o(G) = p^k$, temos $o(\overline{g}) \leq p^k$. Logo:

$$\overline{g} \cdot p^k = 0 + \mathbb{Z} \implies \left(\frac{t}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot p^k = 0 + \mathbb{Z} \implies \frac{tp^k}{p^n} - 0 \in \mathbb{Z} \implies \frac{tp^k}{p^n} = z \in \mathbb{Z} \implies t = \frac{zp^n}{p^k}.$$

Assim $\overline{g} = \frac{t}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{\frac{zp^n}{p^k}}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{zp^n}{p^k} \cdot \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{z}{p^k} + \mathbb{Z} \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^k}} \right\rangle$. Como $G \subseteq \left\langle \overline{\frac{1}{p^k}} \right\rangle$ e ambos possuem o mesmo número de elementos, concluímos que $G = \left\langle \overline{\frac{1}{p^k}} \right\rangle$.

Suponha agora que $G \subseteq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ seja infinito. Vamos mostrar que $G = \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Suponha por absurdo que $G \neq \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Assim, existe $\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z} \notin G$ com $mdc(k, p) = 1$ (essa condição é exigida a fim de evitar ambiguidade). Como $mdc(k, p) = 1$, afirmamos que $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle = \left\langle \overline{\frac{k}{p^n}} \right\rangle$.

$\subseteq$) Como $mdc(k, p) = 1$ e p é primo, temos que $mdc(k, p^n) = 1$. Pelo Teorema de Bézout, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $ak + bp^n = 1$. Assim:

$$\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{ak + bp^n}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{ak}{p^n} + b + \mathbb{Z} = \frac{ak}{p^n} + \mathbb{Z} = \frac{ka}{p^n} + \mathbb{Z} = \left(\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot a \in \left\langle \overline{\frac{k}{p^n}} \right\rangle$$

$\supseteq$) Basta ver que $\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z} = \left(\frac{1}{p^n} + \mathbb{Z}\right) \cdot k \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$. Portanto $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle = \left\langle \overline{\frac{k}{p^n}} \right\rangle$.

Agora, como $\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z} \notin G$, temos que $\left\langle \overline{\frac{k}{p^n}} \right\rangle = \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle \subsetneq G$. Como G é infinito e $\left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle \subsetneq G$, existe $\frac{r}{p^m} + \mathbb{Z} \in G$, com $m > n$ (caso contrário $\frac{r}{p^m} + \mathbb{Z} \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle \subsetneq G$), com $mdc(r, p) = 1$ (se $mdc(r, p) \neq 1$, como p é primo, teríamos que $p \mid r$, assim poderia ocorrer de $\frac{r}{p^m} + \mathbb{Z} \in \left\langle \overline{\frac{1}{p^n}} \right\rangle$).

Então $mdc(r,p)=1$ e p primo, implica que $mdc(r,p^m)=1$. Como $m>n$, temos $\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\in\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle$. Novamente como $mdc(r,p)=1$ segue que $\left\langle\overline{\frac{r}{p^m}}\right\rangle=\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle$. Assim:

$$\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\in\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle=\left\langle\overline{\frac{r}{p^m}}\right\rangle \implies \frac{k}{p^n}+\mathbb{Z}=\left(\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\right)\cdot k\in\left\langle\overline{\frac{r}{p^m}}\right\rangle.$$

Como $\frac{r}{p^m}+\mathbb{Z}\in G$, temos $\left\langle\overline{\frac{r}{p^m}}\right\rangle\subseteq G$. Logo $\frac{k}{p^n}+\mathbb{Z}\in G$. Absurdo. Portanto $G=\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Assim temos a sequência

$$\langle\overline{0}\rangle\subseteq\mathbb{Z}_p=\left\langle\overline{\frac{1}{p}}\right\rangle\subseteq\mathbb{Z}_{p^2}=\left\langle\overline{\frac{1}{p^2}}\right\rangle\subseteq\ldots\mathbb{Z}_{p^n}=\left\langle\overline{\frac{1}{p^n}}\right\rangle\subseteq\ldots$$

Portanto os $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ são da forma $\mathbb{Z}_{p^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

A seguir, apresentamos a definição de homomorfismo de módulos e sequências exatas, que serão importantes posteriormente.

Definição 2.3. *Sejam A e B dois R-módulos. Um* ***homomorfismo*** *(ou R-homomorfismo) de A em B é uma aplicação $f:A\to B$ tal que:*

1. *$\forall\ a_1,a_2\in A$ temos $f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)$;*
2. *$\forall\ r\in R$ e $\forall\ a\in A$ temos $f(ar)=f(a)\cdot r$.*

Se f for um homomorfismo injetor, dizemos que f é um ***monomorfismo****. Se f for injetor e sobrejetor, dizemos que f é um* ***isomorfismo****.*

Além disso, o conjunto $Ker(f)=\{a\in A\mid f(a)=0_B\}$ é definido como o ***núcleo*** *de f.*

Exemplo 2.6. *É fácil ver que $f:2\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ dado por $f(2z)=z$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.*

Finalizaremos essa seção apresentando a definição de sequência exata, que relaciona R-módulos com R-homomorfismos.

Definição 2.4. *Sejam $M_1,\ldots,M_{n+1}$ R-módulos e $f_i:M_i\to M_{i+1}$ homomorfismos de R-módulos, $\forall\, i=1,\ldots,n$. Dizemos que a sequência de homomorfismos*

$$M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}M_3\xrightarrow{f_3}\ldots\xrightarrow{f_n}M_{n+1}$$

é uma ***sequência exata*** *se para cada $i=1,\ldots,n-1$ vale $Im(f_i)=Ker(f_{i+1})$.*

Proposição 2.1. *[1, Proposition 1.1.3] Seja $0\to M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3\to 0$ uma sequência exata de R-módulos. São equivalentes:*

i) Existe um homomorfismo $\phi:M_3\to M_2$ tal que $g\circ\phi=Id_{M_3}$;

ii) Existe um homomorfismo $\rho:M_2\to M_1$ tal que $\rho\circ f=Id_{M_1}$.

Caso algumas dessas condições (consequentemente ambas) sejam satisfeitas, temos que $M_2=g^{-1}(\{0\})\oplus\phi(M_3)=f(M_1)\oplus\rho^{-1}(\{0\})$. Em particular, $M_2\simeq M_1\oplus M_3$.

Dizemos que uma sequência exata se **fatora** se ela satisfaz as condições da proposição anterior.

3 Resultados e Discussão

Nesta seção, vamos apresentar algumas discussões sobre módulos injetivos, módulos divisíveis e extensões essenciais de módulos, para podermos definir o fecho de um módulo injetivo. Por fim, apresentaremos alguns exemplos. Algumas demonstrações serão omitidas, para maiores detalhes o leitor poderá consultar [1] e [2].

3.1 Módulos injetivos

Definição 3.1. *Sejam A e B R-módulos à direita. Um R-módulo à direita I é dito* ***injetivo*** *se, para todo monomorfismo $g : A \to B$ de R-módulos e para todo R-homomorfismo $h : A \to I$ existe um R-homomorfismo $h' : B \to I$ tal que $h = h' \circ g$. De forma equivalente, dizemos que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "h'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

De maneira mais informal, podemos interpretar essa propriedade como: qualquer $h : A \to I$ pode ser "estendida" para B por meio de um homomorfismo $h' : B \to I$.

Exemplo 3.1. *Todo K-espaço vetorial V é injetivo.*

Sejam V um K-espaço vetorial, M e N K-espaços vetoriais e considere o seguinte diagrama, com $g : M \to N$ e $h : M \to V$ transformações lineares, conforme pode ser visto no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Queremos mostrar que existe $h' : N \to V$ tal que $h' \circ g = h$. Como g é injetora, $g(M)$ é um subespaço vetorial de N, logo existe um subespaço vetorial L tal que $N = g(M) \oplus L$.

Agora, considere o K-homomorfismo $h' : N = g(M) \oplus L \to V$ dado por $h'(g(m)+l) = h(m)$. É fácil ver que h' está bem definida, é um K-homomorfismo e além disso, $h'_{|g(M)} = h$, ou seja, $h' \circ g = h$. Portanto qualquer K-espaço vetorial V é injetivo.

Há outras formas para caracterizar módulos injetivos, como pode ser observado nos resultados abaixo, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1, Theorem 2.3] e [2, Proposition 3.4]. Destacamos que a equivalência $1 \Leftrightarrow 4$ é conhecida na literatura como Critério de Baer.

Teorema 3.1. *Seja M um R-módulo. São equivalentes:*

1. *M é injetivo.*
2. *Toda sequência exata $0 \to M \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ se fatora, em particular, $B \simeq M \oplus C$;*
3. *M é um somando direto de toda extensão dele próprio, isto é, se E é uma extensão própria de M ($M \subsetneq E$), então $E \simeq M \oplus X$ com $X \subseteq E$.*

4. *Para qualquer ideal $\mathcal{U}$ de R, qualquer R-homomorfismo $f : \mathcal{U} \to M$ pode ser estendido para um R-homomorfismo $f' : R \to M$.*

1. $\Rightarrow$ 4. Suponha que M seja um R-módulo injetivo e seja $\mathcal{U}$ um ideal de R. Podemos ver $\mathcal{U}$ e R como R-módulos, e assim, por hipótese, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{U} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "f'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Portanto, f é estendido de $\mathcal{U}$ para R por meio de f' e temos o desejado. Por outro lado, consideremos A e B R-módulos. Suponhamos sem perda de generalidade que A é um submódulo de B. Queremos mostrar a existência de h' de forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "h'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Para tal, vamos fazer uso do Lema de Zorn.[1] Construímos a família $F := \{C \text{ submódulo de } B \mid A \subseteq C \text{ e existe } h_j : C \to M \text{ tal que } h_{j_{|A}} = h\}$.

Observe que $F \neq \varnothing$, já que $A \in F$. Agora, considere uma subfamília $F' = (C_j)_{j \in J}$ totalmente ordenada de F, cuja relação de ordem é $C_i \leq C_j$ se $C_i \subseteq C_j$ e $h_{j_{|C_i}} = h_i$.

Vamos mostrar que F' possui um limitante superior em F. Assim considere $C' := \bigcup_{j \in J} C_j$. Observe que C' é submódulo de B. Além disso, se $C_j \in F'$, sabemos que $A \subseteq C_j$ e portanto como $C_j \subseteq C'$ segue $A \subseteq C'$. Agora, vamos construir $h' : C' \to M$ dada por $h'(x) = h_j(x)$ se $x \in C_j$. Observe que $h'(x) = h(x)$ se $x \in A$, assim $h'_{|A} = h$. Portanto $C' \in F$.

Agora vejamos que C' é limitante superior de F' em F. Dado $C_j \in F'$ qualquer, como $C' = \bigcup_{j \in J} C_j$ temos que $C_j \subseteq C'$. Além disso, $h'(x) = h_j(x)$ se $x \in C_j$, logo $h'_{|C_j} = h_j$. Portanto $C_j \leq C' \ \forall j \in J$ e, assim, C' é limitante superior de F' em F.

Pelo Lema de Zorn, F possui elemento maximal, logo existe um submódulo A_0 de B com $A \subseteq A_0$ tal que existe $h_0 : A_0 \to M$ e $h_{0_{|A}} = h$ e h_0 não pode mais ser estendido (A_0 é o maior submódulo de B com essa propriedade).

Vamos mostrar que $A_0 = B$. Suponha por absurdo que $A_0 \neq B$, logo existe $b \in B$ tal que $b \notin A_0$. Considere então o ideal a direita $\mathcal{U} = \{r \in R \mid br \in A_0\}$ de R. Vamos definir $f : \mathcal{U} \to M$ por $f(r) = h_0(br)$, $\forall r \in \mathcal{U}$. Temos que f é um homomorfismo, assim por hipótese existe um elemento $m \in M$ tal que $f(r) = mr$, $\forall r \in \mathcal{U}$. Agora, seja $A_1 = A_0 + bR$, e defina $h_1 : A_1 \to M$ por $h_1(a_0 + br) = h_0(a_0) + mr$, $\forall a_0 \in A_0$, $\forall r \in R$.

Sem muitas dificuldades é possível checar que h_1 está bem definida e é um R-homomorfismo. Além disso, $h_{1_{|A_0}} = h_0$. Como A_1 é submódulo de B que contém A temos que $A_1 \in F$ e $A_0 \leq A_1$. Absurdo, pois A_0 é o elemento maximal de F. Assim concluímos que $B = A_0$ e como $h_{0_{|A}} = h$, conseguimos estender h de forma a comutar o diagrama abaixo:

[1] **Lema de Zorn**: Seja F uma coleção não vazia de subconjuntos de um dado conjunto tal que toda subfamília ordenada de membros de F tem um limitante superior em F. Então F contém um elemento maximal.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "h_0"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Portanto M é injetivo.

Normalmente o critério de Baer é o resultado mais utilizado para demonstrar que um módulo é injetivo, como pode ser visto no exemplo abaixo.

Exemplo 3.2. *$\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.*

De fato, como os ideais de $\mathbb{Z}$ são da forma $n\mathbb{Z}$, seja $f : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ um $\mathbb{Z}$-homomorfismo, onde $n\mathbb{Z}$ é um ideal não nulo de $\mathbb{Z}$. Considere $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definido por $g(z) = \dfrac{f(n)z}{n}$. Vamos verificar que g é $\mathbb{Z}$-homomorfismo:

- $g(z_1 + z_2) = \dfrac{f(n)(z_1 + z_2)}{n} = \dfrac{f(n)z_1 + f(n)z_2}{n} = \dfrac{f(n)z_1}{n} + \dfrac{f(n)z_2}{n} = g(z_1) + g(z_2);$
- Seja $m \in \mathbb{Z}$, temos $g(zm) = \dfrac{f(n)(zm)}{n} = \dfrac{f(n)z}{n} \cdot m = g(z) \cdot m.$

Logo g é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo. Além disso, $g_{|_{n\mathbb{Z}}} = g(nz) = \dfrac{f(n) \cdot (nz)}{n} = f(n) \cdot z = f(nz)$. Portanto f pode ser estendido a um homomorfismo $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, assim $\mathbb{Q}$ é injetivo.

Exemplo 3.3. *O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ não é injetivo.*

Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$, $\mathcal{U} = 2\mathbb{Z}$ e $f : 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dado por $f(2n) = n$, $\forall\, 2n \in 2\mathbb{Z}$. Como vimos no Exemplo 2.6 que f é isomorfismo, qualquer extensão de f deixará de ser homomorfismo. De fato, suponha que $f' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ seja uma extensão de f, ou seja, $f'_{|_{2\mathbb{Z}}} = f$. Seja $m \in \mathbb{Z}$ um número ímpar. Então $m = f(2m) = f'(2m) = f'(m) \cdot 2 \implies f'(m) = \frac{m}{2}$. Como m é ímpar, $f'(m) = \frac{m}{2} \notin \mathbb{Z}$. Portanto pela negação do critério de Baer segue que $\mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

O próximo resultado é muito importante, pois é através dele que podemos afirmar que qualquer módulo sempre pode ser injetado em um módulo injetivo. A demonstração será omitida devido ao objetivo deste trabalho, porém o leitor interessado poderá consultar [2] para maiores detalhes.

Teorema 3.2. *[2, Theorem 3.20] Qualquer R-módulo à direita pode ser injetado em um R-módulo injetivo à direita.*

3.2 Divisibilidade

Nesta subseção, apresentaremos a noção geral de divisibilidade, que está relacionada ao conceito de módulos injetivos.

Definição 3.2. *Seja M um R-módulo à direita. Um elemento $m \in M$ é **divisível** se para qualquer $r \in R$ que não é um divisor de zero à esquerda[2], existe $x \in M$ tal que $m = xr$. Também dizemos que M é um **módulo divisível** provando que todo elemento de M é divisível.*

[2]Dizemos que um elemento $r \in R$ é um divisor de zero à esquerda se existir $x \neq 0 \in R$ tal que $rx = 0$.

Exemplo 3.4. *Note que* $\mathbb{Q}$ *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo divisível, já que* $\forall\ q \in \mathbb{Q}$, $q = \dfrac{a}{b}$ *para inteiros* $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ *e* $\forall z \in \mathbb{Z}$ *existe* $x = \dfrac{a}{bz} \in \mathbb{Q}$ *tal que* $q = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{bz} \cdot z = xz$.

Exemplo 3.5. $\mathbb{Z}$ *não é um* $\mathbb{Z}$*-módulo divisível dado que não existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tal que* $3 = x \cdot 2$.

Outra maneira de caracterizar módulos divisíveis será apresentada a seguir:

Proposição 3.1. *Seja* M *um* R*-módulo à direita. Então* M *é divisível se e só se* $M = Mr$ *para todo* r *que não é um divisor de zero à esquerda.*

Demonstração: Suponha que M é um R-módulo divisível e seja $r \in R$ de forma que r não é divisor de zero à esquerda. Como M é R-módulo, $Mr \subseteq M$. Por outro lado, seja $m \in M$. Como M é divisível, existe $x \in M$ tal que $m = xr$. Assim $m \in Mr$ e dessa forma $M \subseteq Mr$. Como r é arbitrário, concluímos que $M = Mr$, $\forall\ r \in R$ que não é divisor de zero à esquerda. Reciprocamente, suponha que $M = Mr$, $\forall\ r \in R$ que não é um divisor de zero à esquerda. Assim, dado $m \in M$, existe $x \in M$ tal que $m = xr$. Portanto M é divisível.

Proposição 3.2. *[1, Lemma 3.1.1] Seja* A *um submódulo de um* R*-módulo divisível* M*. Então o* R*-módulo quociente* $\dfrac{M}{A}$ *também é divisível.*

O seguinte resultado correlaciona módulos injetivos e módulos divisíveis:

Teorema 3.3. *Todo* R*-módulo injetivo é divisível.*

Demonstração: Seja M um R-módulo injetivo. Sejam $m \in M$ e $r \in R$ tal que r não é divisor de zero à esquerda. Note que rR é ideal à direita de R. Assim, vamos definir a aplicação $f : rR \to M$ dada por $f(rt) = mt$. Observe que f está bem definida, pois dados rt, rt' com $rt = rt'$ temos:

$$rt = rt' \implies r(t - t') = 0 \implies t - t' = 0 \implies t = t' \implies mt = mt' \implies f(tr) = f(t'r).$$

Agora, vamos mostrar que que f é R-homomorfismo. Note que para todo $\alpha, s, t \in R$ temos:

- $f(rt + rs) = f(r(t + s)) = m(t + s) = mt + ms = f(rt) + f(rs)$.
- $f((rt) \cdot \alpha) = f(r \cdot (t\alpha)) = m(t\alpha) = (mt)\alpha = f(rt) \cdot \alpha$.

Logo $F : rR \to M$ é um R-homomorfismo. Como M é injetivo, existe um R-homomorfismo $g : R \to M$ tal que $g_{|rR} = f$. Então $m = m \cdot 1 = f(r \cdot 1) = g(r \cdot 1) = g(1 \cdot r) = g(1) \cdot r \implies m = g(1) \cdot r$. Como conseguimos escrever $m = x \cdot r$, temos que m é um elemento divisível. Como m é qualquer, concluímos que M é um R-módulo divisível.

A recíproca deste teorema não é verdadeira, como pode ser observado no Exemplo 3.6:

Exemplo 3.6. *Sejam* $R = \mathbb{Z}[t]$ *e* $K = \mathbb{Z}(t)$ *seu corpo de frações. O* R*-módulo* $\dfrac{K}{R}$ *é divisível mas não é injetivo.*

Para provar que $\dfrac{K}{R}$ é divisível, basta provar que K é divisível, donde segue o resultado pela Proposição 3.2. Mas K é o corpo de frações de R, logo dado $p(t) \in K$ e $q(t) \in R \subseteq K$, existe $r(t) = p(t) \cdot q^{-1}(t) \in K$ de forma que $p(t) = (p(t) \cdot q^{-1}(t)) \cdot q(t)$. Assim K é divisível e consequentemente $\dfrac{K}{R}$ é divisível.

Agora vejamos que $\frac{K}{R}$ não é injetivo. Para isso usaremos a negação do critério de Baer. Considere assim o ideal $J_1 := \langle 2 \rangle \subseteq R$ e defina o homomorfismo $\phi : J_1 \to \frac{K}{R}$ por $\phi(2) = \frac{1}{t} + R$.

Considere também o ideal $J_2 := \langle t \rangle \subseteq R$ e o R-homomorfismo nulo $\rho_0 : J_2 \to \frac{K}{R}$ dado por $\rho_0(t) = 0+R$. Observe que $J_1 \cap J_2 = \langle 2t \rangle$ e $\phi(J_1 \cap J_2) = \{0+R\}$ pois $\phi(2t \cdot p(t)) = \frac{1}{t} \cdot t \cdot p(t) + R = p(t) + R = 0 + R$, $\forall\ p(t) \in R$. Agora, considere o R-homomorfismo $\overline{\phi} = J_1 + J_2 \to \frac{K}{R}$ dado por $\overline{\phi}(2p(t) + tq(t)) = \frac{p(t)}{t} + R$. Temos:

$$\begin{aligned}
2p(t) + tq(t) = 2p'(t) + tq'(t) \quad &\Rightarrow \quad 2(p(t) - p'(t)) = t(q'(t) - q(t)) \in J_1 \cap J_2 \\
&\Rightarrow \quad \phi(2(p(t) - p'(t))) = 0 + R \\
&\Rightarrow \quad \frac{p(t) - p'(t)}{t} + R = 0 + R \\
&\Rightarrow \quad \frac{p(t)}{t} + R = \frac{p'(t)}{t} + R \\
&\Rightarrow \quad \overline{\phi}(2p(t) + tq(t)) = \overline{\phi}(2p'(t) + tq'(t))
\end{aligned}$$

Logo $\overline{\phi}$ está bem definida. Agora, vamos mostrar que $\overline{\phi} : J_1 + J_2 \to R$ não pode ser estendido a um R-homomorfismo $\Phi : R \to \frac{K}{R}$. Caso existisse tal homomorfismo, teríamos $\Phi(1) = \Phi(2 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{t} + R = \frac{1}{2t} + R$, mas $0 + R = \rho_0(t) = \rho_0(0 + t) = \overline{\phi}(2 \cdot 0 + t \cdot 1) = \Phi_{|J_1+J_2}(2 \cdot 0 + t \cdot 1) = \Phi(t \cdot 1) = \Phi(1 \cdot t) = \Phi(1) \cdot t = (\frac{1}{2t} + R) \cdot t = \frac{t}{2t} + R = \frac{1}{2} + R \implies \frac{1}{2} - 0 \in R \implies \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}[t]$. Absurdo. Portanto $\frac{K}{R}$ não é injetivo.

Veremos a seguir que para domínios de ideais principais (DIP) a recíproca ocorre.

Teorema 3.4. *Seja R um DIP. Então um R-módulo M é divisível se e somente se é injetivo.*

Demonstração: A suficiência já foi demonstrada no Teorema 3.3. Reciprocamente, suponha que M é um R-módulo divisível e seja $f : I \to M$ um R-homomorfismo, onde I é um ideal à direita de R. Se I é o ideal nulo, f satisfaz a condição do critério de Baer. Assim considere o caso em que $I \neq (0)$. Dado que R é DIP, existe $a \in R$ não nulo tal que $I = aR$. Como M é divisível, $f(a) \in M$ e $a \in R - \{0\}$, existe $m \in M$ tal que $f(a) = ma$. Defina $g : R \to M$ por $g(r) = mr$. Vamos mostrar que g é um R-homomorfismo. Sejam $r, s, \alpha \in R$, temos:

- $g(r + s) = m(r + s) = mr + ms = g(r) + g(s)$;
- $g(r\alpha) = m(r\alpha) = (mr)\alpha = g(r)\alpha$.

Portanto g é um R-homomorfismo.

Note que $\forall\ ar \in aR = I$, temos $g(ar) = m(ar) = (ma)r = f(a)r = f(ar)$. Como o homomorfismo $g : R \to M$ é tal que $g_{|I} = f$, concluímos pelo critério de Baer que M é injetivo.

Exemplo 3.7. *Vamos mostrar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo. Como $\mathbb{Z}$ é DIP, basta mostrar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é divisível. Assim, seja $\frac{k}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$.*

- *Se* $mdc(m,p)=1$, *então* $mdc(m,p^n)=1$. *Logo existem* $a,b\in\mathbb{Z}$ *tais que* $am+bp^n=1$. *Desta maneira, temos:* $\left(\frac{ak}{p^n}+\mathbb{Z}\right)\cdot m=\frac{akm}{p^n}+\mathbb{Z}=\left(\frac{am}{p^n}+\mathbb{Z}\right)\cdot k=\left(\frac{1-bp^n}{p^n}+\mathbb{Z}\right)\cdot k=\left(\frac{1}{p^n}-b+\mathbb{Z}\right)\cdot k=\left(\frac{1}{p^n}+\mathbb{Z}\right)\cdot k=\frac{k}{p^n}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

- *Se* $mdc(m,p)\neq 1$, *podemos escrever* $m=v\cdot p^t$, *com* $mdc(v,p)=1$. *Dessa forma temos* $mdc(v,p^{n+t})=1$. *Logo existem* $a,b\in\mathbb{Z}$ *tais que* $av+b\cdot p^{n+t}=1$. *Então:* $\left(\frac{ak}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}\right)\cdot m=\left(\frac{ak}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}\right)\cdot vp^t=\frac{akvp^t}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}=\left(\frac{av}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}\right)\cdot kp^t=\left(\frac{1-bp^{n+t}}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}\right)\cdot kp^t=\left(\frac{1}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}\right)\cdot kp^t-\left(0+\mathbb{Z}\right)\cdot kp^t=\frac{kp^t}{p^{n+t}}+\mathbb{Z}=\frac{k}{p^n}+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Em ambos os casos encontramos $x+\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *tal que* $\frac{k}{p^n}+\mathbb{Z}=(x+\mathbb{Z})\cdot r$. *Em resumo, segue que* $\mathbb{Z}_{p^\infty}=\mathbb{Z}_{p^\infty}\cdot m$ *para todo inteiro positivo* m, *donde segue pela Proposição 3.1 que* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *é um* $\mathbb{Z}$*-módulo divisível e portanto injetivo.*

3.3 Fecho injetivo

Nesta subseção, apresentaremos a definição de fecho injetivo, bem como algumas propriedades interessantes que relacionam a maximalidade de extensões essenciais com a minimalidade de extensões injetivas, como será visto na Proposição 3.5, que é último resultado apresentado neste trabalho.

Definição 3.3. *Seja* M *um submódulo de um* R*-módulo* E. *Dizemos que* E *é uma extensão essencial de* M *(ou que* M *é um submódulo essencial de* E*) provando que para todo submódulo não nulo* S *de* E *vale* $M\cap S\neq\{0\}$.

Um exemplo famoso de extensão é essencial é $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$, como será mostrado na sequência.

Exemplo 3.8. $\mathbb{Q}$ *é uma extensão essencial de* $\mathbb{Z}$ *como* $\mathbb{Z}$*-módulos.*

Seja S um submódulo não nulo de $\mathbb{Q}$. Assim, existe $s\neq 0\in S\subseteq\mathbb{Q}$ da forma $s=\frac{a}{b}$, com $a,b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$ e $a\neq 0$, já que $s\neq 0$. Dessa forma, $a=sb\in\mathbb{Z}$. Mas como $s\in S$, $0\neq a=sb\in S$. Assim $\mathbb{Z}\cap S\neq\{0\}$, e como S é qualquer, concluímos que $\mathbb{Q}$ é uma extensão essencial de $\mathbb{Z}$.

Além de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$, outro exemplo de extensão essencial é $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ sobre $\mathbb{Z}_{p^n}$.

Exemplo 3.9. *No Exemplo 2.4 vimos que os únicos* $\mathbb{Z}$*-submódulos de* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *são da forma* $\mathbb{Z}_{p^n}$. *Agora, vamos mostrar que* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *é uma extensão essencial de* $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.

De fato, seja M *um submódulo não nulo de* $\mathbb{Z}_p^\infty$ *e seja* $\mathbb{Z}_{p^n}\subseteq\mathbb{Z}_p^\infty$. *Sabemos que* $M=\mathbb{Z}_{p^m}=\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle$, *para algum* $m\in\mathbb{N}$. *Se* $m<n$, *temos* $M\cap\mathbb{Z}_{p^n}=\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle\cap\left\langle\overline{\frac{1}{p^n}}\right\rangle=\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle\neq\{0\}$. *Se* $m\geq n$, *temos* $M\cap\mathbb{Z}_{p^n}=\left\langle\overline{\frac{1}{p^m}}\right\rangle\cap\left\langle\overline{\frac{1}{p^n}}\right\rangle=\left\langle\overline{\frac{1}{p^n}}\right\rangle\neq\{0\}$.

Portanto, como M *é arbitrário, segue que* $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ *é uma extensão essencial de* $\mathbb{Z}_{p^n}$.

Uma propriedade muito importante satisfeita pelas extensões essenciais é a propriedade transitiva, como pode ser visto no Lema 3.1.

Lema 3.1. *[1, Lemma 4.2.1, p 37] Sejam M, E e E' R-módulos tais que $M \subseteq E \subseteq E'$. Então M é um submódulo essencial de E' se e somente se M é um submódulo essencial de E e E é um submódulo essencial de E'.*

Proposição 3.3. *Seja M um submódulo de um R-módulo E. Então E é uma extensão essencial de M se e somente se para qualquer $a \neq 0 \in E$, existe $r \in R$ tal que $0 \neq ar \in M$.*

Demonstração: Seja $a \in E$ não nulo e considere o R-submódulo aR de E. Como $a \neq 0$, $aR \neq \{0\}$. Por hipótese, M é um submódulo essencial de E, logo $M \cap aR \neq \{0\}$, o que implica que existe $r \in R$ tal que $ar \neq 0 \in M$. Por outro lado, seja M um submódulo de E, queremos mostrar que E é uma extensão essencial de M. Seja I um submódulo qualquer de E não nulo. Como $I \neq \{0\}$, existe $a \neq 0 \in I$. Como $a \in I \subseteq E$, por hipótese existe $r \in R$ tal que $ar \neq 0 \in M$. Mas $a \in I$, e como I é submódulo de E, temos $ar \neq 0 \in I$. Assim $I \cap M \neq \{0\}$ e como I é arbitrário, segue que E é uma extensão essencial para M.

Exemplo 3.10. *O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{R}$ não é uma extensão essencial do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$, visto que não há $z \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \neq z\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.*

Outra forma de caracterizar módulos injetivos é por meio de extensões essenciais próprias, como pode ser visto no próximo teorema.

Teorema 3.5. *Um R-módulo M é injetivo se e somente se não tem extensões essenciais próprias.*

Demonstração: Suponha que M é um R-módulo injetivo e seja E uma extensão própria de M, ou seja, $M \subsetneq E$. Considere a sequência exata $0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} N \to 0$, onde $i : M \to E$ é o homomorfismo inclusão e $\pi : E \to N$ o homomorfismo canônico. Como M é injetivo, pelo Teorema 3.1, a sequência exata se fatora, logo $E = M \oplus N$. Dessa forma $M \cap N = \{0\}$, e como M e N são submódulos de E cuja interseção é trivial, concluímos que E não é uma extensão essencial de M. Como E é arbitrária, segue que M não tem extensões essenciais próprias. Reciprocamente, assuma que M não tem extensões essenciais próprias. Por 3.2, existe um R-módulo I injetivo tal que $M \subseteq I$. Agora considere a família $F = \{N \text{ submódulo de } I \mid N \cap M = \{0\}\}$, parcialmente ordenada por inclusão. Observe que F é não vazia, pois $N = \{0\} \in F$.

Sejam $F' = (N_\alpha)_{\alpha \in J}$ uma subfamília de F totalmente ordenada e $L = \bigcup_{\alpha \in J}(N_\alpha)$, que é um submódulo de I. Em especial, L é limitante superior de F', pois dado qualquer submódulo $N_\alpha \in F'$, temos $N_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in J}(N_\alpha) = L$. Agora, vamos mostrar que $L \in F$. Seja $x \in \bigcup_{\alpha \in J}(N_\alpha) \cap M$. Assim $x \in \bigcup_{\alpha \in J}(N_\alpha)$ e $x \in M$. Como $x \in \bigcup_{\alpha \in J}(N_\alpha)$, $x \in N_{\alpha'}$ para algum $\alpha' \in J$. Além disso, $N_{\alpha'} \in F$ e assim $N_{\alpha'} \cap M = \{0\}$. Portanto $x = 0$ e concluímos que $L \in F$. Mostramos então que toda subfamília de F tem limitante superior L, e como $L \in F$, pelo Lema de Zorn concluímos que F tem um elemento maximal $S \subseteq I$ para o qual vale $S \cap M = \{0\}$.

Consideremos $\pi : I \to \dfrac{I}{S}$ o homomorfismo canônico, dado por $\pi(m) = m + S \;\forall\, m \in M$, e observemos que $\pi(M) = \dfrac{M+S}{S}$. Afirmamos que qualquer submódulo $\dfrac{S'}{S} \subseteq \dfrac{I}{S}$ intersecta $\pi(M)$ não trivialmente. De fato, suponha que exista um submódulo $\dfrac{S'}{S}$ não nulo tal que $\dfrac{S'}{S} \cap \pi(M) = \{0\}$. Assim $\dfrac{S'}{S} \cap \dfrac{M+S}{S} = \{0\} \implies (S' \cap M) \subseteq (S' \cap (M+S)) \subseteq S$. Observe que $S' \cap M \neq \{0\}$, pois S é o maior submódulo para o qual vale $S \cap M = \{0\}$. Assim, se denotarmos $S' \cap M = B$, teremos $B \subseteq M$ e $B \subseteq S$, logo $S \cap M \neq \{0\}$, contradição.

Logo qualquer submódulo $\dfrac{S'}{S}$ intersecta $\pi(M)$, portanto $\pi(M) = \dfrac{M+S}{S}$ é submódulo essencial de $\dfrac{I}{S}$. Afirmamos agora que $\dfrac{M+S}{S} = \dfrac{I}{S}$. De fato, pelo segundo teorema do homomorfismo[3], temos $\dfrac{M+S}{S} \simeq \dfrac{M}{M \cap S} \simeq M$. O fato que M é um submódulo essencial de $\dfrac{I}{S}$ implica $M \simeq \dfrac{M+S}{S} = \dfrac{I}{S}$, já que por hipótese M não possui extensões essenciais próprias. Logo $M = \dfrac{I}{S}$, o que nos dá $M + S = I$, e como $M \cap S = \{0\}$, concluímos que $I = M \oplus S$.

Como I é injetivo e M é um somando direto, concluímos que M é injetivo.

Definição 3.4. *Um R-módulo B é um **fecho injetivo** de M provando que é uma extensão essencial injetiva de M. Notação: $B = E(M)$.*

Exemplo 3.11. *Dos exemplos 3.2 e 3.8 concluímos que o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ é um fecho injetivo de $\mathbb{Z}$.*

Teorema 3.6. *Seja M um R-módulo e B uma extensão essencial de M. Então B é um fecho injetivo de M se e somente se C não é uma extensão essencial de M, para toda extensão própria C de B.*

Demonstração: Suponha que B é fecho injetivo de M. Seja C uma extensão própria arbitrária de B. Como B é injetivo, existe um submódulo $\{0\} \neq X \subseteq C$ tal que $C = B \oplus X$. Observe que $B \cap X = \{0\}$. Assim:

$$X \cap M = X \cap (B \cap M) = (X \cap B) \cap M = \{0\} \cap M = \{0\}.$$

Como X é um submódulo não nulo de C e $X \cap M = \{0\}$ segue que C não é uma extensão essencial de M. Reciprocamente, suponha que para toda extensão própria C de B, C não é uma extensão essencial de M. Como B é uma extensão essencial de M e C não é uma extensão essencial de M segue que C não é uma extensão essencial de B. Assim, B não tem extensões essenciais próprias. Portanto, pelo Teorema 3.5, segue que B é injetivo.

Dizemos neste caso que B é uma extensão essencial maximal, cuja existência está garantida pelo teorema a seguir.

Teorema 3.7. *[2, Lemma 3.29, p 75] Todo R-módulo M tem uma extensão essencial maximal.*

Como $\mathbb{Q} = E(\mathbb{Z})$, observe que o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{R}$ não é uma extensão essencial maximal de $\mathbb{Z}$. Além disso, há uma correspondência entre a maximalidade de extensões essenciais e a minimalidade de extensões injetivas.

Lema 3.2. *[1, Lemma 4.5.1, p 40] Seja B uma extensão injetiva de um R-módulo M. Então existe um submódulo X de B tal que X é um fecho injetivo de M.*

Neste caso podemos interpretar B como a menor extensão injetiva, ou extensão injetiva minimal. Agora estamos em condições de garantir a existência do fecho injetivo para qualquer R-módulo:

Corolário 3.1. *Todo R-módulo tem um fecho injetivo.*

[3] Segundo teorema do homomorfismo: Sejam M um R-módulo e M_1, M_2 submódulos de M. Então $\dfrac{M_1}{M_1 \cap M_2} \simeq \dfrac{M_1 + M_2}{M_2}$.

Demonstração: Seja M um R-módulo. Pela Proposição 3.2, M tem uma extensão injetiva B. Pelo Lema 3.2, existe um submódulo X de B tal que X é fecho injetivo de M. Portanto M tem fecho injetivo.

Teorema 3.8. *[1, Theorem 4.6, p 41] Seja M um submódulo de um R-módulo injetivo B. Então, B é fecho injetivo de M se e somente se N não é injetivo, para todo submódulo próprio N de B contendo M.*

Além disso, o próximo resultado nos fornece a unicidade do fecho injetivo (a menos de isomorfismo).

Teorema 3.9. *Sejam B_1 e B_2 fechos injetivos de um R-módulo M. Então existe um R-isomorfismo $\theta : B_1 \to B_2$ tal que $\theta(m) = m$, $\forall m \in M$.*

Demonstração: Sejam B_1 e B_2 fechos injetivos de um R-módulo M. Como B_2 é injetivo, existe um R-homomorfismo $\theta : B_1 \to B_2$ tal que $\theta(m) = m$, $\forall\, m \in M$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & B_1 \arrow[dl, "\theta"] \\
 & B_2 &
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que θ é um isomorfismo. De fato, seja $x \in Ker\,\theta \cap M$. Como $\theta_{|M} = Id$, temos $\theta(x) = x$ e $\theta(x) = 0$ (já que $x \in Ker\,\theta$), logo $x = 0$ e assim $Ker\,\theta \cap M = \{0\}$. Como B_1 é fecho injetivo de M, B_1 é uma extensão essencial de M, logo, para que $ker\,\theta \cap M = \{0\}$ devemos ter $Ker\,\theta = \{0\}$. Portanto θ é injetor.

Agora, suponha por contradição que $Im(\theta) \neq B_2$. Assim existe $y \notin Im(\theta)$. Logo $Im(\theta)$ é um submódulo próprio de B_2. Agora, como $\theta_{|M} = Id$, temos $M \subseteq Im(\theta)$. Como B_2 é o fecho injetivo de M e $M \subseteq Im(\theta)$ segue, pelo Teorema 3.8, que $Im(\theta)$ não é injetivo. Porém, como θ é um homomorfismo injetor, temos $B_1 \simeq Im(\theta)$, logo $Im(\theta)$ é um módulo injetivo. Contradição. Portanto, θ é R-isomorfismo e $\theta(m) = m$, $\forall\, m \in M$.

Proposição 3.4. *Seja M um R-módulo. Então M é injetivo se e somente se M é seu próprio fecho injetivo, isto é, $E(M) = M$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.2, M tem fecho injetivo $E(M)$. Suponha então que M é injetivo e, por absurdo, assuma que $M \neq E(M)$. Como $M \subsetneq E(M)$, M não é injetivo pelo Teorema 3.8. Absurdo. Portanto $M = E(M)$. Por outro lado, se $E(M) = M$, como $E(M)$ é injetivo, segue que M é injetivo.

Observe que módulos essenciais sempre têm o mesmo fecho injetivo, que é o maior módulo essencial, ou seja, é a extensão essencial maximal. Logo, se I é o fecho injetivo de um R-módulo M, I será a extensão maximal de M e também a extensão injetiva minimal. Isso nos permite caracterizar o fecho injetivo de um R-módulo, como pode ser observado na Proposição 3.5.

Proposição 3.5. *Para R-módulos $M \subseteq I$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *I é uma extensão maximal de M;*
2. *I é injetivo e essencial sobre M;*
3. *I é o fecho injetivo de M;*

4. I é injetivo minimal sobre M.

Demonstração:

1) $\Rightarrow$ 2) Como I é uma extensão essencial maximal de M, I não admite extensões essenciais próprias (se existisse uma extensão essencial própria X de I, pela transitividade, teríamos que M é um submódulo essencial de X, o que contraria a maximalidade de I). Logo, pelo Teorema 3.5, segue que I é injetivo. Portanto, I é injetivo e essencial sobre M.

2) $\Rightarrow$ 3) Segue da definição **??**.

3) $\Rightarrow$ 4) Segue do Teorema 3.5.

4) $\Rightarrow$ 1) Pelo Teorema 3.7, existe um módulo E que é uma extensão essencial maximal de M. Observe que $E \subseteq I$, caso contrário, teríamos um absurdo pelo fato de I ser injetivo (como I é injetivo, I não admite extensões essenciais próprias). Como já provamos 1) $\Rightarrow$ 2), segue que E é injetivo e essencial sobre M. Por hipótese, I é injetivo minimal, e assim $I = E$. Portanto I é extensão essencial maximal de M.

Exemplo 3.12. *Vimos no Exemplo 3.11 que $\mathbb{Q}$ é o fecho injetivo de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulos. De forma mais geral, se R é um domínio de integridade com corpo de frações K, temos $E(R) = K$, vistos como R-módulos.*

Para finalizar nosso trabalho, mostraremos que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é o fecho injetivo de $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

Exemplo 3.13. *Vimos no Exemplo 3.7 que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo e no Exemplo 3.9 que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é extensão essencial de $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, concluímos pela Proposição 3.5 que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ é o fecho injetivo de $\mathbb{Z}_{p^n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

4 Conclusão

Este trabalho teve por objetivo estudar o fecho injetivo de R-módulos. Para tal, realizamos um estudo bibliográfico dos materiais [1], [2] e [3]. Como pode-se observar, a noção do fecho injetivo está intimamente ligada aos módulos divisíveis e extensões essenciais. Também apresentamos o exemplo do fecho injetivo do grupo de Prüfer, que normalmente não é estudado durante a graduação. Concluímos que a noção do fecho injetivo é muito importante para a teoria de módulos injetivos, como pode ser visto ao longo deste trabalho. Por fim, agradecemos ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] CAMPBELL, R. N. **Injective modules and divisible groups**. 2015. 71 p. Master's thesis (Master of science) - University of Tennessee, 2015. Disponível em: `https://trace.tennessee.edu/utk_gradthes/3350/`. Acesso em: 4 abr. 2021.

[2] LAM, T. Y. **Lectures on modules and rings**. New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1999.

[3] RÍOS, D. F. B. **Módulos injetivos e a dualidade de Matlis**. 2015. 92 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

PROBLEMA DE MISTURA: CONCENTRAÇÃO DE UM PRODUTO QUÍMICO EM UMA LAGOA

Adrieli Modkowski Petreconi Moretti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrielimodkowskipetreconi@gmail.com

Vanderlei Galina
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
vanderleigalina@utfpr.edu.br

Jocelaine Cargnelutti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
jocelainecargne@utfpr.edu.br

Resumo

Muitos problemas reais são modelados matematicamente por meio de equações diferenciais e podem ser solucionados por métodos analíticos, numéricos e experimentais. Desta forma, o presente trabalho tem o objetivo de realizar uma pesquisa bibliográfica bem como estudar e resolver o problema da concentração de um produto químico em uma lagoa. A resolução é alcançada de forma analítica e de forma numérica da equação diferencial ordinária que representa o problema. Os resultados obtidos analiticamente foram comparados com as aproximações numéricas obtidas pela simulação com vários valores do passo computacional. O método de Euler, utilizado na simulação computacional, se mostra de simples aplicação e de excelente precisão para o problema de mistura abordado.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Problema de mistura. Problema de valor inicial. Método de Euler.

1 Introdução

No decorrer do tempo muitos estudiosos seguem na busca de tentar explicar e prever fenômenos da natureza, e em diversas áreas do conhecimento faz-se necessário o uso de equações diferenciais como uma importante ferramenta no estudo de problemas reais. Neste trabalho será seguida esta mesma linha, por meio dos conhecimentos em equações diferenciais, um problema envolvendo misturas de substâncias será estudado e analisado de forma analítica e também com aproximações utilizando um método numérico.

Muitos eventos físicos, biológicos e até mesmo sociais são descritos matematicamente por meio de modelos matemáticos obtidos e validados por meio de dados experimentais. Segundo Brannan e Boyce (2008)[1], as equações diferenciais tem grande importância como instrumento de investigação entre esses eventos do mundo real e sua modelação, tornando possível soluções, já que relacionam as variáveis e os parâmetros abarcados no problema.

De acordo com Brannan e Boyce (2008) [1] a partir do problema investigado, é possível formular a equação diferencial que o descreve, ou modela. O processo de modelagem do problema requer atenção a alguns passos, que pode determinar o quão satisfatório será o modelo construído. A sua construção provavelmente será a parte mais difícil do processo. Inicia-se com a identificação das variáveis dependentes e independentes, e a atribuição de letras para representa-las, seguindo com a escolha das unidades de medida mais convenientes de cada variável. A seguir, é preciso formar as hipóteses, e em algum momento será necessário inserir alguns parâmetros físicos, exteriores à matemática [2].

Segundo Zill (2012) [2] um modelo matemático é considerado razoável se suas soluções forem coerentes com os dados obtidos experimentalmente (sempre que possível), ou fatos conhecidos sobre o comportamento do sistema. Alguns modelos seguem com uma equação de fácil resolução, no entanto, alguns problemas mais complexos, podem resultar em um sistema de equações muito mais complicado [1].

Encontram-se aplicações de equações diferenciais na matemática e muitos estudos sobre as formas de se resolver uma equação diferencial. É possível simular por exemplo, o movimento de uma onda no mar por meio de equações diferenciais, no entanto existem situações em que não é possível encontrar respostas exatas, com isso, é preciso recorrer aos métodos numéricos, análises teóricas e técnicas experimentais [3, 4].

O cálculo numérico resolve problemas matemáticos por meio de métodos numéricos, implementados por programas de computadores, chamados de solucionador numérico. Esses programas podem representar visualmente a aproximação da curva integral que se ajusta aos dados obtidos, os resultados encontrados sempre serão numéricos [2].

Os métodos numéricos permitem encontrar uma boa aproximação do resultado exato, mesmo com a inexistência da possibilidade de uma solução analítica. Esses métodos têm grande importância na resolução de problemas em várias áreas do conhecimento, seja na matemática, engenharia ou na ciência [5].

O método numérico mais antigo para a aproximação da solução de uma equação diferencial é o método de Euler. Também é um dos métodos mais simples e justamente pelo fato de ser o mais simples entre os métodos existentes, é uma boa opção para começar a resolver equações diferenciais, por aproximações numéricas [1].

Algumas equações diferenciais são de difícil resolução, podendo até não existir uma solução analítica, e se este for o caso, é interessante saber isso antes de gastar muito tempo buscando uma solução que não existe. Porém, se uma equação diferencial resultante de um modelo matemático de um problema físico não tiver solução matemática consistente com a observação do sistema físico descrito pelo modelo, então, muito provavelmente algo deu errado em sua formulação, e cabe ao pesquisador responsável tentar localizar onde há divergência [1, 6].

Ao obter a solução de um modelo, é interessante compará-la com dados obtidos experimentalmente, sempre que possível. Com isso é possível julgar o quão aceitável e condizente é o resultado encontrado, com relação ao problema estudado. Alguns problemas apresentam uma possibilidade maior de realização experimental do que outros, e mesmo assim, existem muitos fatores que podem conduzir ao erro, ou a um distanciamento significativo do resultado esperado, pois experimentalmente, as taxas podem sofrer grandes variações, nesses casos, fica a cargo do pesquisador julgar e validar o resultado [1].

De acordo com Zill (2012) [2], a mistura de duas soluções salinas com concentrações diferentes dá origem a uma equação diferencial de primeira ordem. Nesses problemas são realizadas algumas simplificações para facilitar os cálculos, por exemplo, supõe-se que as substâncias sejam bem misturadas no recipiente em que serão depositadas, normalmente um tanque de mistura.

A maioria dos problemas envolvendo mistura são hipotéticos, já que não há dados experimentais para comparação dos resultados. Modelos desse tipo são usados, em problemas envolvendo o estudo do comportamento de um remédio na corrente sanguínea, ou em algum órgão do corpo, e também em problemas ambientais referentes a poluentes depositados em uma lagoa. É possível encontrar aplicações do modelo em processos industriais, que em algum momento precisam unir substâncias distintas para dar continuidade ao processo [1, 6].

Neste trabalho será realizado um estudo acerca de um problema envolvendo a concentração de um produto químico em uma lagoa. A resolução será feita por meio de um método analítico e um método numérico. Quanto a solução numérica, será utilizado o software científico livre Scilab, o qual disponibiliza uma linguagem de programação interpretada onde será feita a implementação do método numérico aplicado ao problema proposto.

2 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

O computador é uma ferramenta muito importante no estudo e na resolução de equações diferenciais. Por meio de algoritmos numéricos é possível encontrar soluções muito próximas do real. Softwares para geração de gráficos são utilizados para visualização da solução obtida, seja ela de forma numérica ou analítica, o que facilita a análise e interpretação dos resultados. Com a popularização dos computadores pessoais ficou mais acessível ter esse recurso. Alguns softwares são disponibilizados gratuitamente e são extremamente poderosos, podendo realizar uma grande quantidade de operações matemáticas [7].

Não é possível obter a solução analítica na maioria dos problemas envolvendo equações diferenciais, ou o processo para obtê-la é muito complicado, com isso os métodos numéricos são uma excelente opção para determinar aproximações eficientes. Um dos métodos numéricos mais simples e antigos que existe para resolução de equações diferenciais é o método de Euler, desenvolvido pelo matemático Leonhard Euler em meados de 1768, também conhecido como o método da reta tangente. Este método resolve equações diferenciais com uma boa aproximação e pode ser calculado por meio de programas computacionais [8].

Há duas categorias amplas de métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial. Os métodos de passo único - ao qual o método de Euler pertence - conhecidos como técnicas de Runge-Kutta. Permitem calcular uma predição futura y_{i+1}, baseando-se apenas na informação de um único ponto y_i, sem a necessidade de outra informação obtida anteriormente. Já os métodos de passo múltiplo, utilizam mais de uma informação dos passos anteriores, o que os faz prosseguir com maior eficiência a trajetória da solução, uma vez que exigem valores adicionais de y além da etapa i, ou seja, usa a informação de vários outros pontos anteriores como base para encontrar novos valores [9].

Os métodos de passo único podem ser expressos na forma geral,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h, \tag{1}$$

onde ϕ é a inclinação, também conhecida como função incremento, y_{i+1} é novo valor a ser encontrado, y_i é o valor antigo, e h é o tamanho do passo. A estimativa da inclinação ϕ é utilizada para extrapolar de um valor antigo, para um novo valor, em uma determinada distância h. Essa fórmula pode ser aplicada passo a passo, e assim, traçar a trajetória da solução para o futuro. A forma mais simples de obter uma estimativa da inclinação na forma da derivada primeira no ponto (x_i, y_i), é por meio da equação diferencial, ou seja, a inclinação no início do intervalo, é encontrada a partir da aproximação da inclinação média em todo o intervalo [9].

Seja um problema de valor inicial, segundo Boyce e DiPrima (2012)[7], a maioria dos problemas deste tipo não podem ser solucionados analiticamente, uma alternativa nestes casos é calcular valores aproximados da solução $y = \phi(x)$ do problema de valor inicial para valores selecionados de x. O gráfico da solução contém o ponto (x_0, y_0), que é a condição inicial do PVI, e a inclinação da reta tangente ao gráfico nesse ponto é $f(x_0, y_0)$. Assim, a equação que representa a reta tangente à curva solução no ponto (x_0, y_0), é representada por,

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Quanto menor o intervalo considerado, melhor será a aproximação do resultado. Se $x = x_1$ estiver próximo o suficiente de x_0, é possível fazer a aproximação $\phi(x_1) \approx y_1$, com isso,

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0). \tag{3}$$

Em cada etapa é utilizado o valor de y aproximado para determinar o coeficiente angular para a próxima aproximação, assim sucessivamente. A expressão geral para a função de iteração y_{n+1}, em função de x_n, x_{n+1} e y_n é,

$$y_{n+1} \approx y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

A partir de um problema de valor inicial de primeira ordem, o método de Euler inicia um processo iterativo, onde a partir da solução conhecida $y(x_0)$, encontra-se a solução aproximada y_1. Conhecida a aproximação y_1, obtém-se y_2, e assim sucessivamente. Essas soluções aproximadas são dadas em pontos específicos de um intervalo de solução. Aproximações mais precisas podem ser obtidas com a diminuição do intervalo h. A Figura 1 ilustra o método de Euler de forma gráfica.

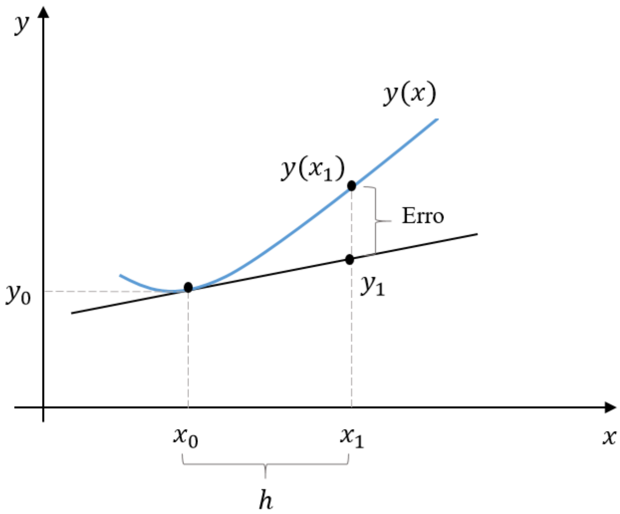


Figura 1: Método de Euler graficamente.
Fonte: Os autores (2021).

Contudo, a solução numérica de uma equação diferencial por meio do método de Euler, apresenta dois tipos de erros, o erro de truncamento e o erro de arredondamento. O erro de truncamento é causado pelas técnicas usadas para aproximar os valores de y, já o erro de arredondamento, é resultante da limitação de algarismos significativos representados no computador. O erro de truncamento se ramifica em duas partes, o erro de truncamento local, que é resultante da aplicação do método em questão em um único passo, e o erro de truncamento propagado, que é a junção dos erros das aproximações dos passos anteriores. A soma destes dois últimos erros, é chamada de erro global, ou erro total [10].

Segundo Chapra (2013) [10], pode-se deduzir o método de Euler diretamente da expansão em série de Taylor. Para isso a equação a ser integrada deve ter a forma geral $dy/dx = f(x, y)$, onde $dy/dx = y'$ com x e y sendo as variáveis independente e dependente, respectivamente. Se a função que descreve o comportamento de $y(x)$, ou seja, a solução, for composta por derivadas contínuas, então ela pode ser representada por uma expansão em série de Taylor em torno de um valor inicial (x_i, y_i), como na equação (5).

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + ... + \frac{y_i^{(n)}}{n!}h^n + R_n, \tag{5}$$

onde $h = x_{i+1} - x_i$ e R_n é o resto dado por,

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \tag{6}$$

com ξ presente em algum ponto do intervalo entre x_i e x_{i+1}. Outra opção é substituir a equação $dy/dx = f(x, y)$ em (5), com isso obtém-se,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1}), \tag{7}$$

onde $O(h^{n+1})$ diz respeito ao erro de truncamento, que é proporcional ao tamanho do passo elevado a $(n+1)$-ésima potência.

De acordo com Chapra (2013) [10], a partir da comparação das equações (1) e (7), observa-se que o método de Euler corresponde a série de Taylor até o termo $f(x_i, y_i)h$ com este incluso. Atribui-se ao erro de truncamento no método de Euler, os termos restantes na série de Taylor que não foram incluídos na equação (1). Subtrai-se a fórmula de Euler da expansão por série de Taylor, com isso obtém-se o seguinte resultado que representa o erro de truncamento local,

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1}). \tag{8}$$

Para h suficientemente pequeno, os termos de ordem superior na equação (8) geralmente são desprezíveis, com isso (8) torna-se,

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2, \tag{9}$$

ou ainda,

$$E_a = O(h^2), \tag{10}$$

onde E_a é o erro de truncamento local aproximado.

3 CONCENTRAÇÃO DE UM PRODUTO QUÍMICO EM UMA LAGOA

Neste trabalho será realizado um estudo sobre a concentração de um produto químico em uma lagoa. O problema em estudo foi resolvido e forma analítica e também de forma numérica utilizando o método de Euler. A implementação computacional foi realizada pelo software Scilab, para gerar uma sequência de soluções aproximadas, de maneira iterativa.

A seguir faz-se uma descrição do estudo de caso abordado, juntamente com suas respectivas soluções analítica e numérica.

3.1 Características do problema

Nesta aplicação, considera-se a concentração de um poluente em uma lagoa. Inicialmente, será construído um modelo matemático deste fluxo de água, para obter a concentração do produto químico na lagoa em qualquer instante de tempo. A solução analítica será determinada pelo método do fator integrante, e a solução numérica, pelo método de Euler.

Considera-se que uma lagoa contém inicialmente 10 milhões de galões de água fresca. Em seguida, flui para a lagoa, água de um rio contendo um produto químico indesejável a uma taxa de 5 milhões de galões por ano e a mistura sai da lagoa através de um canal à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t, medido em anos, de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$ g/gal (gramas por galão) [11].

Para construir um modelo matemático que descreva esse fluxo, e assim, determinar a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante, será necessário realizar algumas simplificações. Primeiramente, supõe-se que o nível de água na lagoa permanece sempre constante a 10^7 galões, já que os fluxos de entrada e saída são iguais. Supõe-se que as variações na quantidade de produto químico são devidas somente aos fluxos de entrada e saída e ao entrar na lagoa mistura completamente a água, tornando-se homogênea e bem distribuída. Com isso, a taxa de variação do produto químico na lagoa é igual à taxa segundo a qual o produto químico está fluindo para dentro da lagoa, menos a taxa segundo a qual o produto flui para fora.

Seja $Q(t)$ a massa do produto químico, medida em gramas, a taxa líquida que representa a variação de $Q(t)$ é dada por,

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída}). \tag{11}$$

A taxa de produto químico que está entrando na lagoa é dada por,

$$\text{taxa de entrada} = (5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano } (2 + \text{sen}(2t)) \text{ g/gal}. \tag{12}$$

A concentração de produto químico na lagoa é de $Q(t)/10^7$ g/gal, desse modo, a taxa de saída é,

$$\text{taxa de saída} = (5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano } [Q(t)/10^7] \text{ g/gal} = Q(t)/2 \text{ g/ano}. \tag{13}$$

Com essas informações, a equação (11) é reescrita como,

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \cdot 10^6)(2 + \text{sen}(2t)) - \frac{Q(t)}{2}, \tag{14}$$

onde cada termo tem unidades de g/ano.

Como inicialmente não há produto químico na lagoa, a condição inicial é,

$$Q(0) = 0. \tag{15}$$

Com isso, tem-se o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = (5 \cdot 10^6)(2 + \text{sen}(2t)) - \dfrac{Q(t)}{2}, \\ Q(0) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Para simplificar os coeficientes, convém introduzir uma nova variável dependente definida por $q(t) = Q(t)/10^6$ ou então $Q(t) = 10^6 q(t)$. Isso significa que $Q(t)$ é medida em milhões de gramas, ou megagramas. Substituindo a nova variável na equação (16), o fator 10^6 é cancelado. Transpondo o termo que envolve $q(t)$ para o lado esquerdo da igualdade, o PVI em (16) é reescrito como,

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{2}q(t) = 10 + 5\,\text{sen}(2t), \\ \qquad q(0) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

3.2 Solução analítica

A equação diferencial em (17) é uma equação linear de primeira ordem, que pode ser resolvida pelo método do fator integrante. O primeiro passo para sua resolução é multiplicá-la por uma função $\mu(t)$ que ainda não é conhecida,

$$\mu(t)\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}\,\mu(t)\,q(t) = \mu(t)\,(10 + 5\,\text{sen}(2t)), \tag{18}$$

em seguida, deve-se escolher $\mu(t)$ em que a expressão à esquerda do sinal de igual na equação (18) seja a derivada de alguma função particular, para que assim, possa ser integrada mesmo sem conhecer a função $q(t)$. Nota-se que a expressão à esquerda é composta por duas parcelas e que a primeira é parte do resultado de derivar o produto de $\mu(t) \cdot q(t)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)q(t)] = \mu(t)\frac{dq}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}q(t), \tag{19}$$

comparando a equação (19), que é a fórmula da diferenciação, com a expressão à esquerda da equação (18), observa-se que as duas primeiras parcelas são iguais e a segunda pode se tornar igual se $\mu(t)$ for escolhida de modo que,

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t), \tag{20}$$

e assim, basta resolver a equação (20) para encontrar o fator integrante que será utilizado na equação (18), reescrevendo a equação (20) para que suas variáveis sejam separadas pelo sinal de igualdade,

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{2}dt, \tag{21}$$

integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int \frac{1}{2}dt, \tag{22}$$

resultando em,

$$\ln|\mu(t)| = \frac{t}{2} + C, \tag{23}$$

aplicando a exponencial,

$$e^{\ln|\mu(t)|} = e^{t/2+C}, \tag{24}$$

logo, tem-se que,

$$\mu(t) = c\, e^{\frac{t}{2}}, \tag{25}$$

A equação (17) é linear e, embora a expressão à direita da igualdade seja uma função de t, o coeficiente de q é constante. Logo escolhendo $c = 1$ por conveniência, o fator integrante será $\mu(t) = e^{t/2}$, aplicando-o na equação (18), obtém-se a equação (26),

$$e^{t/2}\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}\,e^{t/2}q(t) = e^{t/2}(10 + 5\,\mathrm{sen}(2t)), \tag{26}$$

como a expressão a esquerda do sinal de igualdade na equação (26) é a derivada de $e^{t/2} \cdot q(t)$, de modo que a equação (26) resulta em,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t/2} \cdot q(t)\right] = e^{t/2}(10 + 5\,\mathrm{sen}(2t)), \tag{27}$$

escrevendo (27) na forma diferencial,

$$d\left[e^{t/2} \cdot q(t)\right] = e^{t/2}(10 + 5\,\mathrm{sen}(2t))dt, \tag{28}$$

integrando (28) em relação a t,

$$\int d\left[e^{t/2} \cdot q(t)\right] = \int e^{t/2}(10 + 5\,\mathrm{sen}(2t))dt, \tag{29}$$

obtém-se,

$$e^{t/2} \cdot q(t) = \int e^{t/2}(10 + 5\,\mathrm{sen}(2t))dt, \tag{30}$$

resolvendo a equação (30) utilizando integração por partes e substituição, tem-se que,

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos(2t) + \frac{10}{17}\mathrm{sen}(2t) + ce^{-t/2}. \tag{31}$$

Pela condição inicial $q(0) = 0$, determina-se a constante $c = -300/17$, com isso, a solução da equação (17) torna-se,

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos(2t) + \frac{10}{17}\mathrm{sen}(2t) - \frac{300}{17}e^{-t/2}, \tag{32}$$

a qual tem sua representação gráfica na Figura 2.

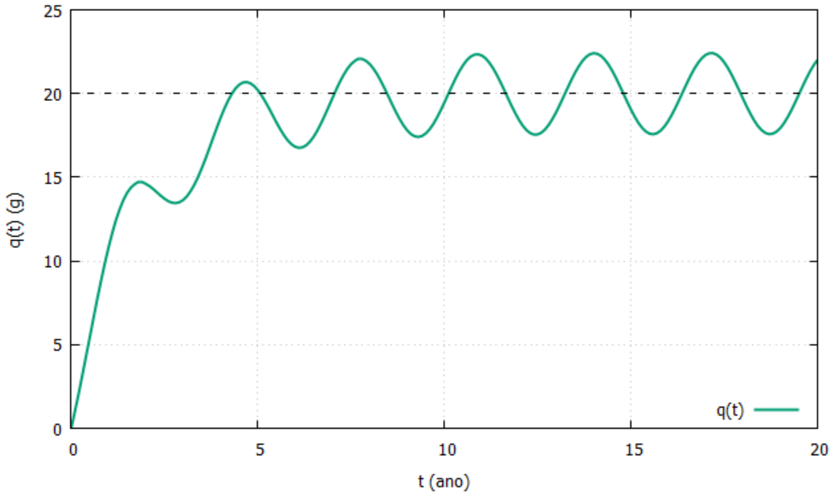


Figura 2: Solução analítica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa.
Fonte: Os autores (2021).

A partir da resolução do problema e de sua representação gráfica, nota-se que a quantidade de produto químico na lagoa aumenta, e a partir de certo ponto começa a oscilar devido aos termos sen$(2t)$ e $\cos(2t)$, porém essa oscilação se estabiliza em torno de $q(t) = 20$.

3.3 Solução numérica

O problema será resolvido numericamente, por meio do método de Euler para encontrar valores aproximados de $q(t)$. Para isso utiliza-se a expressão geral (4) para iniciar o processo iterativo, partindo da condição inicial $q(0) = 0$.

No intervalo de 0 a 20 anos, por meio do software Scilab os valores de $q(t)$ foram aproximados pelo método de Euler para diferentes tamanhos do passo h, inicialmente utilizou-se $h = 1$, as soluções obtidas estão ilustradas na Figura 3.

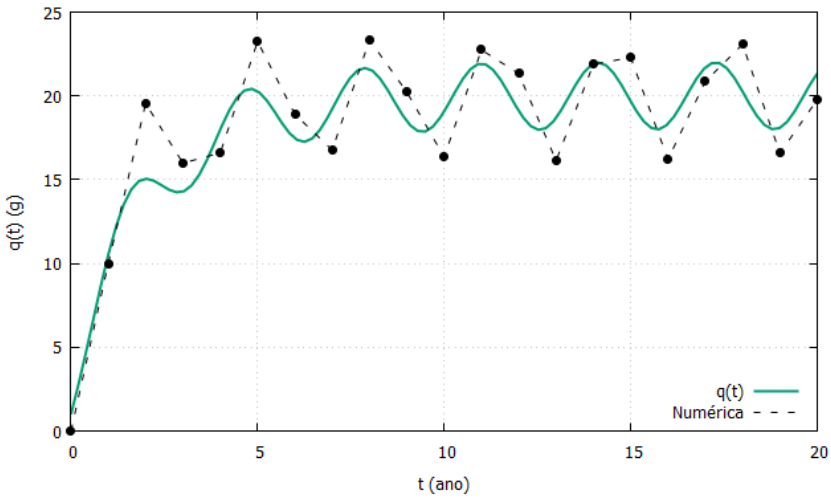


Figura 3: Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para $h = 1$.
Fonte: Os autores (2021).

Nota-se que os resultados obtidos numericamente estão distantes da solução analítica do problema, nesta situação o maior erro relativo (ER) corresponde a $33,872558\%$. Esse erro pode ser reduzido com o aumento da quantidade de subintervalos, ou seja, diminuindo o tamanho de h.

A Tabela 1 contém os máximos erros relativos com diferentes tamanhos de h. Nota-se a redução acentuada do máximo erro relativo à medida que diminui-se o comprimento do passo. Com $h = 0,001$ o maior erro relativo é de aproximadamente $0,03\%$.

Tabela 1: Máximo erro relativo para diferentes valores de h

h	m	ER
1	20	33,872558
0,5	40	15,835479
0,1	200	3,065253
0,05	400	1,522450
0,001	20000	0,030202

Fonte: Os autores (2021).

A Figura 4 representa a solução analítica e numérica do PVI com o passo $h = 0,001$, nestas circunstâncias o maior erro relativo corresponde a $0,030202\%$.

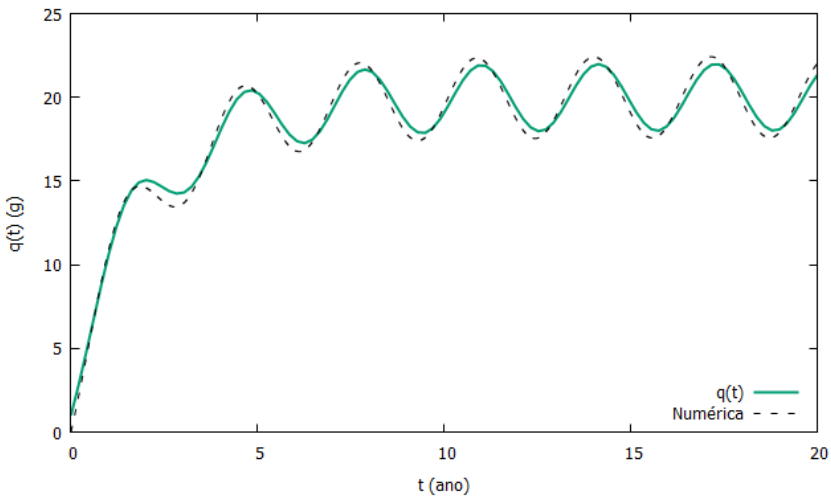


Figura 4: Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para $h = 0,001$.
Fonte: Os autores (2021).

Os resultados mostram que o método de Euler é eficiente na resolução numérica do problema proposto.

4 CONCLUSÃO

A realização deste trabalho tornou possível um melhor entendimento acerca de equações diferenciais, da modelagem de problemas envolvendo misturas de substâncias e também o quanto o método numérico de Euler é de simples aplicação e grande precisão na obtenção da solução numérica do problema abordado. A revisão bibliográfica e o estudo do problema de mistura utilizando mais de um método de resolução, resultou em um aprendizado muito significativo.

A análise da resolução do problema por meio do método de Euler comparado ao resultado obtido analiticamente, permite concluir o quanto o método garante bons resultados, além de ser uma ótima alternativa para o cálculo de equações diferenciais ordinárias com uma condição inicial.

Por meio deste estudo, novos conhecimentos matemáticos foram conquistados permitindo assim um amadurecimento por parte da acadêmica como pesquisadora. Além disso, o estudo de problemas aplicados e a busca por novos conhecimentos permite a abertura de novos horizontes. Embora a maioria dos problemas de misturas sejam hipotéticos, isso significa que são suposições de possíveis situações reais, a compreensão do comportamento de tais situações diminui o distanciamento entre a matemática e o mundo real.

Os objetivos definidos inicialmente foram alcançados, o problema em estudo foi resolvido de forma analítica e numérica, seguindo com a comparação e análise dos resultados.

Por fim, espera-se que este trabalho auxilie de alguma forma novos pesquisadores interessados na área.

Referências

[1] Brannan, J. R; Boyce, W. E. *Equações diferenciais: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações.* LTC, Rio de Janeiro - RJ, 2008.

[2] Denis G. Zill. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem.* Cengage Learnig, São Paulo - SP, 2012.

[3] Simmons, G. F; Krantz, S. G. *Equações diferenciais teoria, técnica e prática.* McGraw-Hill, São Paulo, 2008.

[4] Galina, V; Kaviski, E; Gramani, L. M; Cargnelutti, J; Lobeiro, A. M. *Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann.* 2016.

[5] Filho, F. F. C; *Algoritmos numéricos, uma abordagem moderna de cálculo numérico.* LTC, Rio de Janeiro, 2017.

[6] Trivelato, G. C. *Técnicas de modelagem e simulação de sistemas dinâmicos.* IMPE, 2003.

[7] Boyce, W. E; DiPrima, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* LTC, Rio de Janeiro - RJ, 9 ed. 2012.

[8] Maioli, G. *Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias.* Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

[9] Chapra, S. C; Canale, R. P. *Métodos numéricos para engenharia.* McGraw-Hill, São Paulo - SP, 5 ed, 2008.

[10] Chapra, S. C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas.* AMGH, Porto Alegre - RS, 3 ed, 2013.

[11] Machado, I. M. F. *Matemática aplicada: o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos.* TCC, Instituto federal de educação, ciência e tecnologia, Anápolis - GO, 2016.

DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA E A PROBABILIDADE DE GANHAR NA MEGA SENA

Liamara Cristina dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
liamaracristina.s@gmail.com

Daniela Trentin Nava
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
dnava@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho versa sobre a probabilidade em situações corriqueiras do dia a dia. Foram realizadas pesquisas de natureza bibliográfica com a abordagem qualitativa objetivando apresentar a origem, a grande importância e a funcionalidade da teoria das probabilidades presente no jogo de loteria com foco na mega-sena. Também é apresentada um breve relato histórico da origem da teoria das probabilidades e seus principais estudiosos. Para a análise das chances de vencer em tal loteria foram realizados cálculos probabilísticos e a partir dos resultados obtidos se torna evidente que a probabilidade de acertar os números da loteria é mínima até no cenário mais provável e que a teoria das probabilidades, que ganhou grande importância ao longo do tempo por possuir aplicações nas mais diversas áreas científicas, pode ser verificada através de simples situações cotidianas.

Palavras-chave: Teoria de probabilidade. História da probabilidade. Aplicações de probabilidade. Distribuição hipergeométrica. Mega-Sena.

1 Introdução

O estudo das probabilidades começou, de acordo com alguns autores, como um truque para se ganhar em jogos estratégicos e de azar e hoje nos ajuda a tomar decisões dentro e fora das ciências. A probabilidade passou a ser de grande importância por possuir aplicações nas mais diversas áreas científicas e se mostra muito presente em situações do nosso cotidiano.

É fato a abundância de publicações sobre suas aplicações em diversas áreas científicas, mas não se faz necessário complicações para percebê-la e estudá-la, sendo possível tal feito a partir de situações do nosso cotidiano. Basta pensar nas chances de algo ocorrer e estará pensando na probabilidade envolvida na situação. Ela está presente em situações que podem variar de uma doença terminal, um desastre natural, ou tão simplesmente quanto comprar ovos.

Dada sua importância, se torna questionavel8 a importância dada a probabilidade por pesquisadores e estudiosos. Diz-se isso pois são poucos os estudos sobre sua origem e quando estudada sempre está embasada em outra área científica, mesmo sendo possível estudá-la de forma simples e significativa a partir de eventos do dia a dia.

Deste modo, este trabalho apresenta dados históricos a respeito da origem e importância da teoria das probabilidades e apresenta um conteúdo probabilístico através de uma situação cotidiana: a distribuição hipergeométrica e as chances de ganhar na mega-sena.

2 Material e Métodos

2.1 A HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

A probabilidade é o ramo da matemática que se dedica à modelagem de fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o acaso representa um papel preponderante, sendo o acaso um conjunto de forças não controladas que exercem um papel crucial na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno (VIALI, 2008).

Por exemplo, ao lançar uma moeda, os possíveis resultados são “cara” e “coroa”. Porém, antes de realizar os lançamentos não é possível antecipar qual dos dois resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam esses resultados não podem ser identificados e controlados (VIALI, 2008). O acaso relaciona-se também com outros exemplos, como a determinação da vida útil de um equipamento eletrônico ou as previsões do tempo. Ou seja, é possível observar como o acaso pode estar associado aos jogos de azar, aos fenômenos naturais e aos eventos ocorridos no cotidiano (CALABRIA; CAVALARI, 2013).

A ideia de acaso é quase tão antiga quanto as primeiras civilizações, porém a percepção de que isto é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. Inicialmente o acaso era percebido como obra da divindade. As principais teorias sobre o surgimento de cálculos probabilísticos remetem ao tempo das primeiras civilizações no início da era pré-Cristã, como os Babilônios, os Egípcios, os Gregos e os Romanos, tendo seus primeiros indícios a partir do jogo Tali e do cálculo de seguros (CALABRIA; CAVALARI, 2013; VIALI, 2008).

Tali, o jogo do osso, era um jogo de dado praticado com astrálagos, osso do calcanhar de um animal específico que possui o formato de um tetraedro irregular, e que pode ser referido como ancestral do dado moderno, o hexaedro regular. No astrálago, as quatro faces não eram idênticas, havia o lado côncavo, o convexo, o plano e o sinuoso. Com isso, neste dado as faces não mostravam a mesma frequência de ocorrência, havendo assim, uma pontuação diferente para cada lado. O jogo era usado para apostas, previsões sobre o futuro, na decisão de disputas e na divisão de heranças (HACKING, 2006).

Figura 1 – Osso astrálago.

Fonte: (CALABRIA; CAVALARI, 2013).

Não é claro como eram realizados os cálculos para os valores dos seguros na época, realizados inicialmente por comerciantes mesopotâmicos e fenícios. Especula-se que esses valores eram baseados na probabilidade dos acontecimentos que envolviam acidentes, ou seja, aplicavam a perda da carga de navios por naufrágio ou roubo e baseavam-se em estimativas para os acidentes. Dessa forma, caso fosse registrado alto índice de acidentes em uma rota marítima, com certeza o preço cobrado seria acima da média estipulada.

Com estas ideias, alguns autores defendem que as tentativas de quantificação dos riscos associados a naufrágios, acidentes, mortes, junto com a quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar, foram os fatores pioneiros para o início da Teoria das Probabilidades (CALABRIA; CAVALARI, 2013; VIALI, 2008). Porém, apesar dos jogos e da navegação fazerem parte do desenvolvimento da humanidade, uma abordagem matemática do acaso e do risco só teve início efetivamente há aproximadamente, 500 anos.

Até este momento, não existia a pretensão de utilizar a probabilidade como uma forma de determinar as possíveis chances de se ganhar um jogo. Os jogos estavam relacionados a brincadeiras, a prever o futuro e a apostas, ou seja, o propósito dos cálculos limitava-se a descrição e ao estudo dos jogos de azar e quase todo o esforço era concentrado no cálculo do valor de certas probabilidades de interesse, não havendo preocupação probabilísticas exata (FELLER, 1976; VIALI, 2008). Dessa forma, a prática de jogos de azar ainda não era pensada de maneira a reduzi-las à forma matemática como, por exemplo, calcular os casos favoráveis de um jogo e estimar a regularidade do acontecimento dos eventos.

Há indícios de que os primeiros estudos probabilísticos foram realizados por mentes italianas dos séculos XV e XVI, como frei Luca Pacioli (1445 - 1517), Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles foram além da simples enumeração das possibilidades para resolver problemas de comparação de frequências de ocorrências e ganhos em jogos de azar, mas não formularam conceitos e teoremas que se baseassem em alguma teoria, limitaram-se apenas a resolver problemas concretos VIALI, 2008; SILVEIRA, 2019).

Frei Luca Pacioli dedicou-se ao estudo do problema conhecido como o problema dos pontos, ou divisão de apostas, publicando em 1494, na obra intitulada Summa de arithmetica, geometria, proportinoni e proportionalità (CALABRIA; CAVALARI, 2013; KATZ, 2009; VIALI, 2008).

Girolamo Cardano publicou em 1663 a obra Liber de Ludo Alae (Livro de Jogos de Azar), um manual de jogos "[...] que buscava permitir a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar encontrados naquela época" (COUTINHO, 2007). Sendo viciado em jogos, ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados. Viali, (2008) considera Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele também conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Porém, seus estudos ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar principalmente o de dados.

Depois da participação de Tartaglia e Cardano na origem da teoria das probabilidades, não existe registro de outros estudiosos do século XVI que estudaram este assunto, apesar de haver algumas evidências de cálculos probabilísticos realizados por Galileu Galilei (1564 - 1642) relacionados com jogos de dados (DAVID, 1962). Galileu Galilei também publicou um manual sobre jogos, o Sopra le scoperta dei dadi. Ele se dedicou ao estudo de um problema semelhante ao de Cardano. Além disso, há evidências de sua relação com a distribuição normal, pois foi um dos primeiros a perceber que os erros de observações astronômicas apresentavam um comportamento típico. Ele percebeu que variavam em torno de um resultado supostamente verdadeiro e que a sua frequência decrescia com o aumento do valor (VIALI, 2008; TODHUNTER, 1965).

Segundo uma visão francesa, a probabilidade se desenvolve evidentemente a partir da troca de correspondências entre Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Com elas, esses estudiosos apresentaram uma solução para um problema semelhante ao problema dos pontos citado anteriormente e para outro problema que questionava o número mínimo de lançamentos de um par de dados equilibrados para que se tenha um par de seis com probabilidade superior a 50\%. Problemas estes apresentado a Pascal por Antoine Gombauld (1610 - 1685), um homem que ganhava a vida jogando e era conhecido como cavaleiro de Méré (CALABRIA; CAVALARI, 2013; VIALI, 2008).

Juntos, Pascal e Fermat apresentaram uma relação para o problema que generaliza o problema dos pontos. Suponha que um jogo é interrompido quando o primeiro jogador precisa de r jogos para vencer enquanto que o segundo necessita de s jogos, onde $r+s \geq 1$. Então o primeiro jogador deve receber:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} / 2^n$$

tal que, $n = r + s - 1$ é o número máximo de jogadas restantes.

Diante disso, a correspondência entre Pascal e Fermat iniciou a teoria das probabilidades, pois estudar esses problemas desencadeou um interesse crescente pelo assunto e estudiosos da época começaram a publicar obras a respeito da probabilidade. Como, por exemplo, o holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), considerado o primeiro cientista a apresentar de forma sistemática os problemas já discutidos por Pascal e Fermat, adotando regras e concedendo a primeira ideia de expectativa matemática em 1657 na obra intitulada De Ratiociniis in Ludo Aleae (DAVID, 1962). Também o francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) que publicou em 1812 a obra Théorie Analytique des Probabilités que discutia os princípios da teoria e principalmente aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade. Além da regra de Bayes e o conceito de esperança matemática, o livro apresentava, ainda, métodos de determinar probabilidades de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, uma discussão do método dos mínimos quadrados, o problema da agulha de Buffon e a probabilidade inversa (VIALI, 2008).

A partir da obra de Laplace, os estudos na área cresceram ainda mais e tiveram a atenção de grandes matemáticos, como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), o russo Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922), e os franceses Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) (CALABRIA; CAVALARI, 2013; VIALI, 2008).

Assim, a história da teoria da probabilidade mostra uma interação estimulante entre a teoria e a prática. Em seu desenvolvimento, o progresso da teoria abre novos campos de aplicação aumentando seu campo de influência e conduzindo a novos problemas e a pesquisas produtivas.

De acordo com Feller (1976), o sucesso da teoria das probabilidades explica-se pelo fato dela ter se limitado ao estudo da "chance". A noção intuitiva de probabilidade está ligada a afirmações tais como "Paulo é provavelmente um homem feliz” ou "este livro será provavelmente um fracasso", afirmações dessa natureza são de interesse para o filósofo e para o lógico e se constituem no objeto de estudo de uma teoria matemática.

Para Matthews (2017) as leis da probabilidade são capazes de muita coisa além de apenas entender eventos probabilísticos, ele defende que elas têm se mostrado cruciais para separar impurezas aleatórias do ouro das evidências e, portanto, a necessidade de compreender probabilidade, risco e incerteza nunca foi tão necessária. Isso, pois em meio a agitações políticas, confusões nos mercados financeiros, riscos, ameaças e calamidades, todos ficam ansiosos por uma certeza.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE PROBABILIDADE

Nesta seção serão apresentadas alguns conceitos e definições principais da teoria das probabilidades que serão utilizadas durante o desenvolvimento do problema em questão.

Experimentos aleatórios são experimentos que podem conduzir a diferentes resultados mesmo quando as condições iniciais são as mesmas, existindo a imprevisibilidade do resultado (como o lançamento de um dado ou moeda). Em um experimento aleatório, o conjunto de possíveis resultados deste experimento é chamado **espaço amostral**. O espaço amostral do experimento “lançamento de uma moeda” é o conjunto $S = \{cara, coroa\}$. Por fim, dentro do espaço amostral temos o **evento aleatório**, que é qualquer subconjunto/resultado obtido de cada experimento aleatório. Por exemplo, o evento $E: obter\ cara\ no\ lançamento\ de\ uma\ moeda\ honesta$ (CORREA, 2003).

Diante disso, a probabilidade do evento E ocorrer é dada por

$$P(E) = \frac{n(E)}{n}, \qquad (2.1)$$

tal que $n(E)$ é a quantidade de resultados favoráveis a E e n é o total de resultados possíveis do experimento (ROSS, 2010).

Funções que associam números reais aos eventos de um espaço amostral descrevendo os resultados de um experimento com números ao invés de palavras são ditas **variáveis aleatórias**. Quando os possíveis valores que a variável pode assumir se resumem a um conjunto enumerável de valores, ela denomina-se variável aleatória discreta. Por outro lado, denomina-se variável aleatória contínua se os resultados do experimento podem ser qualquer valor de um intervalo contínuo (NETO & CYMBALISTA, 2006).

A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória, que é o que nos interessa neste trabalho, é uma descrição das probabilidades associadas aos valores possíveis para ela. Para uma variável aleatória discreta, a distribuição é dada por uma lista de valores possíveis juntamente com a probabilidade de cada um. Esta lista deve satisfazer duas condições: cada probabilidade deve ser maior ou igual a zero ($P(X = x_i) \geq 0, \forall i = 1, \cdots, n$) e a soma das probabilidades deve ser igual a 1 ($\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$). Para uma variável aleatória continua, a distribuição é dada por uma função que associa seus valores com a probabilidade de cada e as mesmas condições anteriores devem ser verificadas para que uma função de variável aleatória contínua seja denominada seja denominada de função de densidade de probabilidades, ou seja, $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (MONTGOMERY & RUNGER, 2018).

As principais distribuições teóricas de probabilidades, de acordo com a variável, são:

- Variáveis aleatórias contínuas: Normal, Exponencial, t-Student, Gama, Erlang, Qui-quadrado, Uniforme contínua.
- Variáveis aleatórias discretas: Binomial, Poisson, Uniforme discreta, Geométrica, Pascal, Hipergeométrica.

Cada distribuição teórica possui um modelo que pode ser usado para diversas situações cotidianas. A escolha do melhor modelo depende da situação estudada. Neste trabalho, o foco está na distribuição teórica de variável discreta hipergeométrica.

De acordo com Montgomery e Runger (2018), a distribuição hipergeométrica descreve a probabilidade de k sucessos em n retiradas, sem reposição, de uma população de tamanho N que contém exatamente k sucessos. Seja a variável aleatória X: o número de sucessos na amostra, então X é uma variável aleatória com **distribuição hipergeométrica** e sua função de distribuição de probabilidades é dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{n} \cdot \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \tag{2.2}$$

Para X hipergeométrica, tem-se $N \in \{0,1,2, \cdots\}, k \in \{0,1,2, \cdots, N\}, n \in \{0,1,2, \cdots N\}$. A esperança matemática de X é $E(X) = n\frac{k}{N}$ e a variância $Var(X) = n\left(\frac{k}{N}\right)\left(\frac{N-k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

2.3 A MEGA-SENA

A Caixa Econômica Federal é a responsável pela administração e gestão das loterias no Brasil, existindo onze tipos de jogos: Mega-sena, Lotofácil, Quina, Lotomania, Timemania, Dupla-Sena, Federal, Loteca, Lotogol, Dia De Sorte e Super Sete (CAIXA, 2021).

A Mega-Sena é um jogo que paga o maior prêmio dentre os jogos de loteria da Caixa e também é o que possui a menor probabilidade de acerto (CAIXA, 2021). Isso, pois para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar os 6 números sorteados no conjunto de 1 a 60, sendo a aposta mínima de 6 números e a máxima de 15. Também são pagos prêmios a quem acerta 4 ou 5 números dos 6 sorteados, denominados quadra e quina, respectivamente. Na próxima seção são apresentados os resultados da análise de caso.

3 Resultados e Discussão

3.1 ACERTANDO NA MEGA-SENA

Para calcular a probabilidade de alguém acertar na mega-sena utiliza-se a probabilidade de ocorrência de um evento, isto é, a razão entre os resultados favoráveis e todos os resultados possíveis Ross (2010). Neste caso, o número de resultados favoráveis será a quantidade de combinações possíveis entre os números jogados, enquanto que o número de resultados possíveis será a quantidade total de combinações de números que podem ser sorteados.

Ao jogar 6 números para acertar a sena só há uma combinação possível no jogo, porém existem 6 combinações diferentes entre os números ao tentar acertar a quina e o sexto número (o não acertado) poderá ser qualquer um dos 54 restantes não apostados. Ao tentar acertar a quadra, tem-se 15 combinações possíveis entre os 6 jogados, e os dois não acertados poderão ser qualquer combinação dos 54 não jogados tomados 2 a 2.

Dessa forma, é preciso calcular as combinações possíveis para acertos entre a quantidade de números jogados k, tal que $6 \leq k \leq 15$, e a quantidade x de números que se pretende acertar, isto é, $x = 4, x = 5$ ou $x = 6$. Ao mesmo tempo, é necessário fazer a combinação simples entre $N - k$ e $n - x$, ou seja, entre a quantidade de números não jogados e a quantidade que não é “preciso” acertar (FRAGA, 2013). E, como dito, também é necessária a quantidade de combinações possíveis a serem sorteadas, ou seja, todas as combinações que existem ao sortear 6 números dos 60 disponíveis.

Com estas informações, calcula-se $P(X = x)$ a probabilidade de acertar x números na mega-sena com a fórmula apresentada na Equação 2.2 apresentada na seção anterior.

3.1.1 Probabilidade de acertar 6 números

Nessa situação, $x = 6$ é a quantidade de números que se deseja acertar e $6 \leq k \leq 15$ é a quantidade de números que podem ser apostados no jogo. Dessa forma, como $N = 60$ e $n = 6$ são fixos, pois é a quantidade a ser sorteada, a Equação 2.2 se torna

$$P(X = 6) = \frac{\binom{k}{6} \cdot \binom{60-k}{6-6}}{\binom{60}{6}},$$

em que 6 ≤ k ≤ 15.

Calculando as probabilidades para a aposta mínima de 6 números, $k = 6$, tem-se

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1 \cdot 1}{50.063.860} \approx 0{,}00000002.$$

Portanto, a chance de acertar na Mega-Sena fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,000002%. Dessa mesma forma calcula-se as chances de o jogador ganhar apostando de 7 a 15 números, como descrito na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1 – Probabilidade de acertar 6 números na mega-sena

Quantidade de números apostados	Probabilidade (%)
6	0,000002
7	0,000014
8	0,000056
9	0,00017
10	0,00042
11	0,00092
12	0,0018
13	0,0034
14	0,006
15	0,01

Fonte: Autores, (2021).

Analogamente, pode-se calcular as probabilidades de acertar a quina e a quadra, pois, como dito anteriormente, jogadores que acertam 4 ou 5 números dos 6 sorteados também ganham uma premiação.

3.1.2 Probabilidade de acertar 5 números

Ao calcular as chances de acertar 5 dos 6 números sorteados (quina), também utiliza-se a Equação 2.2, porém agora com $x = 5$:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{k}{5} \cdot \binom{60-k}{6-5}}{\binom{60}{6}}.$$

Assim, a probabilidade de acertar na quina fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,00065%, pois

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{54}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \approx 0{,}0000065.$$

Assim, pode-se calcular também as probabilidades para apostas de 7 a 15 números, apenas variando o valor de k na equação. As probabilidades resultantes são apresentadas na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Probabilidade de acertar 5 números na mega-sena

Quantidade de números apostados	Probabilidade (%)
6	0,00065
7	0,0022
8	0,0058
9	0,013
10	0,025
11	0,045
12	0,076
13	0,12
14	0,18
15	0,27

Fonte: Autores, (2021).

3.1.3 Probabilidade de acertar 4 números

Os cálculos ocorrem analogamente para obter as chances de acertar 4 dos 6 números sorteados, entretanto, nesta situação adota-se $x = 4$, obtendo

$$P(X = 4) = \frac{\binom{k}{4} \cdot \binom{60-k}{6-4}}{\binom{60}{6}}.$$

A Tabela 3, a seguir, dispõe das probabilidades chances de o jogador acertar 4 números apostando de 7 a 15 números.

Tabela 3 – Probabilidade de acertar 4 números na mega-sena

Quantidade de números apostados	Probabilidade (%)
6	0,043
7	0,096
8	0,19
9	0,32
10	0,51
11	0,78
12	1,12
13	1,54
14	2,07
15	2,70

Fonte: Autores, (2021).

3.1.4 Comparando as probabilidades da loteria

Até este momento as probabilidades de acerto nas apostas na quadra, quina e sena foram apresentadas separadamente, entretanto, a Tabela 4 mostra os resultados anteriores em proporção e possibilita comparar a probabilidade de cada aposta.

Tabela 4 – Probabilidades de acertar na quadra, quina e sena

Quantidade de números apostados	Sena (1 em)	Quina (1 em)	Quadra (1 em)
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37

Fonte: Autores, (2021).

Fica evidente que quanto mais números apostados, mais aumentam as probabilidades de acerto, tanto na sena quanto na quina ou na quadra. Em contrapartida, enquanto o valor de uma aposta simples de 6 números atualmente custa R$4,50, a aposta máxima de 15 números custa R$22.522,50 (CAIXA, 2020). Ou seja, apesar da probabilidade aumentar de 0,000002% para 0,01% na sena, de 0,0022% para 0,27% na quina e de 0,043% para 2,7% na quadra, há uma diferença monetária de R$22.518,00 e as chances ainda são menores que 3% em todos os casos.

4 Considerações Finais

Como visto, o início dos estudos sobre a teoria das probabilidades remete à era pré-Cristã, se iniciando a partir estratégias de jogadores para vencer a apostas em jogos de azar, também havendo rumores sobre o desenvolvimento de cálculos a partir da cobrança de seguros. A cada estudo e obra publicada, mais estudiosos se interessavam e instigavam a fundo outros eventos não determinísticos, como Girolamo Cardano, Frei Luca Pacioli, Tartaglia e até Galileu Galilei. Dessa forma, a teoria das probabilidades foi se desenvolvendo e conquistando sua importância em diferentes áreas do conhecimento.

Hoje, a teoria das probabilidades possui aplicações nas mais diversas áreas científicas e objetivou este trabalho a apresentar que, apesar de sua grandeza, a probabilidade pode ser estudada através de simples situações cotidianas. Nele apresenta-se a distribuição de probabilidade hipergeométrica analisando as chances de ganhar o prêmio da mega-sena, uma das loterias administradas pela Caixa Econômica Federal. Mostrando que a teoria das probabilidades pode ser estudada de forma simplificada e sem a dificuldade de aplicações científicas em que se faz necessários conhecimentos além da matemática.

Trabalhos como este, que apresentem a probabilidade, considerada difícil, através de situações cotidianas, podem facilitar o primeiro contato com esta ciência tanto no ensino básico como no ensino superior, e até a nível de curiosidade. Em futuras pesquisas seria de grande interesse sua análise de situações mais simples como preparar uma refeição ou tomar caminhos para um compromisso do dia a dia.

REFERÊNCIAS

CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **Loterias Caixa.** Disponível em http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/. Acessado em 08/05/2021.

CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. **Anais...** Campinas: Unicamp, 2013.

CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e estatística.** 2ª ed, PUC Minas Virtual, 2003.

COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática,** v. 2, n. 3, p. 50-67, 2007.

DAVID, F. N. **Games, gods and gambling: a history of probility ans statistical ideas.** 1ª ed, Hafner Publishing Company, 1962.

FELLER, W. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações: parte 1 - espaços amostrais discretos.** Edgard Blücher, 1976.

FRAGA, R. R. **O estudo das loterias: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio.** (Dissertação) Mestrado Profissional em Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

HACKING, I. **The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference.** 2ª ed. Cambridge University Press, 2006.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an introduction.** 3ª ed, Addison Wesley, 2009.

MATTHEWS, R. **As leis do acaso: como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza.** 1ª ed, Jorge Zahar, 2017.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 6ª ed, LTC, 2018.

NETO, P. L. O. C.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades: resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos.** 2ª ed, Editora Blucher, 2006.

ROSS, S. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações.** 8ª ed, Bookman, 2010.

SILVEIRA, J. F. P. **Início da Matematização das probabilidades.** Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html. Acessado em 08/05/2021.

TODHUNTER, I. **Mathematical Theory of Probability: from the time of Pascal to that of Laplace.** Chelsea Publishing Company Bronx, 1965.

VIALI, L. Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 8, n. 16, p. 143-153, 2008.

ESTUDO DE PROBLEMAS GOVERNADOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: ABORDAGEM ANALÍTICA, EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Larissa Arianna Mekelburg da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
larissa.141000@alunos.utfpr.edu.br

Jocelaine Cargnelutti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanderlei Galina
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

A matemática tem o poder de descrever muitos problemas de diversas áreas da ciência dando origem a alguns modelos. Nesse sentido, o foco desse trabalho é estudar de forma introdutória o método das diferenças finitas (MDF) que será aplicado na resolução de uma equação diferencial ordinária com problema de valor de contorno. Primeiramente foi realizada uma breve introdução sobre a teoria das equações diferenciais e o MDF, em seguida foi apresentado como chegar às aproximações das derivadas por meio de definições e da série de Taylor. Para finalizar foi resolvido um estudo de caso analiticamente e numericamente. Diante do que foi estudado e dos resultados obtidos, pôde-se realmente perceber que tanto a teoria das equações diferenciais como o método das diferenças finitas tem uma aplicabilidade em várias áreas da ciência e que o MDF revelou-se eficaz nas aproximações das equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Problema de Valor de Contorno. Método das Diferenças Finitas.

1 Introdução

A evolução dos métodos do cálculo diferencial e integral, iniciados por Newton e Leibnitz, no final do século XVII, fizeram com que as equações diferenciais se fortificassem como uma nova área da matemática, no século seguinte tornou-se uma disciplina independente, tendo cooperações de Euler, Laplace e Lagrange (SPERANDIO et al., 2003).

A matemática tem o poder de descrever muitos problemas de diversas áreas da ciência dando origem a alguns modelos, a maioria deles se constitui de uma equação que possui derivadas, ou seja, de equações diferenciais. Desse modo, métodos foram desenvolvidos para encontrar e traçar o comportamento das soluções (CARGNELUTTI e GALINA, 2015).

Essas equações podem ser abordadas analiticamente, experimentalmente ou numericamente. Porém, na maioria das vezes, esses problemas não têm soluções analíticas tendo que recorrer então a soluções numéricas para chegar a uma aproximação, podendo assim, do mesmo modo, modelar e descobrir o comportamento da solução desses problemas.

A simulação numérica permite com que problemas complexos demais para serem resolvidos analiticamente ou até impossíveis de se resolver sejam explicados e que a solução numérica tenha um erro muito pequeno (CARGNELUTTI e GALINA, 2015).

Dentre os métodos numéricos desenvolvidos até os dias de hoje, um dos que pode ser usado para a resolução de equações diferenciais é o método das diferenças finitas (MDF), ele aproxima as derivadas de uma equação, fornecendo uma solução bem próxima do que seria a exata. Desse modo, esse método pode ajudar muito pesquisadores de várias áreas, pois mesmo que alguns problemas sejam possíveis de se resolver analiticamente, pode ser que a resolução numérica torne a resolução mais fácil e rápida (WROBEL, 1989).

Quando se fala na aplicação tanto das equações diferenciais como dos métodos numéricos, que são importantes suportes matemáticos na ciência, pode-se citar alguns exemplos como problemas de variação de temperaturas, de mistura de líquidos, modelagem de populações, circuitos elétricos, reações químicas, entre outros.

Tendo em vista as informações apresentadas, o foco desse trabalho é apresentar os conhecimentos das equações diferenciais ordinárias (EDO) e estudar de forma introdutória o método das diferenças finitas que será aplicado na resolução de uma equação diferencial ordinária com problema de valor de contorno.

2 Metodologia

A realização desse trabalho se iniciou com o estudo bibliográfico sobre a teoria relativa às equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e ordens superiores e também sobre o método das diferenças finitas, com o intuito de utilizar o método para resolver numericamente um estudo de caso e comparar com sua solução analítica.

Equação e diferencial indicam uma equação que envolve derivadas. De acordo com Zill e Cullen (2001), pode-se definir equação diferencial como uma equação que possui derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Porém, neste trabalho será abordado somente as equações diferenciais ordinárias que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes só que em relação a uma única variável independente.

Uma equação diferencial ordinária, de modo geral, pode ser explícita na forma,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

em que x é a variável independente e y a variável dependente. Logo F abrange a variável independente x, a função y e as derivadas de ordem n de y em relação a x. Porém é mais complicado explorar diretamente a equação (1) então o tratamento feito supõe que o teorema das funções implícitas é aplicável a (1), portanto podendo-se escrever da seguinte forma (SPERANDIO et al., 2003):

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{2}$$

Segundo Zill e Cullen (2001, p. 4), pode-se definir a solução para uma equação diferencial como sendo “qualquer função f definida em algum intervalo *I*, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade”, portanto, o propósito é encontrar uma função *y* que satisfaça a equação (1), podendo ter condições do tipo: $y(x_0) = c_0, y'(x_1) = c_1, \dots, y^{n-1}(x_{n-1}) = c_{n-1}$. Quando $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1}$, então o problema é definido como de valor inicial, se as condições são indicadas em pontos distintos, que é diverso do caso anterior, o problema é dito como valor de contorno (SPERANDIO et al., 2003).

A partir do estudo das equações diferenciais ordinárias, dos problemas que elas podem envolver e das suas soluções pode-se perceber que há casos que não possuem solução ou que é quase impossível de se encontrar, para esses problemas é possível utilizar o método das diferenças finitas para se chegar a uma aproximação da resposta que seria a exata.

O método das diferenças finitas aproxima as derivadas de uma equação diferencial por meio de fórmulas de diferenças, utilizando a discretização. A seguir apresentam-se as principais definições usadas para estabelecer o MDF. Em (1) tem-se a derivada de uma função y(x), por definição, em um ponto $x = x_i$.

$$y'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} \tag{3}$$

Podemos aproximar essa derivada adicionando um incremento *h* no valor de x_i, chamando-a de diferença progressiva (avançada).

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \tag{4}$$

Da mesma forma pode-se definir aproximações de diferenças regressiva (atrasada) e central, respectivamente,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \tag{5}$$

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \tag{6}$$

As equações (4), (5) e (6) podem ser melhor visualizadas na figura (1). Sendo d_{at} a diferença atrasada d_{ex} a derivada exata, d_{ce} a diferença centrada e d_{av} a diferença avançada.

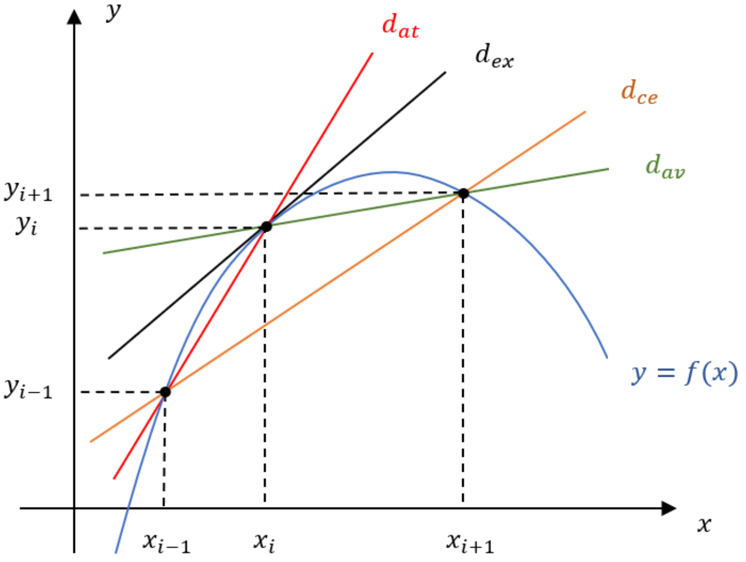


Figura 1 - Interpretação geométrica de aproximações de uma derivada.

Fonte: CARGNELUTTI e GALINA (2015).

As equações (4), (5) e (6) também podem ser obtidas por meio de séries de Taylor truncadas, assim pode-se estimar o erro da aproximação. Então tem-se,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots \tag{7}$$

Para $\mathrm{x} = \mathrm{xi} + \mathrm{h}$ em torno de y em $x = xi$ e já simplificando tem-se

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + y''(x_i)\frac{h^2}{2} + y'''(x_i)\frac{h^3}{3!} + \cdots \tag{8}$$

Colocando $\mathrm{y'(xi)}$ em evidência e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois pode-se chegar à aproximação progressiva.

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \tag{9}$$

Substituindo agora na equação (7) $\mathrm{x} = \mathrm{x_{i\text{-}1}}$ em torno de f em $\mathrm{x} = \mathrm{x_i}$ e já simplificando tem-se,

$$\mathrm{y}(x_{i-1}) = \mathrm{y}(x_i) - \mathrm{y}'(x_i)\mathrm{h} + \mathrm{y}''(x_i)\frac{\mathrm{h}^2}{2} - \mathrm{y}'''(x_i)\frac{\mathrm{h}^3}{3!} + \cdots \tag{10}$$

Colocando $\mathrm{y'(x_i)}$ em evidência em (10) e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois pode-se chegar à aproximação regressiva,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \tag{11}$$

Subtraindo a equação (10) da equação (8), colocando $y'(x_i)$ em evidência e desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois obtém-se a aproximação central,

$$y'(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} \tag{12}$$

O erro é de ordem h pois h é um valor muito pequeno e o maior termo desprezado é uma constante vezes h. Para se obter uma aproximação para a derivada de segunda ordem por meio do MDF basta somar (8) com (10),

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{2h^4}{4!}y''''(x_i) + \cdots \tag{13}$$

Desconsiderando os termos relativos às derivadas de ordem superior a dois e colocando $y''(x_i)$ em evidência tem-se que,

$$y''(x_i) \cong \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} \tag{14}$$

No próximo tópico será apresentado um problema para ser resolvido utilizando os estudos feitos neste tópico de metodologia, para isso, foram utilizados os softwares livres Scilab e Gnuplot, respectivamente, na simulação computacional e construção dos gráficos das resoluções analítica e numérica.

3 Resultados e Discussão

O estudo de caso a ser desenvolvido, trata de um cabo pendurado por dois suportes fixos em A e B, como mostra a Figura 2, e está carregado com uma distribuição de carga cujo módulo varia com x conforme a equação,

$$w = w_0\left[1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] \tag{15}$$

em que $w_0 = 450\ N/m$ e L é a distância horizontal entre os pontos A e B.

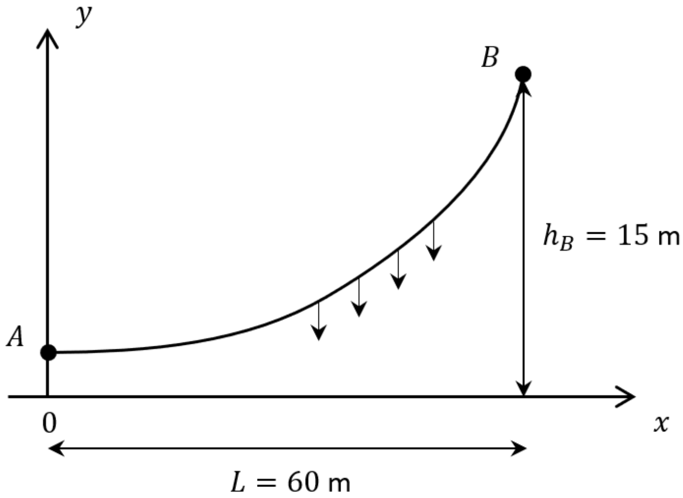


Figura 2 - Cabo suspenso.
Fonte: Autores.

A inclinação do cabo no seu ponto mais baixo é $y'(x = 0) = 0$. Neste ponto tem-se a mínima tensão no cabo, denominada T_0. A equação diferencial que descreve o comportamento do cabo é dada por,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T_0}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right] \tag{16}$$

onde y é a posição vertical do cabo ou altura, e x é a posição horizontal do cabo. Dadas as condições de contorno, o problema de valor de contorno que descreve o comportamento do cabo suspenso é dado por,

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{w_0}{T_0}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2L}\right)\right] \\ y'(0) = 0 \\ y(60) = 15 \end{cases} \tag{17}$$

O valor da mínima tensão no cabo pode ser determinado de forma iterativa avaliando o valor de h_B para vários valores de T_0. Com isso, obtém-se $T_0 = 108.012{,}08$ N.

Solução analítica: a EDO na equação (16), é uma equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea. Como se trata de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes, sua resolução analítica é dada pelo método dos coeficientes indeterminados. Nesse método o resultado final consiste na soma da solução complementar com a particular. É possível encontrar a solução complementar através da EDO homogênea da equação (16), dada por,

$$y''(x) = 0 \tag{18}$$

Portanto, a solução complementar é,

$$y = c_1 + xc_2 \tag{19}$$

Para encontrar a solução particular utiliza-se a função $g(x)$, que é a função seno de (16), podendo-se resolver utilizando a abordagem por superposição. Dessa forma, obtém-se a solução analítica,

$$y(x) = 2{,}0831 \cdot 10^{-3}\, x^2 + 0{,}1591\, x + 4{,}0312 - 6{,}0786\, \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{120}\right) \tag{20}$$

Solução numérica: na obtenção da resolução numérica, utiliza-se o método das diferenças finitas para discretizar e equação diferencial no intervalo [0, 60] onde o problema proposto se aplica.

A seguir, aplica-se o MDF ao PVC em (17) para determinar um sistema de equações algébricas lineares. Inicialmente, a derivada de segunda ordem é substituída pela aproximação de diferença centrada de segunda ordem, equação (15), para obter,

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right)\right], \qquad i = 2, \dots, n-2 \tag{21}$$

em que n é a quantidade de pontos da malha computacional e i é o índice que varia de 1 até n para percorrer estes pontos.

A equação (21) é aplicada em pontos interiores da malha, nos extremos da malha devem ser considerados os valores de contorno. O extremo esquerdo da malha tem valor $x = 0$ com índice $i = 1$, neste ponto o valor de contorno é $y'(0) = 0$. Fazendo a aproximação pela diferença centrada de primeira ordem, equação (12), tem-se,

$$y_{i-1} = y_{i+1} \tag{22}$$

Substitui-se (22) em (21) para eliminar o termo y_{i-1}, pois i-1 está fora da malha computacional. Dessa forma, obtém-se,

$$2y_{i+1} - 2y_i = \frac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x_i}{2L}\right)\right], \qquad i = 1 \tag{23}$$

No extremo direito da malha é o valor $x = 60$ com índice $i = n\text{-}1$ e valor de contorno $y(60) = 15$ ou $y_n = 15$. Fazendo a substituição em (21), tem-se,

$$2y_{n-1} - y_{n-2} = 15 - \frac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x_{n-1}}{2L}\right)\right], \qquad i = n-1 \tag{24}$$

Os valores aproximados de $y(x)$ pelo MDF são determinados pelo sistema linear formado pelas equações (21), (23) e (25),

$$\begin{cases} 2y_{i+1} - 2y_i = \dfrac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x_i}{2L}\right)\right], & i = 1 \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \dfrac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x_i}{2L}\right)\right], & i = 2, \dots, n-2 \\ 2y_{n-1} - y_{n-2} = 15 - \dfrac{w_0 h^2}{T_0}\left[1 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x_{n-1}}{2L}\right)\right], & i = n-1 \end{cases} \quad (25)$$

Foram realizadas simulações computacionais com quatro diferentes valores para o espaçamento h. Inicialmente, considera-se $\mathrm{h} = 10\mathrm{m}$. O número de subintervalos é determinado por $\mathrm{n} = (\mathrm{b\text{-}a})/\mathrm{h}$. Assim, $\mathrm{n} = (60\text{-}0)/10 = 6$ subintervalos. O resultado numérico obtido está descrito na Tabela 1, que também apresenta a solução analítica e o erro relativo em cada ponto da malha computacional.

Tabela 1 – Resultado numérico e analítico para $h = 10$m

i	x_i	y_i	$f(x_i)$	$ER\ (\%)$
1	0	4,120637	4,031201	2,218589
2	10	4,328947	4,257626	1,675134
3	20	5,061706	5,007886	1,074718
4	30	6,419396	6,381888	0,587717
5	40	8,488300	8,465427	0,270195
6	50	11,334628	11,324333	0,090910
7	60	15,000000	14,999990	0,000067

Fonte: Autores.

O maior erro relativo obtido na simulação com $\mathrm{h} = 10$ m foi de 2,218589 %. A Figura 3 ilustra as soluções analítica e numérica.

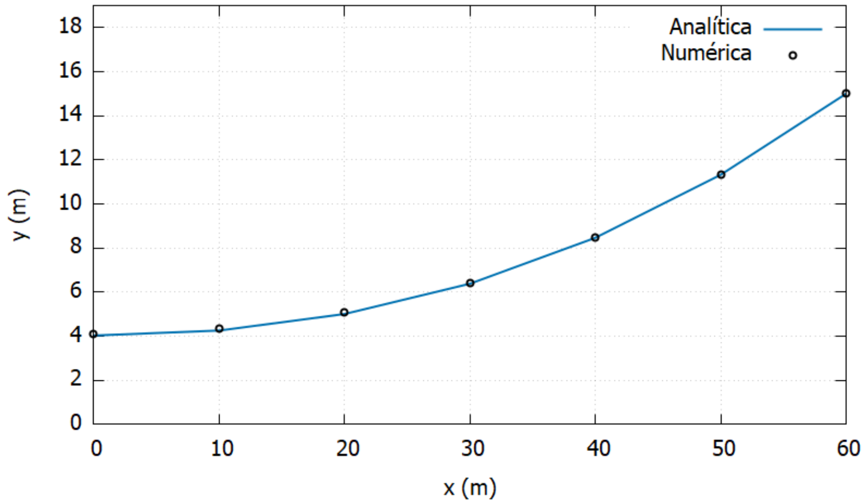


Figura 3 - Resolução analítica e numérica, $\mathrm{h} = 10$ m.
Fonte: Autores.

Considerando os espaçamentos 10 m, 2 m, 1m e 0,6 m, e seus respectivos correspondentes valores de subintervalos 6, 30, 60 e 100, apresentam-se, na Tabela 2, os máximos erros relativos obtidos em cada simulação.

Tabela 2 – Maior erro relativo obtido na simulação de diferentes valores de h

h (m)	n	ER (%)
10	6	2,218589
2	30	0,088578
1	60	0,022149
0,6	100	0,007979

Fonte: Autores.

A Figura 4 mostra as soluções analítica e numérica para $\mathrm{h} = 0{,}6$m ou com 100 subintervalos.

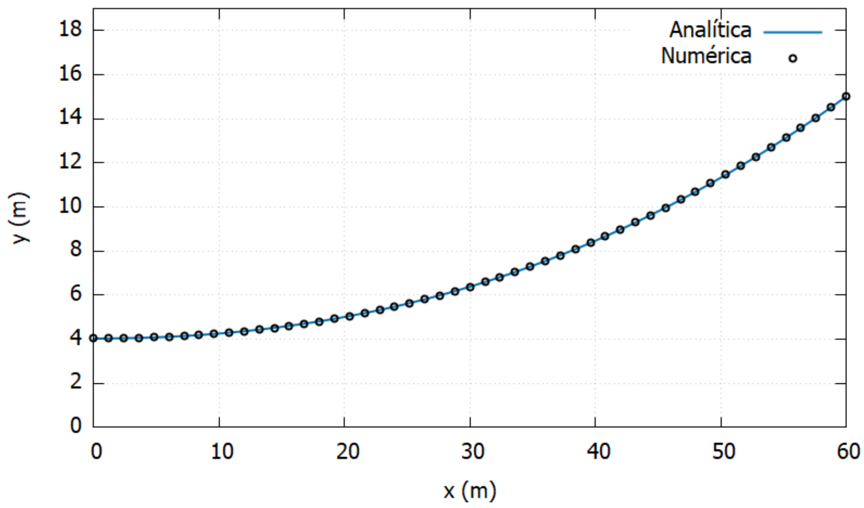


Figura 4 - Resolução analítica e numérica, $\mathrm{h} = 0{,}6$ m.
Fonte: Autores.

4 Conclusões

Com este trabalho foi possível estreitar as relações entre a teoria e a prática, e o método das diferenças finitas revelou-se eficaz nas aproximações das equações diferenciais ordinárias, pois estimou de forma satisfatória o resultado numérico do analítico.

Diante desse estudo realizado pôde-se realmente perceber que tanto a teoria das equações diferenciais como o método das diferenças finitas tem uma aplicabilidade em várias áreas da ciência e podem facilitar muito a vida de vários pesquisadores simulando bem o comportamento da solução de problemas. Além disso, reforça-se que tão importante quanto saber realizar os cálculos é saber obter às equações das aproximações através, nesse caso, da série de Taylor, pois assim desenvolve-se mais ainda o raciocínio matemático, essencial para lidar com problemas que surgem durante uma pesquisa.

Ressalta-se que a realização dessa pesquisa se fez possível por meio deste programa, que proporciona aos acadêmicos o contato com a pesquisa científica, possibilitando o conhecimento e as informações para futuramente prosseguirem nos estudos de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

CARGNELUTTI, J.; GALINA, V. Aplicação do Método das Diferenças Finitas em Equações Diferenciais Ordinárias. **Seminário de Extensão e Inovação da UTFPR – 5ºSEI-UTFPR**, 2015.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; E SILVA, Luiz Henry Monken. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos.** Prentice Hall, 2003.

WROBEL, Luiz C. **Métodos numéricos em recursos hídricos.** Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 1989.

ZILL, D. G. Cullen. Equações Diferenciais. 2001.

REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS POR MEIO DE ANÉIS DE GRUPO

Luana Demarchi Grassi
UTFPR-Toledo
lgrassi@alunos.utfpr.edu.br

Robson Willians Vinciguerra
UTFPR-Toledo
robsonw@utfpr.edu.br

Resumo

Este trabalho objetiva apresentar a teoria e os cálculos para obter as representações irredutíveis de alguns grupos. Assim, apresenta-se algumas definições e resultados sobre anéis, representações e caracteres de grupo que em seguida são utilizados para obter as representações irredutíveis dos grupos S_3 e K_8. Esta pesquisa se justifica pela ausência de detalhamento da obtenção de tais representações na literatura estudada.

Palavras-chave: Representações de grupo. Representações irredutíveis. Anéis de grupo.

1 Introdução

Em álgebra, muitas vezes é útil conhecer a decomposição de uma estrutura, de forma que torne mais fácil estudá-la. Desta forma, este trabalho realizado no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME/CNPq) utiliza definições e resultados sobre anéis de grupo e representações de grupo para obter as representações irredutíveis.

Nem todos os grupos são fáceis de ser estudados, principalmente quando seus elementos não são bem conhecidos ou muito abstratos. As representações de grupo são homomorfismos que associam a cada elemento do grupo uma transformação linear. Assim, alguns problemas da álgebra podem ser reduzidos para problemas da álgebra linear.

Neste trabalho, apresentaremos como obter as representações irredutíveis de um grupo por meio da decomposição em componentes simples de um anel de grupo e da tábua de caracteres. A partir das representações irredutíveis, é possível obter qualquer outra representação do mesmo grupo.

2 Fundamentação Teórica

Iniciaremos com as definições de anel de grupo, classe de conjugação e de soma de classe.

Definição 2.1. *Dado um grupo G e um anel R, o anel de grupo RG é o conjunto de todas as combinações lineares formais da forma $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$, onde $a_g \in R$ e $a_g = 0$ para quase todo $g \in G$.*

Exemplo 2.2. *Consideremos o anel dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o grupo $S_3 = \{e, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ das permutações de 3 elementos. O anel de grupo $\mathbb{Z}S_3$ é da forma:*

$$\mathbb{Z}S_3 = \{n_e e + n_{f_1} f_1 + n_{f_2} f_2 + n_{f_3} f_3 + n_{f_4} f_4 + n_{f_5} f_5 \mid n_e, n_{f_1}, n_{f_2}, n_{f_3}, n_{f_4}, n_{f_5} \in \mathbb{Z}\}$$

A partir de agora, iremos focar em anéis de grupo em que o anel é um corpo. É importante destacar que $dim_K(KG) = |G|$.

Seja G um grupo, definiremos uma relação de equivalência em G da seguinte forma:

$$\forall x, y \in G, x \text{ está relacionado com } y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } y = g^{-1}xg.$$

Quando x está relacionado com y pela relação acima, dizemos que x e y são elementos conjugados em G.

Definição 2.3. *O conjunto $\overline{x} = \{y \in G | y = g^{-1}xg,$ para algum $g \in G\}$ é chamado de classe de conjugação em G do elemento x. Denotaremos as classes de conjugação de G por C_x.*

Exemplo 2.4. *Vamos calcular as classes de conjugação de $S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$:*

$C_1 = \{I\}$, pois $y = g^{-1}Ig = g^{-1}g = I$;

$C_2 = \{(12), (13), (23)\}$, pois $(13) = (123)(12)(132)$ e $(23) = (132)(12)(123)$;

$C_3 = \{(123), (132)\}$, pois $(132) = (12)(123)(12)$.

Podemos perceber que existem 3 classes de conjugação do grupo S_3.

Proposição 2.5. *Sejam G um grupo finito e K um corpo algebricamente fechado, tal que $char(K) \nmid |G|$. Então, o número de componentes simples de KG é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Demonstração: Pode ser visto em (Milies e Sehgal, 2002, p. 151, [1]). ∎

Exemplo 2.6. *Conforme vimos no Exemplo 2.4, S_3 tem 3 classes de conjugação, logo, $\mathbb{C}S_3$ tem 3 componentes simples:*

$$\mathbb{C}S_3 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$$

Notemos que $\mathbb{C}S_3$ tem dimensão 6 sobre $\mathbb{C}$, assim a soma das dimensões de A_1, A_2, A_3 também deve ser 6. Como estamos tratando de anéis de matrizes com entradas em $\mathbb{C}$, nossa única possibilidade é:

$$\mathbb{C}S_3 = M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$$

As representações de um grupo estão ligadas a um espaço vetorial de dimensão finita, desta forma, podem facilmente ser representadas também por matrizes.

Definição 2.7. *Sejam G um grupo, R um anel comutativo e V um R-módulo de dimensão finita (ou espaço vetorial). Uma representação de G sobre R, com espaço representativo V, é um homomorfismo de grupo $T : G \to GL(V)$, onde $GL(V)$ denota o grupo de automorfismos (operadores lineares) de V. A dimensão de V é chamada de grau da representação T e é denotada por $deg(T)$.*

Como para todo $g \in G$, a imagem de g é um operador linear em V, denotaremos $T(g) = T_g : V \to V$. É importante notar que, como T é um homomorfismo de grupos, para todo $g, h \in G$, teremos $T_{gh} = T_g \circ T_h$ e $T_e = I$.

Conforme dito anteriormente, ao fixarmos uma base para V, podemos associar cada operador T_g com sua matriz na base fixada.

Exemplo 2.8. *Dado um grupo G e um anel R, a representação $T : G \to GL(n, R)$ que associa todos os elementos de G com o elemento identidade de $GL(n, R)$ é chamada de representação trivial de grau n.*

Exemplo 2.9. *Seja S_n o grupo das permutações de n elementos. Podemos definir uma representação $S : S_n \to M_1(R) \simeq R$, da seguinte forma:*

$$S(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma \text{ é permutação par} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é permutação ímpar} \end{cases}$$

Agora, apresentaremos algumas definições sobre representações.

Definição 2.10. *Duas representações $T : G \to GL(V)$ e $S : G \to GL(W)$ de um grupo G sobre um corpo K são chamadas de equivalentes se existe um isomorfismo $\phi : V \to W$ tal que $S_g = \phi \circ T_g \circ \phi^{-1}$, para todo $g \in G$.*

Como exemplo, se tomarmos duas representações de G sobre um mesmo espaço vetorial, mas com bases diferentes, obteremos matrizes diferentes, porém equivalentes.

Definição 2.11. *Uma representação $T : G \to GL(V)$ de um grupo G sobre um corpo K é chamada de irredutível se V é diferente de $\{0\}$ e os únicos subespaços T-invariantes de V são $\{0\}$ e V.*

Proposição 2.12. *Sejam G um grupo e R um anel comutativo. Então:*

(*i*) *Duas representações T e T' de G sobre R são equivalentes se, e somente se, os RG-módulos correspondentes são isomorfos;*

(*ii*) *Uma representação é irredutível (ou completamente redutível) se, e somente se, seu RG-módulo correspondente é simples (ou semissimples).*

Demonstração: Esta demonstração encontra-se em (Milies e Sehgal, 2002, p. 171,[1]). ■

Esta proposição nos mostra que para determinar as representações irredutíveis de um grupo G sobre um anel R, podemos nos valer da decomposição de RG em componentes simples, sendo que cada componente é uma soma de R módulos simples não isomorfos. Assim, para cada componente da decomposição de RG associamos uma representação irredutível ou completamente redutível.

De acordo com Steinberg (2011, p.22, [2]), se $\phi : G \to GL(V)$ é uma representação não nula de um grupo G finito, então ϕ é irredutível ou decomponível em representações irredutíveis. Assim, para conhecer qualquer representação de grupo, precisamos apenas determinar as representações irredutíveis deste grupo.

Veremos agora como podemos utilizar a definição e alguns resultados de caracteres de grupo para obter representações irredutíveis.

Definição 2.13. *Sejam G um grupo, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e $T : G \to GL(V)$ uma representação de G sobre K. Então o carácter χ de G, dado pela representação T, é a associação $\chi : G \to K$ dada por $\chi(g) = tr(T_g)$, para todo $g \in G$.*

Denotamos o grau de um carácter χ por $gr(\chi)$ e o definimos como sendo igual ao grau da representação T.

Ainda, se $T_1, \ldots, T_r$ são representações de G com caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_r$ respectivamente, então $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ gera o carácter $\chi = \chi_1 + \cdots + \chi_r$.

Os próximos resultados nos permitirão obter uma tábua de caracteres para as representações de G sobre K, que será utilizada para refinar a busca pelas representações.

Lema 2.14. *(i) Se T e T' são representações equivalentes, então elas geram o mesmo carácter;*

(ii) Caracteres são constantes nas classes de conjugação de G.

Proposição 2.15. *Seja G um grupo finito e K um corpo tal que $char(K) \nmid |G|$. Se $\chi_1, \ldots, \chi_r$ denotam os caracteres dados por um conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de G sobre K, então o conjunto de todos os caracteres de G sobre K é o conjunto das combinações lineares não nulas da forma $\chi = \sum_{i=1}^{r} n_i\chi_i$, onde cada n_i é um inteiro não negativo.*

As demonstrações do Lema 2.14 e da Proposição 2.15 encontram-se em (Milies e Sehgal, 2002, p. 180, [1]).

Observação 2.16. *Considere G um grupo e $G\mathbb{C} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_r$ a decomposição do anel de grupo em componentes simples. Assim, se T_i denota uma representação irredutível de G sobre $\mathbb{C}$ correspondente a I_i, e χ_i seu carácter, $1 \leq i \leq r$, então podemos escrever a representação T de G sobre $\mathbb{C}$ como:*

$$T = \oplus_{i=1}^{r} n_i T_i$$

onde $n_i = dim_K(I_i)$. Calculando os traços, obtemos

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} n_i\chi_i.$$

Temos que $n_i = gr(T_i) = \chi(1)$. Podemos reescrever a fórmula acima como

$$\rho(g) = \sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)\chi_i(g).$$

Lembrando que $\rho(1) = |G|$ e $\rho(g) = 0$ quando $g \neq 1$.

Como os caracteres são constantes nas classes de conjugação $C_1, \ldots, C_r$ de G, podemos escolher um elemento x_i em cada classe e calcular cada carácter χ nestes elementos. Assim, determinamos completamente os caracteres de G sobre $\mathbb{C}$. Organizando estes dados em uma tabela, temos a chamada Tábua de Caracteres:

	C_1	C_2	$\cdots$	C_r
χ_1	$\chi_1(x_1)$	$\chi_1(x_2)$	$\cdots$	$\chi_1(x_r)$
χ_2	$\chi_2(x_1)$	$\chi_2(x_2)$	$\cdots$	$\chi_2(x_r)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
χ_r	$\chi_r(x_1)$	$\chi_r(x_2)$	$\cdots$	$\chi_r(x_r)$

3 Resultados e Discussão

Exemplo 3.1. *Conforme visto no Exemplo 2.6, o anel de grupo $\mathbb{C}S_3$ possui 3 componentes simples:*

$$\mathbb{C}S_3 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C}).$$

Sabemos que devemos encontrar 3 representações irredutíveis, duas de grau 1 para as primeiras componentes do anel de grupo e uma de grau 2 para a última componente. Sejam então

T_1, T_2 e T_3 estas representações. Definiremos as representações apenas nos geradores, como representações são homomorfismos, precisamos definir matrizes de forma que $T(gh) = T(g)T(h)$. Podemos definir T_1 como a representação trivial e T_2 como a representação sinal:

$T_1((12)) = 1$ *e* $T_1((123)) = 1$.

$T_2((12)) = -1$ *e* $T_2((123)) = 1$.

Claramente estas duas transformações atendem a propriedade $T(gh) = T(g)T(h)$. Devemos definir agora uma representação T_3 de grau 2, de forma que $T_3((12))^2 = T_3(I) = I_2$ e $T_3((123))^3 = T_3(I) = I_2$. Com algumas tentativas, obtemos as seguintes matrizes:

$$T_3((12)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } T_3((123)) = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}.$$

Desta forma, obtemos uma matriz para cada gerador, cuja diagonal são as matrizes T_1, T_2 e T_3 em blocos:

$$T((12)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T((123)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$$

Calculando o traço dos blocos das matrizes dadas, obtemos a tábua dos caracteres:

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Exemplo 3.2. *Seja $K_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ o grupo das unidades básicas dos quatérnios com a operação de multiplicação. Podemos vê-lo como o gerado pelas unidades i e j, pois $1 = i^4, -1 = i^2, -i = i^3, -j = i^2 j, k = ij, -k = i^3 j$.*

Calculando as classes de conjugação, obtemos as 5 classes:

$C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{-1\}$, $C_3 = \{i, -i\}$, $C_4 = \{j, -j\}$ *e* $C_5 = \{k, -k\}$ *e, portanto, o número de componentes simples de $\mathbb{C}K_8$ é 5:*

$$\mathbb{C}K_8 = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5$$

Como a dimensão de $\mathbb{C}K_8$ sobre $\mathbb{C}$ é 8 e A_i são anéis de matrizes, temos que as dimensões serão: $dim A_1 = dim A_2 = dim A_3 = dim A_4 = 1$ e $dim A_5 = 4$ e, consequentemente,

$$\mathbb{C}K_8 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$$

Seja T um representação de K_8 sobre $\mathbb{C}$, então $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$. Assim devemos determinar 4 representações não equivalentes de grau 1 e uma representação de grau 2.

$$\begin{array}{ll} T_1(i) = 1 & T_1(j) = 1 \\ T_2(i) = 1 & T_2(j) = -1 \\ T_3(i) = -1 & T_3(j) = 1 \\ T_4(i) = -1 & T_4(j) = -1 \end{array}$$

Nos resta ainda, determinar uma representação de grau 2. Podemos deduzi-la por tentativas, utilizando as identidades $i^2 = j^2 = -1$, $i^4 = 1$, $ij = k$, porém este é um método bastante trabalhoso e pouco metódico. Como se trata de um grupo maior e com mais elementos para verificar, construiremos a tábua de caracteres para depois encontrar a T_5. Veremos que o traço nos ajudará a determinar com mais facilidade estas matrizes.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	?	?	?	?	?

Por 2.16, sabemos que

$$\rho(1) = 8 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$\rho(-1) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)$$

$$\rho(i) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0$$

$$\rho(j) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0$$

$$\rho(k) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \text{ Portanto,}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

E, assim, $tr(T_5(i)) = tr(T_5(j)) = tr(T_5(k)) = 0$, além das igualdades dadas anteriormente no Exemplo 3.2. Com algumas tentativas, podemos obter as seguintes matrizes:

$$T_5(i) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } T_5(j) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, obtemos uma matriz para cada classe de conjugação, cuja diagonal são as matrizes T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 em blocos:

$$T(i)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&i&0\\0&0&0&0&0&-i\end{bmatrix},\quad T(j)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$T(1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad T(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$T(k)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&-i\\0&0&0&0&-i&0\end{bmatrix}.$$

Finalizamos destacando que, ao mesmo tempo em que as representações nos mostram quais são os caracteres do grupo, os caracteres também nos auxiliam a obter as representações.

4 Conclusão

Com o desenvolvimento deste trabalho, pode-se perceber que ao mesmo tempo em que algumas representações são facilmente obtidas, outras demandam mais trabalho.

Isto se deve em grande parte ao grau destas representações. Muitas vezes pode-se saber várias informações sobre uma representação, como por exemplo seu traço, sem realmente determinar esta representação. Nestes casos, a intuição e o estudo de outras teorias podem auxiliar.

Referências

[1] Milies, C. P., Sehgal, S. K., *An Introduction to Group Rings*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[2] Steinberg, B. *Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach.* Springer Science & Business Media, 2011.

Um estudo sobre os Anéis de Frações e seus Ideais

Maurício Eduardo Lamb
UTFPR - Toledo
mauricio.lamb@hotmail.com

Robson Willians Vinciguerra
UTFPR - Toledo
robsonw@utfpr.edu.br

Resumo

Os números racionais são construídos na Álgebra por meio do corpo de frações dos números inteiros. Porém, sempre nos perguntamos se podemos generalizar ainda mais essa construção. Neste trabalho faremos uma introdução sobre os anéis de frações, que generaliza o conceito dos corpos de frações, destacando resultados básicos sobre os anéis de frações, contrações e extensões de ideais e por fim trazendo uma bijeção entre os ideais do anel para os ideais do anel de frações. Além disso, relacionando os ideais primos do anel ao anel de frações. Este trabalho está sendo desenvolvido no Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) da UFPR - Universidade Federal do Paraná, Câmpus Curitiba.

Palavras-chave: Anéis. Anéis de frações. Ideais.

1 Introdução

Na disciplina de Álgebra estudamos estruturas algébricas tais como grupos, anéis e corpos. Além disso, é construído o corpo de frações do domínio de integridade dos números inteiros, a partir da relação de equivalência $(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*\}$. As classes de equivalência obtidas da relação acima são denotadas por $\overline{(a,b)} = \dfrac{a}{b}$ e consistem de todas as frações equivalentes a $\dfrac{a}{b}$. Ou seja, quando temos duas frações de equivalentes, dizemos que elas são representantes da mesma classe de equivalência. Tendo como base essa relação de equivalência construímos o conjunto quociente $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$ com as operações definidas por

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right) & \to & \dfrac{ad+bc}{bd} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ & \left(\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}\right) & \to & \dfrac{ac}{bd} \end{array}$$

esse conjunto chamamos de corpo de frações e nesse caso é o conjunto dos números racionais. Onde que os inteiros pode ser identificado com o seguinte subconjunto de $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$ por meio do homomorfismo $f(m) = \dfrac{m}{1}$.

No presente trabalho construímos o corpo de frações $K = (R \times R^*)/\sim$ de um domínio de integridade R. E depois abordaremos o caso geral, quando não há a necessidade do anel ser um domínio, construindo assim o anel de frações $S^{-1}R$.

Na seção 3.1 falamos um pouco sobre o corpo de frações que é visto na disciplina de Álgebra. Na seção 3.2 mostramos que o corpo de frações dos números inteiros são os racionais. Na seção 3.3 iniciamos o assunto foco do trabalho os anéis de frações. Na seção 3.4 abordamos as definições de contração e extensão de ideais que posteriormente na mesma seção com base em resultados sobre esse assunto conseguiremos construir uma bijeção entre os ideais do anel R com algumas propriedades para os ideais próprios do anel de frações. Por fim na seção 3.5 vamos falar um pouco sobre a localização de anéis.

2 Material e Métodos/Metodologia/Estudo de Caso

No desenvolvimento desse trabalho foi utilizado como metodologia o método dedutivo que, segundo Gêronimo e Franco [1], consiste em:

- aceitar algumas afirmações denominadas *axiomas*;
- aceitar alguns conceitos denominados *conceitos primitivos*;
- demonstrar as seguintes afirmações usando os axiomas respeitando as regras da lógica clássica;
- apresentar *definições* a partir de axiomas, conceitos primitivos e afirmações já demonstradas;
- basear as demonstrações em afirmações anteriormente demonstradas ou em axiomas.

Assim, o presente trabalho trata de uma revisão bibliográfica sobre anéis de frações obtida em [2].

3 Resultados e Discussão

3.1 O corpo de frações

Primeiramente vamos ver que dado o produto cartesiano $R \times R^* = \{(a,b) \mid a \in R \text{ e } b \in R^*\}$ com R sendo um domínio de integridade, a relação sobre $R \times R^*$ dada por

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad = bc$$

é de equivalência. Ora, pois

1. Reflexiva: Como R é um domínio, sabemos que vale a propriedade comutativa, logo $ab = ba$, assim $(a,b) \sim (a,b)$.
2. Simétrica: Vamos supor que $(a,b) \sim (c,d)$, ou seja, $ad = bc$. Vimos que em R vale a propriedade comutativa, logo $cb = da$, assim temos que $(c,d) \sim (a,b)$.
3. Transitiva: Vamos supor que $(a,b) \sim (c,d)$ e $(c,d) \sim (e,f)$, ou seja, $ad = bc$ e $cf = de$. Vamos multiplicar a primeira igualdade por f e a segunda por b, assim obtemos $adf = bcf$ e também que $cfb = deb$, logo $adf = deb$. Como R é um domínio e $d \neq 0$, podemos concluir que $af = be$, assim $(a,b) \sim (e,f)$. Portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Vamos denotar essa classe por

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in R \times R^* \mid (a,b) \sim (x,y)\} = \frac{a}{b}.$$

Onde cada fração $\frac{a}{b}$ representa a classe de equivalência de todas as frações equivalentes a ela.

Com base nessa relação de equivalência podemos construir o conjunto quociente

$$\begin{aligned} K=(R\times R^*)/\sim &= \left\{\overline{(a,b)}\mid (a,b)\in R\times R^*\right\} \\ &= \left\{\frac{a}{b}\mid (a,b)\in R\times R^*\right\} \\ &= \left\{\frac{a}{b}\mid a\in R \text{ e } b\in R^*\right\} \end{aligned}$$

com as operações de adição e multiplicação definidas por:

$$\begin{array}{rccc} +: & K\times K & \to & K \\ & \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) & \to & \frac{ad+bc}{bd} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot: & K\times K & \to & K \\ & \left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) & \to & \frac{ac}{bd} \end{array}$$

Vamos verificar agora se elas são bem definidas, ou seja, se as operações não dependem dos representantes das classes. Sejam $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f},\frac{g}{h}\in K$ que satisfazem

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ e } \frac{e}{f}=\frac{g}{h},$$

vamos provar que

$$\frac{a}{b}+\frac{e}{f}=\frac{c}{d}+\frac{g}{h} \text{ e, além disso } \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h},$$

ou ainda, que

$$\frac{af+be}{bf}=\frac{ch+gd}{dh} \text{ e } \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}.$$

Sabemos que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, mas disso temos que $ad=bc$ e $eh=fg$.

1. Adição: Vamos multiplicar a igualdade $ad=bc$ por hf e a igualdade $eh=fg$ por bd. Assim, obtemos $afdh=bfch$ e $bedh=bfgd$, vamos agora somar as igualdades lado a lado $afdh+bedh=bfch+bfgd$, evidenciando alguns termos temos

   $$(af+be)dh=bf(ch+gd).$$

   Desse modo, provamos que

   $$\frac{af+be}{bf}=\frac{ch+gd}{dh}.$$

2. Multiplicação: multiplicamos os termos correspondentes das igualdades $ad=bc$ e $eh=fg$ lado a lado, obtemos $(ad)(eh)=(bc)(fg)$, ainda, como R é comutativo, $(ae)(dh)=(bf)(cg)$. Mas, isso significa que

   $$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}.$$

O conjunto $(K,+,\cdot)$ é um corpo conhecido como corpo de frações de R. Pois podemos ver que

1. K é um grupo abeliano.

   Associativa: Sejam $\frac{a}{s},\frac{b}{t},\frac{c}{u}\in K$, então

   $$\frac{a}{s}+(\frac{b}{t}+\frac{c}{u})=\frac{a}{s}+\frac{ub+tc}{tu}=\frac{tua+s(ub+tc)}{stu}=\frac{tua+sub+stc}{stu}$$

$$(\frac{a}{s}+\frac{b}{t})+\frac{c}{u}=\frac{ta+sb}{st}+\frac{c}{u}=\frac{u(ta+sb)+stc}{stu}=\frac{uta+usb+stc}{stu}$$

Comutativo:

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{at+sb}{st}=\frac{bs+ta}{ts}=\frac{b}{t}+\frac{a}{s}$$

Elemento neutro: $\exists\frac{0}{1}\in K$ tal que

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a1+b0}{b1}=\frac{a}{b}\quad \text{e} \quad \frac{0}{1}+\frac{a}{b}=\frac{0b+1a}{1b}=\frac{a}{b}$$

Elemento oposto: Dado $\frac{a}{s}\in K$, existe $\frac{-a}{s}\in K$ tal que

$$\frac{a}{s}+\frac{-a}{s}=\frac{sa+s(-a)}{s^2}=\frac{0}{s^2}=\frac{0}{1}\quad \text{e} \quad \frac{-a}{s}+\frac{a}{s}=\frac{s(-a)+sa}{s^2}=\frac{0}{s^2}=\frac{0}{1}$$

2. Para a multiplicação

Comutativa:

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}=\frac{ba}{ts}=\frac{b}{t}\cdot\frac{a}{s}$$

Associativa:

$$\frac{a}{s}\cdot(\frac{b}{t}\cdot\frac{c}{u})=\frac{a}{s}\cdot\frac{bc}{tu}=\frac{a(bc)}{stu}=\frac{(ab)c}{stu}=\frac{ab}{st}\cdot\frac{c}{u}=(\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t})\cdot\frac{c}{u}$$

Existe a identidade $\frac{1}{1}\in K$ tal que

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}\quad \text{e} \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1\cdot a}{1\cdot b}=\frac{a}{b}$$

Inverso: Dado $\frac{a}{s}\in K^*$, existe $\frac{s}{a}\in K$ tal que

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{a}=\frac{as}{sa}=\frac{as}{as}=\frac{1}{1}.$$

3. Relacionando as operações com a distributiva:

$$\frac{a}{s}\cdot(\frac{b}{t}+\frac{c}{u})=\frac{a}{s}\cdot\frac{ub+tc}{tu}=\frac{a(ub+tc)}{stu}=\frac{aub+atc}{stu}$$

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}+\frac{a}{s}\cdot\frac{c}{u}=\frac{ab}{st}+\frac{ac}{su}=\frac{absu+stac}{stsu}=\frac{abu+tac}{tsu}$$

Portanto, $(K,+,\cdot)$ é um corpo, como queríamos demonstrar.

Considere o subconjunto $K_R\subseteq K$ dado por:

$$K_R=\left\{\frac{a}{1}\mid a\in R\right\}.$$

Vamos provar que K_R é um subanel de K, o elemento neutro pertence a K_A, pois basta tomarmos

$$\frac{0}{1} \in K_R.$$

Agora, sejam $\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in K_R$ temos

$$\frac{a}{1}\frac{b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{-b}{1} = \frac{a1 - 1b}{1 \cdot 1} = \frac{a-b}{1} \in K_R$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1 \cdot 1} = \frac{ab}{1} \in K_R.$$

Portanto, K_R é um subanel de K.

Além disso, conseguimos ver R como um subconjunto de K por meio do isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & R & \to & K_R \\ & a & \to & \dfrac{a}{1} \end{array}$$

Vamos verificar primeiramente se é um homomorfismo.

Dados $a, b \in R$, temos

$f(a+b) = \dfrac{a+b}{1} = \dfrac{a}{1} + \dfrac{b}{1} = f(a) + f(b)$

$f(a \cdot b) = \dfrac{a \cdot b}{1} = \dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{b}{1} = f(a) \cdot f(b)$

Agora vamos verificar se f é um isomorfismo.

Injetividade: O núcleo de f é

$$Ker(f) = \left\{a \in R \mid f(a) = \frac{0}{1}\right\} = \left\{a \in R \mid \frac{a}{1} = \frac{0}{1}\right\} = \{a \in R \mid a \cdot 1 = 1 \cdot 0\} = \{0\}$$

.

Sobrejetividade: Seja $\frac{a}{1} \in K_R$ sempre existe $a \in R$ tal que $f(a) = \frac{a}{1}$.

Portanto, f é um isomorfismo de modo que $R \simeq K$. Podemos então identificar o conjunto R dentro de K por meio desse isomorfismo, onde f transfere as operações de R para as operações de K.

3.2 O corpo de frações $\mathbb{Q}$

Vejamos agora, como exemplo, que o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ é o corpo de frações do domínio de integridade dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Pelo o que provamos, a relação $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ define uma relação de equivalência em

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}.$$

Ela é denotada por $\overline{(a,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (a, b) \sim (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid ay = bx\} = \dfrac{a}{b}$.

Desse modo quando dizemos que duas frações são equivalentes, elas são representantes da mesma classe de equivalência. Por exemplo, a fração é $\frac{1}{2}$ representa a classe $\{\cdots, \frac{-2}{-4}, \frac{-1}{-2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \cdots\}$. Por fim, o conjunto quociente

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim) &= \{\overline{(a,b)} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\} \\ &= \{\frac{a}{b} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\} \\ &= \{\frac{a}{b} \mid a\in\mathbb{Z} \text{ e } b\in\mathbb{Z}^*\} \end{aligned}$$

o conjunto com as operações definidas acima é o corpo dos números racionais.

Podemos identificar os números inteiros $\mathbb{Z}$ com o subanel $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = \left\{\frac{a}{1} \mid a\in\mathbb{Z}\right\}$ de $\mathbb{Q}$ pelo isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \\ & a & \to & \frac{a}{1} \end{array}$$

Ou seja, $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ são algebricamente iguais. Além disso, $\mathbb{Z}$ é identificado em $\mathbb{Q}$ com o subconjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. Onde, o homomorfismo f transfere as operações de $\mathbb{Z}$ para as operações de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.

Isso significa que podemos realizar as operações com elementos de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ fazendo a troca dos elementos $a\in\mathbb{Z}$ por $\frac{a}{1}\in\mathbb{Q}$ nas operações:

A soma $a+\frac{c}{d}$ faz sentido quando identificamos a por $a=f(a)=\frac{a}{1}$. Assim, $\frac{a}{1}+\frac{c}{d}$. Analogamente, o produto $a\cdot\frac{c}{d}$ faz sentido quando $\frac{a}{1}\cdot\frac{c}{d}$.

3.3 Anéis de frações

Ora, podemos generalizar ainda mais esse conceito, vamos aplicar a mesma construção mas agora para um anel comutativo, assim podendo existir divisores de zero. Para isso, precisamos saber o que é um sistema multiplicativo.

Definição 3.1. Dizemos que um subconjunto S de um anel comutativo R é um *sistema multiplicativo* quando

- $0\notin S$,
- $1\in S$, e
- se $s_1, s_2\in S$, então $s_1s_2\in S$.

Exemplo 3.2. Se R é um domínio de integridade, então $S=R\backslash\{0\}$ é um sistema multiplicativo.

Dados $x, y\in S$ ambos não nulos, temos que $x\neq 0$ e $y\neq 0$, então como R é um domínio temos que $xy\neq 0$ o que implica que $xy\in S$. Logo, S é um sistema multiplicativo.

No caso dos inteiros, ele é um domínio de integridade, então o sistema multiplicativo relacionado é $S=\mathbb{Z}^*$.

Exemplo 3.3. O subconjunto $S=\{3^i | i\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{Z}$ é um sistema multiplicativo.

É fácil ver que $0\notin S$ pois não existe $i\in\mathbb{N}$ tal que $3^i=0$.

Sabemos também que $1\in S$ pois basta tomarmos $i=0\in\mathbb{N}$ tal que $3^0=1$.

Agora sejam $x, y\in S$ tal que $x=3^i$ e $y=3^j$ com $i, j\in\mathbb{N}$, fazendo o produto temos que $x\cdot y=3^i\cdot 3^j=3^{i+j}$.

Como agora não estamos mais em um domínio, a relação de equivalência utilizada anteriormente, se a definíssemos novamente conseguiríamos mostrar que é reflexiva e simétrica, mas nesse caso a transitiva não ocorre, pois quando supomos que $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, ou seja, $ad = bc$ e $cf = de$. Pela falta da propriedade de domínio não conseguimos concluir que $af = be$, ou ainda que, $(a, b) \sim (e, f)$, logo não é uma relação de equivalência no caso onde que R não é um domínio. Desse modo, é necessário a nova relação de equivalência que iremos definir a seguir.

Então seja S um sistema multiplicativo do anel comutativo R. Vamos definir a relação $\sim$ em $R \times S$ de modo que para $(a, s), (b, t) \in R \times S$ temos

$$(a, s) \sim (b, t) \iff \exists u \in S \text{ com } u(ta - sb) = 0$$

Vamos verificar agora se $\sim$ é realmente uma relação de equivalência em $R \times S$.

- Reflexiva $(a, s) \sim (a, s)$ Seja $1 \in S$, então $1(sa - sa) = 0$.
- Simétrica: Vamos supor que $(a, s) \sim (b, t)$, ou seja, $\exists u \in S$ tal que $u(ta - sb) = 0$. Como R é comutativo $u(at - bs) = 0$. Portanto $(b, t) \sim (a, s)$.
- Transitiva: Sejam $(a, s), (b, t), (c, u) \in R \times S$, vamos supor que $(a, s) \sim (b, t)$ e $(b, t) \sim (c, u)$. Portanto existe $v, w \in S$ tal que

  $$v(ta - sb) = 0 = w(ub - tc)$$

  Disso temos $vta = vsb$ e $wtc = wub$. Na primeira igualdade vamos multiplicar dos dois lados da igualdade por wu e na outra igualdade por vs. Assim tempos $wuvta = wuvsb$ e $vswtc = vswub$. Como R é comutativo, temos

  $$wuvta = vswtc \Rightarrow wvt(ua - sc) = 0$$

  com $wtv \in S$. Portanto $(a, s) \sim (c, u)$. Ou seja, é transitiva e assim é uma relação de equivalência.

Com base nessa relação de equivalência, vamos construir o anel de frações, então seja S um sistema multiplicativo do anel comutativo R. Para $(a, s) \in R \times S$, denotamos a classe de equivalência de $\sim$ que contém (a, s) por $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in R \times R^* \mid (a, b) \sim (x, y)\} = \dfrac{a}{b}$. E denotamos o conjunto de todas as classes de equivalência de $\sim$ por $S^{-1}R$ de

$$S^{-1}R/ \sim = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in R \text{ e } b \in S \right\}.$$

Mostraremos que esse conjunto tem a estrutura de um anel comutativo com as operações:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st} \text{ e } \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

para todo $a, b \in R$ e para todo $s, t \in S$. Esse novo anel $S^{-1}R$ é chamado de anel de frações de R com respeito a S. Seu zero é $\dfrac{0}{1}$ e seu elemento identidade é $\dfrac{1}{1}$. O anel r se comunica com o anel $S^{-1}R$ por meio do homomorfismo de anéis $f : R \to S^{-1}R$ dado por $f(r) = \dfrac{r}{1}, \forall r \in R$ que é conhecido como homomorfismo natural.

Vamos verificar se a operação de adição não depende dos representantes das classes, para isso vamos supor que $a, a', b, b' \in R$ e $s, s', t, t' \in S$ tal que em $S^{-1}R$,

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \text{ e } \frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}$$

portanto, existe $u, v \in S$ tal que $u(s'a - sa') = 0 = v(t'b - tb')$. Da primeira igualdade multiplicando por vtt' obtemos $uv(s't'ta - stt'a') = 0$. Da segunda equação multiplicando por uss' obtemos

$$uv(s't'sb - sts'b') = 0,$$

igualando as duas equações obtemos $uv(s't'(ta + sb) - st(t'a' + s'b')) = 0$ então

$$\exists uv \in S \text{ tal que } uv[s't'(at + sb) - st(a't' + s'b')] = 0 \text{ de modo que } \frac{ta + sb}{st} = \frac{t'a' + s'b'}{s't'}.$$

Agora vamos provar que a operação de multiplicação independe dos representantes das classes, ou seja,

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{a'}{s'} \cdot \frac{b'}{t'} \text{ e } \frac{ab}{st} = \frac{a'b'}{s't'}.$$

Então, existe $u, v \in S$ tal que $u(s'a - sa') = 0$ e $v(t'b - tb') = 0$, então

$$us'a = usa' \text{ e } vt'b = vtb'$$

agora a primeira equação por $vt'b$ e a segunda equação por usa', assim temos

$$uvs't'ab = uvt'sa'b \text{ e } uvst'a'b = uvtsa'b'.$$

Desse modo existe $uv = w \in S$ tal que

$$ws't'ab = wsta'b' \text{ além disso, } w(s't'ab - sta'b') = 0.$$

Por fim a demonstração de que o conjunto $S^{-1}R$ com as propriedades de adição e multiplicação bem definidas é um anel comutativo é análoga a demonstração do corpo de frações, mas agora nem sempre os elementos vão ter inverso multiplicativo. De mesmo modo existe o homomorfismo $f : R \to S^{-1}R$ dado por $f(r) = \frac{r}{1}$ que a demonstração é análoga ao caso do corpo de frações, porém, agora não é um homomorfismo injetor.

Observações 3.4.

1. Note que $0_{S^{-1}R} = \frac{0}{1} = \frac{0}{s}$, para todo $s \in S$.

2. Seja $a \in R$ e $s \in S$. Então $\frac{a}{s} = 0_{S^{-1}R}$ se e somente, se existe $t \in S$ de modo que $t(1a - s0) = 0$, ou seja, se e somente, se existe $t \in S$ tal que $ta = 0$.

3. Uma vez que $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$ se e somente, se existe $t \in S$ tal que, $t(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = 0$, isso acontece se e somente, $0 \in S$, quando isso acontece consideramos o sistema multiplicativo sem o 0 para obtermos o anel de frações não trivial.

4. Em geral, o homomorfismo natural $f : R \to S^{-1}R$ não precisa ser injetivo, pois $\ker f = \{a \in R : \exists t \in S \text{ tal que } ta = 0\}$.

Como vimos, agora não estamos mais em um corpo de frações, então nem todo elemento de $S^{-1}R$ possui inverso, o resultado abaixo nos da uma condição para um elemento de $S^{-1}R$ possuir inverso.

Proposição 3.5. *Se $r \in S$, então $\frac{r}{s}$ possui inverso.*

Demonstração: Como $r \in S$, existe $\frac{s}{r} \in S^{-1}R$ tal que $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{r} = \frac{1}{1}$

Por outro lado a sua recíproca não vale.

Contra-exemplo 3.6. Seja $R = \mathbb{Z}_8$ e $S = \{\overline{1}, \overline{5}\}$, então podemos definir o conjunto $R \times S = \big\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{5}),(\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{5}),(\overline{2},\overline{1}),(\overline{2},\overline{5}),(\overline{3},\overline{1}),(\overline{3},\overline{5}),(\overline{4},\overline{1}),(\overline{4},\overline{5}),(\overline{5},\overline{1}),(\overline{5},\overline{5}),(\overline{6},\overline{1}),(\overline{6},\overline{5}),(\overline{7},\overline{1}),(\overline{7},\overline{5})\big\}$, então anel de frações é o seguinte conjunto $\left\{\frac{\overline{0}}{\overline{1}},\frac{\overline{1}}{\overline{1}},\frac{\overline{2}}{\overline{1}},\frac{\overline{3}}{\overline{1}},\frac{\overline{4}}{\overline{1}},\frac{\overline{5}}{\overline{1}},\frac{\overline{6}}{\overline{1}},\frac{\overline{7}}{\overline{1}},\frac{\overline{1}}{\overline{5}},\frac{\overline{3}}{\overline{5}},\frac{\overline{4}}{\overline{5}},\frac{\overline{6}}{\overline{5}},\frac{\overline{7}}{\overline{5}}\right\}$. Se pegarmos por exemplos o produto do elemento $\frac{\overline{3}}{\overline{1}}$, ele é seu próprio inverso, pois $\frac{\overline{3}}{\overline{1}} \cdot \frac{\overline{3}}{\overline{1}} = \frac{\overline{1}}{\overline{1}}$ e $\overline{3} \notin S$.

Observação 3.7. Seja R um domínio de integridade, já vimos que o conjunto $S = R\backslash\{0\}$ é um sistema multiplicativo contido em R. Neste caso, vemos que a relação de equivalência definida para anéis de frações é forçada ser a mesma definida para os corpos de frações. De fato, pois S consiste de elementos que não são divisores de zero em R, tal que, para $a, b \in R$ e $s, t \in S$, existe $u \in S$ de modo que $u(ta - sb) = 0$ se e somente se $ta - sb = 0$, então a relação de equivalência é a mesma do corpo de frações, além disso, as operações de anel no conjunto das classes de equivalência $S^{-1}R$ são as mesmas em ambas as situações. Portanto, o anel de frações é o corpo de frações estudado no caso anterior.

Exemplo 3.8. Seja P um ideal de R. Então, P é primo $\Leftrightarrow S = R - P$ é um sistema multiplicativo.

($\Rightarrow$) $1 \notin P$ pois P é primo o que implica que $P \neq R$ e se $1 \in P$ teríamos que $P = R$ o que é um absurdo. Então, obrigatoriamente $1 \in S$. Também, temos que $0 \notin S$, pois como P é um subanel, $0 \in P$.

Por fim, sejam $s_1, s_2 \in S$ temos que $s_1 s_2 \in S$ uma vez que pela contra positiva da definição de ideal primo temos que se $s_1 \notin P$ e $s_2 \notin P$, então $s_1 s_2 \notin P$, ou seja, $s_1 s_2 \in S$.

($\Leftarrow$) Como S é um sistema multiplicativo, $1 \in S$ e, assim $1 \notin P$.

Da definição de sistema multiplicativo temos que dados $s_1, s_2 \in S$, então $s_1 s_2 \in S$. Ou seja, da contra positiva temos ainda que se $s_1, s_2 \notin P$, então $s_1 s_2 \notin P$. Portanto P é primo.

Vejamos agora como o anel R se relaciona com $S^{-1}R$ por meio do homomorfismo natural.

Observação 3.9. Seja S um sistema multiplicativo de R, e seja $f : R \to S^{-1}R$ o homomorfismo natural de anéis. Note que f tem as seguintes propriedades.

1. Para cada $s \in S$, o elemento $f(s) = \frac{s}{1}$ é uma unidade de $S^{-1}R$, tendo como inverso $\frac{1}{s}$.
2. de 3.4(4), temos que se $a \in \ker f$, então existe $s \in S$ tal que $sa = 0$.
3. Para cada elemento $\frac{a}{s}$ de $S^{-1}R$ pode ser escrito como $\frac{a}{s} = f(a)(f(s))^{-1}$, pois

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} = \frac{a}{1}\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = f(a)(f(s))^{-1}.$$

O resultado a seguir traz uma unicidade do anel de frações por meio da composição de homomorfismos. Não iremos demonstrá-lo para não prolongar muito o foco do trabalho.

Proposição 3.10. *[2, Proposition 5.10] Sejam S um sistema multiplicativo do anel comutativo R, e $f : R \to S^{-1}R$ o homomorfismo natural de anéis. Agora sejam R' um segundo anel comutativo, e $g : R \to R'$ um homomorfismo de anéis com a propriedade que $g(s)$ é uma unidade de R', para todo $s \in S$. Então há um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \to R'$ tal que $h \circ f = g$. De fato, h dado por $h(a/s) = g(a)(g(s))^{-1}$, para todo $a \in r, s \in S$.*

3.4 Contração e extensão de ideais

Iremos iniciar esta seção com o fato que imagem inversa de ideais são ideais conhecido como contrações. E utilizaremos o homomorfismo natural para relacionar os ideais de um anel com os ideais do anel de frações.

Definição 3.11. Sejam R e S um anel comutativo e $f : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Sempre que J é um ideal de S, então $f^{-1}(J) := \{r \in R | f(r) \in J\}$ é um ideal de R chamado de *contração* de J em R. E é comumente denotado por J^c.

Definição 3.12. Para cada ideal I de R, o ideal $f(I)S$ de S gerado por $f(I)$ é chamado de *extensão* de I em S. E é comumente denotado por I^e.

Agora vamos estabelecer uma relação de inclusão entre os ideias contraídos e estendidos, ou o contrário, com os ideais originais.

Lema 3.13. *Sejam R e S anéis comutativos e $f : R \to S$ um homomorfismo. Sejam I um ideal de R e J um ideal de S. Então,*

1. $I \subseteq I^{ec}$,
2. $\mathcal{J}^{ce} \subseteq \mathcal{J}$.

Demonstração:

1. Seja $r \in I$. Como $f(r) \in f(I) \subseteq f(I)S = I^e$, concluímos que a $r \in f^-1(I^e) = I^{ec}$.
2. Pela definição de contração e extensão temos que J^{ce} é o ideal de S gerado por $f(f^{-1}(J))$. Então, seja $x \in \langle f(f^{-1}(J) \rangle$. Assim, $x = \sum_{i=0}^{n} s_i f(a_i)$ com $a_i \in f^{-1}(J)$ e $s_i \in S$. Logo, $f(a_i) \in J$ e, sendo J ideal, concluímos que $x = \sum_{i=0}^{n} s_i f(a_i) \in J$.

Lema 3.14. *Seja $\mathcal{J}$ um ideal de $S^{-1}R$. Então $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{ce}$.*

Demonstração: Basta provarmos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{ce}$. Sabemos que $\mathcal{J}^{ce} = \langle f(\mathcal{J}^c) \rangle = \langle f(f^{-1}(\mathcal{J})) \rangle$. Então, seja $\frac{a}{s} \in \mathcal{J}$, como $\mathcal{J}$ é ideal e $\frac{s}{1} \in S^{-1}R$, temos

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathcal{J},$$

isso implica que $\frac{a}{1} = f(a) \in \mathcal{J}$, além disso $a \in f^{-1}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}^c$. Portanto, $\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1} = \frac{1}{s} \cdot f(a) \in \langle f(\mathcal{J}^c) \rangle = \mathcal{J}^{ce}$.

Além disso, vamos caracterizar agora os elementos do ideal extendido.

Lema 3.15. *Seja I um ideal de R. Então $I^e = \left\{\lambda \in S^{-1}R | \lambda = \frac{a}{s} \text{ para algum } a \in I, s \in S\right\}$*

Demonstração: $(\supseteq)$ Claramente, $\lambda = \dfrac{a}{s} = (1/s)f(a) \in I^e$.

$(\subseteq)$ Seja $\lambda \in I^e$, como I^e é o ideal de $S^{-1}R$ gerado por $f(I)$, existem $n \in \mathbb{N}$, $h_1, \cdots, h_n \in I$ e $\dfrac{a_1}{s_1}, \cdots, \dfrac{a_n}{s_n} \in S^{-1}R$ tal que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{s_i} f(h_i)$. Então

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i}\frac{h_i}{1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i h_i}{s_i}.$$

Colocando essa soma em uma única fração com denominador comum, podemos ver que

$$\lambda = \frac{a_1h_1s_2\cdots s_n + a_2h_2s_1s_3s_4\cdots s_n + \cdots + a_nh_ns_1\cdots s_{n-1}}{s_1s_2\cdots s_n},$$

ou seja, $\lambda = \dfrac{a}{s}$ com $a := a_1h_1s_2\cdots s_n + a_2h_2s_1s_3s_4\cdots s_n + \cdots + a_nh_ns_1\cdots s_{n-1} \in I$ e $s := s_1s_2\cdots s_n \in S$.

Observação 3.16. O resultado anterior nos diz que, para $\dfrac{b}{t} \in I^e$, toda representação é uma fração com seu numerador $b \in I$, só podemos afirmar que λ tem pelo menos uma representação $\dfrac{a}{s}$ com numerador $a \in I$.

Exemplo 3.17. Vamos considerar o anel $S^{-1}\mathbb{Z}$ de frações de $\mathbb{Z}$ com respeito ao sistema multiplicativo $S = \{3^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ de $\mathbb{Z}$ e o ideal $\mathcal{J} = 6\mathbb{Z}$. As frações de $S^{-1}\mathbb{Z}$ são da forma $\dfrac{a}{s}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $s \in S$. O elemento $\dfrac{2}{3} \in S^{-1}\mathbb{Z}$ tem uma representação como fração em que o numerador não pertence a $\mathcal{J}$ e ainda assim

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{3^2} \in \mathcal{J}^e = (\mathbb{Z})^e.$$

Definição 3.18. Seja R um anel, I ideal de R e S um sistema multiplicativo. Chamamos de S-*saturamento* de I o ideal $S^{-1}I = \{r \in R \mid \exists s \in S \text{ tal que } as \in I\}$.

Observação 3.19. É fácil chegar que as duas afirmações abaixo sempre acontecem

- $S^{-1}I$ é ideal.
- $I \subset S^{-1}I$.

Definição 3.20. Dizemos que I é S-*saturado* se $S^{-1}I = I$.

Exemplo 3.21. Se $P \in Spec(R)$ e $P \cap S = \emptyset$, então P é S-saturado, ou seja, $S^{-1}P = P$. De fato, basta provarmos que $S^{-1}P \subset P$. Assim, dado $a \in S^{-1}P$, então existe $s \in S$ tal que $sa \in P$. Além disso, $P \cap S = \emptyset$ implica que $s \notin P$, mas como P é primo, obrigatoriamente $a \in P$.

Proposição 3.22. *Sejam R um anel, I um ideal de R S-saturado. Valem as seguintes afirmações*

1. $\dfrac{a}{s} \in I^e \Rightarrow a \in I$.
2. $I = I^{ec}$

Demonstração:

1. *Seja $\dfrac{a}{s} \in I^e$, do Lema 3.15 sabemos que $\dfrac{a}{s}$ tem um representante $\dfrac{b}{t}$ com $b \in I$ e $t \in S$. Isso implica que existe $u \in S$ tal que $u(at - sb) = 0$, mas disso temos que $uat = usb \in I$, pois I é um ideal, ou seja, $a \in S^{-1}I = I$.*

2. *Basta provarmos que* $I \supseteq I^{ec}$, *pois o contrário já foi provado no Lema 3.14. Então, seja* $a \in I^{ec} = f^{-1}(I^e)$, *isso implica que* $f(a) = \dfrac{a}{1} \in I^e$ *e por (1) segue que* $a \in I$.

Lema 3.23. *Seja* R *um anel,* S *um sistema multiplicativo e* I *ideal de* R. *Então,*

$$I^e = S^{-1}R \iff I \cap S \neq \emptyset.$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) Vamos supor que $I^e = S^{-1}R$. Logo $\dfrac{1}{1} \in I^e$ e, assim, existem $a \in I$, $s, t \in S$ tal que $t(s1 - 1a) = 0$. Portanto, $ts = ta \in I \cap S$.

($\Leftarrow$) Vamos supor que $s \in I \cap S$. Então. Em $S^{-1}R$ mós temos $\dfrac{1}{1} = \dfrac{s}{s} \in I^e$, então temos que $I^e = S^{-1}R$.

Podemos resumir os resultados anteriores na afirmação de que existe uma bijeção entre os ideais S-Saturados de R para os ideais próprios de $S^{-1}R$.

Teorema 3.24. *Existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos*

$$\{I \lhd R \mid I = S^{-1}I \text{ e } I \cap S = \emptyset\} \iff \{\mathcal{J} \lhd S^{-1}R \mid \mathcal{J} \neq S^{-1}R\}$$

Demonstração: Para isso vamos chamar de ϕ a relação

$$\phi : \{I \lhd R \mid I = S^{-1}I \text{ e } I \cap S = \emptyset\} \to \{I^e \lhd S^{-1}R \mid I^e \neq S^{-1}R\}$$

$$I \rightarrowtail I^e$$

e vamos chamar de ψ a relação

$$\psi : \{\mathcal{J} \lhd S^{-1}R \mid \mathcal{J} \neq S^{-1}R\} \to \{\mathcal{J} \lhd R \mid \mathcal{J} = S^{-1}\mathcal{J} \text{ e } \mathcal{J} \cap S = \emptyset\}$$

$$\mathcal{J} \rightarrowtail \mathcal{J}^c$$

Vamos analisar agora se realmente é uma bijeção.

$$\phi(\psi(\mathcal{J})) = \phi(\mathcal{J}^c) = \mathcal{J}^{ce} = \mathcal{J}$$

$$\psi(\phi(I)) = \psi(I^e) = I^{ec} = I.$$

Portanto realmente é uma bijeção.

Do Teorema 3.24 segue que os ideais primos P de R tal que $P \cap S = \emptyset$ se relacionam com os ideais primos de $S^{-1}R$ conforme o corolário abaixo.

Corolário 3.25. *Seja* $P \in Spec(R)$ *tal que* $P \cap S = \emptyset$. *Então, existe a bijeção*

$$\{P \in Spec(R) \mid P \cap S = \emptyset\} \iff \{\mathcal{P} \in Spec(S^{-1}R)\}$$

3.5 Localização

Quando construímos o anel de frações com base em um ideal primo chamamos o anel de frações de anel local ou ainda localização de R em P.

Definição 3.26. Um anel comutativo R que tem exatamente um ideal maximal M, é chamado de *local*.

No Lema a seguir fazemos uma caracterização dos anéis locais quando $R - \mathcal{U}(R)$ é um ideal.

Lema 3.27. *Seja R um anel comutativo. Então R é local $\iff$ $R - \mathcal{U}(R) = I$ é um ideal.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Vamos supor que R é local, então R tem um único ideal maximal M.

- Sabemos que $0 \in I$, pois 0 não é uma unidade de R o que implica que $0 \notin \mathcal{U}(R)$.
- Sejam $x, y \in I$, sabemos que x, y não são inversíveis, desse modo os ideais $\langle x \rangle, \langle y \rangle \neq R$, por causa disso sabemos também que eles estão contidos em algum maximal, ou seja, $\langle x \rangle, \langle y \rangle \subset M$, logo $x, y \in M$ como M é um ideal $x - y \in M$ assim como M é maximal $x - y$ não é inversíve. Portanto $x - y \in I$.
- De mesmo modo, sejam $x \in I$ e $r \in R$, sabemos que x não é inversível, então $\langle x \rangle \neq R$, por causa disso temos que ele está contido em um maximal M. Agora como $r \in R$, devemos ter que $x, r \in M$ e M é um ideal, então $xr \in M$ o que implica que M não é inversível, sendo assim $xr \in I$. Portanto, I é um ideal.

($\Leftarrow$) Seja M ideal maximal de R, vamos mostrar que $R - \mathcal{U} = M$.

($\supseteq$) É óbvio pois $M \neq R$ e caso houver unidades em M teríamos que $M = R$ o que é um absurdo. Logo, $M \subseteq R - \mathcal{U}$.

($\subseteq$) Obtemos que $M \subseteq I \subsetneq R$, mas como M é maximal, ou $M = I$ ou $I = R$, mas I não tem os elementos inversíveis de R logo $I \neq R$. Portanto, $M = I$.

Como comentamos anteriormente, no caso em que construímos o anel de frações com o sistema multiplicativo $S = R \backslash P$ o anel de frações $S^{-1}R$ é um anel local que chamamos de localização.

Lema 3.28. *Sejam R um anel comutativo, $P \in Spec(R)$ e $S := R \backslash P$, um sistema multiplicativo de R. O anel de frações $S^{-1}R$ é denotado por R_P, ele é um anel local chamado de localização de R em P, com ideal maximal P^e.*

Demonstração: É claro que é ideal, pois $P^e = \langle f(P) \rangle$. Então, basta provarmos que é maximal.

De fato, como $P \in Spec(R)$, então $P^e \in Spec(S^{-1}R)$ o que implica que $P^e \neq R_P$. Vamos provar que $R_P - P^e = \mathcal{U}(R_P)$.

($\supseteq$) É claro, pois se x é uma unidade, então $x \notin P^e$ pois P^e é um ideal próprio, isso implica que $x \in R_P - P^e$.

($\subseteq$) Se $\frac{a}{s} \in R_P - P^e$, como P é S-saturado temos que $\frac{a}{s} \notin P^e = \left\{ \frac{b}{t} \mid b \in P \text{ e } t \in S \right\}$. Disso, temos que $a \notin P$, ou ainda, $a \in R - P = S$. Da Proposição 3.5 sabemos que $\frac{a}{s} \in \mathcal{U}(R_P)$. Portanto, (R_P, P^e) é um anel local.

Assim, seja I ideal próprio de $S^{-1}R$, tal que $P^e \subseteq I \subsetneq S^{-1}R$. Vamos provar que $I \subseteq P^e$. Sendo assim, seja $\frac{a}{s} \in I$

Precisamos mostrar agora que é o único maximal, então seja maximais, vamos provar que $P^e = M$.

($\supseteq$) Como maximal implica em primo, pelo Lema 3.14 sabemos que $M = M^{ce}$, além disso $M^c \in Spec(R)$

($\subseteq$) Vem do fato de M ser maximal e que P^e é um ideal próprio. Ou seja, $M \subseteq P^e \subset R_P$ implica que $M = P^e$.

Exemplo 3.29. Como $2\mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$, nós podemos formar a localização $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$, essa localização pode ser definida com o subanel de $\mathbb{Q}$ que consiste de todos os números racionais que podem ser escritos como $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$ e n impar.

4 Conclusão

Diante do estudo desenvolvido, vemos que a construção dos anéis de frações é semelhante a dos corpos de frações, assim quando tiramos a restrição do anel R ter que ser um domínio de integridade vemos que ainda podemos construir essa estrutura, porém agora nem sempre será um corpo, ainda assim, conhecemos um subconjunto de frações inversíveis. Além disso, construímos uma bijeção entre os ideias primos do anel R para os ideais primos do anel de frações $S^{-1}R$. Portanto, a teoria de anéis de frações tem sua importância pois com base em anéis que nem todos os elementos são inversíveis, podemos construir um conjunto relacionado em que existem elementos inversíveis (frações), além de caracterizarmos as frações e suas operações entre os números inteiros e os números racionais.

5 Agradecimentos

Os agradecimentos vão para o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) e para o CNPq pela bolsa de iniciação científica que possibilitou o estudo necessário para o desenvolvimento desse trabalho.

Referências

[1] GERÔNIMO, J. R., Franco, V. S., **Fundamentos de Matemática**, Maringá: Eduem, 2006.

[2] SHARP, R. Y., **Steps in commutative algebra**, Cambridge University Press, 2000.

ANÁLISE DO MERCADO MUNDIAL DE EDIFÍCIOS LEED: PERSPECTIVAS E PROJEÇÕES PARA O FUTURO

Thiago Alessi Reichert
UTFPR–TD
thiagoreichert@outlook.com

Matheus Prado Lima
UTFPR–TD

Willian Vinicius de Moura Ribeiro
UTFPR–TD

Gustavo Henrique Dalposso
UTFPR–TD

Resumo

Devido ao uso cada vez mais intenso dos recursos naturais, projetos sustentáveis estão sendo promovidos como parte de uma postura mais consciente em relação aos impactos ambientais gerados pala construção civil. Nesse sentido, a certificação LEED destaca-se como o sistema de classificação de edificações sustentáveis mais utilizado no mundo, promovendo o desenvolvimento sustentável. Com o intuito de lançar projeções para o futuro do sistema de certificações, este trabalho empregou a função logística como modelo de previsão do número de certificações LEED ao longo do tempo. Para isso, a modelagem foi realizada por regressão linear, após uma linearização da função logística, utilizando dados do desenvolvedor do sistema para validação do modelo. A função logística apresentou grande potencial para modelagem dos dados de certificações acumuladas ao longo do tempo e previsão das novas certificações. Os resultados estimam que mais de 99% do total de certificados serão distribuídos até o final de 2023, apontando que o sistema de certificações LEED requer estímulos, nos próximos anos, para evitar sua estagnação.

Palavras-chave: Construção sustentável. Análise de regressão. Modelos matemáticos.

1 Introdução

A construção civil é um dos setores que mais consome recursos naturais, gerando diversos impactos ambientais devido às suas atividades. Nesse aspecto, questões ambientais estão sendo alvo de preocupações em diversos países, levando a reflexões sobre uma postura mais consciente em relação ao impacto ambiental nas etapas da construção (YEMAL; TEIXEIRA; NÄÄS, 2011).

Cabe, portanto, uma indagação quanto a essa temática: quais ferramentas, na contemporaneidade, visam analisar a sustentabilidade na construção civil? O sistema LEED (*Leadership in Energy and Environmental Design*) foi desenvolvido com a intenção de avaliar o desempenho ambiental das edificações e incentivar a transformação do mercado para promover o desenvolvimento sustentável.

A certificação LEED é o sistema de classificação de construções verdes mais utilizado no mundo, disponível para praticamente todos os tipos de projetos. Segundo a United States Green Building Council (USGBC, 2017), o método LEED fornece critérios para construções sustentáveis, eficientes e econômicas. Tais aspectos unidos visam a eficiência energética, a diminuição de custos operacionais, o uso de materiais e tecnologias de baixos impacto ambiental, entre outros. Além disso, o programa é voluntário e a certificação representa uma imagem ambiental positiva para a comunidade (PORTLAND CEMENT ASSOCIATION, 2017).

Assim, com a intenção de analisar o desenvolvimento das ferramentas responsáveis por observar a construção sustentável, esse estudo empregará modelagem matemática para previsão do número de certificações LEED ao longo do tempo. Nessa perspectiva, os resultados serão utilizados para lançar projeções para o futuro do sistema de certificação, com base em dados divulgados pelo próprio desenvolvedor da LEED.

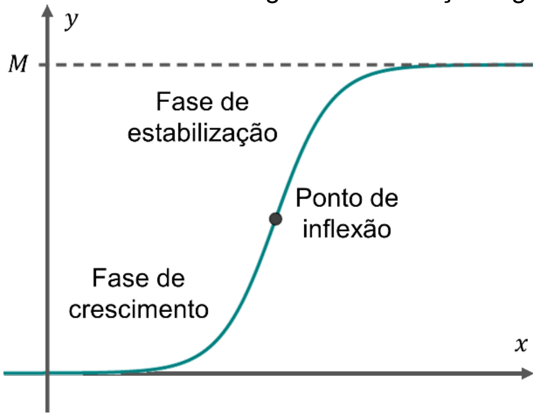
2 Material e Métodos

Em um ajuste de regressão linear, o método dos mínimos quadrados consiste na determinação dos coeficientes da reta de ajuste de modo que a soma dos quadrados dos desvios (diferença entre o valor real e o valor obtido com a função escolhida) seja mínima. Por outro lado, a função escolhida para modelagem dos dados pode não ser linear nos parâmetros.

Em alguns casos, é possível aplicar o método dos mínimos quadrados para uma reta realizando uma linearização da função, por meio de uma transformação conveniente. Contudo, é importante observar que os parâmetros obtidos não serão ótimos dentro do critério dos mínimos quadrados, porque o ajuste foi realizado para a função linearizada e não para a original (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Sendo uma das funções linearizáveis, a função logística é utilizada, geralmente, na descrição do comportamento de variáveis que começam crescendo vagarosamente, passam a aumentar rapidamente, até um ponto de inflexão, diminuindo a taxa de crescimento e, no final, alcançam um ponto de saturação M (MATOS, 1995). Assim, nessa função, ocorre uma fase de crescimento até o ponto de inflexão, a partir do qual começa uma fase de estabilização (Figura 1). Isso significa que o ponto de inflexão corresponde ao instante de maior crescimento da função logística, onde a curva tem a maior taxa de inclinação.

Figura 1 – Características gráficas da função logística



Fonte: Os autores (2021).

Segundo Goldstein *et al*. (2012), a identificação desse ponto permite determinar o parâmetro M, pois, a curva logística tem um ponto de inflexão no valor de x em que $y(x) = M/2$. A função logística é dada pela Eq. (1). Nessa função, se $x \to +\infty$, $y \to M$ e, por outro lado, se $x \to -\infty$, $y \to 0$.

$$y = \frac{M}{1 + a \cdot \exp(-b \cdot x)} \tag{1}$$

Essa função é usada, por exemplo, na descrição do comportamento demográfico ou das vendas de um produto novo ao longo do tempo, mas apresenta aplicações em diversas áreas. Nesse sentido, podem ser citados, como exemplos, estudos sobre modelos de crescimento populacional na área da agricultura (KONG *et al*., 2018), piscicultura (SANTOS *et al*., 2019) e maricultura (ZHONG *et al*., 2019), atividades com grande importância econômica.

Dados sobre o número de certificações LEED foram obtidos da Green Building Information Gateway (GBIG, 2020). Para a modelagem, foram considerados projetos LEED em todo o mundo, contemplando os níveis: cerificação, *silver*, *gold* e *platinum*. Esses dados obtidos foram organizados na Tabela 1, apresentando o número de novas certificações e o total de certificações acumuladas para cada ano.

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho, definiu-se que sendo t um ano qualquer, então $x = t - 2000$. Ou seja, o ano 2000 é representado por $x = 0$, tendo em vista que a certificação LEED foi desenvolvida no ano 2000 pela USGBC, podendo ser tomado como origem da escala de tempo para as modelagens.

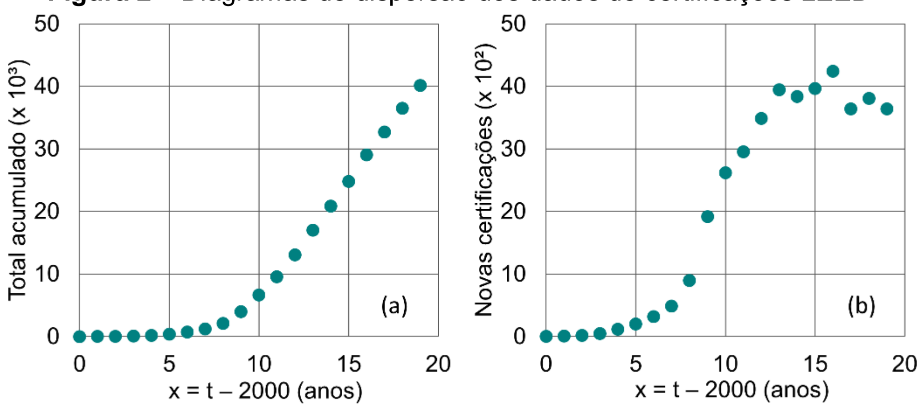
Tabela 1 – Certificações LEED por ano em nível mundial

Ano	x	Novas certificações	Total acumulado	Ano	x	Novas certificações	Total acumulado
2000	0	2	2	2010	10	2.616	6.616
2001	1	6	8	2011	11	2.954	9.570
2002	2	18	26	2012	12	3.487	13.057
2003	3	46	72	2013	13	3.946	17.003
2004	4	116	188	2014	14	3.838	20.841
2005	5	200	388	2015	15	3.967	24.808
2006	6	318	706	2016	16	4.239	29.047
2007	7	484	1.190	2017	17	3.641	32.688
2008	8	894	2.084	2018	18	3.807	36.495
2009	9	1.916	4.000	2019	19	3.640	40.135

Fonte: Green Building Information Gateway (2020).

Com os dados da Tabela 1, pode-se construir diagramas de dispersão do total acumulado de certificações ao longo dos anos, na Figura 2(a), e do número de novas certificações, na Figura 2(b). Com isso, verifica-se, a partir da Figura 2(a), que a modelagem pela função logística pode resultar em uma boa aproximação, devido ao formato do diagrama de dispersão dos dados acumulados.

Figura 2 – Diagramas de dispersão dos dados de certificações LEED



Fonte: Os autores (2021).

Em termos práticos, o grau de saturação M da função logística pode ser entendido como um momento em que as certificações ficam, por algum motivo, saturadas no mercado da construção civil. Ademais, os valores apresentados no gráfico de dispersão da Figura 2(a) são crescentes para qualquer intervalo de tempo, pois representam um número acumulado de certificações, e a função logística é estritamente crescente em todo o domínio. Por esses motivos, admite-se a hipótese de que a função logística ajusta os dados de certificações LEED em função do tempo, sendo escolhida como modelo de ajuste para as análises.

3 Resultados e Discussão

O primeiro passo para a modelagem da função logística é determinar o ponto de saturação M. Para isso, por meio da variação anual do número de novas certificações LEED, pode-se analisar a taxa de variação do total acumulado de certificações ao longo do tempo. Assim, com os dados da Tabela 1, construiu-se o gráfico da Figura 2(b) que apresenta o número de novas certificações por ano.

Observando a Figura 2(b), verifica-se que a número de novas certificações diminui entre os anos de 2013 e 2014, podendo significar a passagem pelo ponto de inflexão da função logística. Contudo, como o número de novas certificações voltou a crescer entre 2014 e 2016, este não pode ser o ponto de inflexão da curva.

Além disso, os dados de 2013 a 2017 apresentam variações em relação a tendência esperada: uma curva com formato de sino, como o gráfico da derivada primeira da função logística. Desse modo, é previsto que o ponto de inflexão ocorra próximo à 2016, pois é o ano com maior número de novas certificações.

Por outro lado, algum comportamento atípico pode ter ocorrido no mercado da construção civil entre os anos de 2013 a 2017, levando às variações em relação a tendência observada. Sendo assim, será muito difícil estimar o ponto de saturação M com base somente no comportamento gráfico dos dados levantados.

Nesse sentido, o método de Ford-Walford é amplamente utilizado, na literatura, para determinar os parâmetros assintóticos de crescimento do modelo de von Bertalanfly (ABU EL-NASR, 2017; GABR; MAL, 2017; SABRAH; AMIN; ATTIA, 2018). Por analogia, como o ponto de saturação M é um parâmetro assintótico, pode-se empregar o método de Ford-Walford para realizar sua estimativa.

Considere o conjunto de dados (y_n, y_{n+1}) nos quais y_n é o número acumulado de certificações para um ano de referência e y_{n+1} para o ano seguinte. Como o número de certificações é convergente, pois, pela hipótese de modelagem, os dados se ajustam a função logística, então o valor limite M é dado por $M = \lim_{x\to\infty} y_n$.

O método de Ford-Walford consiste em determinar inicialmente uma função g que ajusta os pares (y_n, y_{n+1}), ou seja, $y_{n+1} = g(y_n)$. Utilizando os dados da Tabela 1, realizou-se um ajuste quadrático aos pares (y_n, y_{n+1}), obtendo a função $g(y_n)$, conforme a Eq. (2), pelo método dos mínimos quadrados ($R^2 \cong 0{,}9989$).

$$y_{n+1} = g(y_n) = -7{,}7354 \cdot 10^{-6} \cdot (y_n)^2 + 1{,}3560 \cdot y_n + 387{,}27 \tag{2}$$

Contudo, observa-se que $\lim_{x\to\infty} g\big(y_n(x)\big) = \lim_{x\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{x\to\infty} y_n(x) = M$. Pelo método de Ford-Walford, M é o limite da sequência $\{y_n\}$ quando $y_{n+1} = y_n = M$ se, e somente se, $M = g(M)$. Assim, para obter uma estimativa do ponto de saturação M é necessário resolver o sistema formado pelas Eqs. (2) e (3).

$$y_{n+1} = y_n \tag{3}$$

A solução positiva do sistema resulta no ponto de saturação como sendo M = 47.083,57. Como M refere-se ao máximo de certificações acumuladas, o ponto de saturação será estimado em M = 47.084, aproximando para um número inteiro.

Para que seja possível aplicar regressão linear por mínimos quadrados, a função logística (Eq. 1) pode ser linearizada conforme a Eq. (4) (MATOS, 1995). Contudo, algumas restrições para a linearização são apesentadas: o ponto de saturação $M > 0$ deve ser um valor dado, de modo que $M > y(x)$.

$$\ln\left(\frac{M}{y} - 1\right) = \ln(a) - b \cdot x \tag{4}$$

Desse modo, $\ln(a)$ corresponderá ao coeficiente linear da reta α_1 e $-b$ ao coeficiente angular α_2. Assim, a Eq. (4) pode ser reescrita conforme a Eq. (5), de modo a obter os parâmetros α_1 e α_2, por meio de regressão linear. Após o ajuste, com base nas equivalências entre as Eqs. (4) e (5), será possível determinar os parâmetros a e b da função logística, tomando $a = \exp(\alpha_1)$ e $b = -\alpha_2$.

$$f(x) = \ln\left(\frac{M}{y} - 1\right) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x \tag{5}$$

Devido à praticidade de utilização, será apresentado um método computacional para solução do problema analisado. Nesse sentido, foi utilizado o *software* R, que se configura como um programa livre de computação estatística.

Na sequência, serão descritos os procedimentos utilizados para realizar a regressão linear. Os *scripts* utilizados no programa R serão apresentados nas caixas em destaque, com a respectiva descrição da etapa e apresentação dos resultados.

Inserir os valores de $x = t - 2000$, referente aos anos de 2000 a 2019:

```
x<-seq(0,19,1)
```

Inserir os dados de certificações acumuladas para cada ano (y):

```
y<-c(2,8,26,72,188,388,706,1190,2084,4000,6616,9570,13057,17003,20841,
24808,29047,32688,36495,40135)
```

Informar o valor do parâmetro M, estimado pelo método de Ford-Walford:

```
M<-47084
```

Conforme a Eq. (5), a função linearizada requer o cálculo de $f(x) = \ln(M/y + 1)$. Para isso, calcula-se, primeiramente, $M/y - 1$ para todos os pontos:

```
lnz<-((M/y)-1)
```

Em seguida, aplica-se logaritmo natural aos 20 dados de $M/y - 1$:

```
for (i in 1:20)
lnz[i]<-log(lnz[i], base = exp(1))
lnz
```

Com isso, obtém-se os 20 valores de $f(x)$ para a regressão linear:

```
[1]   10.0664989   8.6800771   7.5010396   6.4814920   5.5192457
[6]   4.7904084    4.1849653   3.6523811   3.0723734   2.3768573
[11]  1.8110206    1.3660810   0.9578299   0.5705039   0.2304771
[16]  -0.1076563   -0.4764900  -0.8200576  -1.2373595  -1.7536510
```

Para o cálculo dos coeficientes α_1 e α_2, utiliza-se o comando `lm(y~x)`:

```
coefc<-lm(lnz~x)
coefc
```

Com o comando, é exibido:

```
Coefficients:              (Intercept)           x
                              8.2422        -0.5683
```

Portanto, $\alpha_1 \cong$ 8,2422 e $\alpha_2 \cong -$0,5683, sendo que a regressão linear da função logística linearizada obteve $R^2 \cong$ 0,9563, mostrando um bom ajuste dos dados pela função linearizada. Ademais, utilizando as expressões de equivalência, é possível calcular os parâmetros a e b do modelo logístico:

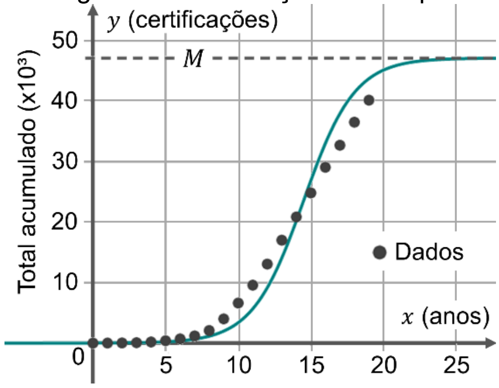
```
a<-exp(coefc$coefficients[1])
b<-(-1)*(coefc$coefficients[2])
```

Desse modo, $a = \exp(\alpha_1) \cong$ 3797,83 e $b = -\alpha_2 \cong$ 0,56830. Com isso, a função logística, obtida pelo método dos mínimos quadrados aplicada a sua forma linearizada, que modela os dados de certificações LEED, acumuladas ao longo do tempo, é expressa pela Eq. (6), tendo seu gráfico apresentado na Figura 3.

$$y = \frac{47.084}{1 + 3.797{,}83 \cdot \exp(-0{,}56830 \cdot x)} \tag{6}$$

A Eq. (6) indica que 90% das certificações esperadas no ponto de saturação seriam distribuídas até 2019, enquanto os dados fornecidos pela GBIG indicam que este patamar será atingido até o final de 2020. Ademais, com base na Eq. (6), é previsto que 99% das certificações sejam concedidas até o ano de 2023. Assim, as estimativas apresentadas pela função logística indicam que as certificações LEED atingiram saturação de mercado dentro dos próximos anos.

Figura 3 – Modelagem das certificações LEED pela curva logística



Fonte: Os autores (2021).

Até julho de 2020, havia um total 42.261 certificações LEED em todo o mundo (GBIG, 2020). Como esse é um dado parcial, pode-se realizar uma estimativa do seu valor até o fim do ano de 2020. Para isso, verificou-se que 2.126 novas certificações foram concedidas nesses sete primeiros meses do ano. Assim, com base na média mensal, são esperadas 3.645 novas certificações em 2020, levando ao total acumulado de 43.780 certificações até o fim do ano.

Pela Eq. (6), estima-se para o ano de 2020 um total acumulado de 45.100 certificados. Assim, a diferença entre o dado estimado pela média do ano 2020 e pela função logística apresenta erro relativo de, aproximadamente, 3,02%. Desse modo, o modelo demonstra grande potencial de ajuste para os novos valores de certificações acumuladas ao longo do tempo.

Portanto, as análises sobre as perspectivas das certificações LEED no mundo apontam que o sistema requer estímulos para evitar sua estagnação nos próximos anos. Ademais, programas de certificações de edifícios sustentáveis merecem tais esforços pois desempenham papel fundamental na avaliação do impacto ambientas da construção civil e na promoção do desenvolvimento sustentável.

4 Conclusões

O procedimento de linearização da função logística possibilitou a aplicação de regressão linear para ajuste do modelo. Contudo, o método dos mínimos quadrados foi utilizado sobre a função linearizada. Nesse sentido, é possível obter melhores resultados ao empregar o método diretamente a função logística (sem transformação), realizando um ajuste por regressão não linear.

Após o ajuste dos parâmetros do modelo, verificou-se a validade da função logística para a previsão de dados de certificações LEED ao longo do tempo. Utilizando uma estimativa para o dado de 2020, verificou-se que é esperado um erro relativo da ordem de 3% entre o dado real e o estimado pela função logística.

As análises de previsão indicam que o mercado de certificações LEED atingirá o ponto de saturação dentro dos próximos anos, com mais 99% do total de certificados distribuídos até o final de 2023. Portanto, o sistema de certificações requer incentivos para evitar sua estagnação, de modo a promover a avaliação do impacto ambiental da construção civil e o desenvolvimento sustentável.

Referências

ABU EL-NASR, T. M. A. Age and growth of the fish, Gerres filamentosus (Cuvier, 1829) from Hurghada Red Sea, Egypt. **The Egyptian Journal of Aquatic Research**, v. 43, n. 3, p. 219-227, Sept. 2017. DOI 10.1016/j.ejar.2017.07.003. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1687428517300304. Acesso em: 31 jul. 2020.

GABR, M. H.; MAL, A. O. Stock assessment of the lizardfish Saurida tumbil (Bloch, 1795) in Jizan fisheries, Saudi Arabia. **The Egyptian Journal of Aquatic Research**, v. 43, n. 2, p. 147-153, June 2017. DOI 10.1016/j.ejar.2017.05.001. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1687428517300249. Acesso em: 31 jul. 2020.

GREEN BUILDING INFORMATION GATEWAY. **LEED certification activity**. Washington: GBIG, 2020. Disponível em: http://www.gbig.org/collections/14544. Acesso em: 7 ago. 2020.

GOLDSTEIN, L. J. *et al*. **Matemática aplicada**: economia, administração e contabilidade. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 642 p. ISBN 85-3630-561-4.

KONG, W. *et al*. Study on Microcystis aeruginosa growth in incubator experiments by combination of Logistic and Monod functions. **Algal Research**, v. 35, p. 602-612, Nov. 2018. DOI 10.1016/j.algal.2018.10.005. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211926418303801. Acesso em: 24 jul. 2020.

MATOS, O. C. de. **Econometria básica**: teoria e aplicações. São Paulo: Atlas, 1995.

PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. **Leadership in Energy and Environmental Design (LEED)**. Washington: PCA, 2017. Disponível em: https://www.cement.org/sustainability/leadership-in-energy-design-(leed). Acesso em: 10 jul. 2020.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996. 406 p. ISBN 978-85-3460-20-44.

SABRAH, M. M.; AMIN, A. M.; ATTIA, A. O. Family Belonidae from the Suez Canal, Egypt: Age, growth, mortality, exploitation rate and reproductive biology. **The Egyptian Journal of Aquatic Research**, v. 44, n. 1, p. 29-35, Mar. 2018. DOI 10.1016/j.ejar.2017.12.003.

Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1687428517300717. Acesso em: 31 jul. 2020.

SANTOS, J. F. *et al*. A comparative study on Nile tilapia under different culture systems: Effect on the growth parameters and proposition of new growth models. **Aquaculture**, v. 503, p. 128-138, Mar. 2019. DOI 10.1016/j.aquaculture.2018.12.044. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0044848617325942. Acesso em: 24 jul. 2020.

UNITED STATES GREEN BUILDING COUNCIL. **LEED rating system**: why LEED. Washington: USGBC, 2017. Disponível em: https://www.usgbc.org/leed/why-leed. Acesso em: 10 jul. 2020.

YEMAL, J. A.; TEIXEIRA, N. O. V.; NÄÄS, I. A. Sustentabilidade na construção civil. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ADVANCES IN CLEANER PRODUCTION, 3., 2011, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: UNIP, 2011. Disponível em: http://www.advancesincleaner production.net/third/files/sessoes/6B/8/Yemal_JA%20-%20Paper%20-%206B8.pdf. Acesso em: 17 jul. 2020.

ZHONG, Zhi-Hong *et al*. Antiparasitic efficacy of honokiol against Cryptocaryon irritans in pompano, Trachinotus ovatus. **Aquaculture**, v. 500, p. 398-406, 2019. DOI 10.1016/j.aquaculture.2018.10.037. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/S0044848618304885. Acesso em: 24 jul. 2020.

APRESENTANDO A SEQUÊNCIA LOGÍSTICA COM O GEOGEBRA

Everton Henrique Cardoso de Lira
Universidade Federal de Pernambuco
everton.ufpe@hotmail.com

Resumo

Neste breve trabalho temos como objetivo apresentar a sequência logística e estudar o seu comportamento em alguns casos particulares. Para tal, utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra, e com auxílio do mesmo, obtemos alguns termos da sequência, para em seguida, construímos tabelas e os gráficos dos seus termos. Como resultados obtivemos a percepção do comportamento da sequência para certos valores do seu parâmetro e que, dependendo do intervalo numérico em que o parâmetro se encontra, a sequência pode se comportar de maneira previsível e suave ou de maneira totalmente aleatória e caótica. Por fim, concluímos que tal estudo pode servir de ponto de partida para a introdução do estudo de temas mais avançados como, sistemas dinâmicos, aleatoriedade e a matemática do caos.

Palavras-chave: GeoGebra. Recorrências. Sequência Logística.

1. Introdução

Uma sequência $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é definida como uma função que a cada número natural n associa, de forma não ambígua, um único número real a_n. As sequências mais conhecidas no Ensino Básico são as sequências $a_n = a_1 + (n-1)r$ e $a_n = a_1 r^{n-1}, r \in \mathbb{R}$, nomeadas progressão aritmética e geométrica, respectivamente. Outras sequências relativamente conhecidas no Ensino Básico é a sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$, chamada “Sequência de Fibonacci”, em homenagem ao matemático italiano do século XIII, Leonardo Fibonacci e as sequências dos números figurados (triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc).

A sequência de Fibonacci faz parte de um tipo de sequências conhecidas como recorrências, tais sequências recebem este nome devido ao fato de o cálculo dos seus termos não ser feito através de uma fórmula explícita, mas sim, por meio de uma relação entre os membros da sequência, para uma definição rigorosa e um estudo introdutório das recorrências, o leitor interessado pode consultar (LIMA, et. al., 1998) . No caso da sequência de Fibonacci, todos os termos a partir do segundo, são obtidos através da soma dos dois termos anteriores, ou seja, $\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 0 \end{cases}$"

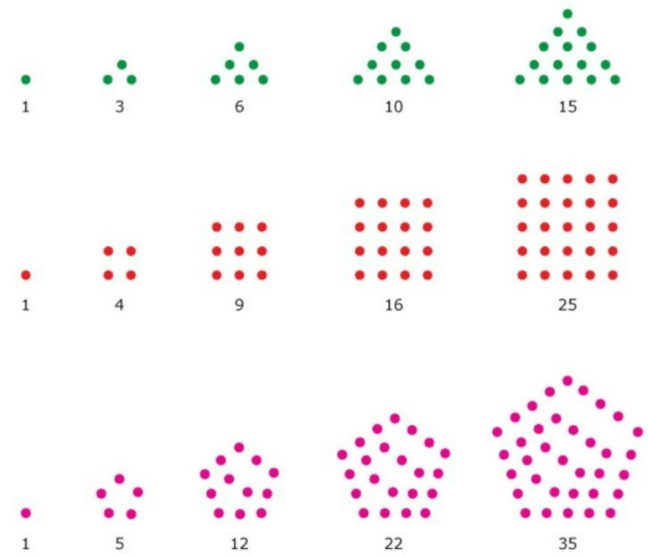


Figura 1 – Números figurados.
Fonte: Google Images

Nosso interesse neste texto recai sobre uma recorrência conhecida como sequência de diferença logística, ou simplesmente sequência logística, a qual é dada pela relação $a_{n+1} = ka_n(1 - a_n)$, em que $k > 0$ é dito seu parâmetro e $n \in \mathbb{N}$, para uma dedução rigorosa desta sequência ver (FELIX, 2018). A sequência logística é amplamente utilizada na construção de modelos para o crescimento de populações de espécies animais ou vegetais cujas gerações não se sobrepõem, ou seja, após um indivíduo destas espécies chegar em sua idade fértil o mesmo se reproduz e, em seguida, morre. Para o leitor interessado, exemplos de tais espécies podem ser encontrados em (ROSA, 2006).

Diferentemente das progressões aritmética e geométrica cujo comportamento é facilmente previsto e descrito apenas pelo conhecimento dos números a_1 e r – os quais dizem onde a sequência inicia e se a mesma é crescente $(r > 0)$, decrescente $(r < 0)$ ou constante $(r = 0)$ – e da sequência de Fibonacci, cujos termos são sempre crescentes e obtidos facilmente pela sua relação de recorrência, a sequência logística possui um comportamento no mínimo curioso, o qual, a seguir passamos a analisar para alguns valores de k.

Dito isto, nos propomos com este texto não a realizar uma exposição profunda e rigorosa do assunto, mas pelo contrário, temos o objetivo de introduzir o leitor no estudo de sistemas caóticos e para tal, a sequência logística vista em uma análise gráfica simples pode ser uma ótima porta de entrada.

2. Material e Métodos

Tendo em vista nosso objetivo com este trabalho, decidimos realizar um estudo teórico e exploratório do comportamento da sequência logística. Para tal, nos utilizaremos do software livre de geometria dinâmica GeoGebra, uma vez que o mesmo nos possibilitará realizar cálculos com velocidade e precisão, bem como construir com facilidade, tabelas e gráficos a partir dos mesmos. Isto posto, iniciamos nosso estudo introduzindo a recorrência que define a sequência logística na janela “Planilha de Cálculos” do Geogebra, conforme mostra a Figura 2. Para padronizar nossa abordagem, definimos 100 termos como a quantidade a ser observada em comportamento.

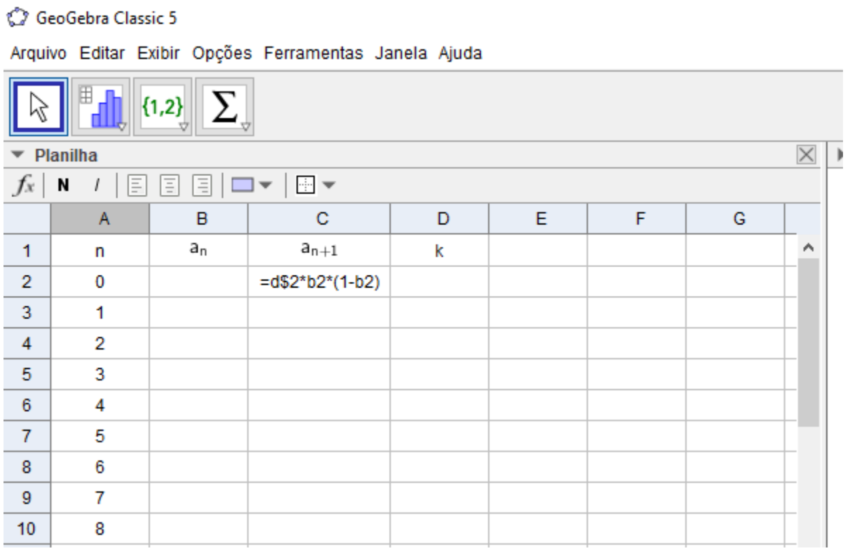


Figura 2 – Planilha Geogebra
Fonte: O autor

A equação na célula C2, representa o termo na posição $n+1$ da sequência, contêm os valores presentes na célula B2, os quais são os termos na posição n da sequência, e o valor da célula D2, o qual representa o valor do parâmetro k a ser escolhido (a escrita D$2 torna fixo o valor posto na célula D2). Os valores da sequência são gerados ao definirmos um valor para o termo a_0 na célula B2 e definirmos o valor da célula B3 como sendo igual ao da célula C2. Após isso, basta selecionar as células B2 e C2 e arrastar a seleção até a linha 101 e assim, obtemos os 100 primeiros termos da sequência, os quais, são suficientes para termos uma noção de como a mesma se comporta.

Sigamos agora com a análise do comportamento da sequência para alguns valores do parâmetro k, com $0 < a_0 < 1$. Os valores escolhidos aqui foram orientados pelos propostos no “Projeto de Laboratório” presente em (STEWART, 2014), a análise e o estudo para outros valores de k e a_0 será deixada para trabalhos futuros.

Quando tomamos $1 < k < 3$ os termos crescem sucessivamente em direção a um limite que depende apenas da escolha do k particular, ou seja, a escolha do valor do primeiro termo a_0 não interfere na convergência da sequência. Por exemplo, se tomarmos $k = \frac{3}{2}$ e $a_0 = 0{,}00005$ ou $a_0 = 0{,}005$ ou ainda $a_0 = 0{,}5$, a sequência convergirá para o mesmo valor, a saber, $\frac{1}{3}$. A única diferença será em seus primeiros termos, como pode ser visto na Figura 3, a qual contêm as sequências nos casos $a_0 = 0{,}00005$ e $a_0 = 0{,}5$, respectivamente.

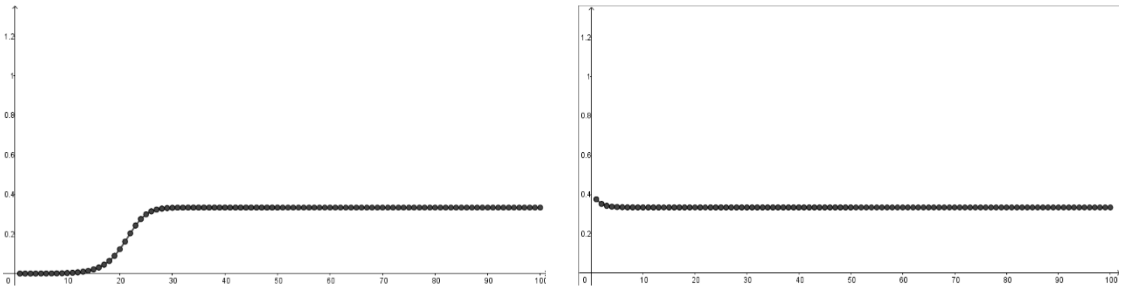


Figura 3 – A sequência nos casos $a_0 = 0{,}00005$ e $a_0 = 0{,}5$ e $k = 1{,}5$.
Fonte: O autor

Neste caso, não é difícil mostrar que a sequência é monótona e limitada, o que nos permite concluir, segundo (LIMA, 2013), que a mesma converge para um limite $L \in \mathbb{R}$. De fato, se $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, então também teremos $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$, donde segue que $L = kL(1 - L)$, resolvendo a equação para L obtemos $L = 0$ ou $L = \frac{k-1}{k}$. É fácil ver que quando substituímos $k = \frac{3}{2}$, nós obtemos o limite anterior $L = \frac{1}{3}$.

Quando $3 < k < 3{,}5$ a sequência se comporta de forma relativamente periódica, com os valores da sequência se tornando cada vez menos “comportados” conforme k é tomado mais próximo de $3{,}5$. Sendo assim, embora a sequência se mostre limitada, não é possível determinar um limite para a mesma, visto que o seu comportamento é periódico. Um gráfico dos 100 primeiros termos da sequência para $k = 3{,}35$ é mostrado na Figura 4.

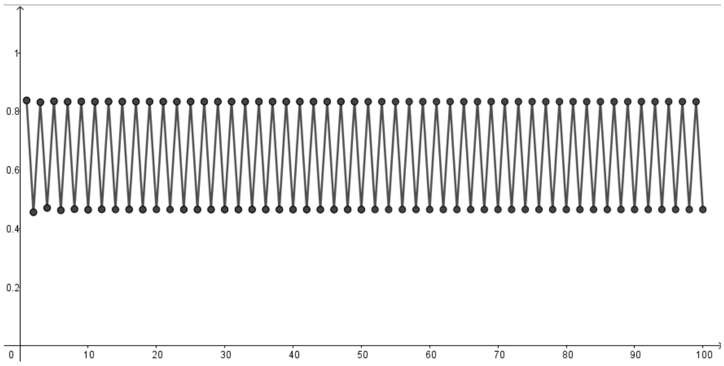


Figura 4 – A sequência para $k = 3{,}35$.
Fonte: O autor

Finalmente, quando $3{,}5 \leq k < 4$ a sequência se comporta de forma surpreendente, pois seus termos aparentemente não seguem nenhum padrão reconhecível. Este tipo de comportamento é conhecido como caótico, o qual fica claro na Figura 4 que foi obtida para $k = 3{,}8$.

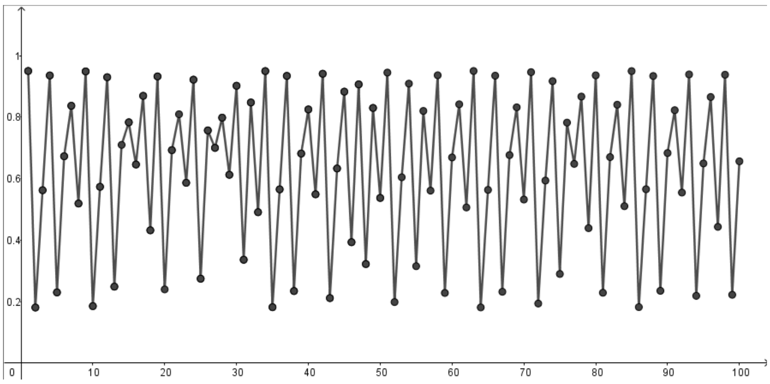


Figura 4 – A sequência para $k = 3{,}8$.
Fonte: O autor

3. Considerações Finais

Ao término deste breve estudo, verificamos que o comportamento da sequência logística difere em muito do de outras sequências mais conhecidas, sendo assim, este estudo se mostrou instrutivo tanto para conhecermos sequências menos populares na Educação Básica, quanto para explorarmos as potencialidades das tecnologias, neste caso o GeoGebra, na abordagem da mesma. Esperamos em trabalhos posteriores, estudar o comportamento da sequência logística para outros valores de a_0 e k não considerados aqui, assim como, nos aprofundarmos mais nos seus aspectos aplicados, tão bem explorados em (ROSA, 2006).

4. Referências

GEOGEBRA: Dynamic Mathematics for Everyone. Version 5.0.640.0-d. [S.l.]: Free License, 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acessado em: 15/05/2021.

FELIX, Elton. *Equações de diferenças: uma abordagem mais completa para o ensino de sequências no Ensino Médio.* Santa Catarina, 2018. 128 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Santa Catarina.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio, vol. 2.** – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise, vol. 1.** – Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

ROSA, Adriana Carvalho. *Modelos de Dinâmica Populacional com Tempo Discreto.* Goiás, 2006. 53 p. Monografia (Especialização em Matemática Aplicada) - Universidade Federal de Goiás.

STEWART, James. **Cálculo, vol. 2.** – São Paulo: CENGAGE Learning, 2014.

TORRE DE HANÓI NA PERSPECTIVA DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: uma proposta para o ensino de função exponencial com o uso da tecnologia

Jaíne Macêdo Ferreira
Universidade Federal de Pernambuco
jainemacedo0802@gmail.com

Thaize de Lima da Silva
Universidade Federal de Pernambuco

Resumo
Este trabalho consiste em uma proposta de atividade pedagógica a ser realizada com uma turma do 1º ano do ensino médio, tem como objetivo trabalhar o conteúdo de função exponencial utilizando-se de jogos e da Investigação Matemática. A proposta consiste no uso do jogo Torre de Hanói através de uma plataforma online para que a partir dele e com o uso da Investigação Matemática os alunos cheguem ao aprendizado e construção do conhecimento matemático. Espera-se como resultado da aplicação dessa proposta que os alunos se envolvam com a aula e trabalhem em grupo, tendo o professor apenas como um estimulador do aprendizado.

Palavras-chave: Pensamento matemático. Jogos. Metodologia.

1 Introdução

O ensinar precisa sempre ser reinventado e de forma bem especial, o ensinar Matemático. Uma forma de reinventar em sala de aula, é buscar novas metodologias com o intuito de tornar a Matemática mais atrativa para os(as) alunos(as), uma dessas metodologias é a Investigação Matemática, que é uma das tendências no ensino de Matemática.

Usar a Investigação Matemática em sala de aula, se configura um desafio tanto para o(a) professor(a), como para os(as) alunos(as), mas também muito acrescenta no desenvolver das aulas e da aprendizagem. Neste trabalho concorda-se com Concentino (2019, p. 17) quando defende a Investigação Matemática como "...uma prática pedagógica em que os alunos são convidados a explorar uma situação, formulando questões e conjecturas".

A Investigação Matemática segue uma linha de desenvolvimento para que suas potencialidades possam ser melhor exploradas, divididas em quatro momentos. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), inicialmente há a exploração e formulação de questões, seguida da formulação de conjecturas, logo após são feitos testes e reformulação, a fim de aprimorar as conjecturas. E por último, é feita a argumentação e avaliação do trabalho que foi realizado.

Neste tipo de trabalho Investigativo, o(a) professor(a) desempenha o papel de mediador(a), orientando os(as) alunos(as) ao decorrer da Investigação, enquanto o(a) aluno(a) é o centro desse trabalho.

> O professor terá como papel fundamental iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou provocantes e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que têm habitualmente respostas correctas ou ideias válidas. (PONTE et al., 1998, p. 6)

As potencialidades/contribuições da Investigação são muitas, nas formulações de suas conjecturas e nas justificativas, os(as) alunos(as) "...dão passos essenciais para clarificar o seu pensamento e para alcançar uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios matemáticos" (PONTE et al., 1998, p. 6). Favorece no desenvolvimento do pensar matemático, na medida que eles(as) precisam explicitar "...matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor" (PONTE et al., 1998, p. 10).

Ainda visando esse reinventar das aulas de matemática, traz-se a proposta de outra tendência matemática que é o uso de jogos. Que é também um desafio a mais para o(a) professor(a), pois exige uma melhor preparação da aula, além de um conhecimento prévio da sua turma e, como bem aponta Groenwald e Timm (apud LARA, 2003), uma preparação para a aplicação do jogo, que envolve, inclusive, jogá-lo previamente.

> O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais são estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. (SMOLE et al., 2008)

O que torna os jogos um aliado à Investigação Matemática, pois ambos buscam esse desenvolvimento do pensamento matemático por parte do(a) aluno(a) que é o(a) protagonista do seu aprendizado sendo apenas estimulado(a) pelo(a) professor(a).

Os jogos têm além de um papel educativo, um papel lúdico, onde "a pretensão da maioria dos professores com a sua utilização é a de tornar as aulas mais agradáveis com o intuito de fazer com que a aprendizagem torne-se algo fascinante" (LARA, 2004, p.1), buscando assim driblar a ideia que muitos(as) alunos(as) têm de que as aulas de matemática são chatas e regidas por fórmulas e regras prontas. Nisso concorda-se com

DEMO (2000) de que mesmo sendo responsabilidade do(a) aluno(a) aprender, o(a) professor(a) desempenha um importante papel no estímulo desse interesse pelo aprendizado.

É uma metodologia que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática reforçam sua importância pelo fato de os jogos terem em si características que desafiam e provocam o(a) aluno(a), gerando assim, maior interesse pela aula. E que "por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver" (BRASIL, 1997, p. 36).

Com o intuito de trabalhar o conteúdo de função exponencial utilizando-se de jogos e da Investigação Matemática, buscando exercitar o conteúdo já ministrado e estimular os(as) alunos(as) ao pensamento matemático de uma forma lúdica e atrativa aos mesmos(as), para isso será trabalhado com o jogo Torre de Hanói, em uma plataforma online[1], numa perspectiva de Investigação Matemática. O jogo Torre de Hanói (Figura 1), é composto de uma base que contém três pinos e vários discos, todos os discos têm diferentes tamanhos; de forma que possam ser posicionados em ordem decrescente de tamanho, cujo maior disco se encontra na base. O jogo consiste em transferir todos os discos que estão em um dos pinos, para qualquer um dos outros dois pinos, de modo que os discos também fiquem em ordem decrescente de tamanho.

A regras para essa transferência de peças são: Só é permitido mover um disco a cada movimento; um disco de tamanho maior não pode ficar acima de um de tamanho menor; nenhum disco pode ficar fora do jogo, ou seja, deve estar em um dos pinos ou em movimento; só é permitido movimentar os discos que não estão sobrepostos por outro ou outros. Esse jogo foi criado pelo matemático francês Edouard Anatole Lucas, em 1883, contudo existe ainda uma lenda que se relaciona com sua criação que o remete a um deus da cultura hindu.

[1] A plataforma que pode ser utilizado, encontra-se https://www.novelgames.com/pt/tower/. Essa indicação se dar pelo falo de poder escolher a quantidade de discos utilizados em cada jogada.

Figura 1: Jogo Torre de Hanói
Fonte: https://www.matematica.pt/fun/torre-hanoi.php

2 Material e Métodos

Nosso trabalho trata-se de uma proposta de aula que será aplicada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, tomando como base a orientação dos conteúdos do Currículo de Matemática para o Ensino Médio, pois é nessa etapa que inicialmente é trabalhado o conteúdo de Função Exponencial. Conteúdo que está diretamente ligado com o jogo torre de Hanói, que será utilizado juntamente com a Investigação Matemática.

A atividade aplicada em um laboratório de matemática faria o uso da Torre de Hanói física, porém a proposta que fazemos para o uso de tecnologias no ensino da matemática é a do uso de uma plataforma online, que já existem algumas, que disponibilize esse jogo. Um facilitador desse modelo de aula é que mesmo a escola não possuindo esse material didático, ou até os alunos em uma aula remota não possuindo o jogo em casa, eles podem jogá-lo com o uso de um aparelho com acesso à internet.

A aula iniciará com algumas considerações históricas sobre o jogo proposto, juntamente com a explicação de suas regras, para que os(as) alunos(as) compreendam como se desenvolve esse jogo. Para que as dúvidas relacionadas ao como jogar sejam as menores possível, faz-se uma demonstração, realizando uma jogada com 3 discos.

Após esse momento inicial, eles serão instigados a observarem a quantidade de movimento de cada peça, bem como a quantidade total de movimentos feitos para mover todos os discos de uma extremidade a outra. Com isso, algumas perguntas serão colocadas para os(as) alunos(as), como por exemplo se eles(as) percebem alguma relação entre a quantidade de movimentos de cada peça, entre a quantidade total mínima de movimentos.

O que pretende-se é que os(as) alunos(as) observem o seguinte, quando tem-se um único disco, este realiza apenas um movimento mínimo (2^0) para ir de uma extremidade a outra, e a soma mínima dos movimentos também é um. Quando tem-se dois discos, o disco menor realiza dois mínimos movimentos (2^1), já o disco maior realiza apenas um mínimo movimento (2^0); e a soma mínima dos movimentos para mover os dois discos de uma extremidade à outra é três. No caso em que tem-se três discos, o primeiro disco (que é o menor), tem um total mínimo de quatro movimentos (2^2), o disco do meio realiza dois mínimos movimentos (2^1) e o disco maior apenas um movimento mínimo (2^0); no final teremos um total mínimo de sete movimentos.

Eles terão duas formas de descobrir a soma mínima total de movimentos, podem somar as potências que fornecem os movimentos mínimos de cada disco; por exemplo, com 3 discos: $(2^2) + (2^1) + (2^0) = 7$. Ou ainda, $(2^3) - 1 = 7$; neste caso teríamos uma Função Exponencial, que de forma genérica é $(2^n) - 1$, onde n é o número de discos.

Para a realização da atividade, a turma será dividida em grupos (a depender do número total de alunos(as) na sala de aula). Essa atividade deverá ser desenvolvida em um laboratório de informática, ou na sala de aula se a escola dispuser de estrutura para isso. Como já foi dito, nossa proposta será desenvolvida no ensino remoto, esses grupos serão divididos em salas do Google Meet, onde têm-se acesso a todas elas e o desenvolvimento dos grupos serão acompanhados.

Os grupos deverão desenvolver o jogo na perspectiva da Investigação, explorando a situação proposta, levantando conjecturas, testando-as e justificando o processo que os(as) levaram até elas. Ao final do desenvolvimento da atividade, as conjecturas encontradas e testadas, devem ser apresentadas a toda turma a fim de estabelecer uma discussão matemática sobre a atividade que foi proposta.

3 Resultados e Discussão

Espera-se como resultado da aplicação que os(as) alunos(as) sejam estimulados (as) a desenvolverem o pensamento matemático de uma forma lúdica e atrativa. Visto que há uma resistência em relação a disciplina de matemática por ser vista como difícil e dominada por poucos, além de séria, e não divertida. Smole (2003) traz que o jogo encanta, desafia e traz alegria para o espaço que normalmente apenas os livros dominam, e que não é porque os jogos envolvem conceitos matemáticos que essas características serão perdidas, pois elas são muito importantes para o despertar do interesse do(a) aluno(a).

Essa aplicação busca ainda a partir desse interesse do(a) aluno(a) o seu envolvimento na aula e com o grupo de colegas, onde o compartilhamento de ideias e raciocínios fará com que os(as) alunos(as) se comuniquem entre si com uma linguagem matemática, nisso concorda-se com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 41) quando dizem que “a fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos [...] desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação”.

Acredita-se ser um ponto importante a questão do compartilhamento das soluções para que o(a) aluno(a) possa ter uma segurança ao expor seus pensamentos, além de analisar o pensamento do(a) colega e ver que há outras soluções para o mesmo problema.

Trabalhar em grupo traz muitos benefícios para o desenvolvimento do processo de aprendizagem, na medida que os(as) alunos(as) trocam ideias a fim de construir o raciocínio matemático que a atividade propõe, mas não somente para o processo de aprendizagem, pois "As actividades de investigação proporcionam uma relação diferente dos alunos com a disciplina e também dos alunos entre si." (PONTE et al., 1998, p. 103), e "...a interacção entre os alunos estimula-os a descobrirem novas relações" (PONTE et al., 1998, p. 65)

Além desse compartilhamento com os(as) colegas do mesmo grupo, é importante ainda que ao fim da atividade haja o exercício de compartilhar com os demais grupos como se deu a construção do pensamento. Pois esse movimento faz com que os(as) alunos(as) muitas vezes precisem argumentar e trazer justificativas lógicas a suas soluções, o que lhes levam a respostas mais bem fundamentadas e melhores construídas, pois "à medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38), além do estímulo à interação em grandes grupos e um exercício em cima da timidez e da hesitação que ela causa na participação em sala de aula.

Pode-se perceber que toda essa interação faz com que os(as) alunos(as) aprendam entre si, e o(a) professor(a) atue apenas orientando e questionando para que a atividade siga e cumpra seus objetivos, e não trazendo respostas e fórmulas prontas; o aprendizado matemático realmente acontece porque os(as) alunos(as) não serão encorajados(as) a decorar passos, mas a pensar matematicamente e formular seus próprios caminhos de resolver o problema e suas próprias soluções.

Pode-se ainda analisar, se ao aplicar de forma online a atividade, os(as) alunos(as) tiveram dificuldades com o uso da plataforma e como se dá essa interação e comunicação com os(as) colegas, se o meio utilizado para isso também for o de salas de aula remotas. Além de proporcionar uma visão sobre a melhor forma de potencializar os recursos tecnológicos que tem-se ao alcance, com a intenção de se ter mais um aliado no processo de aprendizagem dos(as) alunos(as); para isso pode-s por exemplo, analisar se a divisão dos grupos em salas do Google Meet é a melhor saída.

4 Conclusões / Considerações Finais

O objetivo do presente trabalho é propor uma atividade a ser aplicada em uma aula de matemática, seja remota ou presencial, que tem o intuito de estudar e exercitar o conteúdo de função exponencial através do uso de jogos sob a perspectiva da Investigação Matemática.

Dessa proposta ao ser aplicada espera-se uma interação entre os(as) alunos(as) que formam os grupos, onde troquem ideias a fim de construir o raciocínio matemático que a atividade propõe. Espera-se ainda que eles se envolvam no jogo e vejam o conteúdo de matemática como algo que pode ser estudado de uma maneira lúdica e divertida. É esperado ainda, que respondam aos questionamentos do(a) professor(a) a cada rodada, tirando dúvidas com o(a) mesmo(a) e também com os(as) colegas, sendo esse(a) professor(a) um(a) intermediário(a) para essa construção. E que ao fim da atividade haja o exercício de compartilhar com os demais grupos como se deu a construção do pensamento com o intuito de que haja mais aprendizado sobre as diferentes formas de construir um raciocínio matemático. Reiteramos ainda a importância do(a) professor(a) estar disposto a planejar a aula para que possa corresponder às demandas dos(as) alunos(as) e ajudá-los(as) ao decorrer do processo de produção do conhecimento esperado.

Acredita-se ser de grande importância a aplicação e extensão dessa pesquisa, pela relevância desse estímulo ao(à) aluno(a) de se colocar como principal agente do seu aprendizado e por levar ao(à) professor(a) a atividades semelhantes com esse objetivo, além de mostrar como as tecnologias podem ser aliadas do(a) professor(a) em sala de aula.

REFERÊNCIAS

As Torres de Hanói. Disponível em: <https://www.matematica.pt/fun/torre-hanoi.php>. Acesso em: 10 de maio de 2021.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).** Matemática. Ensino Fundamental. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CONCENTINO, J. **CAMINHOS A PERCORRER: DESAFIOS NO PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.** 2019. 120f. Dissertação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Londrina. PR.

DEMO, P. **Educação e conhecimento.** Relação necessária, insuficiente e controversa. 3ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Respe, 2003.

PONTE et al. **Histórias de investigações matemáticas.** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica: 2009.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; PESSOA, N. **Cadernos do Mathema: Ensino Médio: Jogos de Matemática de 1º a 3º ano**. Artmed Editora, São Paulo, 2008.

RELATO DE OBSERVAÇÃO DE AULAS REMOTAS SOBRE GEOMETRIA ESPACIAL PARA TURMAS DA 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Alienara Isabel Cristoferi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
alienara_ic@hotmail.com

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Neste relato iremos apresentar o resultado das observações de aulas sobre o tema Geometria Espacial, destinadas ao 2º ano do Ensino Médio. As observações foram realizadas durante uma das atividades pré-estabelecidas no Programa Residência Pedagógica e pertenciam ao conjunto de conteúdos do “Aula Paraná”, disponibilizados pelo Governo do Estado do Paraná, para que o ensino na rede básica de educação ocorresse em meio as restrições impostas devido a pandemia do coronavírus. Através da descrição da observação e fundamentação teórica, a experiência de uma residente bolsista do programa foi relatada, expondo-se também as contribuições de tal atividade para o futuro exercício docente.

Palavras-chave: Ensino Remoto. Observação. Geometria Espacial.

1 Introdução

O presente trabalho[1] tem por objetivo descrever uma experiência vivenciada durante a realização do primeiro módulo do Programa Residência Pedagógica, financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), nos anos de 2020 e 2021.

O relato expõe a observação de duas aulas assíncronas sobre o tema de Geometria Espacial, para turmas do 2º ano do Ensino Médio, sendo que as aulas foram disponibilizadas no programa Aula Paraná, pelo Governo do Estado do Paraná.

O tema escolhido deve-se ao fato de que as observações de aulas remotas da rede pública de educação era uma atividade prevista pelo Programa Residência Pedagógica, que foi realizada ao longo dos seis meses que compunham o primeiro módulo. A aula relatada foi escolhida por apresentar metodologias e práticas de ensino não tradicionais, que cativaram a realização da observação.

[1]Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

Dessa forma, juntamente com a realização da descrição da aula e experiências vivenciadas durante a realização das observações, faz-se um breve referencial teórico sobre o ato de observar, indicações do ensino de Geometria na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), materiais concretos, História da Matemática e motivação.

2 Metodologia

Para a realização de nossas atividades no Programa Residência Pedagógica desenvolvemos uma discussão bibliográfica sustentada por livros e artigos científicos, a partir da observação dos dados coletados durante as observações de aulas. Tais dados remetem-se ao ensino da Geometria da BNCC, materiais e metodologias utilizadas durante as realizações das aulas.

O Programa Residência Pedagógica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus Toledo iniciou-se de maneira remota no ano de 2020, devido a pandemia do coronavírus. Dessa forma, uma das atividades programadas para o primeiro módulo do programa era a realização de observações de aulas assíncronas disponibilizadas pela Secretária de Educação do estado do Paraná, por meio do programa "Aula Paraná".

Foram observadas vinte aulas da disciplina de Matemática, sendo estas divididas entre aulas do Ensino Fundamental (Anos Finais) e Ensino Médio, sendo dez aulas pertencentes a cada modalidade. As observações foram realizadas via plataforma do Youtube, no canal "Aula Paraná" e durante elas, eram realizadas anotações e observações em relação a metodologia utilizada pelo docente, conteúdos e atividades. Posteriormente, foram realizadas análises e reflexões teóricas acerca das informações obtidas.

Durante as observações a aula referente ao tema Geometria Espacial, destinada ao 2º ano do Ensino Médio chamou-nos a atenção, devido a metodologia utilizada pela professora regente. Dessa forma, buscou-se realizar uma descrição da metodologia empregada e análises teóricas em relação a alguns temas abordados.

3 Resultados e Discussão

No ano de 2020 o mundo deparou-se com a pandemia do Coronavírus que transformou a realidade global, principalmente no que se refere ao processo ensino e aprendizagem. Atividades que costumavam ser realizadas presencialmente migraram para a realidade online, sendo executadas de maneira remota.

Neste contexto, as atividades do Programa Residência Pedagógica vinculadas ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Toledo, foram desenvolvidas remotamente.

Por meio de encontros síncronos, reuniões e discussões foram realizadas. De forma assíncrona, alunos residentes bolsistas desenvolviam atividades de observação e elaboração de aulas, análise e reflexão dos aspectos observados.

Para Zinke e Gomes (2015, p. 02) “a prática de observação pode ser entendida como uma ferramenta fundamental para relacionar a teoria com a prática, possibilitando que o futuro licenciado entre em contato com a realidade escolar e a prática docente”.

Desse modo, o presente relato tem por objetivo descrever as atividades relacionadas a observações de aulas, mais especificamente duas que se referem ao tema Geometria Espacial, que pertencem a um vasto conjunto de aulas disponibilizadas pelo Governo do Estado do Paraná.

O complexo de aulas mencionado faz parte do “Aula Paraná”, um programa desenvolvido pelo Governo do Estado na educação básica, com a finalidade de dar continuidade ao ano letivo de 2020. Por meio dele, aulas de todas as disciplinas foram transmitidas por meio de três plataformas: canal Aula Paraná no Youtube, aplicativo Aula Paraná e canais de TV aberta. Também eram realizados encontros síncronos via plataforma no Google Meet e interações pelo Google Classroom. Para os alunos que não possuíam acesso a internet, eram disponibilizados materiais impressos.

A observação foi realizada via plataforma Youtube no dia 22 de outubro de 2020 e de maneira assíncrona. As aulas eram destinadas ao 2º ano do Ensino Médio e como já mencionado, abordavam o tema Geometria Espacial, principalmente o estudo dos poliedros.

3.1 Primeira observação

A primeira aula era regida por uma professora, que ao iniciar se apresenta aos alunos, mencionando que darão continuidade as aulas de matemática e que irão estudar Geometria, mais especificamente a Geometria Espacial.

Para introdução do conteúdo utiliza-se slides e realiza-se a exibição de três imagens de construções/edifícios que possuíam formas de sólidos geométricos. Na sequência, apresenta-se a definição de poliedros e destaca-se o que são faces, vértices e arestas.

Considerando-se a relação com imagens reais, destacamos que na BNCC indica-se que no Ensino Médio o foco deve ser “a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos", levando-se em consideração a realidade dos estudantes (BRASIL, 2018, p. 528).

Além da utilização de ilustrações nos slides, a docente utiliza sólidos de acrílico para mostrar as faces, arestas e vértices de um paralelepípedo. Os sólidos de acrílico são representações que possibilitam uma melhor compreensão e visualização dos sólidos tendo em vista o tipo de material utilizado.

Segundo Vital, Martins e Souza (2016) para que os alunos tenham um bom desenvolvimento em Geometria, faz-se necessário utilizar-se de recursos que facilitem o aprendizado e auxiliem na construção de novos saberes. Dessa forma, podemos dizer que os sólidos de acrílico são materiais concretos, ou seja, facilitadores das habilidades de compreensão, raciocínio e análise (SILVEIRA e LAURINO, 2015).

Para verificar a compreensão dos alunos, é exposto o desenho de uma pirâmide de base pentagonal, para que seja realizada a verificação sobre qual o número de arestas, faces e vértices. A correção é realizada nos slides e apresenta-se também a planificação do poliedro, para facilitar o entendimento.

O slide seguinte possui seis imagens, sendo elas três poliedros e três corpos redondos e pede-se se todos eles são poliedros. Ao dizer que algumas das figuras apresentadas são corpos redondos, a docente explica que para ser um poliedro as faces devem ser formadas apenas por polígonos.

Na sequência é apresentada uma tabela contendo as nomenclaturas dos poliedros, relacionando-as com a quantidade de faces de cada um. Também há a definição de poliedros convexos e não convexos, com a ilustração de dois exemplos e a utilização dos sólidos de acrílico para a explicação. Feito isso, propõe-se um exercício que é resolvido conjuntamente com a utilização dos slides.

Inicia-se neste momento a explicação referente a relação de Euler, que é dada por $V + F = A + 2$ e explicou-se para que é utilizada, ressaltando que a relação sempre é válida para poliedros convexos, mas não sempre para poliedros não convexos. Explica-se também dois exemplos, nos quais eram necessários utilizar a relação de Euler.

Para a fixação do conteúdo, são propostos aos alunos dois exercícios e um desafio, para que resolvessem utilizando a relação de Euler. A dinâmica consistia na exposição do exercício, tempo para a resolução, correção e resolução detalhada nos slides.

Próximo ao término da primeira aula, a docente relembra o que viram e se despede dos discentes.

3.1 Segunda observação

Para iniciar a segunda aula, a educadora se apresenta novamente e relembra o que viram na aula anterior, dizendo também, que nesta aula trabalhariam com os Poliedros de Platão, a relação de Euler e os Poliedros Regulares.

Iniciando a explicação referente aos poliedros de Platão, a professora utiliza a História da Matemática e menciona que Platão relacionava os poliedros com os elementos da natureza. Estas relações foram expostas na forma de ilustração nos slides.

A utilização da História da Matemática consiste em “vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época” (SEED, 2008, p.66). Através dela o aluno tem a possibilidade de analisar e discutir razões para aceitação de fatos, raciocínios e procedimentos.

Dessa forma, a História da Matemática promove uma aprendizagem significativa, propiciando ao estudante o entendimento do conhecimento matemático, que é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais (MIGUEL e MORIM, 2004 apud SEED, 2008).

Na sequência, explica-se que existem apenas cinco poliedros de Platão: o cubo, o tetraedro, o icosaedro, o octaedro e o dodecaedro. Menciona-se também que em tais poliedros cada face possui o mesmo número de arestas, de cada vértice partem o mesmo número de arestas e que é válida a relação de Euler.

Posteriormente, define-se o que é um poliedro regular e indica-se um exercício aos educandos, onde deveriam observar uma pirâmide de base hexagonal e responder se era euleriana, de Platão e regular. O tempo disponibilizado foi suficiente para a resolução do exercício, sendo que após ele, a correção foi realizada com o auxílio dos slides e os sólidos de acrílico.

Em seguida, com a utilização dos mesmos recursos foram realizadas as explicações referentes a cada poliedro de Platão separadamente, expondo-se quais os números de vértices, arestas e faces, se é regular, verificando-se a relação de Euler e mostrando-se as planificações.

Nessa direção, são expostos mais alguns exemplos, exercícios e desafios aos alunos, com a identificação dos poliedros, vértices, arestas e faces. Finalizado este momento, encerra-se a aula.

Para Carvalho (2012, p.11) as observações devem apresentar

> condições para detectar e superar uma visão simplista dos problemas de ensino e aprendizagem, proporcionando dados significativos do cotidiano

> escolar que possibilitem uma reflexão crítica do trabalho a ser desenvolvido como professor e dos processos de ensino e aprendizagem em relação ao seu conteúdo específico.

Em vista destes objetivos, a realização da observação proporcionou uma aprendizagem em relação as diversas metodologias que podem ser utilizadas e empregadas para o ensino dos conteúdos de Geometria, a fim de facilitar o entendimento dos alunos.

Além disso, durante a observação conseguimos perceber a constante mudança de tom de voz da professora, despertando a atenção de quem assistia as aulas, além da interação e motivação, o que consideramos ser importante para um ensino aprendizagem eficaz pois, de acordo com Kauark (2008) um indivíduo motivado terá maior dedicação e deixará fluir livremente seu pensamento. A motivação faz com que o indivíduo pare e olhe para o desconhecido, faz com que se comprometa com o que faz e se torne capaz de dar o melhor de si.

4 Conclusões / Considerações Finais

A realização das observações remotamente possibilitou vivências construtivas para a formação e prática docente, abordando aspectos positivos ou que seriam melhor contemplados em sala de aula.

A maneira como foi realizada a experiência oportunizou uma melhor análise referente as metodologias e práticas para se ensinar determinados conteúdos, no caso da aula observada, o ensino de Geometria Espacial.

Porém, apesar da constante interação que a docente buscava realizar com seus alunos durante a aula, não foi possível perceber uma relação professor aluno efetiva, visto que apenas a educadora podia comunicar-se. Outro aspecto que não pode ser vivenciado no modelo remoto foi o cotidiano escolar, com sua dinamicidade.

No entanto, devemos compreender que a realidade observada estava em processo de adaptação e constantes mudanças, fazendo-nos perceber que a futura prática docente poderá sofrer alterações em relação a como a conhecíamos, o que denota a importância dessas atividades em nossa formação como futuros docentes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. **Os Estágios nos Cursos de Licenciatura**. 1ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

KAUARK, Fabiana. **Motivação no ensino e na aprendizagem: competências e criatividade na prática pedagógica**. Rio de Janeiro: Wak Ed., 2008.

SEED. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

SILVEIRA, Daniel da Silva; LAURINO, Débora Pereira. **SIGNIFICAÇÃO DO MATERIAL CONCRETO NO PROCESSO DE AÇÃO REFLEXÃO**. In: EDUCERE – XII Congresso Nacional de Educação, 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/17615_7896.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

VITAL, Carla; MARTINS, Egídio R.; SOUZA, Jéssica R. de. **O USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE GEOMETRIA**. In: ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5465_3722_ID.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

ZINKE, Idair Augusto; GOMES, Diana. **A PRÁTICA DE OBSERVAÇÃO E A SUA IMPORTÂNCIA NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE GEOGRAFIA**. In: EDUCERE – XII Congresso Nacional de Educação, 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18655_7820.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2021.

OBSERVAÇÕES DE AULAS DE MATEMÁTICA POR MEIO DA PLATAFORMA AULA PARANÁ: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Ana Caroline Cravo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
anacarolinecravo99@gmail.com

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Este trabalho[1] visa relatar uma das atividades realizadas pelos residentes do Programa Residência Pedagógica, cumprida ao longo do segundo semestre de 2020 de forma remota, por conta das restrições impostas pela COVID-19. A experiência descrita compreende as observações de videoaulas da disciplina de matemática da plataforma Aula Paraná, disponibilizada pelo Governo do Estado. As aulas observadas foram ministradas por diferentes professores, expondo os conteúdos de cada ano escolar por meio de diferentes metodologias, o que contribuiu diretamente na formação dos discentes residentes, uma vez que analisar uma aula e propor novos encaminhamentos e sugestões foi um processo crítico e construtivo, além de oportunizar um contato inicial com a futura área de atuação profissional.

Palavras-chave: Residência Pedagógica. COVID-19. Aula Paraná

1 Introdução

O estágio é uma disciplina que faz parte do currículo de vários cursos, possibilitando uma relação entre a teoria e a prática. Segundo Ventorim (2010), o ato educativo supervisionado objetiva a formação de educandos que estejam regularmente matriculados em cursos ou programas de formação de professores nos níveis do Ensino Médio e Superior, em cursos de graduação ou de pós-graduação.

Devido ao cenário de pandemia do Coronavírus expandido no mundo, a presença física de profissionais e estudantes no espaço físico das instituições educacionais foi inviabilizada, assim, a educação a distância e o ensino remoto foram alternativas visando viabilizar condições de continuidade das aulas. Moreira e Schlemmer (2020) caracterizam o Ensino ou Aula Remota como uma modalidade de ensino que pressupõe o distanciamento

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

de professores e alunos, adotada nos diferentes níveis de aprendizagem em função das restrições impostas pela COVID-19.

Nesse sentido, ao longo do segundo semestre de 2020 foram desenvolvidas diversas atividades do Programa Residência Pedagógica em parceria com a disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 1, realizadas de modo remoto.

Desta forma, o presente trabalho tem por objetivo relatar as experiências vivenciadas com as observações das videoaulas do Aula Paraná, compreendendo a constituição das aulas e as metodologias que melhor auxiliam nos processos de ensino e de aprendizagem. Além disto, ressalta-se a importância da plataforma disponibilizada, sendo possível realizar as observações de forma remota, respeitando o distanciamento social.

Estas observações são essenciais na formação de professores, visto que oportunizam uma visão da sala de aula e dos processos de ensino e de aprendizagem. Pois, segundo Costa e Tavares (2015), a formação docente deve propiciar momentos de reflexões aos acadêmicos sobre as práticas pedagógicas que conduzem a ação do profissional da área da educação, a fim da construção crítica dos saberes pedagógicos e de seu próprio conhecimento.

Destacamos a importância da discussão posta neste trabalho, sendo possível refletirmos sobre o processo de aprendizagem dos acadêmicos em meio à pandemia do Coronavírus, o que proporcionou novos conhecimentos a todos os envolvidos.

2 Metodologia

A partir da realização de nossas atividades no programa Residência Pedagógica e Estágio Supervisionado na Educação Básica 1 desenvolvemos uma discussão bibliográfica, por meio da exploração de livros e artigos científicos.

Dentre as experiências obtidas por meio da participação no Programa Residência Pedagógica, como as observações das aulas de matemática realizadas por meio da plataforma Google Meet, das atividades do Google Classroom, de Resolução de Problemas, de assuntos relacionados a BNCC[2], entre outras, destaca-se a relevância das observações das aulas disponibilizadas pelo Aula Paraná.

O Aula Paraná foi uma alternativa criada pelo Governo do Estado para suprir as demandas do calendário escolar da rede pública em meio ao contexto de pandemia, devido aos estudos que devem ser seguidos por professores e alunos. Deste modo, as aulas são

[2] A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo para as instituições de ensino públicas e privadas, sendo referência obrigatória para elaboração dos currículos escolares.

transmitidas em canais de TV digital e aberta de modo assíncrono, no site do Aula Paraná com transmissão via plataforma YouTube de forma assíncrona e, ainda, a ferramenta dispõe de um aplicativo para celulares, tablets e outros. Entretanto, para estudantes que não possuem acesso em nenhum destes meios, são disponibilizados materiais impressos que podem ser retirados nas escolas.

A atividade proposta aos residentes foi a de observação de dez aulas do Ensino Fundamental II (6º a 9º ano) e dez aulas do Ensino Médio (1º a 3º ano). Destas vinte aulas, quatro delas foram observadas por meio da participação em aulas no Google Meet (serviço de comunicação por vídeo), sendo duas do Ensino Fundamental II e duas do Ensino Médio. O restante das observações ocorreu ao longo do semestre por meio da plataforma Aula Paraná, em que os residentes possuíam autonomia para assistirem as aulas e elaborarem os relatórios expondo suas experiências adquiridas com o auxílio do professor orientador.

Com isto, será realizada uma análise sobre as videoaulas disponibilizadas pelo Aula Paraná, destacando as metodologias e tendências utilizadas, a relação professor-aluno, entre outros aspectos presentes nos processos de ensino e de aprendizagem.

3 Resultados e Discussão

As videoaulas observadas do Aula Paraná contavam com a presença de um professor de matemática e um intérprete da Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS), utilizando-se de recursos como televisão (para a exposição de slides), quadro (para a explicação de alguns termos e exercícios), entre outros objetos.

De modo geral, as aulas eram iniciadas com o professor se apresentando aos alunos e relatando o conteúdo que seria abordado naquele determinado momento. Com isto, o docente apresentava uma contextualização do tema, resolvia alguns exemplos e, após, aplicava exercícios para que os alunos resolvessem, sendo estes todos com um período adequado de acordo com o nível de dificuldade de cada exercício. Contudo, certas videoaulas ainda contavam com exercícios “QUIZ” (questões objetivas, geralmente de “verdadeiro” ou “falso”) para finalizar a aula.

No decorrer das observações, verificou-se a importância de o professor demonstrar preocupação com seus interlocutores, os alunos virtuais, sendo que em inúmeras aulas os docentes utilizavam frases expressivas e motivadoras, como: “E aí pessoal, tudo certo? ”, “Conseguiram pensar? ”, “Vamos lá! ”. Caldeira (2013) pontua que a afetividade e a comunicação contribuem para o relacionamento entre os sujeitos, sendo que para muitos educadores o processo de aprendizagem está diretamente ligado às interações sociais.

Em relação à dinâmica das aulas, diversas delas abordaram as Tendências em Educação Matemática, como a história da matemática, a resolução de problemas, os jogos, entre outras. Sendo assim, ressalta-se que, as tendências podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem, despertando o interesse do educando pelas aulas e contribuindo para o melhor entendimento do conteúdo.

A história da matemática foi apontada em diferentes aulas normalmente na introdução de um conteúdo, em que o professor a utilizava para expor a origem de um determinado conceito ou para deduzir uma fórmula. Visto que, esta tendência “visa a construção histórica do conhecimento matemático de forma a contribuir com uma melhor compreensão da evolução do conceito, dando ênfase às dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo desenvolvido” (SIQUEIRA, 2007, p. 27).

Quanto à resolução de problemas, apresentou-se na maioria das aulas disponibilizadas pelo Aula Paraná, sendo abordada pelo professor para iniciar um conteúdo, na explicação ou para fixação do mesmo. Além disso, “é importante que o professor tenha em mente que só há problema se o aluno perceber uma dificuldade, um obstáculo que pode ser superado” (FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 74).

Desta forma, o docente exibia o problema e reservava alguns instantes para os alunos resolverem (sempre havia um fundo musical no vídeo, em alguns momentos eram músicas calmas, em outras situações canções mais agitadas, ou músicas de suspense, inferimos que algumas músicas podem ter atrapalhado mais do que facilitado o aprendizado, uma vez que músicas de suspense ou mais agitadas, por exemplo, interferem na atenção e concentração dos alunos durante a realização das atividades).

Desse modo, evidencia-se a importância das atividades com resolução de problemas, visto que desenvolvem o raciocínio interpretativo do aluno, relacionando situações reais do cotidiano com diversos conteúdos matemáticos. Além disso, estas atividades possibilitam que “o aluno aprenda a montar estratégias, raciocinar logicamente e verificar se sua estratégia foi válida, o que colabora para um amadurecimento das estruturas cognitivas” (MAGALHÃES; RODRIGUES, 2012, p. 1).

No que diz respeito aos jogos, algumas aulas abordaram o software Matific (aplicativo com atividades intrigantes que, conforme os alunos encontravam as soluções dos problemas, os níveis do jogo aumentavam), um recurso pedagógico que possibilita a fixação de conteúdos e exploração do raciocínio dos estudantes.

Uma das observações em destaque, foi uma aula do 2º ano do Ensino Médio, que foi esquematizada na “Semana do Conhecimento”, em que o docente exibia vídeos de vários lugares turísticos de Curitiba e os relacionava com certos conteúdos matemáticos. Como exemplos, apresentou o "Parque Tanguá" (em que sua estrutura abrange muito da Geometria Espacial, com conceitos de área e figuras geométricas), o "Parque Barigui" (com a Geometria retratada de forma diferente, através das proporções, com o uso do Teorema de Tales) e, um vídeo do "Bosque Alemão" (identificando a Geometria Plana, com triângulos isósceles, arcos, retângulos e outros).

Com base na observação das aulas publicadas pelo Aula Paraná, nota-se uma evolução ao longo do ano letivo de 2020, uma vez que as primeiras videoaulas disponibilizadas possuíam alguns erros nos slides, ou ainda alguns equívocos nos conceitos matemáticos, e ao longo do percurso visualizamos um aperfeiçoamento, ou seja, o novo cenário exigiu dos professores uma reinvenção do "ser professor". As observações dessas aulas contribuíram diretamente na formação de futuros professores, sendo possível analisar as maneiras distintas de apresentar um conteúdo, os métodos abordados e até mesmo a forma que o professor utiliza para se comunicar com os alunos.

Desta forma, os residentes observavam as aulas e elaboravam relatórios detalhados apontando o desenvolvimento da aula, uma reflexão sobre os slides utilizados e trilha de aprendizagem (material resumido do conteúdo abordado) e, por fim, construíam um novo encaminhamento para a aula, apresentando o que poderia ser alterado ou mesmo algo que poderia ser acrescentado para melhor auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem.

Por conseguinte, "a formação do futuro professor de matemática exige uma dinâmica que o aproxime da realidade escolar, ambiente no qual desenvolverá a docência" (COSTA; TAVARES, 2015, p. 2). Sendo assim, o estágio oportuniza esta aproximação entre o ambiente escolar, o professor em formação e o graduado, possibilitando momentos de aprendizagens para todos os envolvidos.

Diante disso, o Aula Paraná além de ser uma ferramenta essencial para a continuação do calendário escolar da rede pública após o início da pandemia, contribuiu para os estudos dos residentes do curso de licenciatura em Matemática, uma vez que possibilitou um contato preliminar com a futura área de atuação profissional, propiciando inúmeras experiências e aprendizados.

4 Conclusões / Considerações Finais

Com base nas experiências adquiridas ao longo do semestre por meio da participação no Programa Residência Pedagógica, evidencia-se a relevância das observações das videoaulas do Aula Paraná, visto que propiciaram um primeiro contato com a futura área de atuação profissional, o contexto da sala de aula e os processos de ensino e de aprendizagem.

As observações das aulas proporcionaram uma visão do ambiente escolar aos residentes, sendo possível analisar como diferentes professores trabalham com determinados conteúdos e como são importantes a comunicação e a interação do educador com os estudantes. Além disso, ao observar uma aula, o residente pode ter contato com novos conhecimentos, atentando-se nas metodologias utilizadas e, ainda, em elementos que poderiam ser acrescentados ou complementados para o melhor desenvolvimento da aula e entendimento da turma.

Diante do relato apresentado, ressalta-se a importância das atividades realizadas pelos residentes ao longo do segundo semestre de 2020, com ênfase nas observações do Aula Paraná, que possibilitaram inúmeras experiências e estudos para os docentes em formação, apesar do momento crítico vivenciado por conta da pandemia do Coronavírus.

Referências

CALDEIRA, J. S. **Relação Professor-Aluno:** Uma reflexão sobre a importância da afetividade no processo de ensino-aprendizagem. Paraná: UFPEL, 2013. Disponível em:< https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2013/8019_4931.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2021.

COSTA, L. F. M.; TAVARES, N. P. **O estágio supervisionado na formação do futuro professor de matemática:** expectativas, dificuldades e realizações. Universidade do Estado do Amazonas, 2015. Disponível em:< https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/O-EST%C3%81GIO-SUPERVISIONADO-NA-FORMA%C3%87%C3%83O-DO-FUTURO-PROFESSOR-DE-MATEM%C3%81TICA-EXPECTATIVAS-DIFICULDADES-E-REALIZA%C3%87%C3%95ES.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2021.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em Educação Matemática:** Livro didático. 2. ed. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

MAGALHÃES, Shirlei Cristina; RODRIGUES, Adriano. **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA:** diagnosticando a prática pedagógica. UNIS, 2012. Disponível em:< http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2021.

MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. **Por um novo conceito e paradigma de educação digital onlife**. Revista UFG, Goiás, v. 20, 2020. Disponível em: <https://www.revistas.ufg.br/revistaufg/article/view/63438/ 34772>. Acesso em: 26 fev. 2021.

SIQUEIRA, R. A. N. **Tendências da Educação Matemática na Formação de Professores**. 2007. 49f. Monografia (Especialização em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2007.

VENTORIM, S. Estágio docente. In: OLIVEIRA, D.A.; DUARTE, A.M.C.; VIEIRA, L.M.F. **DICIONÁRIO:** trabalho, profissão e condição docente. Belo Horizonte: UFMG/Faculdade de Educação, 2010. CDROM.

RELATO DE EXPERIÊNCIA: OBSERVAÇÃO DE AULAS REMOTAS DURANTE PERÍODO DE PANDEMIA

Ana Maria Costa Spohr
Universidade Tecnologia Federal do Paraná
amcspohr@gmail.com

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Este trabalho[1] tem como objetivo relatar a experiência de observação de algumas aulas remotas de um Colégio Estadual de Toledo-PR, realizadas por meio da plataforma Google Meet. A atividade foi realizada por meio do programa Residência Pedagógica em conjunto com a disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 1, do curso de Licenciatura em Matemática. No decorrer do texto são descritos alguns aspectos importantes que foram analisados durante a observação das aulas, entre slides, relação professor-aluno, contextualização dos conteúdos, entre outros. Os itens pontuados foram fundamentados teoricamente e também foi possível associá-los a conhecimentos apropriados durante o curso. Também foi apresentada uma breve discussão sobre a inclusão das tecnologias na educação. De forma geral, a experiência foi extremamente proveitosa para formação acadêmica e pessoal.

Palavras-chave: Residência Pedagógica. Google Meet. Aulas remotas.

1 Introdução

O presente trabalho foi elaborado a partir da experiência vivenciada durante a participação no primeiro módulo do Programa Residência Pedagógica, financiado pela CAPES.

No decorrer desse primeiro módulo, foi possível desenvolver diversas atividades, entre elas, podemos listar a observação de aulas gravadas através da plataforma Youtube

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

pelo Aula Paraná[2], bem como a observação de aulas síncronas por meio do Google Meet[3], reunião com outros professores a respeito da BNCC, entre outras.

Entretanto, deve-se ressaltar que o programa se desenvolveu de maneira diferenciada para os participantes, de forma remota. O que pôde proporcionar aos acadêmicos participantes uma experiência distinta quando comparada as outras edições que ocorreram de modo presencial.

Desse modo, uma característica que se distingue das outras edições foi que os residentes tiveram a oportunidade de participar e observar as aulas das turmas do professor preceptor durante o período de pandemia, ou seja, permitiu o contato com o cotidiano escolar em meio a um momento de adaptação, no qual a educação à distância e o ensino remoto foram as alternativas aderidas pelas instituições de ensino.

Devido a isso, a experiência escolhida para relatar foi a observação de aulas síncronas pelo Google Meet, pois por meio delas foi possível estabelecer um maior contato com alunos e professor e, a partir disso, realizar algumas análises.

2 Metodologia

É sabido que a inclusão de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem da educação básica sempre foi visto como um desafio a ser enfrentado. E o cenário escolar tornava esse desafio ainda mais moroso devido á infraestrutura das escolas, falta de conexão com a internet, e o principal: formação precária dos professores para pensarem e planejarem suas práticas com essa mediação, evidenciando muitas vezes uma perspectiva instrumental da relação com a tecnologia (ALVES, 2016).

Sendo assim, pode-se notar que muitas vezes a escola poderia oferecer as tecnologias necessárias, mas não ofertava a formação necessária para que os professores pudessem utilizá-la como um instrumento para agregar em suas aulas.

Nas instituições de ensino de educação básica, raramente durante uma aula presencial os professores faziam o uso de recursos tecnológicos como o computador ou projetor de slides para explicação de conteúdo, pois “a preparação dos professores para

[2] Trata-se de uma alternativa de ensino não presencial desenvolvida pelo Governo do Estado para dar continuidade ao calendário escolar durante a pandemia, consistindo em cinco ferramentas: canais em TV aberta, canal do Youtube, salas virtuais do Google Classrom, aplicativo Aula Paraná e atividades impressas.

[3] O Google Meet é uma ferramenta de cunho corporativo, ou seja, foi pensada e desenvolvida especificamente para a realização de reuniões em vídeo a distância, com alta qualidade de áudio e vídeo, comportando um grande número de participantes online ao mesmo tempo.

utilizar as TIC não tem sido uma prioridade educativa na mesma proporção do equipamento das escolas com infraestruturas informáticas" (ALVES, 2008 apud COUTINHO, 2009).

Já no modelo de educação remota, que são realidades no cenário educacional devido a pandemia do Corona vírus que afetou distintos setores da sociedade, a maioria dos professores precisou rever a postura teórico-metodológica e se adaptar a essas tecnológicas, entre tantas outras.

Além disso, pode-se notar um importante e necessário vínculo entre a educação remota e as tecnologias digitais, uma vez que, de acordo com Moreira e Schlemmer (2020), a educação remota consiste no distanciamento geográfico entre professores e estudantes cujo ensino presencial físico é transposto para os meios digitais.

Para ofertar essa modalidade de ensino na educação básica, a Resolução da Secretaria da Educação e do Esporte - SEED nº3.817/2020 apresenta algumas medidas adotadas. Dentre elas, o documento dispõe que os docentes devem realizar no mínimo uma aula on-line por semana com seus alunos que esta deve ter duração mínima de quinze minutos, com a participação de pelo menos um estudante e a presença será registrada.

Na realização de nossas atividades no programa Residência Pedagógica e Estágio Supervisionado na Educação Básica 1 desenvolvemos uma discussão bibliográfica, a partir de livros e artigos científicos.

Para dar início a observação das aulas, foi exigida uma liberação da Secretaria de Educação. Na sequência, com antecedência foram definidos os dias e horários das aulas que observaríamos de acordo com a disponibilidade do professor preceptor.

Aproximadamente vinte minutos antes de cada encontro marcado, o professor enviava o link para acesso da chamada aos residentes destinados a observar aquela aula.

A cada aula observada, foi solicitado que fizéssemos um relatório referente a mesma, que constasse as principais informações como a duração da aula, seriação a que era destinada, os conteúdos abordados, número de alunos presentes, reflexões sobre situações abordadas, entre outras.

O relatório de observação compreendia também em relacionar os conhecimentos teóricos adquiridos durante o curso com as situações analisadas referentes as aulas síncronas por meio do Google Meet, essa relação foi fundamentada teoricamente sempre que possível.

3 Resultados e Discussão

Aulas on-line por meio da plataforma Google Meet foi uma das alternativas tomadas para essa nova modalidade de ensino, encontros nos quais foram analisados neste trabalho.

As aulas observadas do professor preceptor do colégio com seus alunos seguiam um padrão, eram utilizados os slides respectivos a aula, disponibilizados pelo site Aula Paraná, cuja explicação do conteúdo e exercícios era com base nesses slides prontos.

Uma das aulas síncronas observadas foi destinada a turmas de oitavo ano, a aula abordava o conteúdo: Sólidos Geométricos. Foi possível analisar que, apesar de o docente utilizar os slides disponíveis pelo Aula Paraná, ele apresentava conceitos e relembrava definições que não eram apontados nos slides.

Figura 1 – Poliedros.

Fonte: Aula Paraná (2020)

No slide apresentado acima (Figura 1) tem-se a informação de que poliedros são classificados entre pirâmides e primas, mas, muitas vezes, os alunos podem não lembrar a diferença entre eles, e o professor relembra essas informações. Isso aconteceu em vários encontros.

Uma possível classificação, de acordo com Barison (2005), é a de que os poliedros são divididos em três grupos: regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro), semi-regulares (tetratroncoedro, cuboctatroncoedros, dodecaicositroncoedros) e irregulares (pirâmides e prismas). Sendo assim, a pessoa que elaborou os slides poderia ressaltar que existem outras classificações também, pois pode soar como um equívoco.

Alguns dos slides disponibilizados pelo Aula Paraná não apresentavam as informações de forma organizada, e, muitas vezes, se tornavam poluídos (Figura 2). Foi importante analisar esse aspecto, pois podemos associar ao que é nos ensinado para quando for lecionar: as informações devem ser dispostas na lousa organizadamente e o quadro deve ser dividido de maneira proporcional. Segundo Ebert (1972), o uso indiscriminado e não planejado gera uma confusão tão grande que o próprio professor se perde no emaranhado dos dados desordenadamente lançados.

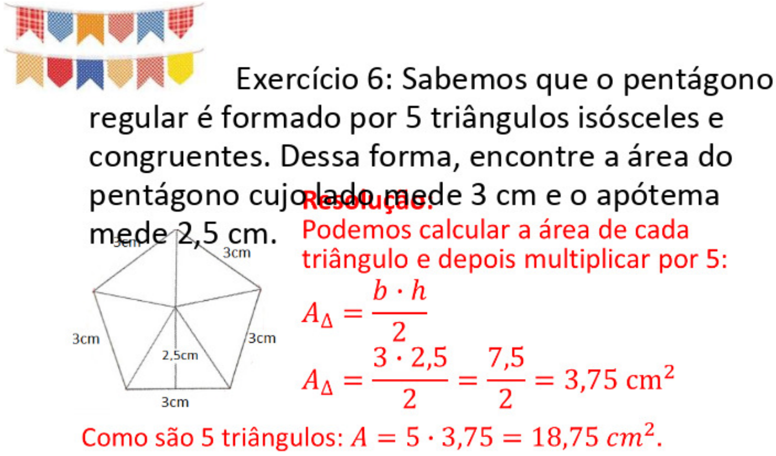


Figura 2 – Aula área de polígonos (9º ano)

Fonte: Aula Paraná (2020)

Outro fato importante que chamou atenção, é que o docente procura fazer o uso de exemplos do cotidiano do aluno e associá-los ao conteúdo estudado. Por exemplo, ainda na mesma aula ele cita a seleção brasileira de futebol que é pentacampeã pois foi campeã 5 vezes, logo, um pentaedro possui 5 faces iguais.

O mesmo aconteceu em uma aula sobre Projeção Ortogonal para uma turma de nono ano, ele acrescentou que de manhã o sol nos fornece uma sombra com medidas maiores do que as reais, o mesmo acontece para a tarde, mas exatamente ao meio dia a sombra será uma projeção ortogonal, com uma explicação simplificada e que os alunos pudessem entender de forma mais fácil.

De acordo com Andrade (2013), a matemática da escola é descontextualizada da utilizada na vida prática do aluno, tornando as aulas pouco atrativas e o aluno não sente necessidade de aprender tal matéria, que para ele é desvinculada da sua vida cotidiana.

Em uma aula sobre tronco de pirâmide reta, destinada a terceiro ano, após apresentar o conteúdo e as fórmulas necessárias para os cálculos solicitados na aula, foi disponibilizado no slide um exercício que consistia em descobrir quanto de impermeabilizante seria necessário para um suporte de mesa feito de madeira que é constituído por um prisma reto e um tronco de pirâmide quadrangular, (Figura 3).

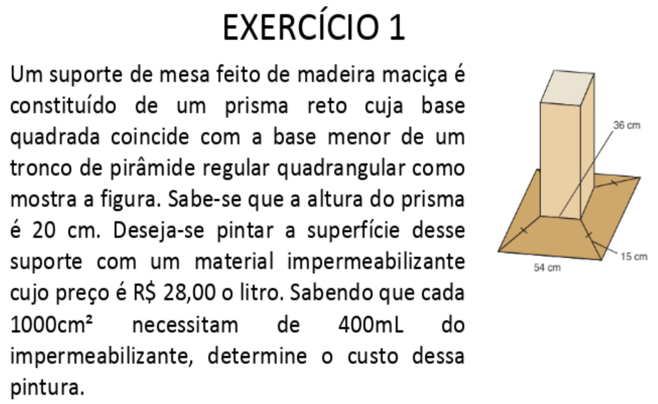


Figura 3 – Exercício 1.

Fonte: Aula Paraná (2020)

É notório que a figura ilustrativa não coincide com as medidas disponibilizadas, uma vez que o prisma mede vinte centímetros de altura e o lado da base mede trinta e seis, o que pode confundir o aluno na interpretação do exercício. O professor chamou atenção para esse fato e alertou os alunos, para não interpretarem os problemas somente pelas imagens apresentadas. Vale lembrar que o equívoco não foi por parte do professor, e sim por parte de quem elaborou os slides.

Observar aos encontros via Google Meet também nos permitiu uma leitura atenta da relação teoria-prática, relacionando com o que aprendemos na licenciatura, como a organização do quadro, tentar utilizar problemas contextualizados e que condizem com a realidade, relembrar alguns conceitos quando necessário, entre outros.

Outro aspecto importante observado relacionado com o citado acima, foi o que ocorreu em um dos encontros destinado a turma de terceiro ano, a aula era sobre cilindros.

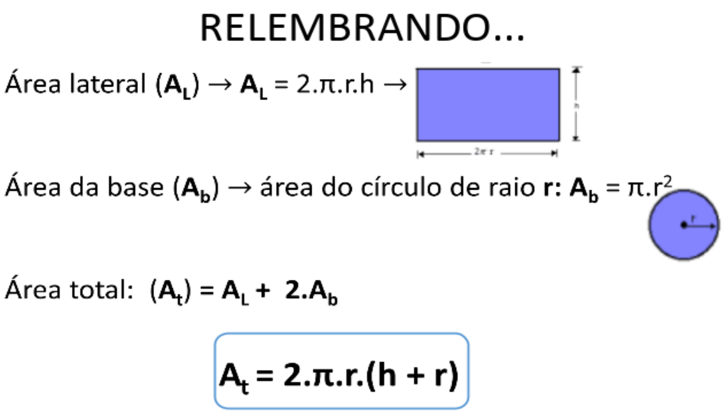


Figura 4 – Planificação do Cilindro.

Fonte: Aula Paraná (2020)

A figura 4 representa um slide que o professor utilizou para explicar como se encontra a fórmula da área total do cilindro. Diante disso, como o professor explica o passo a passo para chegar na fórmula, ele não contribui com a perspectiva de que se deve decorá-las, mas que é melhor entender de onde ela vem e assim o aluno a lembrará mais facilmente, o mesmo que aprendemos na vida acadêmica.

De acordo com Amado, Sanchez e Pinto (2015), a demonstração é considerada a base da compreensão em Matemática e é essencial para desenvolver, criar e comunicar o conhecimento matemático.

Poucos alunos participavam e compareciam as videoconferências, no máximo três estudantes por aula, mas mesmo com poucos presentes foi possível notar uma diferença na relação professor-aluno entre as turmas.

Em algumas turmas, os alunos habilitavam as câmeras e microfones e interagiam com o professor participando das discussões, em outras só respondiam no chat quando solicitado. Baker (2006, apud. BARBOSA, CAMPOS e VALENTIM, 2010) destaca que a relação professor-aluno é necessária para o engajamento dos alunos na aprendizagem.

Assim como em muitas aulas presenciais, o silêncio era certo quando o professor perguntava “alguma dúvida?”, e pôde-se notar que a maioria dos alunos se sentiam retraídos e tímidos, com câmeras e microfones desligados, respondendo só quando necessário.

Além de utilizar o tempo da reunião para explicar conteúdos e exercícios, o docente reservava um momento para tirar as dúvidas que os estudantes poderiam ter do conteúdo estudado na aula ou até mesmo dos anteriores, e das atividades que estes deveriam realizar no Google Classroom[5] como validação de presença.

4 Conclusões / Considerações Finais

Observando todos os aspectos presentes na elaboração desse relato, pode-se verificar que, até o momento, o programa Residência Pedagógica foi extremamente satisfatório. Ainda que de forma remota, permitiu realizar um contato de nós, futuros docentes, com o nosso futuro ambiente de trabalho.

[5] Junqueira (2014) aborda que esta é uma plataforma educacional que facilita a comunicação entre professores e alunos, com ele os professores podem criar e receber tarefas, conversar em tempo real com os estudantes, dentre outras opções.

Além disso, foi possível relacionar os conhecimentos apropriados nas disciplinas do curso com as aulas e aspectos observados.

Como toda sala de aula tem possíveis entraves, as aulas remotas não foram diferentes. Talvez o retorno dos alunos não tenha acontecido conforme esperado, uma vez que nos encontros pelo Google Meet haviam poucos presentes e os mesmos não interagiam de forma satisfatória, mas levando em consideração de que está sendo uma prática totalmente inovadora, é visível o esforço e dedicação dos professores envolvidos e que estão se acostumando com essa nova situação.

Portanto, pontuamos que o trabalho foi muito rico e de grande valia agregando conhecimento para minha futura docência.

REFERÊNCIAS

ALVES, Lynn. **Educação Remota: Entre a ilusão e a realidade.** Aracaju: 2020. Disponível em: < https://periodicos.set.edu.br/educacao/article/view/9251/4047> Acesso em 25 de Fev 2021.

AMADO, Nélia; SANCHEZ, Juan; PINTO, Jorge. **A utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de aula: o estudo da reta de Euler**. Bolema: vo. 29, 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=s0103-636x2015000200012&script=sci_arttext> Acesso em 25 de Fev 2021.

ANDRADE, Cíntia Cristiane. **O ensino da matemática para o cotidiano. Medianeira: 2013.** Disponível em: < http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4286/1/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf> Acesso em 25 de Fev 2021.

BALBINO, Renata. **Volume de um Cilindro – Aula 116**. Aula Paraná: 2020. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1X4uCUTj27XC5K8XgUtwZ89vwS-0FGdkA/view> Acesso em 25 de Fev 2021.

BARBOSA, Altemir José Gonçalves. CAMPOS, Renata Araújo. VALENTIM, Tássia Azevedo. **A diversidade em sala de aula e a relação professor-aluno.** Campinas: 2011. Disponível em: < https://www.scielo.br/pdf/estpsi/v28n4/06.pdf> Acesso em 25 de Fev. 2021.

BARISON, Maria Bernadete. **Definições, classificações e construções de Poliedros Regulares em Geometria Descritiva.** Geométrica vol.2 n.1a. 2005. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/gd_poli_reg.pdf> Acesso em 25 de mar. 2021.

COUTINHO, C. P. (2009). **Tecnologias Web 2.0 na sala de aula: três propostas de futuros professores de Português.** In Educação, Formação & Tecnologias; vol.2 (1); pp. 75-86, Maio de 2009, disponível em: <http://eft.educom.pt>. Acesso em 15 de maio. 2021.

EBERT, Albert. **O quadro de giz, sua utilização correta e seus acessórios.** Rio de Janeiro: 1972. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br> Acesso em 15 de maio. 2021.

FEDER, Renato. **Resolução Seed nº 3.817 – 24/09/2020 – Alteração de Resolução nº 1.522/2020**. Casa Civil, Sistema Estadual de Legislação: 2020. Disponível em: <https://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=239563&dt=29.8.2020.18.29.32.817> Acesso em 25 de Fev 2021.

JÚNIOR, Idalberto Batista Vieira. PETROSKI, Arabel. **Semana do conhecimento: A geometria do cotidiano – Cubo de dobradura.** Aula Paraná: 2020. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1zInxtQa312Q03iXyrht2p_Weer24vMUp/view> Acesso em 25 de Fev 2021.

MATTEIS, Márcio. **Tronco de pirâmide reta: área (Parte 2) Aula 111**. Aula Paraná: 2020. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1B1rbeuuYe2yyaaYTNzFoeRbVvm4vtCr_/view> Acesso em 25 de Fev 2021.

MOREIRA, José Antonio. SCHLEMMER, Eliane. **Por um novo conceito de educação digital *onlife*.** Revista UFG, V.20, 2020. Disponível em: <https://www.revistas.ufg.br/revistaufg/article/view/63438/36079> Acesso em 25 de Fev 2021.

SAFETEC. **O que é Google Meet e como essa ferramenta pode ajudar sua empresa a se comunicar melhor.** 2020. Disponível em: <https://blog.safetec.com.br/comunicacao/o-que-e-google-meet/> Acesso em 25 de Fev 2021.

UMA NARRATIVA A RESPEITO DA EXPERIÊNCIA EM REGÊNCIA DE UMA AULA *ON-LINE* DE GEOMETRIA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Anderson Alves Miguel
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
ander.alves.miguel123@outlook.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

O atual cenário pandêmico vivido pela sociedade moderna fez com que diversas atividades tivessem a necessidade de se readaptar para prosseguir com seus trabalhos. Uma delas foi a área educacional. Nessa área o meio comumente adotado foi fazer uso de ferramentas digitais na tentativa de prosseguir com as aulas, em um ambiente totalmente *on-line*. Dessa forma, o programa de Residência pedagógica juntamente com a disciplina de Estágio Supervisionado da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, viabilizou a experiência das regências nesse novo formato de aula. O presente escrito relata a experiência do residente sobre como foi ministrar uma aula de revisão de Geometria Plana baseada em uma questão do Enem de 2018. Ao final da regência foi possível destacar e discutir sobre alguns pontos positivos e alguns pontos à se aprimorar em relação à esse modelo de ensino. Por fim, pôde-se concluir que tal experiência contribuiu significamente no processo de ensino dos alunos, assim como foi enriquecedora na etapa de formação do residente e futuro docente.

Palavras-chave: Ensino. Geometria. Regência e Tecnologias Digitais.

1 Introdução

A pandemia do Coronavírus fez com que no Brasil, e no mundo, fossem adotadas diversas medidas restritivas pelos estados e municípios, como exemplo o fechamento de escolas e comércios não essenciais (MALTA *et al.*, 2020). Essas medidas, especialmente no Brasil, foram vistas como necessárias, na tentativa de redução da taxa de contaminação do vírus, mas ao mesmo tempo implicaram diretamente em várias adaptações na maneira de se viver na grande maioria dos brasileiros, desde crianças, até mesmo idosos.

Contudo, o país não pode de fato, parar. Com base nessa premissa, diversas áreas, sejam voltadas à educação, comércio ou outras, buscaram se adaptar ao presente momento vivido pela sociedade. A alternativa comumente escolhida, quando possível, foi aderir às ferramentas *on-line* à disposição, visto que atualmente também vivemos em um período de constante evolução tecnológica, logo, existem diversas ferramentas ao dispor, para a tentativa de se minimizar os empecilhos causados pela pandemia, buscando construir um novo normal. Uma das áreas que aderiram à esse método de trabalho foi a educacional, que optou por trabalhar de maneira remota, com gravação de videoaulas, aulas síncronas utilizando algumas plataformas disponíveis, como exemplo o *Google Meet*, que é uma ferramenta de cunho corporativo que foi pensada e desenvolvida para reuniões de vídeo à distância comportando um grande número de participantes ao mesmo tempo, dentre outras formas de trabalho.

Seguindo esse caminho, alguns cursos de licenciatura, que possuem a disciplina de Estágio Supervisionado aderiram à essa forma de trabalho, com gravação de videoaulas assim como o planejamento de aulas no formato síncrono, para viabilizar o desenvolvimento das regências, como também possibilitar o desenvolvimento das atividades do programa de Residência Pedagógica – RP, fomentada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Nesse intuito, foi então proposto, como atividade de regência, o planejamento e aplicação de uma aula de revisão, no modelo remoto, baseada em assuntos recorrentes em vestibuares e Enem. Entre os diversos temas possíveis, destaca-se a geometria, visto que, para Silva (2014) a geometria é uma área da matemática que visa entender um mundo que faz parte de nossa realidade. De um modo geral, ainda em concordância com Silva (2014), o estudo da Geometria destaca a compreensão da relação do ser humano com o espaço, o desenvolvimento do raciocínio espacial além de contribuir para o rigor matemático.

De acordo com Santana e Alves (2009), é necessário reforçar o estudo sobre esse tema, pois, segundo os autores, sem o estudo da geometria, as pessoas não desenvolvem o pensamento geométrico ou o raciocínio visual, e sem essas habilidades, dificilmente será possível resolver situações da vida que forem geometrizadas.

Sendo assim, o presente escrito tem por objetivo relatar a experiência vivida pelo autor, integrante do Residência pedagógica, na aplicação de uma aula *on-line* via plataforma *Google Meet*, na qual foi abordado assuntos referentes à geometria plana, em específico, comprimento de circunferências e relações trigonométricas no triângulo retângulo, voltada para alunos dos três anos do ensino médio, além de, ao final da aula, avaliar sua prática docente e efeitos do residência pedagógica em sua formação.

2 Metodologia

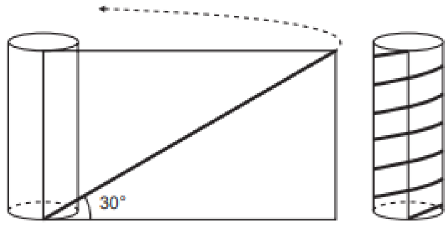
A experiência aqui relatada, ocorreu no final de novembro de 2020, sendo utilizada a plataforma *Google Meet*, com alunos dos três anos do ensino médio do Colégio Estadual jardim Maracanã, um dos colégios parceiros do RP. A aula foi desenvolvida em parceria com a disciplina de Estágio Supervisionado da Universidade Federal Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo, tendo como orientadores os professores supervisores do RP, o professor da disciplina de Estágio Supervisionado e pela professora preceptora do RP.

A proposta para a elaboração da aula seguiu a ideia de uma preparação/revisão, visto que muitos dos alunos estavam às vésperas de prestar vestibulares e o próprio Enem. Nesse sentido foram elencados alguns temas que são tratados com uma maior frequência e importância nesses exames, como exemplo pode-se citar funções, estatística, trigonometria, sistemas de equações e geometria, sendo esse último tema o escolhido para o autor desenvolver sua aula.

Assim, com a temática definida, a intenção da aula foi de, a partir de seu início com a apresentação de uma questão retirada do Enem de 2018, apresentado na figura 1, fossem observados, e na sequência retomados, os conceitos geométricos necessários para se resolver a questão e a partir desse ponto, discutir à respeito desses conceitos utilizados. O aprendizado dos alunos foi avaliado de maneira formativa.

QUESTÃO 170

Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

A) $36\sqrt{3}$
B) $24\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) 36
E) 72

Figura 1: Questão utilizada na aula
Fonte: Enem - 2018.

A escolha dessa questão para o desenvolvimento da aula se justifica pelo fato de ser possível retomar vários conceitos geométricos para a sua resolução, o que reflete em uma boa escolha para uma aula de revisão de conteúdos.

Na seção seguinte será apresentado o desenvolvimento da aula assim como as discussões que surgiram no decorrer da mesma.

3 Resultados e Discussão

3.1 Desenvolvimento da aula

Antes da resolução da questão, o residente inicia uma conversa com os alunos, onde os questiona sobre como eles poderiam proceder para se obter a resposta de tal questão. Alguns alunos conseguiram identificar que seria necessário o uso algumas ferramentas relacionadas à trigonometria do triângulo retângulo. Outros alunos conseguiram identificar que seria necessário também obter algumas outras medidas para se chegar à resposta correta, mas não houve nenhum aluno que de fato conseguiu obter a resposta de imediato.

Após essa conversa inicial, foi então iniciada à resolução da questão, abordando inicialmente o cilindro apresentado no exercício. Nesse momento o residente perguntou aos alunos se de alguma forma seria possível relacionar o cilindro, ou alguma de suas partes para determinar algum valor numérico para a faixa retangular, porém os alunos não se manifestaram. Sendo assim, o residente destacou que a faixa retangular envolvia o cilindro algumas vezes, realizando assim a contagem dessas voltas, que totalizaram seis voltas completas, como representa a figura 2.

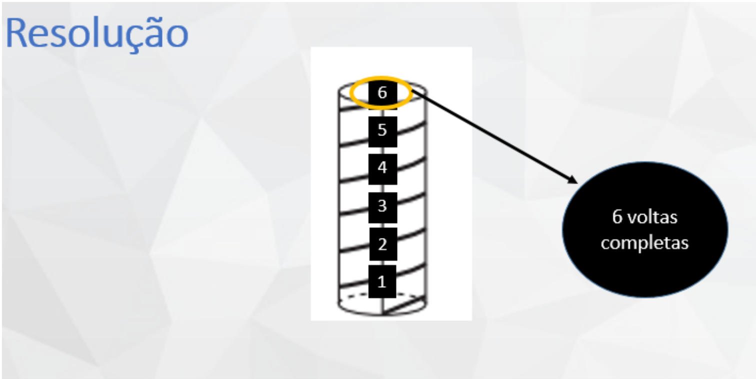


Figura 2: Contagem das voltas da faixa retangular no cilindro
Fonte: Do autor, 2021.

Com a constatação do número de voltas em torno do cilindro, o residente instigou o alunos à pensarem em uma forma de como relacionar à base circular do cilindro com a medida da base da faixa retangular. Nesse momento um dos alunos respondeu dizendo que "a medida da base da faixa retangular poderia seis vezes a medida da base do cilindro". Essa foi uma observação um tanto quanto correta, contudo ainda precisaria ser melhor lapidada. Assim, foi iniciado a explicação sobre algumas propriedades de um círculo, com ênfase no comprimento da circunferência, relacionando a mesma com a medida da base da faixa. Foi então introduzido o conceito de comprimento de arco, de forma intuitiva como o descrito por Wagner (2017), que diz que podemos pensar em passar um barbante em volta de uma circunferência, esticá-lo e depois medir seu comprimento com uma régua.

Na sequência foi mostrado a equação matemática que fornece tal cálculo, enfatizando que para se obter o comprimento de uma circunferência qualquer é necessário apenas conhecer o valor do raio da circunferência e esse valor, para o problema proposto, era disponibilizado em seu enunciado. Com essas informações foi possível então obter a medida correspondente à base da faixa retangular, que mede 72 centímetros. Continuando com o desenvolvimento da aula, foi então iniciado um estudo utilizando a faixa retangular. Fazendo proveito dessa oportunidade, foi então comentado que essa figura, como seu nome sugere, é um retângulo, e parafraseando Dolce e Pompeo (1993), uma figura geométrica plana é um retângulo se possuir os quatro ângulos internos congruentes.

Dando seguimento à aula, novamente foi abordado outros conceitos geométricos, como exemplo, foi visto que a faixa retangular é de fato um retângulo e essa figura está dividida ao meio por uma de suas diagonais, conforme figura 1, formando dois triângulos retângulos, por conta dos quatro ângulos internos de um retângulo serem ângulos retos. Dessa forma, para a continuação da resolução da questão inicial, foi optado por utilizar um dos triângulos formados, visto que a medida desejada para a resolução do problema, que se caracteriza em obter a altura do cilindro, pode ser satisfeita encontrando a medida de um dos lados do triângulo, nesse caso o cateto oposto ao ângulo de 30º. Foi possível fazer essa constatação, visto que para Dolce e Pompeo (1993) os ângulos internos de um retângulo medem 90º. Daí segue que seus lados paralelos são iguais.

Com todas as informações obtidas até o momento, o problema inicial foi resumido à um triângulo, como ilustrado na figura 3.

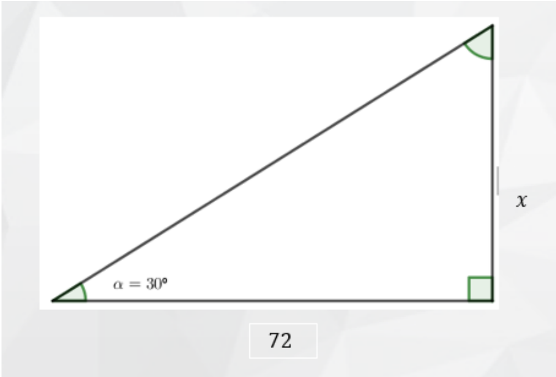


Figura 3: Triângulo retângulo com as informações disponíveis
Fonte: Do autor, 2021.

Após a apresentação da figura 3 aos alunos, o residente aproveitou o momento para revisar a nomenclatura dos lados do triângulo retângulo, que de acordo com Souza e Philippsen (2013) os catetos recebem nomes de acordo com a sua posição, em relação ao ângulo que se está analisando. Assim, o autor enfatizou, ilustrando graficamente, que o cateto oposto é o lado que fica em frente ao ângulo interno escolhido, o cateto adjacente é o lado que compõe o ângulo interno escolhido e a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo. Por fim foi frisado que os nomes dos catetos se invertem no momento da escolha do ângulo interno em análise.

Essa abordagem à respeito da nomenclatura dos lados do triângulo retângulo se faz necessário pois, sob a ótica de Cruz e Dalcin (2015, p.3), mesmo com construções de triângulos retângulos e explicações para identificar os lados que são os catetos e o lado correspondente à hipotenusa, percebe-se que qualquer mudança de posição do triângulo já faz com que os alunos não saibam mais identificar os catetos e a hipotenusa.

Após feita a revisão sobre o triângulo retângulo, o autor instiga novamente os alunos, os levando à pensar sobre como continuar com a resolução. Quase que de imediato um dos alunos responde que uma saída seria utilizar as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Esse momento foi uma ótima oportunidade para se revisar os conceitos da trigonometria do triângulo retângulo, visto que, para Celso e Ferreira (2014), há uma infinidade de situações que podem ser propostas com o objetivo de dar significado ao que se está aprendendo sobre o tema abordado. Dando prosseguimento, foi então revisado as três relações comumente utilizadas, utilizando como base o que foi descrito por Iezzi (1977), que ressaltam que o seno de um ângulo interno, que pode ser entendido como a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, o cosseno de um ângulo interno, que é a razão entre cateto adjacente e a hipotenusa e na sequência a tangente de um ângulo interno que é dado pela razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente do triângulo retângulo

Feito essa nova retomada de conceitos, uma nova pergunta é feita aos alunos, sendo a seguinte: "Qual dessas relações trigonométricas pode ser utilizada para resolver o problema da figura 3?". Após um breve momento alguns alunos dizem ser possível utilizar a tangente, mas não sabem explicar o porquê dessa escolha. Com isso surge a oportunidade de abordar o motivo dessa escolha para a continuação da resolução.

O residente começa dando ênfase aos valores numéricos já conhecidos e ao que se deseja obter relacionando-os com as nomenclaturas do triângulo retângulo considerando o ângulo interno de 30º dado. Sendo assim, fica destacado que o cateto oposto ao ângulo de 30º mede x e a base do triângulo é o cateto adjacente ao ângulo de 30º, sendo assim a relação trigonométrica possível de aplicar à resolução seria a relação que envolve tanto o cateto oposto quanto o cateto adjacente, logo a escolha para essa situação é a relação da tangente, visto que essa é compreendida como a razão entre os dois catetos, como abordado na explicação anterior. Dessa forma, foi possível estabelecer a seguinte equação:

$$\tan 30 = \frac{x}{72} \tag{1}$$

A questão inicial nesse momento, estava à uma equação de ser solucionado, porém surgem muitos questionamentos no momento de se resolver equações como a apresentada na equação (1). Um dos motivos que valem a pena se destacar, é em relação à compreensão de que, nesse caso, a tangente de 30º assume um valor numérico, ou seja, essa expressão representa um número e não uma outra incógnita. Para facilitar esse pensamento, se torna importante conhecer a tabela dos ângulos notáveis. Sendo assim, o residente fez uma rápida abordagem sobre como construir tal tabela, na intenção de auxiliá-los em momentos futuros, visto que muitas questões em vestibulares e no próprio Enem podem ser solucionados apenas utilizando dados dessa tabela.

Com a tabela construída, bastou-se então identificar o valor corresponde à tangente de 30º e substituí-la na equação (1), obtendo a seguinte equação:

$$\frac{3}{3} = \frac{x}{72} \tag{2}$$

Finalizando a resolução, bastou-se isolar a incógnita x e dessa forma obteve-se o valor que corresponde à medida de x que coincide com a medida da altura do cilindro, ou seja, o cilindro possui $24\sqrt{3}$ cm de altura.

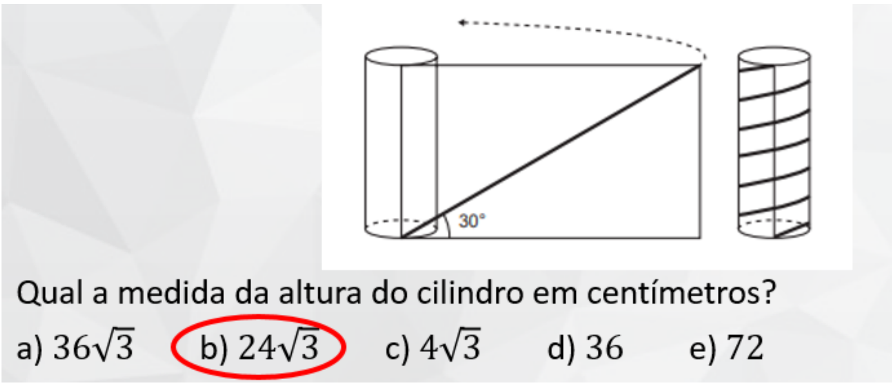


Figura 4: Solução da questão
Fonte: Do autor, 2021.

Após a apresentação da solução da questão, o residente verificou com os alunos se havia alguma dúvida em algum dos momentos da aula. Com uma resposta negativa dos alunos, a aula então se encerrou. Após os 30 minutos de aula ministrada, se tornou possível discutir sobre alguns pontos positivos e pontos à se melhorar, como será discutido na sequência.

3.2 Resultados

Ao fim da aula, foram observados prós e contras. Dentre os pontos positivos, vale pontuar o tempo de duração da aula. Por ser no formato *on-line* o tempo de duração foi menor do que se fosse presencialmente, contudo, o foco do aluno tende a ser maior, tendo em vista que é maçante e cansativo ficar em uma sala de aula por várias horas seguidas, assim como ficar à frente de um computador, dessa forma, com uma aula compacta e com duração menor tende à ser benéfica ao processo de ensino e aprendizagem. Um outro ponto que vale a discussão é em torno dos recursos tecnológicos. Essa ferramenta fornece um enorme auxílio, na medida em que é possível tornar a aula muito mais dinâmica, facilitando a visualização de conceitos, consequentemente instigando o pensamento e raciocínio visual, na qual, de acordo com Santos (2014), os alunos poderão ter uma percepção figurativa do que está sendo ensinado, atribuindo significados aos conceitos tidos como puramente abstratos.

Em relação aos pontos à se melhorar, pode-se mencionar a falta de um *feedback* de todos os alunos, sendo que nem todos se manifestam durante às aulas. Isso gera a incerteza de que se realmente todos os alunos conseguiram realmente acompanhar o desenvolvimento da aula e absorver ao menos uma fração do conteúdo abordado.

Refletindo agora sobre a participação dos alunos, inicialmente, era esperado que os alunos não demonstrassem tanto interesse pelo tema e consequentemente não participassem de maneira efetiva no desenvolvimento da aula, pelo fato do residente não ter conhecimento da turma. Contudo, os alunos participaram efetivamente da aula, o que pode ser considerado um resultado positivo.

De um modo geral, pode-se dizer que a grande maioria dos alunos tiveram de fato, a compreensão dos conceitos abordados, ressaltando que o principal objetivo da aula foi revisar os conceitos abordados, tendo como base para essa afirmação a participação e as respostas dos educandos nas perguntas investigativas feitas pelo residente.

4 Considerações finais

Sobre a apendizagem dos alunos, objetivo principal da atividade, pode-se pontuar que a aula contribuiu significamente para o aprendizado dos mesmos, visto que foi proposta uma atividade de revisão e os alunos puderam relembrar vários conceitos geométricos já vistos em outros momentos.

À respeito daregência de sala do residente, na condição de futuro docente, viabilizado pelo Programa de Residência Pedagógica, proporcionou a experiência em ministrar uma aula *on-line*, sendo esta, enriquecedora tanto para os alunos, quanto para o residente, que mesmo no atual cenário pandêmico pôde exercer a prática docente em um ambiente totalmente novo, que ao que tudo indica, poderá ser mais constante em nossas vidas à partir de agora.

Sendo assim, é possível concluir que essa experiência teve contribuição direta em meu processo de formação profissional, visto que a intenção das regências, tanto pelo RP quanto pela disciplina de Estágio, é de preparar o futuro professor para as mais possíveis adversidades que possam surgir no processo de ensino, e esse formato de regência permitiu ter uma noção de como é preparar e ministrar uma aula no modelo remoto, tornando ainda mais enriquecedor o período de regências.

Por fim, vale também mencionar que ainda é necessário aprimorar o uso das ferramentas tecnológicas voltadas para a educação, com a intenção de tornar as aulas o mais interativa possível, para chamar a atenção, e consequentemente a participação, do maior número de alunos possível.

Referências

[1] CELSO, A. B. P.; FERREIRA, F. N. Trigonometria no triângulo retângulo: uma abordagem prática para a construção de conceitos. Disponível em: `https://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/TRIGONOMETRIA-NO-TRI%c3%82NGULO-RET%c3%82NGULO-UMA-ABORDAGEM-PR%c3%81TICA-PARA-A-CONSTRU%c3%87%c3%830-DE-CONCEITOS.pdf`. Acesso em: 26 fev. 2021.

[2] CRUZ, A. M.; DALCIN, A. Uma abordagem didática para o teorema de Pitágoras. 2015. Disponível em: `https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134117/000983575.pdf?sequence=1`. Acesso em: 28 fev. 2021.

[3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos da MAtemática Elementar 9: Geometria Plana. 7. ed. São PAulo: Atual, 1993.

[4] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria. 2. ed. São Paulo: Atual editora, 1977.

[5] MALTA, D. C.; SZWARCWALD, C. L.; BARROS, M. B. A.; GOMES, C. S.; MACHADO, I. E.; SOUZA JÚNIOR, P. R. B.; *et al.* A pandemia da COVID-19 e as mudanças no estilo de vida dos brasileiros adultos: Um estudo transversal. Epidemiol Serv Saúde, 2020.

[6] SANTANA, E. P.; ALVES, E. A dificuldade de ensinar geometria. 2009. Disponível em: `https://administradores.com.br/artigos/a-dificuldade-de-ensinar-geometria`. Acesso em: 24 fev. 2021.

[7] SANTOS, A. H. dos. Um estudo epistemológico da visualização matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 2014. 98p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba.

[8] SAFETEC INFORMÁTICA. O que é o Google Meet e como essa ferramenta pode ajudar sua empresa à se comunicar melhor. 2020. Disponível em:`https://blog.safatec.com.br/comunicacao/o-que-e-google-meet/` Acesso em: 15 mar. 2021.

[9] SILVA, M. G. O ensino de Geometria no Ensino Médio: sequência didática como metodologia. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciência e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

[10] SOUZA, M. C. G. C de.; PHILIPPSEN, A. S. Conhecendo, demonstrando e aplicando o Teorema de Pitágoras. In.: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE volume 1. 2013.

[11] WAGNER, E. Teorema de Pitágoras e Áreas. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

OBSERVAÇÃO DE AULA DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA POR MEIO DA PLATAFORMA AULA PARANÁ: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA[1]

Camila Tabata Locatelli Dorne
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
Camilalocatelli91@gmail.com

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná

Resumo

Este trabalho apresenta um relato de uma aula de matemática disponível na plataforma *Youtube*[2], no canal Aula Paraná[3] para uma turma de sétimo ano, que compreende uma das atividades realizadas ao longo do segundo semestre de 2020, durante a participação no Programa Residência Pedagógica. Nessa aula a docente aborda o conteúdo medidas de circunferência por meio do uso de jogos e materiais manipuláveis e assim introduz a definição de "*pi*", para que posteriormente, o aluno saiba a origem do número quando for usá-lo. Pelo fato de ser uma aula remota assíncrona, não podemos relatar sobre o aproveitamento dos alunos com a mesma, mas pretendemos evidenciar os benefícios do uso de materiais manipuláveis em sala de aula. Em síntese, o docente assume o papel de mediador no encaminhamento dessa atividade, possibilitando ao aluno uma experiência concreta e lúdica com o conteúdo.

Palavras-chave: Material Manipulável. Jogos. Número "*pi*".

1 Introdução

A escolha da citada aula ocorreu pela sua dinamicidade, pois a ampla possibilidade de encontrar o valor de *"pi"* em diferentes tamanhos de circunferências, apresentada desta maneira, cativa os alunos a interagir e focar na aula, resultando em um aprendizado significativo e compreensível.

---

1 O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

2 YouTube é um site de compartilhamento de vídeos enviados pelos usuários através da internet.

3 O governo do Estado do Paraná desenvolveu o Aula Paraná- proposta de ensino não presencial no período de pandemia. Os estudantes da rede pública podem ter acesso aos conteúdos das aulas por meio de cinco ferramentas: três canais digitais e gratuitos de Tv aberta; canal do Youtube; salas virtuais do Google Classroom; Aplicativo Aula Paraná e atividades e materiais impressos para alunos sem condições de acesso as ferramentas supracitadas.

Com isso, pretendemos ilustrar a importância da utilização de metodologias diferenciadas no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Concordamos com Martinez (2011) que ser criativo no trabalho pedagógico do professor, se refere às formas de realização deste que representam algum tipo de novidade e resultam valiosas formas de aprendizagem e desenvolvimento do aluno.

Em seu artigo, Botas e Moreira (2013) afirmam que o material não determina sozinho, a aprendizagem, mas proporciona oportunidades de contato com materiais para despertar interesse e envolver o aluno em diversas situações de aprendizagem matemática.

Fiorentini e Miorim (1990) abordam que os alunos não entendem a matemática que é transmitida na escola, e o professor quando não consegue alcançar resultados satisfatórios para os alunos, frequentam cada vez mais encontros, conferências e cursos.

Afirmam ainda, os autores que os docentes sentem como se estivessem encontrado a “fórmula mágica” para resolver seus problemas em sala de aula, depositando toda sua confiança no material didático, justificando, na maioria das vezes, o uso por ser algo motivador aos alunos Fiorentini e Miorim (1990).

Já para o caso de associar a aula de matemática a algum jogo, Silva e Kodama (p. 4, 2004) relatam que “para um trabalho sistemático com jogos é necessário que os mesmos sejam escolhidos e trabalhados com o intuito de fazer o aluno ultrapassar a fase da mera tentativa e erro, ou de jogar pela diversão apenas [...]”. Concordamos com o posicionamento dos autores, pois não há necessidade de explorar um jogo ao aluno sem a intenção de transformá-lo em aprendizagem.

2 Metodologia

A partir da realização de nossas atividades no programa Residência Pedagógica desenvolvemos um estudo bibliográfico, por meio da exploração de livros e artigos científicos.

A observação ocorreu, de maneira online, por meio do site Aula Paraná que possui as aulas hospedadas na plataforma *Youtube*, a aula em questão é a 86ª aula de Matemática do Sétimo ano, que tinha como título “O número “*pi*”- Parte 1”.

A atividade consistiu em assistir a aula determinada e produzir um relatório sobre alguns aspectos dessa mesma aula, bem como, as atividades realizadas, a metodologia empregada, a relação professor-aluno, bem como tecermos uma reflexão teórica sobre a aula de modo geral.

3 Resultados e Discussão

A professora iniciou relembrando sobre algumas atividades que os alunos teriam que realizar, retomou brevemente o conteúdo anterior e apresentou o que ocorreria na aula, os alunos iriam conhecer o "*pi*", calcular o comprimento e perímetro de uma circunferência, e por fim, calcular a razão entre diâmetro e comprimento da circunferência.

A docente comenta com os alunos sobre os materiais que foram solicitados na aula anterior: uma garrafa pet, uma lata de refrigerante, um copo descartável, uma régua ou trena e um barbante.

A professora orientou os alunos a acessarem ao *Matific*[4], nesse momento os alunos deveriam participar de um jogo sobre círculo e circunferência, ela deixou apenas dois minutos destinados a isso, porém ela já apresentou a resposta rapidamente e pelo fato de ser um prazo curto, acreditamos que não houve tempo para a reflexão sobre o jogo.

No decorrer da aula, pontuamos que ela faz uso de slide interativo, porém os slides eram passados de modo muito rápido, o que prejudica um melhor proveito deste recurso.

Para o desenvolvimento dessa aula a professora também fez uso de uma experiência, que consistiu em realizar medidas de circunferências com um barbante, régua e materiais com base circular.

A dinâmica da experiência aconteceu do seguinte modo, ela ensinou como deveria ser realizada a medida com um barbante para determinar a circunferência, e medir o comprimento do barbante posteriormente, contudo não disponibilizou tempo para o aluno fazer em casa, considera-se a atitude inadequada, pelo fato de ser pedido material aos mesmos e depois não proporcionar que eles realizassem a atividade.

Com o auxílio da régua/trena a docente ensina como medir o diâmetro e o define como segmento, depois o chama de lado, isso pode gerar confusão ao aluno, deve-se usar somente uma nomenclatura. Logo após ela apresenta o quadro para ser preenchido conforme a Figura 1 abaixo:

[4] Trata-se de um site que disponibiliza jogos que auxiliam no processo de aprendizagem de matemática de uma forma lúdica.

Experiência

Anote no quadro a seguir as medidas obtidas nas medições que você fez:

Desenho do objeto	Comprimento da circunferência (C)	Diâmetro (d)	Raio (r)	

Figura 1 – Quadro de Medidas.

Fonte: Paraná, 2020.

A medida que a professora da turma vai lendo as informações registradas no quadro, ela vai retomando o conceito de cada coluna e define raio como metade do diâmetro, ou ainda diâmetro como duas vezes o raio e explica que na última coluna que está em branco o aluno deve realizar a divisão do comprimento (C) pelo diâmetro (d) = C/d para observar posteriormente logo é disponibilizado cinco minutos para os alunos realizarem o preenchimento da mesma, com um som musical de fundo calmo.

Dando continuidade a aula, é apresentado aos alunos um quadro preenchido, reforçando a explicação de cada coluna e definindo a divisão feita anteriormente como razão, assim foi apresentada outro quadro com os elementos: apontador e tampo de mesa, que visivelmente são de tamanhos diferentes, entretanto a docente enfatiza o valor das razões de ambos que são muito próximos, também foram utilizados outros elementos para deixar evidente que as razões sempre se aproximam de 3,14.

Na sequência a docente realiza dois questionamentos aos alunos, o primeiro é se as medidas foram iguais em todas as colunas, e o segundo é se há alguma coluna com valores parecidos. Em seguida, ela define como "*pi*", a razão entre $\frac{COMPRIMENTO}{DIÂMETRO}$, e mostra que esta razão sempre se aproxima de um valor, denotado por ela como 3,14, e aponta que é um número irracional extenso, e chega então que $\frac{C}{d} = \pi$.

Para definir o comprimento de circunferência, a professora conclui que se dá pelas fórmulas $C = \pi . d$ ou $C = 2\pi r$, ilustrando melhor a situação, a professora utilizou as figuras 2 e 3 abaixo.

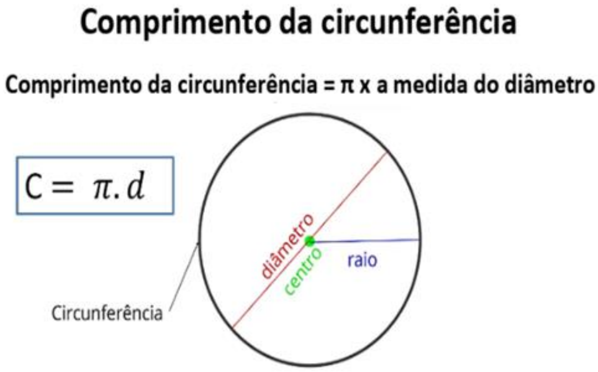


Figura 2 – Comprimento da circunferência.

Fonte: Paraná, 2020.

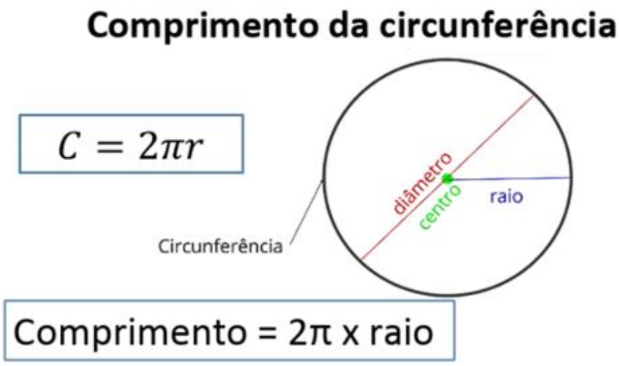


Figura 3 – Comprimento da circunferência.

Fonte: Paraná, 2020

A docente traz como primeira atividade da aula um exercício dinâmico envolvendo personagens, presumimos que isso faz com que o aluno se identifique melhor com o mesmo, ela lê o exercício e disponibiliza cinco minutos para os alunos resolverem, com a mesma música anterior, após o término do tempo estabelecido, ela retoma, relê e apresenta a resolução, explicando cada passo e envolvendo os alunos com perguntas direcionadas aos mesmos.

É apresentado o segundo exercício, ocorre à leitura de modo pausado e foi disponibilizado cinco minutos para resolução, com a mesma música, quando retorna, ela leva em conta as partes mais importantes da questão e realiza a resolução passo a passo com calma e bem explicado, enfatizando a importância do enunciado para realizar a substituição de "*pi*" por um valor numérico e ainda relembra como deve ser feita a subtração com vírgula.

No terceiro e último exercício, a docente traz um exemplo com figura para ilustrar o que se trata um velocípede, ela realiza a leitura com ênfase nas partes necessárias e deixa seis minutos para resolução da atividade com a mesma trilha sonora, após o tempo estimado, ela lê novamente a questão, mostra a solução e explica cada passo da mesma.

Na finalização da aula foi retomado o que foi visto, dedução do número "*pi*", e a educadora sinaliza que haverá continuação do mesmo conteúdo na próxima aula.

Os exercícios foram importantes para fixação do conteúdo, com tempo considerável para resolução e a trilha sonora não atrapalhava, pois, a música era calma.

A aula observada nos possibilitou grandes ideias para a exploração do conteúdo em questão, pois é interessante trabalhar com os alunos o conteúdo por meio de jogos e com o uso de materiais manipuláveis, porém em uma aula presencial, o professor deve realizar algumas adequações, no caso de empregar a metodologia jogos, uma vez que os alunos terão mais dúvidas e curiosidades, deve ser, portanto uma atividade bem encaminhada e programada.

Como citado anteriormente, há grandes vantagens em trabalhar com a criatividade ativa, pois segundo Arruda (2014, p.75) apresentar uma aula de forma criativa, não se baseia apenas em algo "diferente" ou novo, é necessário que essa prática favoreça a aprendizagem e ofereça maiores oportunidades ao estudante.

4 Considerações Finais

O relato apresentado permitiu abranger e expandir a visão sobre o uso de materiais manipuláveis e jogos em sala de aula, conseguimos ter uma perspectiva sobre quais aspectos precisariam ser revistos, objetivando a exploração do conteúdo com os alunos, não especificamente sobre o número "*pi*", mas os diversos conteúdos que possam envolver algo diferenciado para cativar os estudantes.

Possibilitou-nos ainda, enxergar que não basta modificar a aula tradicional, é necessário que em um ambiente criativo seja efetivado, e haja a associação do "novo" com a matemática em questão.

Em linhas gerais, a experiência vivenciada nessa atividade foi muito significativa em nosso processo formativo, uma vez que conseguimos visualizar como o processo ensino e aprendizagem da matemática estão acontecendo neste cenário de crise devido à pandemia do COVID-19.

Referências

ARRUDA, Tatiana Santos. **A criatividade no trabalho pedagógico do Professor e o movimento em sua subjetividade**. 2014. 269f. Tese (Doutorado em Educação)—Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

AULA PARANÁ. Disponível em: http://www.aulaparana.pr.gov.br/educacao_basica#., acesso em 18 nov. 2020.

BOTAS, Dilaila; MOREIRA, Darlinda - A utilização dos materiais didáticos nas aulas de matemática: um estudo no 1º Ciclo. "Revista Portuguesa de Educação". ISSN 0871-9187. Vol. 26, Nº 1 (2013), p. 253-286.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

MARTÍNEZ, Albertina Mitjáns. **A criatividade como princípio funcional da aula: limites e possibilidades**. 2011. p. 115-143.

SILVA, Aparecida Francisco; KODAMA, Helia Matiko Yano. **Jogos no Ensino da Matemática**. 2004. Trabalho financiado pela Fundunesp – Fundação para o desenvolvimento da UNESP- São José do Rio Preto, São Paulo, 2004.

DIFICULDADES NA CRIAÇÃO DE VÍDEOS PARA O PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA[1]

Carlos Henrique Smek
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
chsmek@yahoo.com.br

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
loreci@utfpr.edu.br

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
vanessalargo@utfpr.edu.br

Resumo

Esse relato visa elencar as principais dificuldades na criação de vídeos para a modalidade de ensino remoto. As criações dos vídeos fazem parte de um projeto de uma escola de Ensino Fundamental Séries Finais, da cidade de Toledo, Paraná, em conjunto com a UTFPR. A proposta da criação dos vídeos era de que auxiliassem na aprendizagem dos alunos da educação básica. Os vídeos foram divididos em dois, um contendo explicação do conteúdo e exemplos práticos, atividades, etc. e outro contendo algumas curiosidades históricas sobre o conteúdo de volume de prismas e cilindros. São citados no relato, dificuldades com áudio, ambiente, luz e sombra, organização do vídeo, entre outros pontos e papel dos professores na criação dos vídeos e apontamentos para a melhora dos mesmos.

Palavras-chave: Poliedros. Cilindros. Produção. Ensino Remoto

1 Introdução

A pandemia do Covid-19 se alastrou e para que os cursos das universidades não fossem interrompidos, o modelo de ensino teve que ser adaptado. Com isso, a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, a UTFPR, apostou no ensino com aulas síncronas e assíncronas. Os professores regentes das turmas presenciais tiveram que se adaptar à nova modalidade, assim como seus alunos.

Como forma de se adaptar, professores a alunos tiveram que aprender a utilizar plataformas de videoconferência, como exemplo o Google Meet e o Zoom. Com a utilização na plataforma Google Meet para as aulas síncronas referentes ao Estágio Supervisionado

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

da Educação Básica IV e nas aulas do professor preceptor referentes as aulas Paraná, problemas como conexões de internet, problemas com áudio e vídeos eram recorrentes, entre professores e alunos.

Este relato tem por objetivo expor as dificuldades em se gravar vídeos a serem disponibilizados na rede de internet para que todos os alunos tenham acesso, no curso de Licenciatura em Matemática, da UTFPR.

2 Metodologia

Foi sugerido pela professora regente da turma e pelo professor preceptor, que gravássemos vídeos com duração máxima de quinze minutos contendo uma parte teórica do tema escolhido pelo acadêmico e outro contando alguma curiosidade ou fato histórico, também relacionado ao tema escolhido.

Foram estipulados que assistíssemos dois vídeos para cada nível de ensino, entre o Ensino Fundamental Séries Finais e Ensino Médio, estes disponíveis na plataforma de vídeos Youtube no canal Aulas Paraná. Essas aulas funcionavam como espécie de norte para as gravações, a fim de observar como eram as aulas gravadas e como se encaixavam exemplos, possíveis macetes, atividades, história a respeito dos temas, etc.

Os professores, regente e preceptor, junto com os acadêmicos, conversaram sobre a possibilidade de criar os vídeos de acordo com os temas que seriam trabalhados no mesmo período que o cronograma inicial estipulado sobre as Aulas Paraná, que trabalharia com o conteúdo de volume de prismas e cilindros.

Após assistir as Aulas Paraná, resolvemos gravar os vídeos para que fossem disponibilizados para os alunos do professor preceptor com o intuito de ajudar na assimilação do conteúdo em questão.

Esses vídeos seriam disponibilizados na plataforma de vídeos Youtube, após uma correção e aprovação do conteúdo dos professores responsáveis.

No primeiro momento foi pensado sobre o espaço físico para a criação dos vídeos, o quarto do acadêmico.

Nesse momento várias questões impactam para um vídeo melhor, iluminação, qualidade da câmera de filmagem, qualidade de som, sombras, objetos utilizados para escrita e objetos diversos utilizados para a didática do conteúdo.

3 Resultados e Discussão

Por utilizar seu próprio smartphone na gravação dos vídeos e captação dos áudios, tentou-se utilizar a luz ambiente, porém ficou escuro, não contribuindo para um vídeo com qualidade considerável.

Após vários ajustes, verificou com a melhor forma de se trabalhar, seria utilizando a próprio sistema de lanterna ou flash da câmera, a fim de criar uma iluminação enquanto o vídeo estivesse sendo gravado.

A qualidade de câmera foi um ponto satisfatório, assim como a iluminação, porém os objetos utilizados para a escrita dificultaram o entendimento do conteúdo. Na primeira tentativa, demandou de muito tempo escrevendo e desenhando informações que poderiam ser dadas de antemão por figuras e tabelas, por exemplo, e também outras informações que pudessem ser dadas previamente sem explicação do acadêmico. Na busca por esmiuçar o conteúdo, o foco mais direto das aulas remotas se perdeu. As atividades, a contextualização, ficaram sem espaço no vídeo.

Um problema encontrado também, foi na gravação do áudio. Os primeiros minutos continham um ruído que atrapalhava a aprendizagem e impossibilitando ouvir de forma clara.

Já no vídeo relacionado as curiosidades, tentamos trazer algumas contextualizações históricas, mas sem usar a didática, parecendo um telejornal, onde aparecia apenas o rosto do aluno comentando sobre alguns fatos.

Após a entrega desses vídeos a professora regente, alguns apontamentos foram levantados. A primeiro grande apontamento foi a gravação do áudio, o qual foi mencionado acima, fazendo que fosse necessário ao mínimo gravar tudo novamente.

Outro ponto que precisaria de ajustes é a utilização de materiais prontos, como trazer desenhos já coloridos e completos, trazer os exemplos e exercícios prontos também e focar nas resoluções dos mesmos. Assim como as Aulas Paraná, o enfoque dessas aulas é a agilidade e o não desgaste físico e mental dos alunos e também dos professores.

Depois dos apontamentos dos professores e mais alguns ajustes nos áudios, câmera, parte das sombras e dos desenhos impressos que antes estava desenhando a mão e perdendo o tempo como mencionado pela professora, foram realizados ajustes colocando os desenhos coloridos para ajudar ainda mais na assimilação do conteúdo.

Com o vídeo final gravado, elencamos o conceito de volume, prismas, cilindros e qual a fórmula para cálculo de cada. Outro ponto citado foram os tipos de prismas e cilindros. Todos esses tópicos estavam caracterizados pelos desenhos impressos coloridos e com tamanho padrão.

No que diz respeito ao volume, tentamos trabalhar primeiramente a parte da área, conceito que serve de pré-requisito para o volume, visto que o volume dos poliedros ou corpos redondos são calculados a partir de sua área e depois são multiplicados pela altura do respectivo objeto.

Para exemplificar o trabalho de volume em poliedros e cilindros, foram utilizados dois objetos, um frasco de perfume (figura 1) e uma caixa de gelatina (figura 2), representando o cilindro e os poliedros respectivamente.

Figura 1: Frasco de perfume

Fonte: dos autores

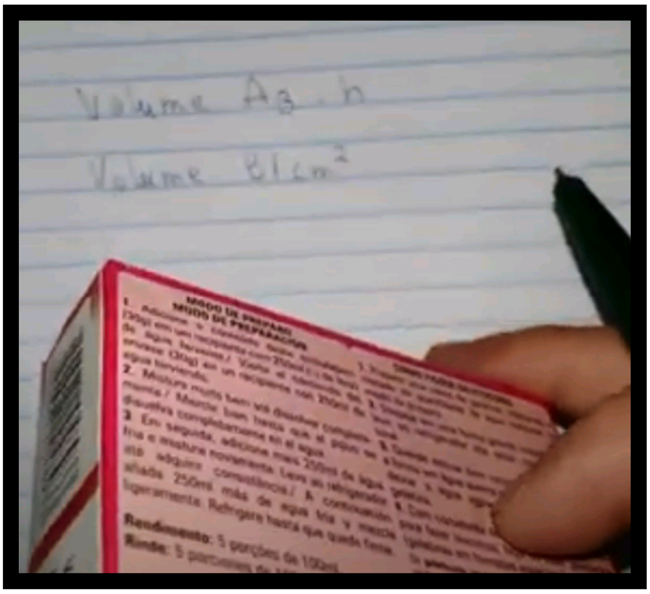


Figura 2: Caixa de gelatina

Fonte: dos autores

No segundo vídeo, trouxemos algumas curiosidades relacionados aos volumes dos prismas e cilindros. Nessas curiosidades, apresentamos algo sobre o povo egípcio, porém um apontamento feito pela professora regente é que aparecia apenas o rosto e não mostrava as curiosidades nem suas aplicações.

Após esses apontamentos, tentamos trazer algo relacionado a engenharia, mostrando as principais diferenças entre os pilares, mostrando os pontos positivos e negativos de cada um, tentando trazer as curiosidades em forma de dobraduras, e também trazer em forma de dobraduras novamente curiosidades sobre as pirâmides.

4 Considerações Finais

A produção de vídeo se fez uma ferramenta importante para que a educação não parasse, mas precisou ser ajustada a época em que vivemos. Várias dificuldades foram descobertas pelo fato de a maioria dos alunos e professores nunca ou raramente terem vivenciado o modo de aulas remotas.

A preparação do ambiente se mostrou um ponto crucial, pois qualquer fator externo, como ruídos, atrapalha muito o andamento da gravação. Outro ponto a ser destacado é a interferência de pessoas, circulando no ambiente em que as gravações estão sendo feitas ou entrando em contato em alguns instantes.

Os professores tiveram papéis essenciais para que os vídeos tivessem uma melhora em todos os aspectos, sejam técnicos ou relacionados aos conteúdos trabalhados. O professor preceptor elencou aspectos voltados a didática, como domínio de conteúdo, firmeza na fala, clareza na fala e na explicação, etc.

A professora regente da disciplina auxiliou a melhora da parte didática juntamente com o preceptor, porém a maior ajuda foi quando elencou exatamente quais pontos nos vídeos eram falhos e quais pontos precisavam de pequenos ajustes. Pontualmente, citou a parte das figuras, de preferência, que fossem coloridas e que não construísse no momento em que estivesse explicando, a não ser que fosse para auxiliar na explicação de alguma atividade ou algo do tipo.

Mesmo depois de várias tentativas de entregar um vídeo que fosse satisfatório na parte educacional, muitos erros ainda são notados. O fato de não ter um suporte físico profissional, uma luz específica para o ambiente, um espaço livre de ruídos e talvez um quadro interativo, fazem a tarefa um pouco complicado.

O fato de quase não usar cortes nas gravações, fazia que os erros técnicos fossem observados apenas quando o projeto estivesse concluído. Portanto, para facilitar futuras gravações, o uso de cortes, várias tomadas dos vídeos, podem facilitar o vídeo final.

A dificuldade maior se deu no vídeo relacionado as curiosidades, pois a uma grande dificuldade em pesquisá-las, organizá-las. Na parte da pesquisa, precisa se pesquisar algo que venha a acrescentar o conteúdo que está sendo trabalhado, e que de alguma forma faça sentido. Na parte de organizar as informações, vem o trabalho mais árduo, pois precisa fazer sentido, uma sequência lógica precisa ser criada. O uso de materiais manipuláveis facilita a processo de ensino e aprendizagem.

Concluímos que os professores, na modalidade de ensino remoto, por meio dos apontamentos precisos, se tornam essenciais no processo de ensino e aprendizagem, pois também precisam se adaptar as novas tendências e metodologias e ao mesmo tempo auxiliar os acadêmicos, estudar meios de facilitar o ensino e usar ferramentas digitais.

REFERÊNCIAS

APPENZELLER, Simone et al. **Novos Tempos, Novos Desafios: Estratégias para Equidade de Acesso ao Ensino Remoto Emergencial**. Revista Brasileira de Educação Médica, [S. l.], 2 out. 2020.

BEHAR, Patricia Alejandra. **O Ensino Remoto Emergencial e a Educação a Distância.** In: Jornal da Universidade. [S. l.], 6 jul. 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia/. Acesso em: 1 nov. 2020.

JESUS, Adriana Garabini de. **A motivação para aprender matemática no 9°ano do ensino fundamental: um estudo do potencial dos materiais manipulativos e da construção de objetos na aprendizagem da área de polígonos e volume de prismas.** 2011. 314 f. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Ufop, Ouro Preto, 2011.

VENDRAME , GENI VIANA DO CARMO. **ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS.** 2014. Dissertação (Mestre em matemática) - Universidade Estadual de Maringá, [S. l.], 2014.

UM RELATO DE EXPERIÊNCIA COM O PLANEJAMENTO DE VIDEOAULAS E O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM

Caroline Cristina de Souza
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
carolineeee.souzaaaa@gmail.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

O objetivo deste trabalho foi relatar minha experiência com o planejamento de videoaulas com o conteúdo de função afim voltado para o primeiro ano do Ensino Médio, através do Programa Residência Pedagógica[1] juntamente com o Estágio Supervisionado na Educação Básica 3 do sétimo período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Câmpus Toledo (UTFPR-TD). Essa experiência ocorreu de forma remota com o auxílio dos orientadores do projeto, professor orientador e professor preceptor. O relato apresenta como ocorreu o planejamento das videoaulas, as quais foram planejadas em dupla, minhas visões sobre as contribuições e também as dificuldades enfrentadas ao longo dessa caminhada.

Palavras-chave: Videoaulas. Função Afim. Relato de Experiência.

1 Introdução

O presente trabalho é resultado de uma experiência com o Programa Residência Pedagógica juntamente com a disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 3 do sétimo período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Campus Toledo (UTFPR-TD).

Este relato apresenta detalhes de como ocorreu o planejamento de videoaulas com o conteúdo de função afim voltadas para o 1º ano do Ensino Médio tendo como ponto de partida questões do ENEM.

Além disso, traz algumas considerações sobre as dificuldades e contribuições que essa experiência pode proporcionar e as considerações.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

2 Relato de Experiência

Devido ao isolamento social que vivemos meses atrás como forma de proteção por conta da COVID-19, as aulas passaram a ser de maneira remota. Por este motivo, os professores precisaram se reinventar nesta nova maneira de trabalhar. Com o Estágio e o Residência Pedagógica pudemos ter a experiência de elaborar videoaulas e também ministrar aulas no ensino remoto, contribuindo para nossa formação e carreira como futuros professores.

Durante o projeto, foi preciso observar, elaborar, gravar e ministrar aulas, sempre de maneira online. Acredito que a parte mais intensa e difícil dessa caminhada foi a elaboração das videoaulas. Para essas elaborações, os residentes foram divididos em duplas, sendo cada dupla responsável por um conteúdo sugerido pelo professor orientador, no meu caso e de minha dupla, o conteúdo foi o de função afim direcionado para o 1º ano do Ensino Médio.

Para planejar as aulas nós nos reuníamos online via *skype*[2] para trocarmos ideias. Iniciamos procurando diversos livros do 1º ano de diferentes autores e definimos uma sequência de conteúdo dentro do conteúdo de função afim. Como sugerido pelo professor orientador, era necessário planejar as aulas partindo de uma questão do ENEM que abordasse o conteúdo, sem necessariamente utilizar a questão em si. Sendo assim, iniciamos nossos planos de aula.

Na primeira aula, decidimos trabalhar o conteúdo de plano cartesiano, para que os alunos lembrassem o que são eixos, seus nomes e também como assinalar pontos no plano, isso foi feito através do jogo batalha naval. Pois,

> "é importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação" (BRASIL, 1997 apud SILVA; ROMÃO, 2016)

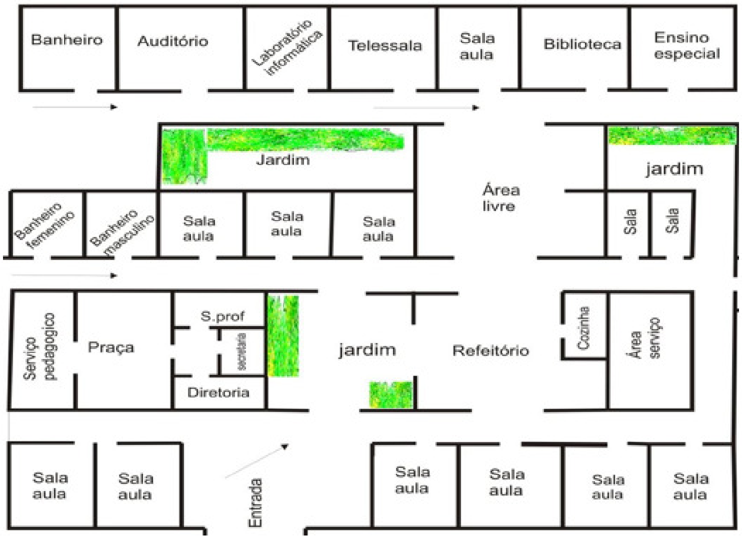
Em seguida, trouxemos o plano cartesiano plotado em um mapa de um colégio juntamente com uma questão para que os alunos resolvessem. (Figura 1 e 2)

---

[2] O **Skype** é um software que foi desenvolvido por Niklas Zennstrom e Janus Friis, mesmo criadores do site de compartilhamento de música pela internet Kazaa. Criada no início de 2003, a ferramenta permite que usuários da internet façam chamadas de voz e vídeos para qualquer lugar do mundo usando o computador.

Figura 1: Questão 1

Maria é nova aluna no colégio em que estuda e para não se perder pelos corredores, ela se localiza através do mapa do colégio. Ela gostaria de falar com seu professor de matemática que se encontra na sala dos professores. Qual a coordenada que Maria precisa ir para falar com seu professor?



Fonte: Das Autoras.

Figura 2: Mapa do Colégio.

Fonte: Das Autoras.

Um dos pontos mais difíceis do planejamento, foi pensar que os alunos não estariam ali para responder as questões propostas, então tínhamos que sempre pensar em supostas respostas que eles poderiam dar e também dúvidas.

A segunda aula foi iniciada com uma questão do ENEM, (Figura 3) com o objetivo de introduzir o conteúdo de função afim de uma forma mais investigativa. Nessa perspectiva,

> o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição. No processo de ensinar e de aprender ideias, propriedade e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (ROMANATTO, 2012, p. 302).

Figura 3: Questão ENEM

Questão 162

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

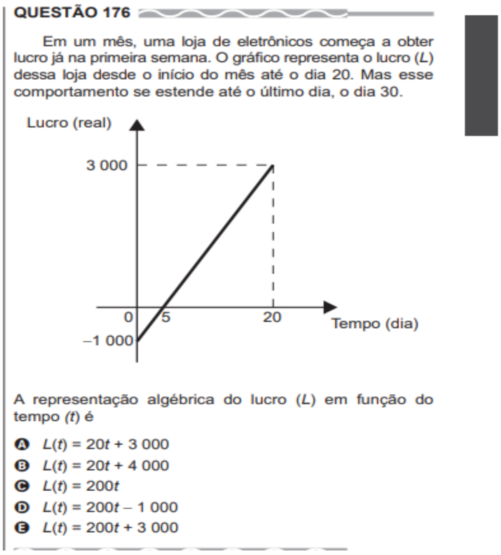
A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam *x* horas extras nesse período é

Fonte: ENEM (2010)

Através dessa questão, foi trabalhado na segunda e terceira aulas algumas características da função afim, os diferentes tipos de função afim, e seu comportamento gráfico (para isso utilizamos do *software geogebra*[3]). Na última aula, trouxemos duas questões do ENEM (Figura 4 e 5), uma para análise do gráfico e uma para construção do gráfico, para fixar o conteúdo.

[3] GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo numa aplicação fácil de utilizar.

Figura 4: Segunda Questão ENEM


QUESTÃO 176

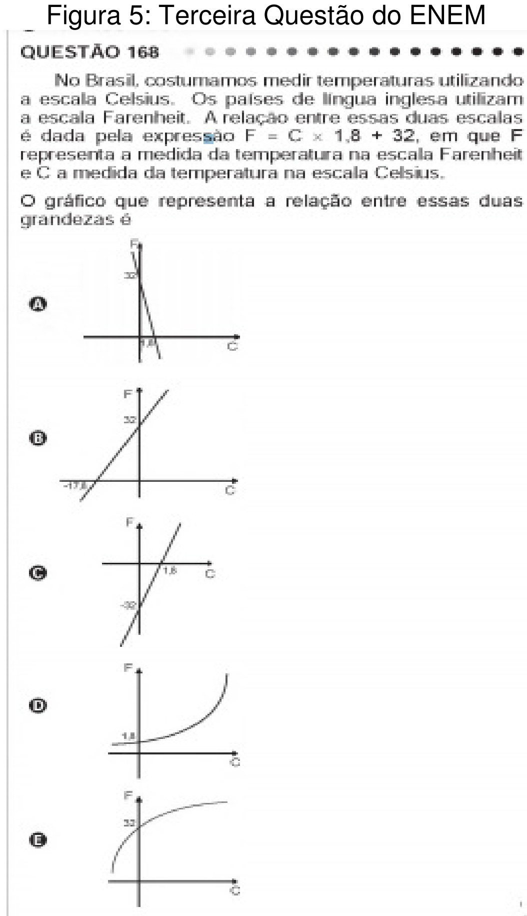
Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

Ⓐ $L(t) = 20t + 3\,000$
Ⓑ $L(t) = 20t + 4\,000$
Ⓒ $L(t) = 200t$
Ⓓ $L(t) = 200t - 1\,000$
Ⓔ $L(t) = 200t + 3\,000$

Fonte: ENEM (2017)

Figura 5: Terceira Questão do ENEM


QUESTÃO 168

No Brasil, costumamos medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Farenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão $F = C \times 1{,}8 + 32$, em que F representa a medida da temperatura na escala Farenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.

O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é

Fonte: ENEM (2011)

Acreditamos que com essas aulas os alunos teriam um norte para estudar para o ENEM, pois pegamos tipos de questões desse conteúdo, que costumam aparecer nessas provas e também reforçar esse conteúdo que é de extrema importância e muito visto no Ensino Médio.

Em relação a contribuição para a nossa formação, foi de suma importância, pois planejar aulas online não estavam nos nossos planos, mas pode ser que ocorram muito daqui pra frente e agora podemos dizer que temos alguma experiência para isso, estamos “inicialmente” preparados para isso.

3 Considerações Finais

Planejar videoaulas foi de extrema importância para nossa carreira, esse é um novo meio para dar aulas nos dias de hoje e ter o mínimo de experiência no assunto já faz toda a diferença. Aprendemos a planejar, a gravar e tivemos a experiência de reger uma aula online com os alunos, o que foi bem diferente, mas muito importante. Acreditamos que os alunos tem muito o que aproveitar com videoaulas, pois elas ficam disponíveis em plataformas como o *YOUTUBE*[4], em que o aluno pode acessar onde e quando quiser, assistir e pausar quantas vezes quiser, o que não pode ser feito em sala de aula. Porém, espero que esse seja mais um meio para reforçar os conhecimentos ao invés de aprender, pois aprender na sala de aula presencialmente é muito melhor.

REFERÊNCIAS

DA SILVA, Daniel Fernandes; ROMÃO, Estaner Claro. A importância dos jogos matemáticos como recurso metodológico de ensino. **Revista ESPACIOS| Vol. 37 (Nº 02) Año 2016**, 2016.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012.

[4] A palavra “youtube” foi feita a partir de dois termos da língua inglesa: “you”, que significa “você” e “tube”, que provêm de uma gíria que muito se aproxima de “televisão”. Em outras palavras seria a “televisão feita por você”. Essa é justamente a principal função do fenômeno da internet: permitir que os usuários carreguem, assistam e compartilhem vídeos em formato digital.

OBSERVAÇÕES DE AULAS DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO DISPONIBILIZADAS NO CANAL "AULA PARANÁ": UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Eduarda Debortoli da Silva
UTFPR - TD
eduardadebortoli22@gmail.com

Carla Ramos de Paula
UTFPR - TD

Loreci Zanardini
UTFPR - TD

Vanessa Largo Andrade
UTFPR - TD

Resumo[1]

O presente relato visa apresentar uma descrição a respeito de uma experiência de observações de aulas, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, disponibilizadas no Youtube[2], especificamente no canal "Aula Paraná", onde observamos diferentes professores apresentarem suas práticas docentes, com metodologias e recursos didáticos distintos. As atividades pontuadas no trabalho são oriundas da participação no Programa Residência Pedagógica e na disciplina de Estágio Supervisionado que ocorreram em forma de parceria. Foi realizado um estudo bibliográfico a partir da exploração de livros e artigos científicos, que vão de Ensino Remoto à metodologias diferenciadas. Em síntese, as vivências compartilhadas foram de extrema importância para nossa formação como docentes, onde podemos adquirir conhecimentos observando professores instruídos praticando à docência.

Palavras-chave: Ensino Remoto. Metodologia. Professor. Teoria-Prática.

1 Introdução

No ano de 2020 ocorreu a maior pandemia dos últimos tempos, originada devido a um vírus letal que se espalhou rapidamente pelo mundo todo, denominado COVID-19, popularmente conhecido como Coronavírus. Com a necessidade do distanciamento social para diminuir a transmissão deste, foi necessário uma nova forma de convívio social. No campo educacional aconteceu do mesmo modo, Martins e Almeida (2020) relatam que as instituições educacionais precisaram suspender as aulas presenciais e grande parte das instituições de ensino deu continuidade aos processos educativos por meio do ensino remoto ou não presencial.

Moreira e Schlemmer (2020) definem Ensino Remoto ou Aula Remota como uma modalidade de ensino ou aula que pressupõe o distanciamento geográfico de professores e

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.
[2] Plataforma de compartilhamento de vídeos.

estudantes e vem sendo adotada nos diferentes níveis de ensino, por instituições educacionais no mundo todo. Dessa forma, algumas universidades que ofertam cursos de licenciaturas optaram por ofertar as atividades de estágio, com algumas adequações que julgaram necessárias, trazendo uma nova forma de ver o mundo a sala de aula.

Segundo Burssoi (2008), o objetivo central do estágio é a aproximação da realidade escolar, para que o aluno possa perceber os desafios que a carreira lhe oferecerá, refletindo sobre a profissão que exercerá, integrando - o saber fazer – obtendo (in)formações e trocas de experiências. Dessa maneira, o programa de Residência Pedagógica instituído pela CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior é uma das ações que integram a Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade de seu curso.

As atividades do primeiro módulo do programa de Residência Pedagógica se sintetizaram em observações, realizadas tanto pelo site Youtube, como pela plataforma Google Meet[3]. Para realizar as observações das aulas hospedadas no Youtube disponibilizadas no canal "Aula Paraná"[4], foi solicitado a nós, alunos da disciplina de Estágio, que assistíssemos 8 aulas direcionadas ao Ensino Fundamental, e 7 aulas do Ensino Médio.

Este formato de aula pode ser dito como inovador no meio educacional, uma vez que novas metodologias educacionais foram inseridas no processo ensino-aprendizagem, o que nos possibilitou observar e compreender diferentes recursos pedagógicos utilizados pelos docentes. Sendo assim, esta foi a razão da escolha da experiência a ser relatada no presente trabalho, a qual será dada pelas observações das aulas presentes no Youtube destinadas aos alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

O objetivo deste relato consiste em compartilhar uma experiência vivida por uma estagiária do curso de licenciatura em matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR e participante do Programa Residência Pedagógica da CAPES, a fim de dividir aprendizados obtidos durante nosso processo formativo como docentes.

[3] Ferramenta de cunho corporativo, ou seja, foi pensada e desenvolvida especificamente para a realização de reuniões em vídeo a distância, com alta qualidade de áudio e vídeo, comportando um grande número de participantes online ao mesmo tempo.

[4] No período da pandemia de Covid-19, os estudantes da rede pública podem assistir às aulas por meio de um aplicativo e em canais de TV vinculados à RIC, afiliada da Rede Record no Paraná.

2 Metodologia

No ano de 2020 os alunos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Toledo, participantes do programa de Residência Pedagógica, financiado pela CAPES, realizaram várias atividades de modo remoto de maneira vinculada ao Estágio Supervisionado, como observações de aulas do Ensino Fundamental e Médio, elaboração de planos de aula simulada, dentre outras. Como dito anteriormente, a experiência escolhida para ser relatada refere-se a observação de aulas da disciplina de matemática no site Youtube no canal “Aula Paraná”, tanto de Ensino Fundamental como aulas de Ensino Médio.

Por consequência disto, desenvolvemos durante o caminho percorrido na realização das atividades do Programa de Residência Pedagógica e Estágio Supervisionado, um estudo bibliográfico a partir da exploração de livros e artigos científicos sobre Ensino Remoto, metodologias diferenciadas, dentre outros assuntos presentes no artigo. De um universo de 15 aulas observadas, foi escolhido especificamente 3 destas para relatarmos brevemente sobre, pois entre vários recursos diferenciados utilizados em diferentes aulas, estes foram os que mais nos chamaram a atenção a ponto de nos inspirar abrindo nossas mentes como futuros docentes.

3 Resultados e Discussão

Cada aula de matemática possui em média 45 minutos, onde cada professor ministrante desta poderia realizar a aula da forma que desejasse, alguns explicavam os conteúdos e no final da aula aplicavam alguns exercícios para fixação, outros começavam diretamente com questões para ensiná-los. Moreira e Schlemmer (2020) afirmam que a educação mediada pelo digital faz parte de um novo ecossistema educativo que muito tem contribuído para a reconceitualização dos processos de ensino e de aprendizagem.

Segundo Xavier (2020) para reestruturar o ensino nesse contexto de pandemia, docentes e discentes recorreram a métodos diversificados, sendo alguns diferentes daqueles utilizados no ensino presencial. A busca por ferramentas digitais, como, por exemplo, sites, aplicativos, videoaulas entre outros, foram fundamentais nesse novo contexto, as aulas disponibilizadas no Youtube não são diferentes.

Além das ferramentas digitais, cada docente ministrou sua aula com diferentes metodologias, isto é um aspecto que nos chama a atenção, dessa maneira, uma das aulas[5] destinadas ao Ensino Fundamental, especificamente ao oitavo ano, era sobre o conteúdo de

[5] https://www.youtube.com/watch?v=w_6f9M1cIE4&feature=youtu.be

Volume e Capacidade, dentro deste o docente introduz o assunto de "Equivalência entre o decímetro cúbico (dm^3) e o litro (L)". Para a realização deste, o docente trouxe uma garrafa plástica marcada na quantidade de 50ml e 1 litro, esta estava cheia de água até a marcação de 1 litro. Além desta, é exposto um objeto geométrico, no casso cúbico (dm^3), o qual possui dimensões de $10cm\ x\ 10cm\ x\ 10cm$.

Com um funil, o professor transferiu todo o líquido contido na garrafa plástica para o objeto cúbico, para assim os alunos conseguirem visualizar que 1dm^3 = 1 litro. Trazer experiências dessa forma para a sala de aula é uma forma incrível de prender a atenção do aluno, facilitando o seu entendimento sobre o conteúdo. Segundo Oliveira (2007) *et. al. apud.* Van Der Mer (2017) os experimentos utilizados em intervenções para o ensino do conceito de volume buscam articular características do mundo físico com as do mundo matemático, o que ajuda a identificar as dificuldades dos alunos, por exemplo, nas mudanças de unidade de medida.

Uma outra aula[6] destinada ao Ensino Fundamental, porém para o nono ano, refere-se ao Teorema de Pitágoras. A professora iniciou a aula com um fato histórico sobre Pitágoras, situado na Figura 1:

Pitágoras (582 - 497 a. C.) foi um matemático e filósofo grego. Autor do "Teorema de Pitágoras". Desenvolveu trabalhos na área da filosofia, música, moral, geografia e medicina.
Diz a lenda que antes do nascimento dele a sacerdotisa do Deus Apolo disse a sua mãe: "Tereis um filho de grande beleza e extraordinária inteligência, será um dos homens mais sábios de todos os tempos".
Pitágoras foi aluno de Tales de Mileto e fundador da "Escola Pitagórica", que era mais que uma escola, era uma espécie de irmandade religiosa dedicada à Matemática, Religião, Política e Filosofia.

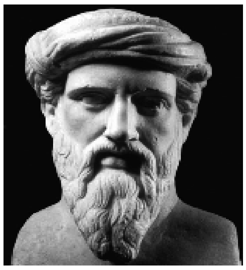


Figura 1: Pitágoras
Fonte: Suellen Rodrigues (2020)

Posteriormente a leitura do texto, docente disponibiliza alguns minutos aos alunos para pesquisarem na internet: Quem foi Pitágoras? Quais foram suas contribuições para a Humanidade? Mas o que este descobriu? A educadora comenta que Pitágoras descobriu

[6] https://www.youtube.com/watch?v=Ax1UM7Tqno8&feature=youtu.be

uma relação elementar entre os lados de um triângulo retângulo. A professora ainda questiona: Mas o que é um triângulo retângulo? O que é um triângulo?

O triângulo é uma figura geométrica e é muito utilizado em construções, Farias *et. al.* (2020) traz que nas construções são usadas as treliças, estas são estruturas cujo elemento de construção são barras ligadas entre si, sob forma geométrica triangular e que visam formar uma estrutura rígida que resista a esforços, somente normais. Este também expõe que elas formam um tipo de estrutura que é muito eficaz a esforços e tem diversas aplicações, como: Pontes, viadutos, guindastes, coberturas, etc. Nesta direção, pode-se observar que a ideia de triângulo apontada por Farias *et. al.* é de extrema importância, pois relaciona a matemática com situações reais do dia a dia das pessoas.

A matemática, muitas vezes, aterroriza alguns alunos causando desinteresse pelo aprendizado da mesma. Segundo Kruse (2002) a falta de motivação e interesse dos alunos pela Matemática é um dos principais problemas que fazem com que o rendimento escolar nessa disciplina seja desastroso, e isto ocorre porque, na grande maioria das vezes, as aulas são monótonas, sem relações com o cotidiano do aluno nem com outras áreas do conhecimento. Dessa maneira, em uma outra aula[7] muito interessante destinada ao terceiro ano do Ensino Médio sobre o conteúdo de Matemática Financeira, o educador tenta aproximar o aluno ao tema abordado, para que assim, um conteúdo tão importante para nós como sociedade se torne mais atrativo.

O professor aplica um exemplo da aplicação de juros no cotidiano, onde acredita-se ser de extrema importância para o aluno ter contato com questões dessa forma, onde poderá encontrar situações parecidas quando adulto: A loja que vende a prazo e não dá desconto para o pagamento a vista, está mais interessada em ganhar com os juros do que com a venda em si. O costume é embuta os juros no preço à vista e depois financie dizendo que é sem juros. Novaes (2009) afirma que esse assunto interfere, no exercício da cidadania, e é relevante por vários motivos, tais como a contribuição no desenvolvimento de um olhar mais amplo e indagador, conduzindo ao raciocínio crítico em situações cotidianas. Nesse sentido, a forma com que o professor abordou o conteúdo em sala em nossa perspectiva irá proporcionar o desenvolvimento do raciocínio crítico apontado por Novaes.

As aulas relatadas são apenas algumas das incríveis metodologias e ideias que observamos, acreditamos que ser professor é uma atividade constante de busca pelo aprendizado. Ponte (1994) afirma que o professor é hoje visto como um elemento-chave do

[7] https://www.youtube.com/watch?v=lbKh9-zqJNI

processo de ensino-aprendizagem. Sem a sua participação empenhada é impossível imaginar qualquer transformação significativa no sistema educativo.

De acordo com Candau (2014) ser docente é desafiar seus alunos a ampliar horizontes e experiências, é ensinar a dialogar com diversos conhecimentos e sentidos, a desenvolver valores e práticas sociais, a reconhecer os diferentes atores presentes no seu dia a dia, a valorizar as diferenças combatendo toda forma de preconceito e discriminação, assim como a construir vínculos interpessoais significativos com diferentes atores. Sendo assim, com essa experiência pode-se aprender e apreciar o trabalho dos docentes, principalmente nesse período difícil de pandemia mundial, onde estes estão se descobrindo e fazendo o possível para serem profissionais cada vez melhores.

A realização das observações das aulas foi uma forma de motivação para nós alunos de licenciatura pois acompanhamos as metodologias e práticas de cada conteúdo visto, e pode-se dizer que são inspirações para nossa área de formação como futuros docentes, pois acredita-se que um único conteúdo pode ser ensinado de diversas formas, sendo de acordo com as dificuldades da turma.

4 Considerações Finais

A experiência de observarmos as aulas disponibilizadas pelo canal “Aula Paraná”, foi de extrema relevância para minha futura prática profissional. Pode-se afirmar que as observações realizadas, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio nos proporcionou uma aproximação com a realidade atual, que de acordo com Gonçalves e Pimenta (1990) é uma das finalidades do estágio.

A aproximação da teoria com a prática nos cursos de licenciatura ocorre nas disciplinas de Estágio Supervisionado, no caso no programa de Residência Pedagógica, permitindo que ocorra uma conexão de toda a teoria estudada com a prática da atividade docente, afim de preparar da melhor maneira possível o futuro professor assim como iniciar o aluno no mundo profissional. Sabe-se que cada turma é de um jeito, com dificuldades distintas, portanto o educador deve sempre estar preparado para lidar com estas, como por exemplo, sempre buscando metodologias e recursos didáticos diferentes para abordar um mesmo conteúdo. Logo, observar algumas aulas e aprender um pouco mais sobre como ministrar alguns conteúdos foi uma experiência indispensável na vida de um docente em formação.

REFERÊNCIAS

BURSSOI, Berenice Lurdes. **O Estágio na Formação docente: Da teoria a prática, ação-reflexão.** 1° Simpósio Nacional de Educação, Universidade Estadual do Oeste do Paraná –

Unioeste, 2008. Disponível em:< https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/34426298/Artigo_28.pdf?1407869255=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DO_ESTAGIO_NA_FORMACAO_DOCENTE_da_teoria.pdf&Expires=1620755294&Signature=RhVlHAc2HLE-YEe~0bRPKqA3YjGqgwXCpNwSJoOTUwBKOHi2xJqIepF1h88wVrx6zp4lEd1PlibFfKBC0J3H6x4Vq3apwBPTzKFKioqWUG8ft8w4x99gaMgEMz37yjv5aj0pp~QazSYAENRUhvbP4mxoGOUlZWGLwvExFndbHlPj3kbJD2xLBHNe-nyay2b-fQTBuI6XxdMJ~kDk0MCya~T-94CFjINFqHdK8K9bG92gkRe0UJNIrSFPCQOQ8T6azjVqf9eu7NGBGFwdwEfOQ0nD2Y2aWaFAFn0iiNqbfiBvcNV-Z~DAbRJMFqYBsCnL97goug4XeGs7FzdHmlN51Q__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA> Acesso em: 18 fev. 2021.

CANDAU, Vera Maria Ferrão. **Ser professor/a hoje: Novos confrontos entre saberes, culturas e práticas.** Porto Alegre, 2014. Disponível em:< https://revistaseletronicas.pucrs.br/index.php/faced/article/view/15003/10923> Acesso em: 19 fev. 2021.

FARIAS, Rodrigo Braga; JESUS, V. L. B.; OLIVEIRA, A. L. **Uma maquete da estrutura em treliças simples triangulares para o ensino de estatística**. Revista Brasileira de ensino de Física, 2020. Disponível em:< https://www.scielo.br/pdf/rbef/v42/1806-9126-RBEF-42-e20200133.pdf> Acesso em: 18 fev. 2020.

Fundação Capes – Programa de Residência Pedagógica, 2018. Disponível em:< http://uab.capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica> Acesso em: 18 fev. 2021.

GONÇALVES, C. L.; PIMENTA, S. G. Revendo o ensino de 2º grau, propondo a formação do professor. São Paulo: Cortez, 1990.

HILÁRIO, Professor Joelson. Aula 55 – Volume e Capacidade. Youtube, 2020. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=w_6f9M1cIE4&feature=youtu.be> Acesso em: 21 out. 2020.

KRUSE, Fabio. **Curiosidades Matemáticas**. 2002. Disponível em:< http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/162/150> Acesso em: 18 fev. 2021.

MARTINS, Vivian; ALMEIDA, Joelma. **Educação em tempos de pandemia no Brasil: Saberesfazeres escolares em exposição nas redes e a educação on-line como perspectiva.** Revista Docência e Cibercultura - Rio de Janeiro, 2020. Disponível em:< https://www.e-publicacoes.uerj.br/index.php/re-doc/article/view/51026/34672> Acesso em: 18 fev. 2021.

MOREIRA, José Antônio; SCHLEMMER, Eliane. **Por um novo conceito e paradigma de educação digital *onlife*.** Revista UFG, 2020. Disponível em:< https://www.revistas.ufg.br/revistaufg/article/view/63438/36079> Acesso em: 18 fev. 2021.

NOVAES, Rosa Cordelia Novellino. **Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio.** Instituto de Matemática, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em:< http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/18%20Rosa%20Novellino.pdf> Acesso em: 18 fev. 2021.

PONTE, João Pedro. **O desenvolvimento profissional do professor de Matemática.** Educação e Matemática n°31, 1994. Disponível em:< https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4474/1/94%20Ponte%20EM31%20pp09-12_20.pdf> Acesso em: 19 fev. 2021.

RODRIGUES, Suellen. Aula 23 – Teorema de Pitágoras, parte 1. Youtube, 2020. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=Ax1UM7Tqno8&feature=youtu.be> Acesso em: 03 nov. 2020.

RODRIGUES, Suellen. **Matemática: Teorema de Pitágoras – Parte 1**. Aula Paraná, 2020. Disponível em:< https://drive.google.com/file/d/1hcanINBrF8iZDc7YktgL85H4EzWreNHt/view> Acesso em: 19 fev. 2021.

SAFATEC INFORMÁTICA. O que é o Google Meet e como essa ferramenta pode ajudar sua empresa a se comunicar melhor. 2020. Disponível em:< https://blog.safetec.com.br/comunicacao/o-que-e-google-meet/> Acesso em: 19 fev. 2021.

SOUZA, João Victor. Aula 13 – Matemática Financeira. Youtube, 2020. Disponível em:< https://www.youtube.com/watch?v=lbKh9-zqJNI> Acesso em: 26 out. 2020.

VAN DER MER, Ilda Aparecida da Silva. **Aprendizagem do conceito de volume: Uma proposta didática compartilhada com licenciandos da Matemática.** Ituiutaba, MG: 2017. Disponível em:< http://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/19712/1/AprendizagemConceitoVolume.pdf> Acesso em: 18 fev. 2021.

XAVIER, Ruth da Paz. **O processo de ensino-aprendizagem da matemática durante o período de ensino remoto emergencial.** TCC (Graduação/Licenciatura em Matemática) - UFPB/CCEN. Universidade Federal da Paraíba, 2020. Disponível em:< https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/19248/1/RPX30012021.pdf> Acesso em: 18 fev. 2021

SE REINVENTANDO PARA A PRÁTICA DOCENTE ONLINE

James Jeison Zimmermann
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
james_zim@live.com

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Nesse relato pretendo apresentar como foi a experiência no primeiro módulo do Programa de Residência Pedagógica (PRP), componente curricular Matemática, realizado num período de pandemia por meio de atividades remotas. Algumas das atividades realizadas nesse período serão expostas, como a produção de videoaulas e a experiência com aulas online – meetings com as turmas do preceptor. Farei uma reflexão acerca do aprendizado obtido nessa situação desafiadora.

Palavras-chave: Aulas online. Residência Pedagógica. Componente Curricular Matemática.

1 Introdução

Através desse relato pretendo mostrar como uma situação inicialmente frustrante se tornou uma valiosa experiência acadêmica e profissional. No início de 2020 muito falava-se sobre um novo vírus muito contagioso na China, mas nunca imaginei que se tornaria uma pandemia com tal proporção e gravidade, apenas fui compreender a situação quando as atividades na universidade foram paralisadas por tempo indeterminado. Com isso, vieram diversas preocupações inclusive em relação a vida acadêmica, fiquei frustrado devido ao fato de estar atrasando a minha formatura.

Passou-se assim o primeiro semestre de 2020 e a ansiedade em voltar às aulas só crescia, felizmente no segundo semestre a universidade sinalizava a opção de estudar a distância – por meio de Atividades Didáticas Não-Presenciais (ADNPs) e com isso veio uma nova preocupação. Vai ter estágio? Como vai funcionar? Como vou dar aula a distância? Vou realmente ter algum proveito disso?

Mesmo com muitas incertezas optei em me matricular no estágio, e com isso, surgiu a oportunidade de participar do Programa de Residência Pedagógica. Resolvi encarar o

1-O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

desafio mesmo com muitas preocupações, afinal, essa seria a minha primeira experiência lecionando numa turma de alunos.

A disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 4 – modalidades diferenciadas de ensino, iniciou retomando os estudos que começamos antes da pandemia, onde víamos sobre a Educação no/do Campo, Educação nos Anos Iniciais, Educação Indígena, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e sobre a importância do estágio em nossa formação.

Analisando Lima (2008) podemos perceber como o estágio é importante para a formação inicial, é nessa etapa que temos a oportunidade de conhecer e refletir sobre as dificuldades de nossa profissão.

> [...] um dos importantes eixos dos cursos de formação de professores e como espaço propiciador da reflexão. Assim, a prática reflexiva e dialogada com a teoria estaria sendo realizada por meio da pesquisa e dos seus desdobramentos (LIMA, 2008, p.5)

Por meio desses estudos colocamos nossos conhecimentos sobre o estágio e as diferentes modalidades de ensino vistas na educação em primeiro plano, porém, sobre Educação a Distância para o Ensino fundamental e Ensino Médio ainda havia um poço de desconhecimento, principalmente pelo fato de ter poucos estudos e ainda menos profissionais com experiência nessa área. A princípio, não estava no planejamento esse tema, não seria discutido durante o desenvolvimento a disciplina.

Devido à pandemia, a educação no Brasil inteiro sofreu grandes mudanças, no Estado do Paraná foram disponibilizadas aulas para todas as turmas pela internet e televisão, e junto dessas aulas os alunos poderiam acessar o Google Classroom – uma plataforma que foi utilizada para manter contanto online entre professores e alunos, além disso todas as atividades e avaliações eram realizadas pela plataforma.

2 Resultados e Discussão

Nossas atividades na residência iniciaram na metade do segundo semestre de 2020, a disciplina de Estágio já estava em desenvolvimento, desta forma, as atividades ocorreram de maneira articulada.

A primeira atividade foi assistir aulas Paraná para que assim pudéssemos conhecer melhor como estava sendo realizado o ensino, o estudo dos alunos. Na sequência conhecemos nosso professor – preceptor que nos explicou como suas aulas estavam sendo ministradas. No caso, seus alunos deveriam assistir as aulas Paraná e realizar semanalmente as atividades disponibilizadas por ele no Google Classroom. Além disso, durante a semana o preceptor realizava uma aula síncrona pelo Google Meet – aplicativo que possibilita realizar reuniões em tempo real, onde o professor resolvia junto com os alunos alguns exercícios e tirava dúvidas sobre o conteúdo.

A partir disso, junto com a orientadora elaboramos nossas atividades, que consistiam em assistir e fazer relatórios das Aulas Paraná – plataforma criada de forma emergencial pelo Estado para que as aulas tivessem continuidade, e das aulas síncronas ministradas pelo preceptor da escola-campo, que nos auxiliava nas atividades da residência. Além disso, nós residentes precisávamos elaborar um plano de aula, e a partir dele preparar dois vídeos para serem disponibilizados aos alunos no Youtube, um vídeo tinha como objetivo complementar as aulas Paraná e o segundo vídeo tinha como foco trazer curiosidades sobre o conteúdo abordado no primeiro vídeo. Na sequência realizaríamos um recorte do plano de aula e o desenvolveríamos em alguma aula síncrona do preceptor no Google Meet.

Feito o planejamento nos organizamos em relação aos conteúdos e datas das aulas que seriam ministradas por nós – fomos organizados em duplas de residentes, e para isso, nos separamos para que alguns de nós abordássemos o conteúdo de Geometria, outros Matemática Financeira e eu junto com a minha dupla o conteúdo de Funções.

Iniciamos pelas observações da Aula Paraná e observamos que para cada conteúdo tinha um professor diferente, onde todas as aulas tinham uma metodologia muito semelhante, nas quais o professor recapitulava o que foi visto na aula anterior e iniciava o novo conteúdo utilizando slides para a explicação. Para os exercícios, o professor dava um tempo para os alunos resolverem e após isso resolvia detalhadamente. Finalizando a aula o professor reforçava o aviso para os alunos acessarem o Google Classroom e resolver as questões postadas pelo professor da turma.

Observamos também as aulas síncronas realizadas através do Google Meet, foram 4 turmas, dois 8° anos, um matutino e vespertino e dois 9° anos, sendo um matutino e outro vespertino. Para cada turma era realizada uma meet - reunião por semana, porém, todos alunos dessas turmas poderiam acessar as mesmas meetings, devido a isso era comum ver alunos do 8° ano nas meetings do 9° ano, e vice-versa.

Em relação às aulas o preceptor seguiu uma metodologia semelhante em todos os momentos, iniciava dando avisos sobre questões e avaliações postadas durante a semana, e na sequência utilizava algumas das questões postadas no Classroom para serem resolvidas junto com a turma para tirar possíveis dúvidas.

Para escrever e realizar os cálculos utilizava o programa Paint, como mostrado na imagem 1. Notamos que a maior parte dos alunos deixava as câmeras desligadas e poucos alunos eram participativos durante a realização dos exercícios. Finalizando a resolução dos exercícios o preceptor perguntava se havia alguma dúvida, caso houvesse, eram respondidas e logo após, a aula era finalizada.

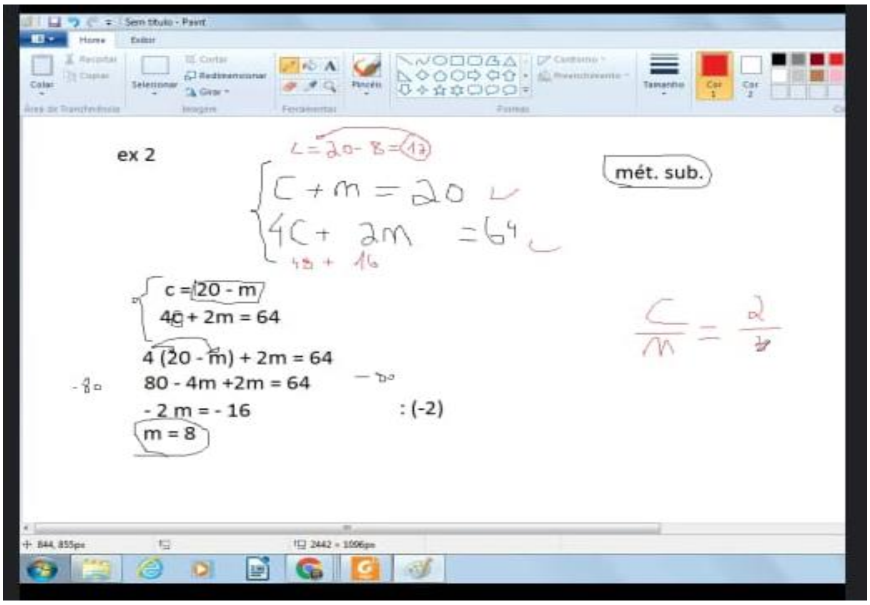


Figura 1: Aula sobre funções.

Fonte: Do autor.

Notamos que o número de alunos participantes por reunião variava muito, haviam aulas com mais de 30 alunos, mas também com apenas 5. Em conversa com o preceptor, comentou que apesar disso, o número de alunos que não participava de atividade alguma era muito pequeno.

Dentre as atividades propostas, elaboramos um plano de aula, para dez horas-aula, pensadas para serem desenvolvidas de forma presencial. Junto de minha dupla ficamos encarregados de abordar o conteúdo de funções do primeiro grau. E para isso, buscamos utilizar diferentes metodologias e utilizar o aprendizado adquirido na faculdade e da experiência obtida nas observações feitas no estágio.

Ao trabalharmos com situações que ocorrem no dia a dia, podemos ter resultados mais significantes, como afirmam os autores

> [...] Quando situações cotidianas são trazidas pelo professor, o aluno internaliza os conceitos de maneira significativa, possibilitando que as formalidades da matemática escolar sejam construídas de maneira prático-utilitária levando tais conceitos, mesmo que limitados, ao uso cotidiano (SILVEIRA, 2012; GIARDINETTO, 1999).

Utilizamos a tendência de resolução de problemas onde buscamos utilizar questões que façam parte do dia a dia do aluno, com o intuito de mostrar a importância e relevância da matemática. Utilizamos TICs (tecnologias da informação e comunicação) através do software Geogebra, uma calculadora gráfica. Utilizamos também um jogo de dominó de funções.

Algo que gostaria de ressaltar em relação ao plano de aula foi a maneira como iniciamos o plano, comparando equações do primeiro grau com funções do primeiro grau, pois em nossas observações anteriores no estágio, notamos que muitos alunos não sabiam a diferença e confundiam os conteúdos. Acredito que se não fosse as observações teríamos deixado de fora essa recapitulação que inclusive foi elogiada pelo preceptor.

Elaborado e corrigido o plano partimos para a produção das videoaulas, e para isso utilizamos o software OBS Studio para gravar as falas e a tela do computador, e para a edição do vídeo utilizamos o Shotcut que nos permitiu cortar algumas cenas e editar o áudio. Esse foi o nosso primeiro contato com esses softwares, mas devido ao suporte da orientadora e a simplicidade da ferramenta não tivemos dificuldade na parte técnica.

A metodologia utilizada consistia em utilizar os slides criados por nós através do PowerPoint e explicar o conteúdo parte por parte. Para a aula não se tornar muito repetitiva e maçante, resolvemos colocar algumas figurinhas e memes, claro sem perder o foco no conteúdo, como podemos observar na seguinte imagem:

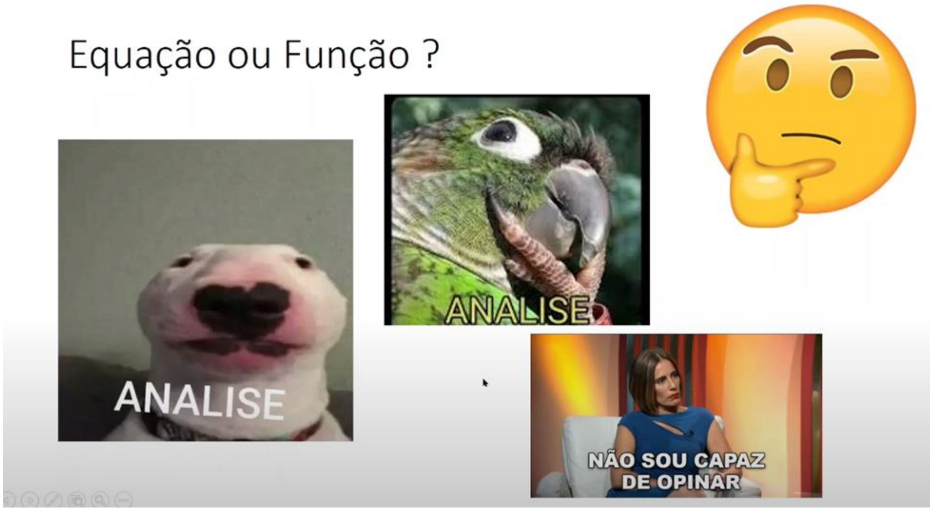


Figura 2: Aula sobre funções.

Fonte: Do autor.

Utilizamos o plano de aula elaborado por nós como base para a explicação do conteúdo e para a selecionar as questões do vídeo. Na sequência elaboramos o segundo vídeo, onde tínhamos como objetivo trazer curiosidades sobre funções, a metodologia utilizada para a sua criação e gravação foi semelhante ao video anterior.

A imagem 3 tiramos do nosso vídeo de curiosidades, onde fizemos uma análise histórica mostrando como o conteúdo de funções foi sendo construído até a atualidade. Tratamos o tema Som e Função, onde é possível descrever as notas musicais por meio de funções seno, especificamente no exemplo, temos a nota Dó.

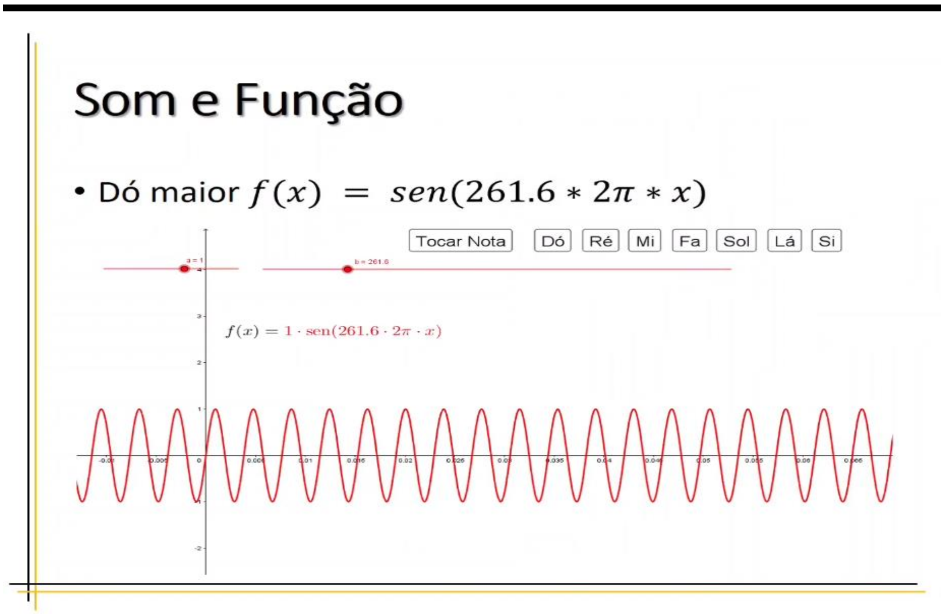


Figura 3: Curiosidades sobre funções.

Fonte: Do autor.

Durante a criação do vídeo ficamos impressionados com a quantidade de tempo que levamos para a preparar uma aula de 15 minutos, não esperávamos que atrás de alguns minutos de video haviam horas de esforço e dedicação.

Os vídeos foram postados no Youtube e no primeiro momento disponibilizamos para os professores – preceptor e orientadores, fazerem suas correções e apontamentos. Após terem sido feitos os últimos ajustes, postamos os links do vídeo no Classroom e assim todos os alunos dos 8° e 9° anos da escola-campo tinham o acesso. Os links dos vídeos estarão nas referências.

A regência seguiu uma linha bastante similar ao primeiro vídeo, onde a aula foi dividida em três principais momentos. O primeiro, como comentamos anteriormente na produção da videoaula, foi relembrar conceitos importantes presentes no vídeo, a diferença entre equação e função e entre incógnita e variável.

No segundo momento apresentamos um problema onde poderia ser resolvido através de função afim e também por equação de primeiro grau. Resolvemos das duas maneiras e assim a diferença entre os dois conceitos ficou mais evidente. No terceiro momento abordamos a construção e análise gráfica de uma função afim onde utilizamos tanto o método da tabela, onde escolhe-se arbitrariamente o valor da coordenada x para encontrar o valor da coordenada de y, como também o software Geogebra utilizado no primeiro vídeo.

Durante a regência buscamos sempre que conveniente a participação dos alunos, apesar de que naquela data não haviam muitos alunos presentes virtualmente, pois no mesmo dia estava ocorrendo o fechamento das atividades, e devido a isso, muitos alunos estavam terminando tarefas de outras matérias.

3 Conclusões / Considerações Finais

Como comentando anteriormente, me senti bastante receoso no início do programa de residência devido ao fato da experiência ser online. Mas no decorrer das atividades tive certeza que encarar o desafio foi a escolha certa a ser feita. Com certeza foi uma das experiências mais marcantes da faculdade e através dela pude compreender melhor o que é ser professor.

Ser professor é estar preparado para ensinar das mais diferentes maneiras, seja online, seja presencial, nosso papel como intermediador entre o aluno e o conhecimento não muda. Através do programa pude observar melhor os desafios do professor e da necessidade de se reinventar e se adaptar as mais diversas situações.

Essa reflexão juntamente com as experiências vividas no programa residência pedagógica representam uma mudança de etapa em nossa vida acadêmica, pois através delas foi possível rever e refletir os conceitos aprendidos na teoria, relacioná-los e aplicá-los na ocasião disponibilizada pelo programa. Dessa forma quero finalizar afirmando que a experiência obtida na residência permitiu que eu esteja mais preparado para os momentos vindouros da docência.

REFERÊNCIAS

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. Matemática escolar e matemática da vida cotidiana. Autores Associados, 1999.

LIMA, Maria Socorro Lucena. Reflexões sobre o estágio/prática de ensino na formação de professores. Revista Diálogo Educacional, v. 8, n. 23, p. 195-205, 2008.

SILVEIRA, Daniel da Silva. Professores dos Anos Iniciais: experiências com o material concreto para o ensino de matemática. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde, Instituto de Educação, 2012.

ZIMMERMANN, James. Aula funções do primeiro grau. Youtube, 26 de nov. 2020. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=psf5Vo_SXxk>. Acesso em 28 abril de 2021.

ZIMMERMANN, James. Curiosidades sobre funções. Youtube, 3 de dez. 2020. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=t1sj1ljDeFI >. Acesso em 28 abril de 2021.

Os Desafios das Atividades de Forma Remota nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Jeferson dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
sjefersonsantos15@gmail.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

O Programa Residência Pedagógica[1] proposta pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal Nível Superior – CAPES e desenvolvido no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná insere os residentes a realidade da sala de aula. Por meio dele, pode-se perceber como a teoria vista no curso é articulada á prática, tanto pelos professores da rede de ensino, como no modo pelo qual se planeja as aulas. A paralisação provocada pela pandemia fez com que, tanto as escolas, públicas e privadas, bem como as universidades tivessem seus planejamentos alterados de modo drástico, dessa forma, inserindo uma nova realidade para alunos e professores em todas as esferas. Por fim, a questão que pode ser levantada após essa experiência se refere a importância das tecnologias na educação e ainda, ao preparo dos professores para enfrentar tais imprevistos que venham a ocorrer durante a prática da docência.

Palavras-chave: Ensino Remoto. Planejamento. Residência Pedagógica.

1 Introdução

Devido ao momento atípico que estamos vivenciando na educação, relacionado à discussão da inserção da tecnologia em sala de aula, este relato terá como principal enfoque a experiência de acompanhar os alunos de forma remota e ainda, na produção de vídeos com a finalidade de relembrar conteúdos anteriormente vistos de modo breve, a fim de que os mesmos sejam aproveitados nos conteúdos dos anos seguintes. Outro ponto a ser destacado é a importância de produzir uma aula atrativa aos alunos, pois durante essa modalidade, é muito mais difícil manter a atenção dos alunos, devido ao fato de eles estarem em casa, há inúmeros fatores que podem distraí-los da aula online naquele momento.

---

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

2 Resultados e Discussão

O Programa de Residência Pedagógica ocorreu no Colégio Estadual Jardim Porto Alegre, tendo início na metade do segundo semestre do ano de 2020. O programa cumpriu um papel similar ao estágio no que se refere ao objetivo de inserir o licenciando na vivência em sala de aula, ainda que dessa vez de uma maneira até então inédita para a maioria dos residentes que participaram do programa.

A disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 4 ocorria de forma remota e tinha um planejamento completamente diferente do rumo tomado durante o Programa de Residência Pedagógica, do qual se fez parte como residente, inicialmente, se apontava como possível ambiente a se desenvolver as atividades a Educação de Jovens e Adultos (EJA), que por si só já seria uma experiência enriquecedora. Com o crescente número de casos na pandemia, seguido por uma paralisação em grande parte das atividades presenciais, viu-se novamente uma necessidade de aprofundamento na modalidade de ensino a distância, ponto explorado em diversas reuniões.

O ensino conciliado com as tecnologias levantou grandes discussões nos tempos atuais, e durante este período, mais do que em qualquer outro momento, o uso dessa alternativa se fez necessária para que as atividades escolares pudessem ocorrer. Essas questões de educação e tecnologia diversas vezes foram trabalhadas em sala de aula como sendo uma alternativa ao modelo tradicional, bem como demais metodologias de ensino, entretanto, em nenhum momento no decorrer dessas disciplinas era esperado que se passasse por uma situação similar, onde o uso da tecnologia deixasse de ser vista como sendo apenas uma alternativa, para então ser vista como um meio para preencher uma lacuna do ensino.

A grande maioria das atividades desenvolvidas no Programa de Residência Pedagógica foi feitas em duplas, que resultou na troca de experiências anteriores, e que facilitou todo o planejamento das atividades que viriam a ser desenvolvidas, pois, a partir do momento em que mais pessoas contribuem com novas idéias e métodos, um leque mais abrangente de possibilidades é apresentado, de modo que se pode escolher dentre as opções a que melhor se adéque a cada situação.

Durante as primeiras semanas do projeto ainda havia muita incerteza sobre a forma como o mesmo iria acontecer, por ser uma experiência completamente nova em um momento delicado em todos os sentidos ainda não se sabia ao certo sobre como seriam as aulas, todavia, após os primeiros encontros toda a incerteza foi substituída por uma expectativa sobre como desenvolver uma aula atrativa aos alunos em pouco tempo, de modo que a mesma não fosse cansativa, e que também não fosse igual a nenhuma outra aula que os alunos já tiveram.

Antes de planejar a aula, foi visto como funcionava o desenvolvimento dos conteúdos por meio das Aulas Paraná, e a partir da análise das mesmas, foi feita uma reunião a fim de entender as metodologias que haviam sido usadas, destacando seus pontos fortes e pontos com deficiências nas aulas. Essa atividade teve suma importância, pois a partir dela foi possível avaliar a forma como as aulas são conduzidas por meio de Atividades Didáticas Não Presenciais (ADNPs), afinal, também seria necessário gravar aulas e entender as metodologias usadas é imprescindível.

Após muita discussão, tanto entre a dupla, quanto com a professora orientadora, foram definidas quais atividades seriam desenvolvidas, bem como a forma que as mesmas se decorreriam, sendo elas, montar um plano de aula para um total de 10 horas aulas e a gravação de dois vídeos para serem disponibilizados para os alunos antes da regência.

Como proposta, foi decidido que seriam enviados aos alunos dois vídeos prévios antes das aulas síncronas, o primeiro deveria conter uma breve explicação do conteúdo a ser trabalhado, no caso funções, e o segundo vídeo deveria conter curiosidades a respeito do tema.

Algo importante relacionado a produção dos vídeos é que, do mesmo modo como durante a elaboração do plano de aula, é essencial usar diferentes metodologias pois a sala de aula possui uma enorme diversidade de ideias, é afirmado por Antunes (1998):

> [...] ao mostrar que a inteligência é estimulável, desde que se usem esquemas de aprendizagem eficientes e que limitações genéticas possam ser superadas (a história das pernas tortas de Garrincha é eficiente exemplo) por formas diversificadas de educação e, sobretudo, ao destacar que os meios para essa estimulação não dependem de drogas especificas e, menos ainda, de sistemas escolares privilegiados, essa identificação pode fazer de qualquer criança uma pessoa integral e de qualquer escola um centro notável de múltiplas estimulações (ANTUNES, 1998, p. 106).

Ou seja, como os alunos aprendem de formas diferentes, a partir do momento que uma aula faz o uso de diferentes metodologias, ela pode abordar de modos distintos o mesmo conteúdo, e dessa forma, fazer com que um número maior de alunos tenham uma melhor compreensão do assunto, dessa forma, além do uso das tecnologias, durante os vídeos foram apresentados diferentes representações, bem como problemas elaborados a fim de que eles conseguissem perceber que existe mais de uma forma de resolver o mesmo problema e de visualizar o mesmo.

O primeiro vídeo, por se tratar de uma revisão de conteúdo, foi focado em rever definições já estudadas e mostrar como resolver um exercício baseado em uma aplicação real das funções afim, entretanto, deve ser ressaltado que tais atividades deveriam ser inéditas, por isso da importância do planejamento e da troca de ideias entre a dupla. O mesmo vale para o segundo vídeo, onde foi abordada parte da história das funções a partir dos trabalhos de importantes pensadores, seguindo da aplicação de funções trigonométricas na música, onde foi possível fazer um paralelo com conteúdos da física, como a ondulatória por exemplo.

O uso de tecnologias na educação se mostrou essencial para este período, principalmente devido ao fato de que, a partir dela é possível dar continuidade no processo de ensino e de aprendizagem sem a necessidade de professor e alunos compartilharem o mesmo espaço físico, todavia, a inserção de tecnologias no ensino é uma discussão antiga, que apresenta pontos fortes a favor e contra seu uso, um ponto destacado por Cysneiros (1999), tem relação ao uso de “inovação conservadora” se referindo ao fato de muitas vezes se usar a tecnologia para algo que poderia ser facilmente realizado sem o auxílio da mesma. Entretanto, como tais pontos já foram estudados, durante a elaboração da aula também foi pensado em formas de que tais pontos fossem contornados, por exemplo, para evitar a dispersão dos alunos durante as aulas, sempre que necessário eram feitas perguntas conceituais para verificar se eles estavam prestando atenção no que estava sendo abordado.

A aula teve duração de aproximadamente 40 minutos, divididos em momentos importantes e distintos entre si, de modo que cada um fosse de igual importância. Inicialmente foram relembrados os principais pontos dos vídeos que foram solicitados aos alunos que assistissem previamente para a aula, pois havia a possibilidade de alguns deles não terem assistido ao vídeo. Em seguida, foram discutidas algumas situações-problemas cotidianas para que pensassem em alguma maneira para resolvê-las, e em seguida, solucionando as questões junto aos alunos, além de fazer uma análise gráfica posteriormente. As questões eram bastante diferentes, sendo uma exigindo um trabalho algébrico maior e outra focada em características de gráficos de certas funções.

Por fim, já no final do módulo, foi proposta a cada dupla a atividade de escrever um capítulo de livro relatando a experiência e as contribuições que a mesma ofereceu para os residentes.

Por ser uma das primeiras experiências nossas ministrando uma aula como docentes, após reavaliar a aula posteriormente sempre existem pontos em que é observada a possibilidade de melhora, ou algum momento que poderia ter sido abordado de forma diferente, algo perfeitamente plausível de acontecer após a experiência de docência, visto que este fato é comum para o crescimento pessoal e profissional dos professores ao lidar com as mais variadas situações, todavia, de modo algum estes fatos prejudicam, ou mesmo ofuscam a profundidade da experiência vivida, pois, a partir dela são sinalizados os pontos em que se é esperado um aperfeiçoamento, a fim de que a cada aula ministrada, nos tornemos melhores profissionais.

3 Conclusões / Considerações Finais

Foi gratificante a experiência oferecida pelo Programa de Residência Pedagógica, a partir do momento em que se vive na prática os desafios da sala de aula, é possível realmente compreender a vivência de um professor, ainda mais no momento atípico em que a educação se encontra, mas, além disso, o contato com a docência é fundamental nos cursos de licenciatura, pois a teoria aprendida durante o curso só pode realmente ser assimilada após vê-la na prática em sala de aula.

Outro importante fator a ser destacado tem relação ao cuidado na elaboração das aulas, durante o planejamento é preciso olhar de forma crítica, entendendo a importância de diversificar as metodologias e compreender a realidade dos alunos para os quais a aula é direcionada.

Fazer com que uma aula seja atraente para os alunos é uma tarefa desafiadora, e que deve ser pensada cautelosamente durante o processo de sua elaboração, pois uma aula dinâmica e cativante representa uma característica indispensável para o processo de ensino-aprendizagem, sendo que a mesma deve ser levada também em consideração ao se planejar aulas presenciais.

Essa experiência foi fundamental também devido a outros fatores, como por exemplo, o crescimento pessoal, pois a docência representa um caminho contínuo de desenvolvimento. Um professor está sempre em construção, sendo moldado por cada experiência vivida em sala de aula. É de conhecimento que cada experiência é única, para Freire (1996, p. 76) “o mundo não é. O mundo está sendo”, e do mesmo modo, “o professor não é. O professor está sendo”, portanto, é demonstrado como cada professor precisa se renovar a cada momento, para que assim, o processo de ensino e de aprendizagem se torne cada vez mais eficiente se adaptando a situação que lhe é apresentada.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **As inteligências múltiplas e seus estímulos**. 11. ed. Campinas: Papirus, 1998.

CYSNEIROS, Paulo Gileno et al. Novas tecnologias na sala de aula: melhoria do ensino ou inovação conservadora. **Informática Educativa**, v. 12, n. 1, p. 11-24, 1999.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo. Paz e Terra, 1996.

RELATO DAS OBSERVAÇÕES DAS AULAS PARANÁ REALIZADAS POR MEIO DO PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Larissa Arianna Mekelburg da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Larissa.141000@alunos.utfpr.edu.br

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

Este relatório[1] discorre sobre uma atividade realizada no segundo semestre de 2020, durante a disciplina de Estágio Supervisionado na Educação Básica 1 que aconteceu em parceria com o programa Residência Pedagógica. Tendo em vista esse novo cenário em virtude da pandemia, as escolas estão ministrando aulas de forma remota e, portanto, nossas atividades também aconteceram nesse formato. Diante disso, o objetivo deste trabalho é relatar de forma breve como ocorreram as observações das Aulas Paraná por meio da plataforma Youtube. Optamos relatar sobre as aulas assíncronas assistidas porque por meio dessas aulas foi possível identificarmos elementos que são essenciais no processo ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Estágio. Residência Pedagógica. Aula Paraná.

1 Introdução

Este relato é resultado de uma das experiências que vivenciamos durante a participação na disciplina Estágio Supervisionado na Educação Básica 1 que aconteceu em parceria com o Programa de Residência Pedagógica (RP), desenvolvidos de forma remota ao longo do segundo semestre de 2020. Desse modo, observamos as Aulas Paraná, que tem sido a proposta de ensino não presencial do governo do estado neste período de pandemia.

De acordo com as normas do estágio obrigatório do curso de licenciatura em matemática do câmpus Toledo, um dos objetivos do estágio na formação de um professor é propiciar ao discente uma aproximação com a realidade educacional do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, possibilitando uma compreensão do processo educativo em suas diferentes facetas.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

Desse modo, percebemos o quão fundamental é a disciplina de estágio, pois assim o discente inverte a sua posição que sempre foi a de aluno, e inicia uma formação mais ativa para se tornar professor. Nesse sentido, o Programa de Residência Pedagógica vem contribuir com a formação de professores, tanto inicial como continuada – envolvendo licenciandos e preceptores das escolas-campo.

Com a impossibilidade de as aulas acontecerem de modo presencial em decorrência da pandemia ocasionada pelo Coronavírus, as instituições de ensino precisaram adotar outras possibilidades de ensino visando a continuidade das aulas, e o ensino a distância e o ensino remoto foram alternativas possíveis.

De acordo com a Resolução GS/SEED n° 1.522/2020 em seu artigo 1°, foi determinado para todos os colégios estaduais do estado do Paraná o ensino a distância, sendo apresentado como:

> Estabelecer no âmbito da Secretaria de Estado da Educação e do Esporte – SEED, em caráter excepcional, o regime especial para a oferta de atividades escolares na forma de aulas não presenciais, em conformidade com o disposto na Deliberação n.° 01/2020 – CEE/PR, exarada em decorrência da pandemia causada pela COVID-19 (PARANÁ, 2020).

Desse modo, considerando esse novo modelo de ensino, o Programa de Residência Pedagógica foi autorizado pela CAPES para que iniciasse no final do segundo semestre de 2020 por meio de atividades remotas.

Sendo assim, aulas para escolas públicas do estado do Paraná começaram a acontecer por meio de cinco ferramentas: três canais digitais e gratuitos de Tv aberta; canal do Youtube; salas virtuais do Google Classroom; Aplicativo Aula Paraná e atividades e materiais impressos para alunos sem condições de acesso às ferramentas supracitadas. Neste relato, abordaremos somente as observações realizadas das Aulas Paraná.

Diante desses novos desafios aos docentes, um deles foi o uso de tecnologias em uma sala de aula virtual, e sobre isso Müller (2000, p. 141) diz que está “longe de ser mais um modismo educacional passageiro, o computador veio para ficar e está influenciando a formação de uma nova geração. Em vez de competir, o professor precisa aliar-se a ele”.

Durante todo o semestre foram realizadas várias atividades, dentre elas um estudo sobre estágio supervisionado por meio da leitura de artigos, conhecemos o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola-campo da RP, observamos as aulas por meio do Youtube e Google Meet e, por fim, elaboramos uma proposta de aula simulada, porém, destacamos que o objetivo deste trabalho será relatar de forma breve como ocorreram as observações das Aulas Paraná.

2 Metodologia

Este trabalho foi estruturado por meio de um estudo bibliográfico, a partir da exploração de livros e artigos científicos.

Iniciamos as observações das Aulas Paraná para a disciplina de Estágio 1 no mês de setembro de 2020, e como a residência pedagógica iniciou no mês de outubro, foi possível darmos continuidade às atividades de observação. Observamos aulas assíncronas (gravadas) disponíveis na plataforma Youtube e também aulas síncronas pelo Google Meet. Ao total foram 20 aulas observadas, 10 do Ensino Fundamental II e 10 do Ensino Médio, em que pudemos escolher qual seriam e o conteúdo.

Deveríamos escrever relatórios de cada aula descrevendo o que aconteceu, mas também analisar as condutas do professor, a relação que ele estabelece com o aluno, as metodologias utilizadas, a trilha de aprendizagem que é disponibilizada e sugerir um novo encaminhamento metodológico.

Neste relato, apresentamos de modo breve alguns aspectos que propiciaram uma análise importante das aulas que foram assistidas de modo remoto.

3 Resultados e Discussão

Para iniciar a descrição das observações citaremos aqui alguns recursos e as dinâmicas que foram utilizadas pelos professores enquanto eles ministravam as aulas da plataforma Aula Paraná.

Para o desenvolvimento das aulas foram utilizados slides, que em um primeiro momento eram apresentados com o uso de um projetor, mas que com o decorrer das aulas foi substituído por uma televisão, esse fato facilitou muito, tanto para o docente quanto para o discente, pois melhorou a visualização dos encaminhamentos didáticos. Na figura 1 é possível ver como os alunos visualizavam os slides quando ele era projetado.

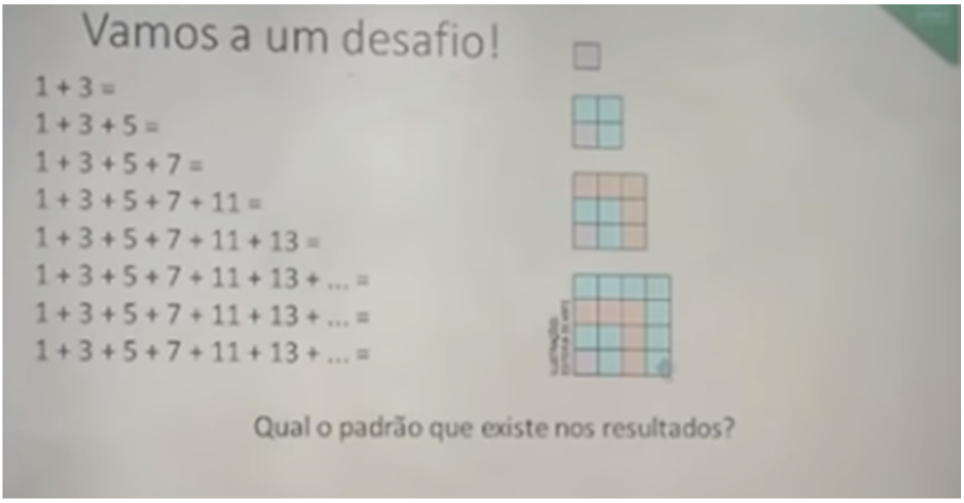


Figura 1 – Desafio.
Fonte: AULA PARANÁ (2020).

Quando os slides passaram a ser apresentados por meio da televisão ficou bem mais visível, como exemplificado nas figuras 2 e 3 disponíveis nas próximas páginas do relato.

Um outro recurso que também foi utilizado foi o quadro, só que esse com menos frequência, pois os docentes priorizavam os slides, caso os professores tivessem que fazer uma observação a mais ou resolver mais detalhadamente um exercício eles o utilizavam.

A dinâmica das aulas consistia na apresentação do conteúdo intercalando com a aplicação de exemplos e exercícios, e para cada exercício o professor destinava um momento para os alunos resolverem que durava em média 5 minutos por questão, a tela era pausada e como fundo musical havia uma música que na maioria das vezes era instrumental, não priorizavam a escolha de uma que se encaixasse com o momento, assim em alguns momentos tínhamos a sensação de que atrapalhava, em outros momentos, não.

Como as aulas estavam sendo ministradas por vídeo, ficou difícil fazer a análise da relação professor-aluno, pois o docente não tinha contato direto com os alunos e nem nós. Portanto, não tínhamos como saber qual estava sendo a reação do discente, se estava aprendendo ou não, se a metodologia estava gerando resultados positivos ou negativos, e se estava prestando atenção. Destacamos que se essas situações ocorrem em uma sala de aula presencial há como intervir.

Apesar disso, observamos que muitos professores se esforçavam para construir algum tipo de relação, alguns educadores mudavam um pouco o modo de falar e o que falar, outros criavam personagens e diálogos entre eles e os alunos, apresentando-os através dos slides, tentando assim chamar o aluno para a aula a partir dessa relação.

Um outro ponto que também analisamos com atenção foram as metodologias que os professores utilizavam para apresentar o conteúdo, a maioria optou pela forma tradicional, apresentando o conteúdo e depois passando exercícios para os alunos resolverem, outra metodologia que foi bastante utilizada foi a resolução de problemas.

Diante disso, pudemos perceber que um dos motivos que podem estar contribuindo para a desmotivação dos alunos é a falta de metodologias que se relacionam mais com esse meio virtual, pois verificamos que para prender a atenção de um aluno em uma sala de aula online é mais difícil do que em uma aula presencial.

Em contrapartida, houveram alguns professores que utilizaram algumas metodologias diferentes como modelagem, que consegue despertar mais a atenção dos alunos, pois constrói o conhecimento com eles, a história da matemática, que chama mais a atenção, e se torna mais interessante e provoca a curiosidade, e os jogos, que tornam o aprendizado mais divertido. Vale ressaltarmos que foram poucas aulas das observadas em que presenciamos a utilização de estratégias diferenciadas, mas quando usadas, contribuíram bastante para o desenvolvimento das aulas.

Somando a isso, muitos professores também passaram várias atividades contextualizadas, e uma delas que se destacou foi sobre o crescimento do contágio do COVID-19 com o passar dos dias.

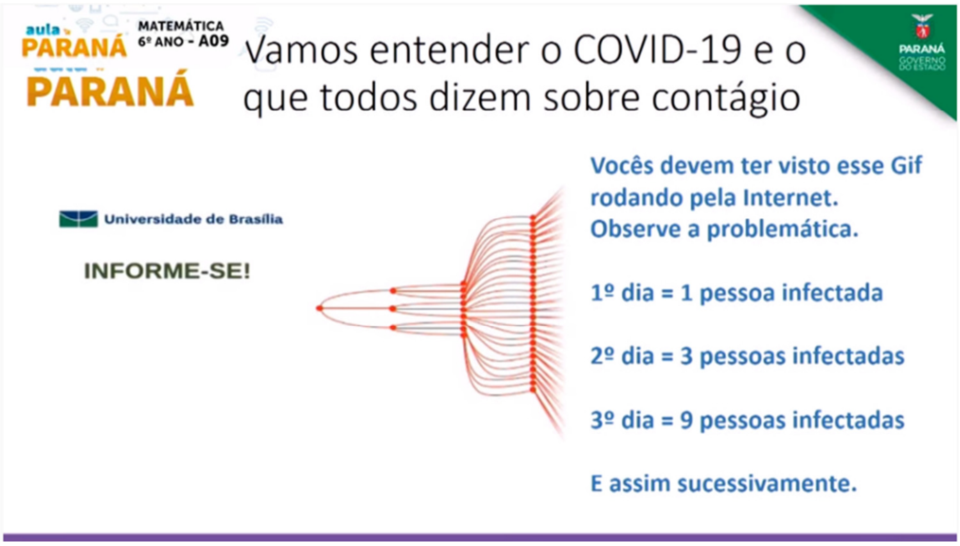
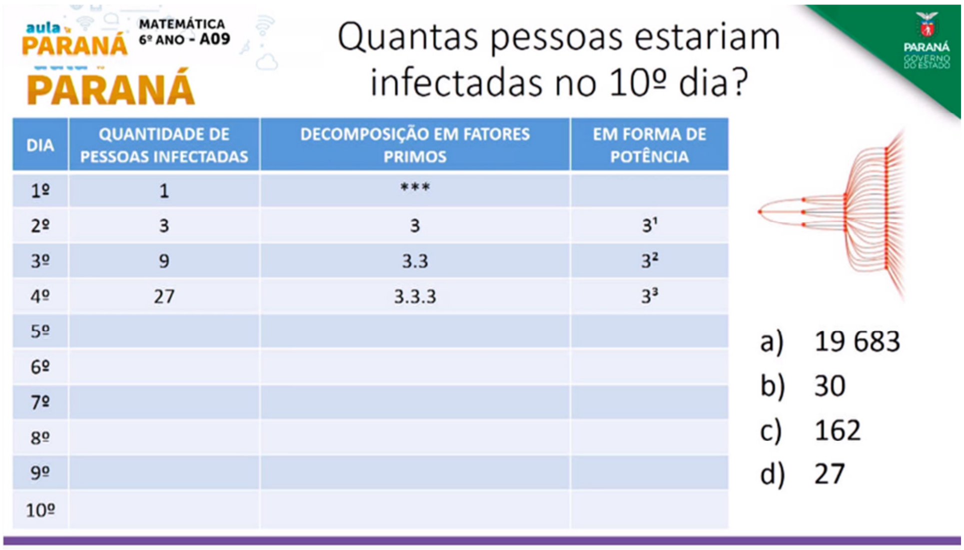


Figura 2 - Contextualização COVID-19.
Fonte: AULA PARANÁ (2020).



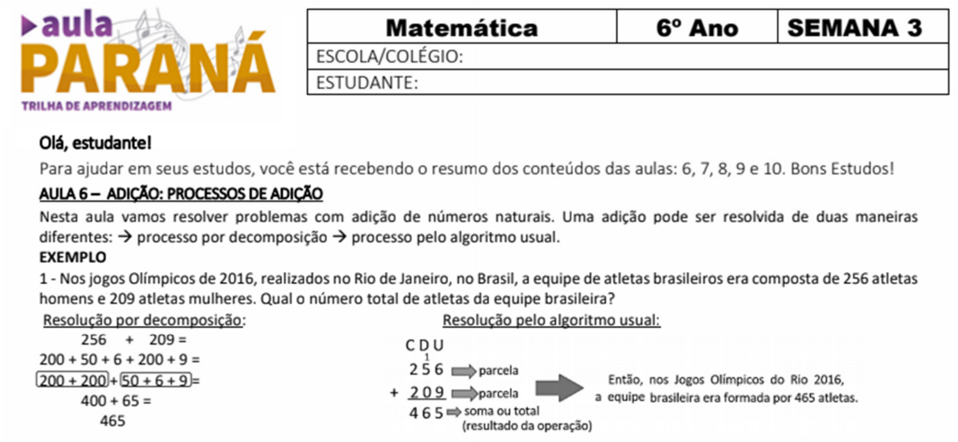
DIA	QUANTIDADE DE PESSOAS INFECTADAS	DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS	EM FORMA DE POTÊNCIA
1º	1	***	
2º	3	3	3^1
3º	9	3.3	3^2
4º	27	3.3.3	3^3
5º			
6º			
7º			
8º			
9º			
10º			

Figura 3 - Problema COVID-19 de base 3
Fonte: AULA PARANÁ (2020).

A figura 1 esquematiza a forma como o docente trouxe a contextualização do COVID-19 para a aula, em que ele explicou brevemente que o contágio cresce de forma exponencial, após isso ele passou um problema, representado na figura 2, para que os alunos tentassem descobrir quantas pessoas estariam infectadas no décimo dia, no lado direito estão representadas as opções de respostas, e para isso foi reservado um tempo para os alunos resolverem, e no término dele a questão foi corrigida.

O último aspecto que tínhamos que observar após assistir a aula eram as trilhas de aprendizagem, onde o professor postava o que foi visto na aula, exemplos resolvidos e acrescentava exercícios para os alunos resolverem sozinhos, tudo isso era disponibilizado pelo site antes da aula, logo, caso o aluno quisesse se preparar e ver o conteúdo antes, ou revê-lo, ou por acaso não tivesse conseguido assistir a aula, ele poderia consultar esse material.

Na figura 4 é possível vermos uma trilha de aprendizagem de uma semana de aula de matemática de um sexto ano, porém na imagem só aparece de uma aula.


aula PARANÁ
TRILHA DE APRENDIZAGEM

Matemática	6º Ano	SEMANA 3
ESCOLA/COLÉGIO:		
ESTUDANTE:		

Olá, estudante!

Para ajudar em seus estudos, você está recebendo o resumo dos conteúdos das aulas: 6, 7, 8, 9 e 10. Bons Estudos!

AULA 6 – ADIÇÃO: PROCESSOS DE ADIÇÃO

Nesta aula vamos resolver problemas com adição de números naturais. Uma adição pode ser resolvida de duas maneiras diferentes: → processo por decomposição → processo pelo algoritmo usual.

EXEMPLO

1 - Nos jogos Olímpicos de 2016, realizados no Rio de Janeiro, no Brasil, a equipe de atletas brasileiros era composta de 256 atletas homens e 209 atletas mulheres. Qual o número total de atletas da equipe brasileira?

Resolução por decomposição:

256 + 209 =
200 + 50 + 6 + 200 + 9 =
$\boxed{200 + 200}$ + $\boxed{50 + 6 + 9}$ =
400 + 65 =
465

Resolução pelo algoritmo usual:

C D U
256 → parcela
+ 209 → parcela
465 → soma ou total (resultado da operação)

Então, nos Jogos Olímpicos do Rio 2016, a equipe brasileira era formada por 465 atletas.

Figura 4 - trilha de aprendizagem.
Fonte: AULA PARANÁ (2020).

Nas trilhas havia primeiro o conteúdo e exemplos de cada aula, e no final as atividades que os alunos tinham que resolver eram apresentadas.

Analisando-as foi possível perceber que quase todas eram condizentes com o que o professor trabalhou na videoaula, em algumas raras exceções faltavam um pouco do conteúdo, mas apesar disso permitia que o aluno tivesse acesso a tudo que foi apresentado durante a aula. Sem contar que outro recurso disponibilizado eram os slides que os docentes utilizavam nas aulas, reforçando o suporte que era dado aos alunos.

4 Conclusões

Diante deste cenário da pandemia causada pelo vírus da COVID-19, e apesar de todos os problemas que foram acarretados por ela, tivemos a oportunidade de acompanhar as aulas à distância e vivenciarmos como os professores estão lidando para se adequar ao uso destas tecnologias educacionais.

Percebemos o quão é necessário estarmos nos atualizando e estudando constantemente, neste caso, os destaques foram para as mídias tecnológicas de comunicação e os ambientes virtuais de aprendizagem, pois assim se torna possível dinamizar a aula e torná-la mais atrativa, consequentemente motivando mais os alunos.

Além disso, também consideramos um privilégio poder ter trabalhado com o ensino remoto, pois pudemos observar, analisar e aprender muito com tudo o que vimos e realizamos, e com certeza levaremos todas as experiências conosco, agregando muito em nossa formação acadêmica.

REFERÊNCIAS

AULA PARANÁ. **Governo do Estado**, Secretaria da Educação e do Esporte. 2020. Disponível em: <http://www.aulaparana.pr.gov.br/matematica_6ano2020#>. Acesso em: 30 de mar. de 2021.

MÜLLER, Iraci. Tendências atuais de educação matemática. **Revista de ensino, educação e ciências humanas**, v. 1, n. 1, 2000.

Resolução n.º 1.522, de 07 de maio de 2020. (2020). Paraná. Disponível em: <http://www.fiepr.org.br/assuntosLegislativos/uploadAddress/Resolucao-n-1.522.2020--GS.SEED%5B92490%5D.pdf>. Acesso em: 12 de mar. de 2021.

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ. **Normas do Estágio Obrigatório do Curso de Licenciatura em Matemática Câmpus Toledo**, 2013, p.4

EXPERIÊNCIA COM VIDEOAULAS DE MATEMÁTICA NO PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Maria Eduarda de Bastos Marques
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
mariaedubastos@gmail.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo

No presente trabalho apresentaremos um relato da experiência vivenciada com a realização de aulas assíncronas por meio da produção de algumas videoaulas. As videoaulas foram elaboradas por nós, residentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, do Câmpus Toledo, juntamente com os professores do curso – que nos auxiliaram com sugestões para nossas videoaulas, orientadores e preceptor. As videoaulas tiveram como objetivo principal, discutir e resolver questões do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM relacionadas com o tema função afim. Por fim, algumas discussões e considerações sobre o desenvolvimento dessas videoaulas serão expostas neste relato.

Palavras-chave: Matemática. Aulas assíncronas. Videoaulas. Função Afim.

1 Introdução

O Programa de Residência Pedagógica – RP[1] é financiado com recursos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, e tem como objetivo o aperfeiçoamento da formação dos alunos de licenciatura na educação básica, buscando a inserção do licenciando no contexto escolar.

Atualmente, por conta de tudo o que estamos vivenciando em relação a pandemia do coronavírus, foi autorizado pela CAPES que as atividades do Programa de Residência Pedagógica (RP) ocorressem de forma remota, e desse modo pudemos desenvolver nossas atividades durante o primeiro módulo (de três) da RP.

O objetivo deste relato é descrever a nossa experiência na elaboração e gravação de videoaulas que foram direcionadas para o Ensino Médio, para as turmas de 1º ano, onde o conteúdo abordado foi Função Afim.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Apresentaremos como se deu esse processo de produção de videoaulas, mas destacamos que para tal, passamos por vários momentos de leituras e discussões teóricas, elaboração de plano de aula, prévias de regências, entre outras atividades que nos foram propostas e desenvolvidas durante o Módulo 1.

2 Material e Métodos

No decorrer do ano de 2020 até nos dias atuais, presenciamos a pandemia do coronavírus, e com isso tivemos o fechamento provisório de escolas e colégios em nosso país, dessa forma foi necessário utilizarmos de aulas remotas para não interromper o ensino e aprendizagem dos alunos, e desse modo, a RP também foi realizada por meio de atividades remotas.

Nesse contexto, fomos orientadas a elaborarmos e gravarmos videoaulas com o intuito de ensinar conteúdos que poderiam ter prejudicado os alunos por conta do ensino remoto, e para isso nos baseamos em temas que são abordados em provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, em nosso caso, o conteúdo foi Função Afim para o 1º ano do Ensino Médio.

Sobre as funções podemos afirmar que:

> As funções são um conteúdo da matemática que possuem várias aplicações e a função afim não foge desse padrão. Essas funções são encontradas em diversas situações do cotidiano do aluno e sua utilização na sala de aula torna clara a presença da matemática em nossas vidas (ALVES, 2012, p. 25)

Desse modo, foram trabalhadas questões relacionadas com diversas situações do cotidiano, por estarem na prova do ENEM, geralmente são bem contextualizadas, o que foi um ponto positivo para o tema de função afim.

Após a definição e direcionamento do tema, iniciamos um estudo mais aprofundado sobre função afim, relembrando e explorando os conceitos, representações e definições. Em seguida, elaboramos um plano de aula utilizando o livro didático “Contextos e Aplicações Matemáticas” do 1º ano do Ensino Médio, escrito pelo autor Luiz Roberto Dante. O plano de aula seguiu a sequência de assuntos, Plano Cartesiano; Introdução de Função Afim; Função Afim e a Representação Gráfica da Função Afim.

Depois de finalizado o plano, organizamos quatro videoaulas para serem gravadas. Vale ressaltarmos que foi a primeira experiência com gravações de videoaulas, e por este motivo, foi necessário iniciarmos esse processo pesquisando sobre como gravar as aulas, programas, aplicativos, softwares e editores que poderiam auxiliar no desenvolvimento dessa tarefa.

Depois desse primeiro passo, definimos como organizaríamos as videoaulas. Decidimos por utilizarmos uma apresentação no *Power Point* para explicar a sequência dos conteúdos, e optamos pelo *Open Broadcaster Software (OBS Studio)* para gravarmos as aulas, bem como pelo *Software Apoweredit* para editar os vídeos.

3 Resultados e Discussão

Foram elaboradas quatro videoaulas com o intuito de ensinar o conteúdo de Função Afim para o 1º ano do Ensino Médio, para isso nos baseamos em provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

Nesse contexto, fomos orientadas a elaborarmos e gravarmos videoaulas com o intuito de ensinar conteúdos que poderiam ter prejudicado os alunos por conta do ensino remoto.

Na primeira videoaula, relembramos o conteúdo de Plano Cartesiano e para isso utilizamos o jogo Batalha Naval, que possibilitou fazermos comparações e retomadas conceituais relacionadas ao conteúdo. No plano cartesiano relembramos sobre os eixos, as coordenadas, um par ordenado, um ponto e os quatro quadrantes, pois nas aulas seguintes trabalharíamos exercícios com funções afim que abordariam interpretação de gráficos.

Na finalização da videoaula, apresentamos uma situação-problema (Figura 1).

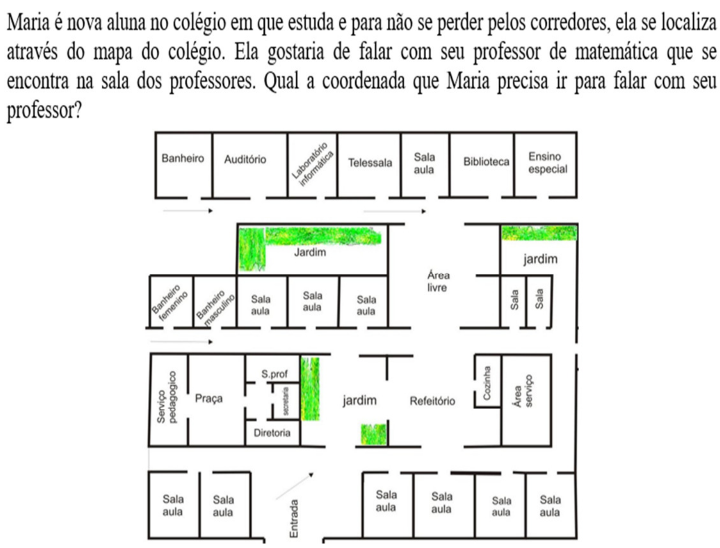


Figura 1: Situação-Problema Mapa do Colégio.
Fonte: Dos autores.

Em seguida, utilizamos o *software Geogebra* e plotamos o mapa do colégio, agora posicionado no plano cartesiano (Figura 2).

Figura 2: Mapa do Colégio no Plano Cartesiano.
Fonte: Dos autores.

Dessa maneira, agora com a Figura 2, os alunos identificariam a localização do professor de matemática no colégio. Ao utilizarmos o software para plotarmos o mapa no plano cartesiano, eles conseguiram observar os eixos coordenados e localizar o par ordenado que revela a localização do professor e, assim, resolver o problema.

A segunda videoaula, foi iniciada com uma questão do ENEM (Figura 3).

Questão 162

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

A) $f(x) = 3x$

B) $f(x) = 24$

C) $f(x) = 27$

D) $f(x) = 3x + 24$

E) $f(x) = 24x + 3$

Figura 3: Questão 162.
Fonte: ENEM (2010).

Na resolução da questão 162 evidenciamos a definição e algumas características da função afim, como variável independente e variável dependente.

Após a caracterização, observamos por meio do *software Geogebra* o comportamento do coeficiente angular a e do coeficiente linear b da função afim, dada por $f(x) = ax + b$.

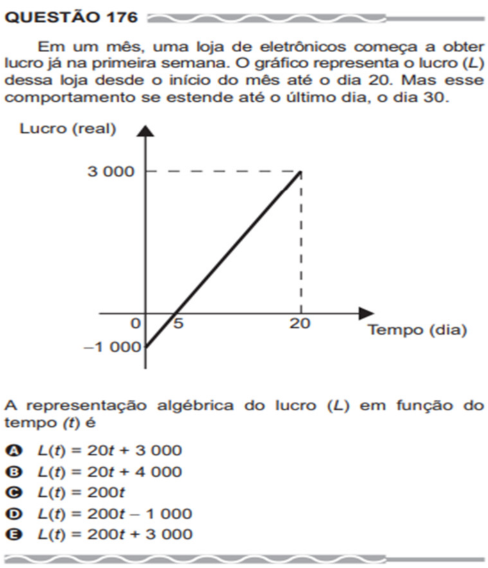
Na continuação da videoaula, realizamos a construção do gráfico da função afim encontrada na questão do ENEM, explicamos sobre o coeficiente angular e coeficiente linear para a situação dada, para isso, utilizamos novamente o *Geogebra* para facilitar a visualização da inclinação da reta, do coeficiente angular e do coeficiente linear, e a classificação da função como crescente ou decrescente.

Com o auxílio do *software Geogebra* é possível:

> Analisar os gráficos das funções de diversas formas, ampliando as possibilidades de observação, investigação e experimentação, o que em sala de aula seria muito difícil desenvolver usando apenas quadro e giz. (PÁDUA, 2010, p.14).

Na terceira videoaula, iniciamos revendo a questão do ENEM da aula anterior (Figura 3). Para dar continuidade no conteúdo, relembramos a definição de função afim e apresentamos as suas diferentes classificações, sendo elas, função constante, função linear e função identidade, e por fim, explicamos sobre o zero da função afim.

Para finalizarmos essa videoaula, apresentamos outro problema do ENEM (Figura 4).


QUESTÃO 176

Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.

A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

A) $L(t) = 20t + 3\,000$
B) $L(t) = 20t + 4\,000$
C) $L(t) = 200t$
D) $L(t) = 200t - 1\,000$
E) $L(t) = 200t + 3\,000$

Figura 4: Questão 176.
Fonte: ENEM (2017).

Na resolução desta questão, utilizamos a identificação do coeficiente linear que pode ser observado a partir da interseção da reta com o eixo das ordenadas, ou seja, $y = -1000$, como há apenas uma alternativa cujo coeficiente linear é -1000, concluímos que a alternativa correta é a letra D. Desse modo, resolvemos a questão utilizando um conceito estudado na própria aula.

Na quarta videoaula, foram trabalhadas duas questões do ENEM (Figuras 5 e 6). Nas resoluções, foram utilizados os conceitos de função afim desenvolvidos nas aulas anteriores.

QUESTÃO 168

No Brasil, costumamos medir temperaturas utilizando a escala Celsius. Os países de língua inglesa utilizam a escala Farenheit. A relação entre essas duas escalas é dada pela expressão F = C × 1,8 + 32, em que F representa a medida da temperatura na escala Farenheit e C a medida da temperatura na escala Celsius.

O gráfico que representa a relação entre essas duas grandezas é

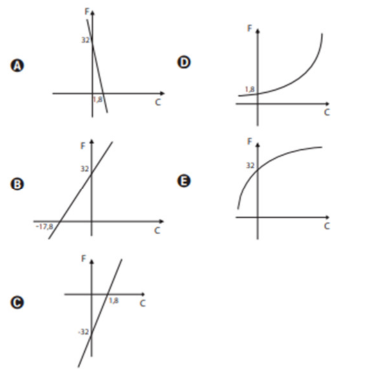


Figura 5: Questão 1 da videoaula e 168 do ENEM.
Fonte: ENEM (2011).

Nesta questão, foi utilizado o conceito de função afim para identificar seu gráfico característico; deste modo, pudemos eliminar as alternativas (d) e (e), os coeficientes angular e linear, o angular para verificar se era uma função crescente ou decrescente - a medida em que C aumenta, F aumenta, a medida em que C diminui, F diminui, ou seja, temos uma função crescente e com essa informação a alternativa (a) pode ser eliminada, e por fim, ao observarmos o coeficiente linear para encontrarmos a interseção da reta com o eixo das ordenadas y – com isso já eliminamos a letra (c); mas por questões de análise, propusemos a observação do zero da função para encontrarmos a interseção da reta no eixo das abcissas x; fazendo $C = 0$ e depois $F = 0$ ou vice-versa, assim concluímos que a alternativa correta da questão seria a letra B.

QUESTÃO 180

De acordo com os números divulgados pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), já há no país 91 celulares em cada grupo de 100 pessoas. Entre as várias operadoras existentes, uma propõe o seguinte plano aos seus clientes: R$ 25,00 mensais para até 40 minutos de conversação mensal e R$ 1,00 por minuto que exceda o tempo estipulado.

Disponível em: http://www.economia.ig.com.br.
Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Qual dos gráficos a seguir corresponde aos possíveis gastos mensais (y), em reais, de um cliente dessa operadora de celular, em função do tempo (x) utilizado, em minutos?

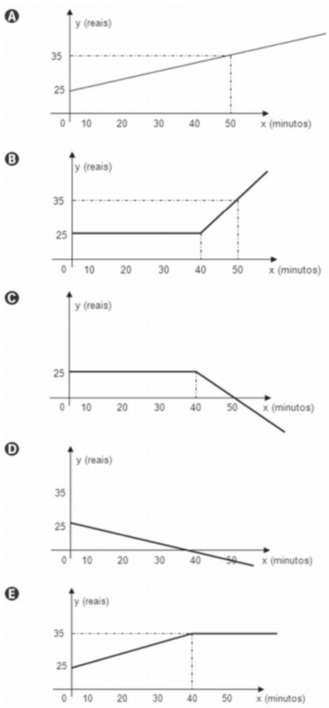


Figura 6: Questão 2 da videoaula e 180 do ENEM.
Fonte: ENEM (2011).

Para a resolução da questão (Figura 6), utilizamos o conceito de função constante e o coeficiente angular para identificar se era uma função crescente ou decrescente. Encontrando assim, a alternativa correta da questão, sendo a letra B.

Destacamos que as videoaulas foram elaboradas com o intuito de ensinar conteúdos que pudessem ter sido interrompidos ou desenvolvidos superficialmente por conta da pandemia e da urgência em adotar o ensino remoto, pois a maioria dos alunos precisam realizar a prova para ingressar no Ensino Superior.

Acreditamos que a junção do conteúdo função afim com as questões do ENEM foi relevante para os alunos, que conseguiram ver ou rever sobre o assunto com base nas questões propostas nas provas.

Com relação à produção das videoaulas, podemos ressaltar que oportunizou, para a maioria dos integrantes do Programa de Residência Pedagógica o primeiro contato com as gravações, um momento único e de muita aprendizagem. Ao nosso ver, essa experiência com as videoaulas foi satisfatória.

4 Conclusões / Considerações Finais

Ao finalizarmos as atividades, principalmente aquelas relativas à produção de videoaulas, foi possível destacarmos a importância da RP para a nossa formação inicial, o fato de estarmos em contato com as videoaulas foi uma importante oportunidade para experienciarmos situações únicas por meio de atividades remotas, pois, se fosse em outro momento, não seria possível o contato com as videoaulas, mas sim o contato com os colégios e os alunos, mas sem a pretensão inicial de produzirmos videoaulas.

Consideramos que foi uma experiência válida para os dias que estamos vivendo, sendo uma experiência diferente e que proporcionou muita aprendizagem sobre o tema de função afim e sobre tecnologia, ao lidarmos com diferentes softwares e editores.

Em relação ao desenvolvimento das atividades, sobre o tema de função afim, foi um momento para rever o conteúdo e explorá-lo de uma forma diferente, pois nas videoaulas não teríamos a interação direta com os alunos. E ainda, sobre as gravações das videoaulas destacamos que foi um momento de aprendizagem, visto que, foi o primeiro contato que tivemos com a elaboração de videoaulas, uma experiência satisfatória.

Portanto, podemos considerar que o Programa de Residência Pedagógica, componente curricular Matemática, ainda em seu primeiro módulo, foi um momento de muita aprendizagem e de uma experiência única para nós residentes.

REFERÊNCIAS

ALVES, Juliany Paula da Silva. A função afim e suas aplicações. Paraíba. 2012. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/880/1/PDF%20-%20Juliany%20Paula%20da%20Silva%20Alves.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Volume 1. 2º edição. São Paulo: Editora Ática. 2014.

INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira). Provas e Gabaritos ENEM. 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 18 fev. 2021.

PÁDUA, M. C. D. Utilizando o Software Geogebra como ferramenta auxiliar no ensino de função afim e função quadrática. 2010. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_utfpr_mat_artigo_mario_cezar_daldegan_de_padua.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

RELATO DE EXPERIÊNCIA DA ELABORAÇÃO DE UMA AULA DE GEOMETRIA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Tawine Leticia Azarias da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo
tawaveco@icloud.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo

Resumo

O presente relato tem como objetivo descrever a experiência de uma dupla de residentes na elaboração de uma aula síncrona para alunos do Ensino Médio. Estes residentes estavam, a princípio, matriculados na disciplina de Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática e a partir do início do Programa de Residência Pedagógica (PRP), passaram a fazer parte deste. Desse modo, as atividades ocorreram articuladas ao estágio. A preparação da aula síncrona foi uma das atividades propostas e a partir do tema foi proposto elaborar um plano de aula para posteriormente ser desenvolvida a aula de forma remota para as turmas de alunos do preceptor e na escola-campo por ele representada. Destaca-se que durante o Módulo 1[1] da residência, se utilizou o ensino remoto devido a pandemia da COVID-19. Vale ressaltar que a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) informou que as atividades do PRP iniciariam por meio de atividades remotas.

Palavras-chave: Síncrona. Licenciatura em Matemática. Residência Pedagógica. Pandemia

1 Introdução

No início de 2020 o Brasil e o mundo se depararam com um estado de calamidade, uma pandemia conhecida como a COVID 19. Como decorrência desse estado pandêmico a Secretaria de Estado da Educação e do Esporte (SEED-PR) considerou necessária a suspensão das aulas presenciais, e em busca de uma solução provisória para esse contexto as escolas tiveram que adotar o ensino por meio da plataforma Aulas Paraná - criada em

[1] A residência Pedagógica conta com 3 módulos de 6 meses, organizados em atividades cadastradas e coordenadas pelos participantes dos diferentes Subprojetos (Núcleos) vinculados ao Projeto Institucional do Residência Pedagógica

regime emergencial, e assim, o ensino remoto deu uma continuidade ao ano letivo escolar e ao ensino e a aprendizagem.

Com esse novo contexto os professores tiveram vários desafios e um deles foi a adaptação do uso da tecnologia em suas aulas.

A partir disso esse relato tem como objetivo a descrição de experiência de uma acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná residente do Programa de Residência Pedagógica, este financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que abordará o desenvolvimento da elaboração de uma aula síncrona online ministrada pela própria residente.

2 Procedimentos Metodológicos[2]

Neste relato descreveremos como foi a elaboração de uma aula síncrona - ocorre em tempo real com os alunos. Foi pensada e organizada de modo a estimularmos a participação dos alunos, foi preciso pensarmos em formas de interação com os alunos, de maneira que aula não ficasse cansativa e assim, pudessem perder totalmente o interesse no conteúdo.

A elaboração da aula síncrona foi uma das atividades propostas pelos professores orientadores e deveria ser construída em dois momentos, elaboração do plano de aula e o desenvolvimento deste com os alunos do Ensino Médio. Após conversas com a preceptora da escola-campo, todas essas questões foram definidas, ajustes de datas e horários, divisão dos dias a serem realizadas as atividades e também o tempo que seria destinada a cada aula.

Após o tema estabelecido que seria o de Geometria, tivemos a ideia de utilizar uma das videoaulas, que foram elaboradas pelos próprios residentes em uma atividade anterior que teve o mesmo tema, assim optamos por fazer a adaptação de uma aula que não ocorre em tempo real para uma aula síncrona. A escolha da videoaula se deu visto que ela contempla vários conteúdos dentro da Geometria, assim conseguiríamos abranger em um só aula esses variados temas como por exemplo a trigonometria, e também comtemplaríamos a resolução de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Houve apenas uma alteração na aula síncrona em relação ao que foi trabalhado na videoaula, onde no

[2] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

vídeo não realizamos a construção da tabela dos ângulos notáveis, tendo em vista que não teria importância a construção da mesma.

Gostaríamos de ressaltar que “A Geometria é uma área matemática que visa entender um mundo que faz parte de nossa realidade” (SILVA, 2014). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) evidenciam a importância de tal conteúdo matemático, que é também utilizado em várias outras áreas do conhecimento.

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, estimulando a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

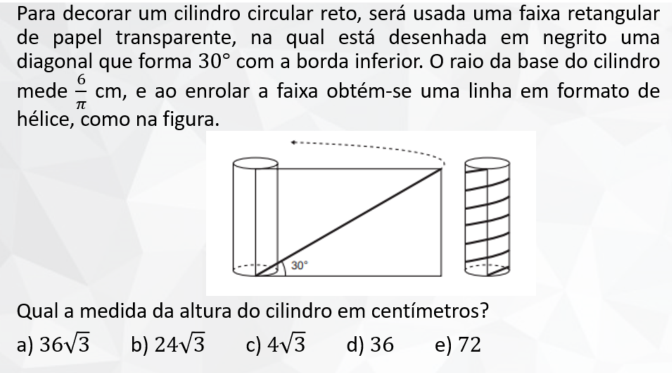
Podemos destacar da Geometria, que foi o tema da nossa aula síncrona, as relações trigonométricas no triângulo retângulo, sendo um assunto que envolve tanto trigonometria quanto geometria. Dionizio e Brandt (2011), perceberam em suas pesquisas a dificuldade que os alunos demonstraram em relacionar determinadas atividades com as relações trigonométricas do triângulo retângulo, que permitiriam a solução dos problemas propostos. Os autores observaram uma grande dificuldade de interpretação dos exercícios, mesmo sendo idênticos, apenas modificada a forma como foram apresentados.

Desse modo, a partir da questão do ENEM iniciamos a adaptação da aula, criamos slides no programa Power Point que seriam apresentados para alunos, assim pouparíamos tempo e conseguiríamos utilizar animações para as informações dadas do problema, isso também em uma tentativa de prender a atenção deles.

Foi preciso pensarmos em todos os detalhes e imprevistos possíveis que poderiam ocorrer durante a aula. Na sequência descrevemos como pensamos o desenvolvimento para a possível aula.

No primeiro momento nos apresentaríamos e deixaríamos claro que se os alunos tivessem quaisquer dúvidas poderiam nos interromper para tentarmos sanar a questão. Logo após iniciaríamos com o primeiro slide, esse que apresenta a Questão do Enem de 2018, assim faríamos a leitura, procurando sempre utilizar de uma leitura cuidadosa e com uma boa entonação de voz para que os alunos não confundissem as informações do problema.

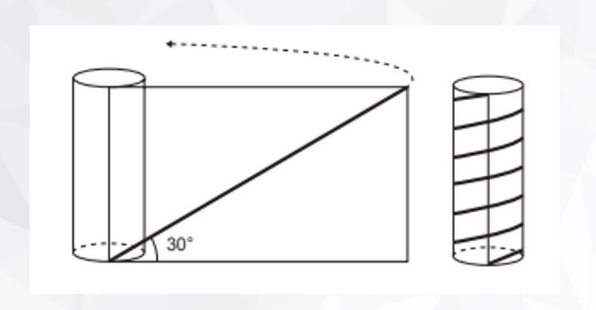
Figura 1: Slide da questão utilizada para a aula



Fonte: Autores

A resolução dessa questão foi iniciada partindo da observação de que o cilindro tem base circular como indicado pelo enunciado.

Figura 2: Slide powerpoint

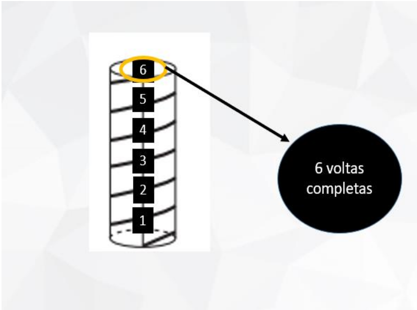


Fonte: Autores

Das Figuras 1 e 2, também é possível observar a presença de uma faixa retangular que, como o enunciado também descreve, envolve o cilindro exatamente seis vezes. Porém para conseguirmos saber se os alunos estariam prestando atenção na aula, faríamos o questionamento aos alunos de quantas vezes a faixa envolve o cilindro antes de darmos novamente essa informação. Após a espera de uma resposta, iniciaríamos a forma de resolução concluindo que para determinar isso, basta observar quantas vezes a linha diagonal da faixa circulou o cilindro. Seguindo o processo de resolução, constataríamos que a base da faixa retangular tem exatamente seis vezes a medida do comprimento da circunferência da base do cilindro. Assim, consideraríamos o raio dessa circunferência, $6/\pi$,

que foi informado pelo enunciado da questão, e utilizaríamos a expressão, comprimento da circunferência $C = 2\pi r$, como mostrado na figura 4.

Figura 3: Slide powerpoint



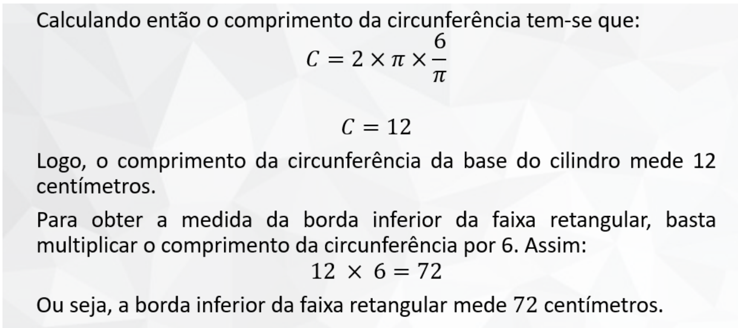
Fonte: Autores

Figura 4: Slide powerpoint

Fonte: Autores

Dando continuidade, mostraríamos por meio da figura 5 onde é possível visualizar a resolução para obtermos a medida da base da faixa retangular.

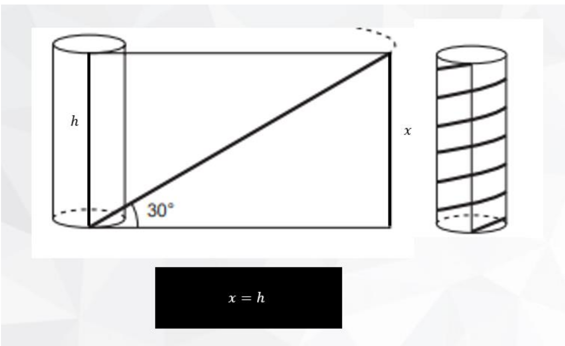
Figura 5: Slide powerpoint



Fonte: Autores

Dando continuidade à resolução da questão, observaríamos que a altura da faixa retangular coincide com a altura do cilindro, que é o que a questão solicita, ou seja, ao encontrar a altura da folha, teríamos também a solução desejada.

Figura 6: Slide powerpoint



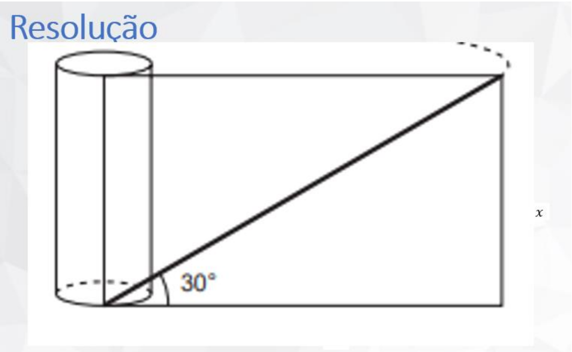
Fonte: Autores

Figura 7: Slide powerpoint

Fonte: Autores

A partir desse momento, poderíamos trabalhar apenas com a faixa retangular. Uma informação do enunciado em relação à linha diagonal, diz que ela divide a faixa retangular em dois triângulos retângulos congruentes. Observando um dos triângulos retângulos formados é possível constatar que ele possui um dos ângulos internos medindo 30º poderíamos assim determinar tanto o cateto oposto, quanto o cateto adjacente a este ângulo utilizando relações trigonométricas.

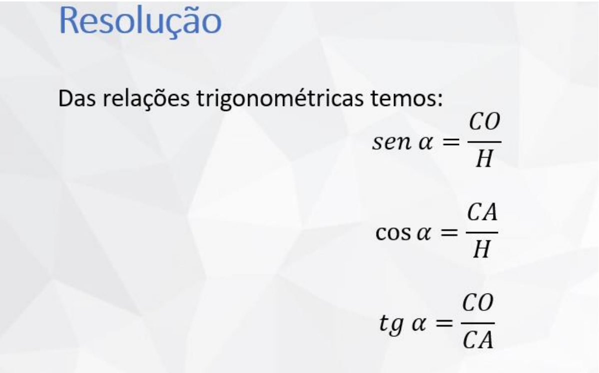
Figura 8: Slide powerpoint



Fonte: Autores

No próximo passo, mostraríamos aos alunos quais são as relações trigonométricas, lembrando que CO= Cateto Oposto, CA= Cateto Adjacente H= hipotenusa, isso quando trabalhados em um triângulo retângulo.

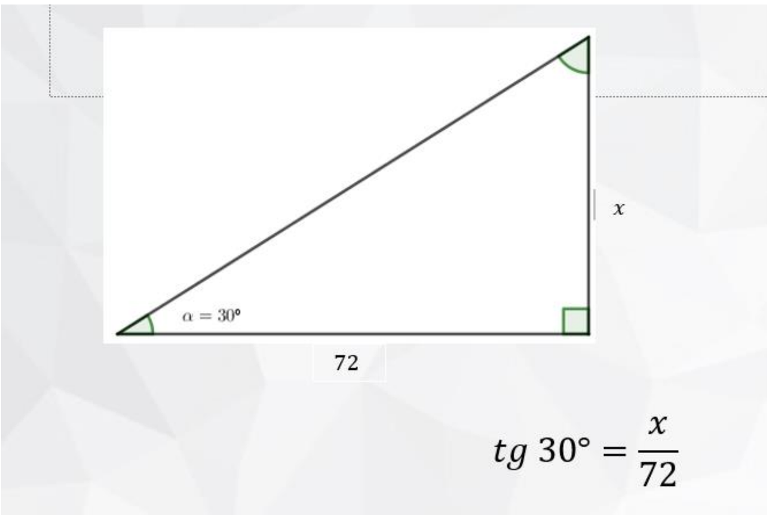
Figura 9: Slide powerpoint



Fonte: Autores

Como conhecemos a medida de 30º de um dos ângulos do triângulo retângulo formado, e a medida do cateto adjacente a ele, 72 cm, uma vez que o calculamos a partir do comprimento da circunferência da base do cilindro, seis vezes esse comprimento, e precisamos determinar a altura da faixa retangular, cuja medida representa no triângulo retângulo a medida do cateto oposto ao ângulo dado, poderíamos utilizar a relação trigonométrica tangente para calcular essa medida como indicado na Figura 10 abaixo.

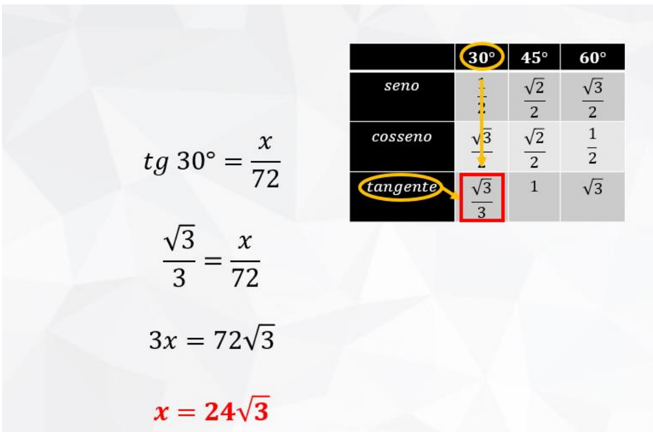
Figura 10: Slide powerpoint



Fonte: Autores

Para concluirmos a nossa questão, proporíamos aos alunos a construção da tabela dos ângulos notáveis e pediríamos se eles saberiam como fazer essa construção. Se a resposta fosse sim, deixaríamos que eles falassem. Porém, se não, iniciaríamos a construção da tabela juntamente com eles como indicado na tabela da Figura 12, e para concluirmos a resolução do problema, substituiríamos o valor encontrado para a tangente de 30º e ao resolvermos a questão obteríamos o valor $x = 24\sqrt{3}$, a alternativa b do nosso problema.

Figura 12: Slide powerpoint



Fonte: Autores

3 Considerações Finais

Consideramos que, para a atividade elaborada - aula síncrona, encontramos algumas questões que deveriam ser pensadas para elaboração da mesma. Precisávamos estar preparados para os problemas que poderiam surgir durante a realização da aula, que seria totalmente remota. Como por exemplo, alunos desinteressados, pouca comunicação e até mesmo problemas complicados de se resolver como falha na conexão de internet.

Apesar dessas questões conseguimos adaptar a estratégia didática de uma aula de Geometria para ser apresentada online para uma turma do Ensino Médio, observamos que com os slides no programa powerpoint, tínhamos a facilidade de demonstrar a resolução do problema, poupando tempo e contribuindo para o ensino e a aprendizagem de quaisquer que sejam as turmas.

Com a experiência vivenciada tivemos grandes resultados, tanto em relação a escrita e preparação da aula, quanto a adaptação da videoaula aplicada para uma turma. Como nunca tivemos um contato com gravação de aula essa primeira experiência por ser a primeira deu grandes resultados positivos e resultou em uma ótima construção das novas estratégias com ferramentas tecnológicas.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura - MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998.

DIONÍZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. X Congresso de Educação - EDUCERE. p. 4409 à 4421, Curitiba, 2011.

SILVA, M. G. O ensino de Geometria no ensino médio: sequência didática como metodologia. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciência e Tecnologia, Campina Grande, 2014.

Anderson e Tawine (Aula #6): Triângulo, Círculo e Circunferência: resolução de questão do ENEM; Videoaula elaborada pelos residentes; Link disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=O1u3iA8NmsQ>

A OBSERVAÇÃO DAS AULAS SÍNCRONAS VIA *GOOGLE MEET*: UMA EXPERIÊNCIA POSSIBILITADA PELO PROGRAMA DE RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Thais Paula Prunzel
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
thais_prunzel_2010@hotmail.com

Carla Ramos de Paula
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Loreci Zanardini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Vanessa Largo Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Resumo

Este trabalho visa relatar e contextualizar uma das experiências vivenciadas por nós, residentes do Programa de Residência Pedagógica (PRP) durante o período de pandemia do coronavírus no ano de 2020. Esta atividade ocorreu de forma remota e compreendeu a observação das aulas síncronas do preceptor via *Google Meet*. Observamos quatro aulas síncronas por meio da plataforma, duas com as turmas de 1° anos do Ensino Médio e as outras duas com uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental. De modo geral, as aulas (*meetings*) observadas duravam em média 20 minutos, além disso, eram encaminhadas de acordo com as aulas do Aula Paraná. Normalmente frequentadas por no máximo dois alunos, com pouca participação dos mesmos, deste modo, a interação com o professor quase inexistia. Apesar de as observações terem proporcionado aos residentes uma aproximação com o professor preceptor, uma breve noção do trabalho em sala de aula e uma ideia do processo de ensino e aprendizagem, consideramos que durante o Módulo 1 não foi possível contemplar todas as experiências objetivadas pelo Programa de Residência Pedagógica para os três módulos para aprimorar a formação dos discentes, visto que o enfoque nesse primeiro momento foi principalmente nas observações e nas simulações de aulas.

Palavras-chave: Coronavírus. Formação discente. Aula Paraná. Ensino e aprendizagem.

1 Introdução

Este relato[1] de experiência consiste em descrever e apresentar o contexto em que foram realizadas as observações das aulas síncronas via *Google Meet* pelos residentes. A partir desta atividade que foi proposta pelo Programa de Residência Pedagógica (PRP), foi possível refletir sobre esta vivência, acerca das condições em que ocorreu, da forma que foi realizada e as suas vantagens e desvantagens.

O Programa de Residência Pedagógica (PRP) proposto pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) tem como premissa a imersão do

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (**CAPES**) - Código de Financiamento 001.

licenciando na escola, contemplando dentre várias ações, atividades propostas pelo professor preceptor. A partir disto, tem-se por objetivo aprimorar a formação dos discentes de cursos de licenciatura.

De acordo com Poladian (2014, p. 72),

> [...] busca-se com a imersão durante o processo de formação inicial sair do isolamento dos ambientes formativos da universidade e escola, aproximando as culturas destes locais e identificando saídas criativas para a formação docente.

Desse modo, a Residência Pedagógica oportuniza ao docente em formação uma aproximação entre a teoria acadêmica e a prática em sala de aula, que por sua vez são aspectos indissociáveis. À vista disso, concordamos com Panutti ao afirmar que os programas de formação de professores são de extrema importância no que compete a criação de oportunidades para a troca de experiências entre os profissionais (PANNUTI, 2015, p. 3).

Diante desse contato direto com o espaço escolar, notamos que o futuro educador tem a possibilidade de trocar e partilhar experiências, conviver com a mudança, aprender a lidar com situações complexas e compreender a flexibilidade do planejamento, estruturar o processo de aprendizagem ao relacionar a teoria e a prática em sala de aula, além de atuar em sala com maior abertura possibilitando o exercício da sua autonomia, proporcionando o desenvolvimento de um profissional competente e habilitado.

Dentre os tópicos citados, vale destacarmos a importância de o discente atuar como verdadeiro docente regente de sala pois, conforme Freire (2011), a autonomia de um aluno não se cria somente observando, mas assumindo responsabilidades e tomando decisões.

Além disso, no que diz respeito a introdução dos discentes na escola, verificamos que esta ação possibilita vivenciar situações de conhecimento sobre "o conteúdo a ser ensinado, os princípios gerais de ensino e de aprendizagem, além da didática, representando uma oportunidade para aprender a ensinar, integrando as dimensões teórica e prática" (PANNUTI, 2015, p. 4).

Portanto, o Programa de Residência Pedagógica é muito importante para a formação dos futuros docentes, contudo, frente às adversidades enfrentadas no contexto da pandemia pelo coronavírus no ano de 2020, o PRP iniciou suas atividades na forma remota, em parceria com as disciplinas de estágio, que já estavam ocorrendo desta maneira.

Desta forma, diante da importância de que os residentes aprendam a trabalhar com os imprevistos e vivenciem as situações do processo de ensino e aprendizagem, constatamos a relevância de relatar e contextualizar sobre as observações realizadas das aulas síncronas via *Google Meet*, para que esta experiência com o ensino remoto possa ser compartilhada considerando todas as dificuldades encontradas neste período.

2 Metodologia

Durante a trajetória percorrida na realização das atividades do Programa de Residência Pedagógica e Estágio Supervisionado desenvolvemos um estudo bibliográfico a partir da exploração de livros e artigos científicos.

A experiência relatada e contextualizada neste trabalho compreende a observação das aulas síncronas do preceptor, que aconteceram de modo remoto via *Google Meet*. Observamos, no total, quatro aulas síncronas, duas com as turmas de 1° anos do Ensino Médio e as outras duas com uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola-campo do PRP.

Para acessarmos estas aulas, tivemos a liberação por meio da Secretaria de Estado de Educação do Paraná, assim, o professor preceptor gerava o *link* da videochamada e compartilhava com os residentes por meio de mensagens pelo aplicativo *WhatsApp*. Além disso, respeitando um tipo de cronograma organizado pelo docente orientador em consenso com o preceptor, cada aula era acompanhada por um grupo de no máximo 5 residentes.

Cada aula (*meeting*) observada, tinha duração de 20 minutos em média. Neste período de tempo em que acompanhávamos, foi possível observar e analisar a aula e, por fim, anotar alguns tópicos, ponderações e apontamentos.

3 Resultados e Discussão

Apesar da suspensão das atividades presenciais, tivemos a oportunidade de vivenciar diversas experiências durante este período como residentes pois, mesmo sendo um grande desafio, foram encontrados caminhos para manter a formação dos professores com qualidade também no modo remoto. Portanto, desenvolvemos várias atividades que foram adequadas a esta nova forma de ensino.

No entanto, dentre todas as situações que experienciamos neste período, verificamos a necessidade de relatar e contextualizar sobre as observações das aulas síncronas via *Google Meet* que aconteceram no decorrer do segundo semestre de 2020. Vale lembrarmos que o *Google Meet* é um aplicativo de videoconferência que possibilita a criação de reuniões *on-line*.

No período de ambientação o professor preceptor nos familiarizou com o *Google Classroom*, explicando sobre o funcionamento do ambiente e esclarecendo algumas dúvidas que surgiam sobre o acesso dos alunos às salas de aula virtuais, a realização das atividades, publicação nos murais, entre outros. Também, na primeira aula observada, os residentes foram apresentados aos alunos juntamente com uma breve explicação sobre o PRP e a sua importância para os acadêmicos dos cursos de licenciatura.

Nesta primeira aula, foi trabalhado o conteúdo referente ao Teorema Fundamental da Semelhança por meio da apresentação de *slides* e com o emprego de uma linguagem simplificada. O assunto foi introduzido por meio de definições e exemplos contextualizados que forneceram informações aos alunos para aplicar tais conhecimentos no seu cotidiano.

Na segunda aula observada foi exposto o conteúdo de Soma dos termos de uma PG infinita em que constatamos a utilização de uma linguagem simples e clara pelo professor além de demonstrar uma preocupação em interagir com os alunos. A partir da exposição de slides, a aula foi iniciada com a retomada dos conteúdos de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG) e, após, o docente explicou como ocorre a soma dos termos de uma PG infinita utilizando alguns exercícios direcionados para situações do nosso dia a dia.

A terceira aula foi voltada para o ensino sobre Volume de Prismas e Cilindros, a qual foi introduzida por meio da apresentação de *slides* que abordavam a definição e as características de um cilindro, de um cilindro reto, de um cilindro oblíquo e de um cilindro circular reto. Além de diversas imagens, também foram apresentadas as fórmulas para calcular o volume desses sólidos assim como a explicação e generalização para chegar nas expressões.

Na quarta e última aula observada foram trabalhadas algumas Situações Problema envolvendo PA e PG, para tanto, o professor utilizou uma linguagem simples e objetiva para os encaminhamentos da aula. Esta foi iniciada com uma retomada sobre Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), as diferenças existentes entre ambas e as fórmulas referentes a estes conteúdos. Os problemas propostos foram retirados de Vestibulares e Concursos e para as resoluções, o docente realizava a leitura do enunciado e a explicação da solução.

De modo geral, as aulas observadas no *Google Meet* seguiam sempre um roteiro similar de organização, ou seja, uma mesma metodologia. Estas aulas, que duravam em média 20 minutos, eram destinadas a realizar a leitura e a explicação dos *slides* apresentados pelo professor preceptor e, também, para informar a turma alguns avisos e lembretes. Além disto, os alunos tinham a oportunidade de sanar as dúvidas existentes sobre o conteúdo e as atividades.

É importante destacar que estas aulas eram encaminhadas de acordo com as aulas do Aula Paraná, que é um programa emergencial desenvolvido pelo Governo do Estado do

Paraná que transmitia aulas de forma remota em TV aberta, por meio do *Youtube*, aplicativo no celular, *Google Classroom* e que também fornecia algumas atividades impressas. Desta forma, os conteúdos trabalhados coincidiam com aqueles desenvolvidos no Aula Paraná, tanto que, os slides utilizados para o desenvolvimento das aulas eram aqueles disponibilizados pelo programa.

No decorrer das explicações, o professor preceptor utilizou uma linguagem simples e acessível aos alunos além de empregar um ritmo de fala considerado apropriado. Em vista disso, Cordeiro (2007, p. 99) aponta que a "linguagem é estruturante da relação pedagógica e tem poderosa influência na aprendizagem dos estudantes", nesse sentido, a estrutura do diálogo entre os alunos e o professor tem grande relevância no processo de ensino e aprendizagem.

Além disso, o preceptor demonstrou uma preocupação em interagir com os alunos presentes nas aulas e incentivar a participação dos mesmos, visto que em determinados momentos o professor os questionava se estavam compreendendo o conteúdo ou se tinham alguma dúvida. No que diz respeito à comunicação e interação entre professor e alunos, Carlini et al. (2004) afirma que seja no presencial ou na Educação a Distância (EaD), a relação pedagógica deve ser baseada no diálogo.

Entretanto, as aulas via *Google Meet* que pudemos acompanhar infelizmente foram frequentadas por no máximo dois alunos, mas, também ocorreram aulas que nenhum aluno participou, o que impossibilitou a observação da aula referida por parte de nós, residentes.

Assim, apesar das tentativas de comunicação vindas do preceptor, constatamos pouco interesse de participação e interação por parte dos alunos, visto que as suas respostas eram baseadas em afirmativas do tipo "sim", "não" e "tá bom" e enviadas pelo *chat* do *Google Meet*.

Por meio da observação das aulas via *Google Meet* pudemos experienciar um contato mais próximo, mesmo que breve, com o professor preceptor e com os alunos, proporcionando uma boa noção do trabalho em sala de aula no formato remoto, da relação professor e aluno e dos princípios de ensino e de aprendizagem. Logo, mesmo com as dificuldades, conseguimos conviver com a mudança e aprendemos a lidar com situações complexas de uma forma diferenciada.

4 Conclusões / Considerações Finais

No processo formativo de um professor é extremamente importante a realização de atividades que evidenciem a indissociabilidade entre a teoria e a prática, e a participação nas atividades mencionadas proporcionaram uma aproximação entre a teoria acadêmica e a prática em sala de aula. O Programa de Residência Pedagógica, propicia essa ligação pois tem como objetivo aproximar o licenciando do seu lócus de profissão e assim, estabelecer uma relação com a comunidade escolar (CORDEIRO et al, 2019).

Desta forma, devido à pandemia do Coronavírus e à suspensão das atividades presenciais, os professores orientadores, por meio do PRP, propuseram algumas atividades aos residentes, dentre elas a organização, elaboração e simulação de aulas, e aquela relatada aqui, que consistia em observar as aulas via *Google Meet* que eram ministradas pelo professor preceptor.

Em linhas gerais, esta experiência foi relevante para a nossa "futura" prática docente, pois mesmo com todas as dificuldades vivenciadas por conta das mudanças ocasionadas devido à pandemia da COVID-19, nós, residentes, tivemos a oportunidade de presenciar aulas síncronas com a participação de alguns alunos e visualizar brevemente a realidade em um ambiente escolar mesmo que de forma remota.

REFERÊNCIAS

CARLINI, A. L. et al. **Os Procedimentos de ensino fazem a aula acontecer.** Marta Scarpato (org). São Paulo: Editora Avercamp, 2004.

CORDEIRO, Jaime. **Didática.** 1. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

CORDEIRO, Lais Silva do Vale et al. **Relato de experiência do programa residência pedagógica na formação docente dos licenciandos de biologia do IFRN – Campus Macau**. In: Anais IV CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2019. Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57178>. Acesso em: 20 fev. de 2021.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Editora Paz e Terra LTDA, 2011. 101p.

PANNUTI, Maísa Pereira. **A relação teoria e prática na Residência Pedagógica.** In: EDUCERE – XII Congresso Nacional de Educação. Curitiba – PR, 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/15994_8118.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2021.

POLADIAN, Marina Lopes Pedrosa. **Estudo sobre o Programa de Residência Pedagógica da UNIFESP**: uma aproximação entre Universidade e Escola na formação de professores. Dissertação (Mestrado em Educação: Psicologia da Educação) – Pontíficia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 130. 2014.

O USO DE RECURSOS EDUCACIONAIS ABERTOS NO ENSINO DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Thayara Karine Galdino Felipe da Luz
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
thayara@alunos.utfpr.edu.br

Maria Luiza Doebber
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
marialuizadoebbermld@gmail.com

Ms. Ivan José Coser
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
ijcoser@utfpr.edu.br

Resumo

O crescimento do índice de famílias brasileiras endividadas e a falta de preparação das pessoas para lidarem com questões financeiras, tem despertado preocupação em diferentes segmentos da sociedade, pois traz impactos de ordem social, econômica e financeira na vida das pessoas. Diante disso, algumas instituições, entre elas o Banco Central do Brasil vem apoiando o desenvolvimento de projetos que visam capacitar financeiramente os cidadãos comuns para o enfrentamento dos desafios impostos pela sociedade contemporânea. Muitas escolas brasileiras ainda não contemplam Educação Financeira no currículo, por isso incentivar o desenvolvimento de ações que estimulem esse processo em todas as escolas desde as séries iniciais é algo urgente. Diante dessa urgência, o Estado do Paraná através da Secretaria de Educação, implementou no currículo do estado em 2021, a componente Educação Financeira em todas as séries do Ensino Médio. A componente curricular Educação Financeira preconizada na Base Nacional Comum Curricular - BNCC deve ser desenvolvida de forma interdisciplinar, envolvendo aspectos relacionados às diversas áreas. A inserção desta disciplina, exigirá capacitação aos docentes para desenvolver esse processo, assim como disponibilizar materiais e recursos para realizar esse trabalho. Uma excelente alternativa que surge em relação a materiais é o desenvolvimento de Recursos Educacionais Abertos - REA. Nesse sentido, o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR/Toledo está desenvolvendo um projeto REA onde pretende-se elaborar materiais contendo conceitos, atividades diferenciadas e vídeos com temas ligados à Educação Financeira. A intenção é disponibilizar aos docentes da rede pública estadual de ensino todos os materiais produzidos para auxiliar na Educação Financeira de nossos estudantes, futuros cidadãos deste país.

Palavras-chave: Endividamento. Educação Financeira. Recursos Educacionais Abertos.

1 Introdução

A necessidade de preparar nossos atuais estudantes da Educação Básica para o enfrentamento dos desafios de ordem social, econômica e financeira impostos pela sociedade moderna tem sido cada vez maior.

A Confederação Nacional do Comércio de Bens e Serviços - CNC realizou no ano de 2020 uma pesquisa, onde foi constatado que 67,5% das famílias brasileiras possuem algum tipo de dívida, o maior índice já registrado pela Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor - PEIC. A pesquisa constatou também, que a dívida mais comum entre os brasileiros está ligada às despesas contraídas com o uso do cartão de crédito, em Abril de 2021, cerca de 80,9 % das famílias com dívidas usaram esse recurso.

O crescimento no número de brasileiros com algum tipo de dívida, pode estar relacionado a diferentes fatores, entre eles, pode-se inferir: a frágil situação econômica que o Brasil vem atravessando nesses últimos anos, os efeitos da Pandemia da COVID-19 que fizeram muitas pessoas perderem o emprego e consequentemente a renda, além da falta de uma ação mais efetiva das escolas e das famílias na educação dos indivíduos visando a preparação dos mesmos para o enfrentamento dos desafios de ordem social, econômica e financeira cada vez mais recorrentes em dias atuais.

Nas escolas e famílias brasileiras o diálogo a respeito de questões ligadas à Educação Financeira não é destaque se comparado com a importância que as famílias e escolas de países desenvolvidos atribuem a essa questão, como afirma D'Aquino.

> A Educação Financeira nos países desenvolvidos tradicionalmente cabe às famílias. Às escolas fica reservada a função de reforçar a formação que o aluno adquire em casa. No Brasil, infelizmente, a Educação Financeira não é parte do universo educacional familiar. Tampouco escolar. Assim, a criança não aprende a lidar com dinheiro nem em casa, nem na escola. As consequências deste fato são determinantes para uma vida de oscilações econômicas, com graves repercussões tanto na vida do cidadão, quanto na do país (D´AQUINO, 2017).

A promoção da educação financeira entre os jovens brasileiros é algo que tem mobilizado muitas autoridades do setor educacional em nível municipal, estadual e federal. Algumas iniciativas vêm sendo realizadas, entre elas destaque-se a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF instituída por decreto presidencial com objetivo de promover a Educação Financeira na população, assim como desenvolver nos cidadãos a capacidade para realizar escolhas conscientes e administrar adequadamente os recursos no âmbito pessoal e/ou coletivo.

Outra iniciativa realizada recentemente pelo governo do Estado do Paraná, foi implementar na parte diversificada do currículo escolar, a componente curricular Educação Financeira em todas as séries do Ensino Médio a partir de 2021. Essa iniciativa visa preparar os jovens baseado em aprendizagens que envolvem o planejamento de gastos e desenvolvimento de atitudes e comportamentos que contribuam para melhoria da qualidade de vida das pessoas e de suas famílias.

A promoção da Educação Financeira nas escolas dependerá do preparo dos professores que atuarão com essa temática. Além disso, deve-se ter disponibilidade de recursos, materiais didáticos e audiovisuais que possam auxiliar o trabalho desses profissionais.

Nesse sentido, o projeto de recursos educacionais abertos - REA que vem sendo desenvolvido por duas alunas do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR/Toledo sob a orientação de um docente desse mesmo curso, visa elaborar um material de boa qualidade, constituído de conceitos, atividades diferenciadas e vídeo aulas com temas ligados a Educação Financeira, em consonância com os anseios e as necessidades dos docentes e alunos da rede pública estadual de ensino.

Ao longo do projeto REA em desenvolvimento, pretende-se reforçar a relevância da Educação Financeira para a vida das pessoas, a importância de ter docentes capacitados, assim como a disponibilidade de materiais e recursos adequados para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Educação Financeira.

2 Material e Métodos

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC do Ensino Médio preconiza que a temática da Educação Financeira deve ser contemplada em habilidades dos componentes curriculares, preferencialmente de forma transversal e integradora. A Educação Financeira engloba um amplo campo de investigação, pois mobiliza diferentes saberes, competências e habilidades ligadas a diversas áreas do conhecimento tais como Matemática, Economia, Psicologia entre outros.

Considerando a diversidade de áreas envolvidas nesse processo que envolve o desenvolvimento da Educação Financeira é necessário garantir que os recursos e materiais sejam elaborados para contemplar todas essas áreas integralmente.

A produção de recursos educacionais abertos apresenta-se como uma excelente alternativa, pois esse tipo de recurso, sendo aberto ao público, permite que professores e alunos acessem livremente os materiais produzidos e com isso, espera-se que o processo de ensino e aprendizagem da Educação Financeira das pessoas ocorra efetivamente.

O projeto REA em desenvolvimento no Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR/TD visa elaborar recursos e materiais relacionados à temática Educação Financeira a partir de uma pesquisa de natureza básica que busca a ampliação do conhecimento por meio de pesquisa bibliográfica, sem aplicação prática prevista e com caráter exploratório, pois pretende apresentar uma abordagem mais apropriada para o contexto escolar.

A motivação para a produção do material voltado para a temática Educação Financeira está na carência, ainda existente, de materiais e recursos que podem auxiliar principalmente os docentes que atuam com o tema apontado acima.

O material didático que está sendo produzido será composto de uma base teórica e de atividades elaboradas para uso em sala de aula, buscando envolver a Matemática Financeira assim como outras áreas do conhecimento que estejam relacionadas. Além disso, serão produzidos vídeos de curta duração, com abordagem de temas que possam promover nos estudantes reflexão de atitudes, reavaliação de comportamentos, mudanças de posturas e análise crítica para tomada de decisões com relação às questões de ordem financeira no aspecto pessoal e/ou coletivo.

3 Resultados e Discussão

Atualmente é cada vez maior o número de organizações e instituições, nacionais e/ou internacionais, assim como pesquisadores e estudiosos, que reconhecem a importância da Educação Financeira na vida das pessoas. Ser capaz de administrar imprevistos, tomar decisões no âmbito pessoal e/ou coletivo ou ainda enfrentar situações adversas envolvendo aspectos de ordem financeira é o que se espera de nossos jovens, futuros cidadãos deste país. A importância da Educação Financeira para o cidadão comum é destacada por Teixeira (2015, p.13)

> A Educação Financeira não consiste somente em aprender a economizar, cortar gastos,poupar e acumular dinheiro, é muito mais que isso. É buscar uma melhor qualidade de vida, tanto hoje quanto no futuro, proporcionando a segurança material necessária para obter uma garantia para eventuais imprevistos.

Para promover a Educação Financeira de uma forma mais efetiva, acredita-se que, a sua inserção no currículo formal de todas as escolas desde os anos iniciais, seja uma excelente alternativa, como preconiza a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico – (Organisation for Economic Co-operation and Development -

OECD (2005b, p. 5): “A Educação Financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas”.

Um dos principais objetivos a ser atingido com a Educação Financeira é a promoção do letramento financeiro entre as pessoas. A OECD (2011) destaca que o letramento financeiro é uma combinação de consciência crítica, conhecimentos, habilidades, atitudes e comportamentos necessários para que cada cidadão possa tomar decisões acertadas e alcançar um nível satisfatório de bem-estar financeiro. Para Lusardi e Mitchell (2011) a falta de letramento financeiro é um problema social, concluindo que não devemos pensar em educar financeiramente um indivíduo, mas a sociedade, de modo mais amplo.

A necessidade de educar financeiramente as pessoas é consenso entre os especialistas, porém, para que esse processo ocorra, deve-se capacitar os docentes para essa finalidade. Campos e Teixeira e Coutinho (2015) lembram que “[...] o desafio de desenvolver a Educação Financeira nas escolas passa pelo enfrentamento da necessidade de capacitação dos professores para esse fim” (CAMPOS; TEIXEIRA; COUTINHO, 2015, p. 575).

Outro fator importante a ser considerado, além da capacitação do professor, é disponibilizar a esses profissionais que atuarão no desenvolvimento do processo de educação financeira das pessoas, recursos e materiais adequados desenvolvidos com auxílio de tecnologias, integrando diferentes áreas do conhecimento e tudo isso, para colaborar com o trabalho dos professores.

Nessa linha de raciocínio surgem os recursos educacionais abertos como uma excelente alternativa para corroborar com o trabalho dos docentes que devem atuar com a temática Educação Financeira, pois sendo de livre acesso, esse tipo de recurso permite a produção de materiais de forma colaborativa, considerando o compartilhamento de experiências e materiais desenvolvidos por outras pessoas.

A implementação da Educação Financeira no currículo escolar do Ensino Médio do Estado do Paraná em 2021, motivou a criação de um projeto REA no Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR/TD. O projeto em desenvolvimento, conta com a participação de duas alunas que sob a supervisão e orientação de um docente do referido curso, estão trabalhando para produzir materiais que atendam os anseios dos docentes e alunos da rede pública estadual de ensino em relação à Educação Financeira.

No material que está em fase produção pretende-se utilizar recursos diferenciados para tratar de temas como: a relação das pessoas com o dinheiro, consumismo, orçamento familiar, planejamento financeiro, poupança, entre outros.

Depois de pronto, os materiais produzidos durante o projeto, serão disponibilizados para acesso aos professores da rede pública estadual de ensino.

4 Considerações Finais

A necessidade de capacitar financeiramente as pessoas, principalmente as mais jovens, tem sido defendida cada vez mais pelos estudiosos, porém esse processo de capacitação deve ser incentivado para ocorrer principalmente nos ambientes escolares desse país.

Mas, para esse processo de Educação Financeira ocorrer efetivamente nas escolas é necessário capacitar os docentes e disponibilizar a esses profissionais, recursos e materiais que possam auxiliar nesse trabalho.

A produção de recursos educacionais abertos é uma alternativa que possibilita a criação de materiais e recursos a partir do compartilhamento de experiências vivenciadas, sendo assim o projeto REA em desenvolvimento no Curso de Licenciatura de Matemática da UTFPR/TD, pretende produzir materiais e recursos que auxiliem os docentes da rede pública estadual que atuam com a Educação Financeira.

Espera-se que o material produzido tenha boa qualidade e que possa auxiliar efetivamente os docentes na promoção da Educação Financeira, para que os atuais estudantes possam exercer no futuro seu papel de cidadão, demonstrando habilidades para tomar decisões com relação às questões de ordem financeira no aspecto pessoal e/ou coletivo.

Em tempo, aproveita-se o momento para agradecer todo o apoio, seja financeiro ou não, viabilizado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná para o desenvolvimento do referido projeto.

Referências

CAMPOS, C. R.; TEIXEIRA, J.; COUTINHO, C. Q. S. **Reflexões sobre a Educação Financeira e suas interfaces com a Educação Matemática e a Educação Crítica**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 17, n. 3, 2015.

D'AQUINO, C. O. **O que é Educação Financeira**. Disponível em: http://educacaofinanceira.com.br/index.php/escolas/conteudo/513. Acesso em: 10 mar. 2021.

LUSARDI, A.; MITCHELLI, O. S. **Financial literacy and retirement planning in the United States.** Journal of Pension Economics & Finance, v. 10, n. 4, p. 509-525. 2011.

NEDER, Vinicius. Endividamento das famílias sobe a 67,5% e volta a bater recorde, aponta estudo. **CNN BRASIL**. Disponível em: Endividamento das famílias sobe a 67,5% e volta a bater recorde, aponta estudo. Acesso em: 04 mai. 2021.

OECD. **Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness**. Directorade for Financial and Enterprice Affairs. Jul. 2005b. Disponível em https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/35108560.pdf. Acesso em: 06 maio. 2021.

OECD. **Measuring financial literacy: Questionnaire and guidance notes for conducting an internationally comparable survey of financial literacy**. Periodical Measuring Financial Literacy: Questionnaire and Guidance Notes for conducting an Internationally Comparable Survey of Financial Literacy, 2011.

TEIXEIRA, J. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira**. 2015. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica.São Paulo, Brasil, 2015.

QUADRADOS NATURAIS E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Valter Rocha da Silva
Universidade Federal de Pernambuco
valter.rocha@hotmail.com

Everton Henrique Cardoso de Lira
Universidade Federal de Pernambuco
everton.ufpe@hotmail.com

Resumo

Neste pequeno artigo apresentamos um truque matemático envolvendo uma configuração dos n^2 primeiros números naturais em formato de quadrado, conhecida como "quadrado natural". Na ocasião, o truque é inicialmente desenvolvido em um quadrado natural de ordem 4, em seguida, realizamos algumas considerações sobre a generalização do truque para quadrados naturais de ordem $n \in \mathbb{N}$ e para quadrados naturais em que seus termos são membros de uma progressão aritmética qualquer. Como resultado, encontramos uma progressão aritmética de segunda ordem, cujo termo geral fornece a soma de n elementos escolhidos em linhas e colunas distintas de um quadrado natural de ordem n, além disso, pudemos verificar que as somas das linhas e as somas das colunas de um quadrado natural de ordem n, estão em progressão aritmética, e nestes casos também encontramos os termos gerais para estas progressões.

Palavras chave: Progressões Aritméticas. Quadrados Naturais. Truque matemático.

1. Introdução

Como forma de atrair a atenção de nossos alunos, é muito comum utilizarmos em sala de aula jogos e truques de natureza matemática. Um dos truques matemáticos mais comuns são os chamados "quadrados mágicos", os quais são números naturais distintos, dispostos em forma de quadrado, de maneira que a soma dos elementos de cada linha, coluna e/ou diagonal é sempre igual a um valor fixo, com tal valor fixo sendo chamado de constante mágica do quadrado. Na Figura 1 temos o exemplo de um dos "quadrados mágicos" mais conhecidos, o qual possui constante mágica igual a 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 1 - Quadrado Mágico com constante mágica igual a 15
Fonte: Os autores

Neste texto trabalharemos com uma variação dos quadrados mágicos, conhecidos como “quadrados naturais”, os quais consistem em dispor os números naturais de 1 a n^2 em ordem crescente, formando um quadrado de lado n, ou se preferir, de ordem n. Um exemplo de quadrado natural de ordem 4 está mostrado na Figura 2.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figura 2 – Exemplo de Quadrado Natural de ordem 4.
Fonte: Os autores

2. Metodologia

Nossa metodologia para este trabalho consistiu em um estudo exploratório pautado na investigação matemática[1], o qual consistiu em quatro momentos: i) compreender o truque matemático com um quadrado natural de ordem 4; ii) generalizar o truque para um quadrado natural de ordem n; iii) realizar uma segunda generalização, na qual os números no quadrado natural são termos de uma progressão aritmética qualquer; e iv) investigar e enunciar outras propriedades dos quadrados naturais, sem contudo, as provar.

Passamos agora a apresentar o truque matemático envolvendo um quadrado natural de ordem 4. O truque consiste em escolher 4 números do quadrado, um de cada vez. Escolhido o primeiro número, numa dada posição, são descartados para a segunda escolha os demais números que estão na mesma linha e coluna do primeiro número. O mesmo procedimento é seguido para as próximas escolhas até que não sobre mais números para serem escolhidos. Independentemente dos números escolhidos, a soma destes 4 números sempre resulta em 34. Na Figura 3, temos o quadrado natural de ordem 4 com 3 escolhas distintas de números possíveis, onde facilmente nota-se que as somas dos números destacados em cada quadrado é 34.

[1] Destacamos que a expressão “investigação matemática” está sendo utilizada aqui no sentido estrito da mesma, ou seja, descrevendo o processo de investigar as propriedades dos quadrados naturais e as possíveis relações existentes entre estes objetos com outros objetos matemáticos.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Figura 3 – Exemplos de escolhas de 4 números em um Quadrado Natural de ordem 4
Fonte: Os autores

2.1. Buscando uma explicação para o truque

Para descobrir porque este truque sempre funciona, iniciamos por investigar se nos quadrados naturais de ordens 1, 2, 3 e 5, verificava-se comportamento semelhante. Constatamos que quaisquer que sejam os números escolhidos em tais casos, respeitadas as mesmas condições impostas ao quadrado de ordem 4, obtém-se sempre uma soma constante dos números selecionados, soma esta cujos valores são 1, 5, 15 e 65, respectivamente.

Sendo a_n a soma dos n números escolhidos do quadrado de lado n, temos $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 15$, $a_4 = 34$ e $a_5 = 65$. Sendo Δa_n a sequência de diferenças $a_{n+1} - a_n$, para $1 \leq n \leq 4$ temos $\Delta a_1 = 4$, $\Delta a_2 = 10$, $\Delta a_3 = 19$ e $\Delta a_4 = 31$. Sendo $\Delta^2 a_n$ a sequência de diferenças $\Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ para $1 \leq n \leq 3$, temos $\Delta^2 a_1 = 6$, $\Delta^2 a_2 = 9$ e $\Delta^2 a_3 = 12$; note que os termos de $\Delta^2 a_n$ estão em progressão aritmética.

Assumindo que os termos de $\Delta^2 a_n$ continuarão surgindo em progressão aritmética, podemos construir a Tabela 1, a qual nos fornece os termos de a_n, Δa_n e $\Delta^2 a_n$, para $1 \leq n \leq 10$.

Tabela 1 – Primeiros 10 termos das sequências a_n, Δa_n e $\Delta^2 a_n$.

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$
1	1	4	6
2	5	10	9
3	15	19	12
4	34	31	15
5	65	46	18
6	111	64	21
7	175	85	24
8	260	109	27

9	369	136	30
10	505	166	33

Fonte: Os autores

Definição 1: Uma progressão aritmética de ordem $p, (p > 2)$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $p-1$.

Pela Definição 1 e pela Tabela 1, podemos afirmar que a_n é uma progressão aritmética de 3ª ordem, para $1 \leq n \leq 10$. O teorema a seguir nos permite determinar uma expressão para o termo geral de a_n.

Teorema 1: Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (x_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (x_n) é um polinômio de grau p em n.

Demonstração: Ver (MORGADO e CARVALHO, 2015, pp. 40 – 42).

Utilizando o Teorema 1, é possível mostrar que a_n tem como termo geral (pelo menos para $1 \leq n \leq 10$) o polinômio de grau 3 em n, $a_n = \frac{n}{2}(n^2+1)$. Na próxima seção, demonstraremos que de fato, esta expressão fornece todos os valores de a_n para todo n natural.

2.2. Demonstração do caso geral.

A seguir buscamos mostrar que a expressão obtida para a_n na seção anterior é de fato a expressão que retorna a soma dos elementos escolhidos num quadrado natural de ordem n qualquer. Generalizando o quadrado natural de ordem 4, para um de ordem $n \in \mathbb{N}$ nós obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (n-1)\cdot n+1 & (n-1)\cdot n+2 & (n-1)\cdot n+3 & \cdots & n^2 \end{array}$$

Note que em todos os elementos da primeira coluna aparece o número 1, em todos os elementos da segunda coluna aparece o número 2 e assim sucessivamente até a $n-\acute{e}sima$ coluna, na qual o n aparece em todos os elementos. De forma semelhante, todos os elementos da primeira linha estão somados a 0, todos os elementos da segunda linha estão somados a n e assim sucessivamente até a $n-\acute{e}sima$ linha na qual todos os elementos estão somados a $(n-1)n$.

Isto posto, e dadas as regras de escolha dos números, as quais, nos levam a escolher apenas um elemento de cada linha e coluna, é possível mostrar que após escolhermos n números do quadrado natural acima e os somarmos, obrigatoriamente teremos os números de 1 até n como uma parcela da soma e os números de 1 até $n-1$ multiplicados por n como outra parcela da soma.

Mais precisamente, após reordenar os termos, obtemos a seguinte expressão para o termo geral a_n:

$$a_n = (1+2+\cdots+n) + n[1+2+\cdots+(n-1)] = \frac{n}{2}\cdot(n+1) + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot n = \frac{n}{2}\cdot(n^2+1),$$

a qual, é justamente o termo geral da sequência a_n, obtido no início da nossa investigação, o que mostra que de fato, estávamos certos em nossa suposição de ser a_n uma progressão aritmética de 3ª ordem.

2.3. Uma segunda generalização.

No caso de considerarmos um quadrado natural de ordem n cujos elementos são membros sucessivos de uma progressão aritmética de primeiro termo x_1 e razão r, $x_1, r \in \mathbb{N}$, temos que tal quadrado terá a seguinte aparência:

$$\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_1+r & x_1+2r & \cdots & x_1+(n-1)r \\
x_1+nr & x_1+(n+1)r & x_1+(n+2)r & \cdots & x_1+(2n-1)r \\
x_1+2nr & x_1+(2n+1)r & x_1+(2n+2)r & \cdots & x_1+(3n-1)r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
x_1+(n-1)nr & x_1+[(n-1)n+1]r & x_1+[(n-1)n+2]r & \cdots & x_1+(n+1)(n-1)r
\end{array}$$

Aqui também é possível notar que em todos os elementos da primeira coluna aparece o número x_1, em todos os elementos da segunda coluna aparece o número x_1+r e assim sucessivamente até a $n-ésima$ coluna, onde aparece o número $x_1+(n-1)r$ em todos os seus elementos. De forma semelhante, todos os elementos da primeira linha estão somados a zero, todos os elementos da segunda linha estão somados a nr, todos os elementos da terceira linha estão somados a $2nr$ e assim sucessivamente até a $n-ésima$ linha, na qual todos os elementos estão somados a $(n-1)nr$.

Dito isto, e dadas as regras de escolha dos números (que continuam sendo as mesmas), notamos que após escolhermos n números do quadrado natural acima e os somarmos, obrigatoriamente aparecerão os números de x_1 até $x_1+(n-1)r$ como uma parcela da soma e os números de nr até $(n-1)nr$ como outra parcela da soma.

Mais precisamente, após reordenar os termos, teremos a seguinte soma, que chamaremos de S_n, como resultado:

$$\begin{aligned}
S_n &= x_1+(x_1+r)+(x_1+2r)+\cdots+[x_1+(n-1)r]+nr[1+2+3+\cdots+(n-1)] \\
&= nx_1+r[1+2+3+\cdots+(n-1)]+nr[1+2+3+\cdots+(n-1)] \\
&= nx_1+\frac{r(n-1)n}{2}+\frac{r(n-1)n^2}{2}=\frac{2nx_1+r(n-1)n+r(n-1)n^2}{2} \\
&= n\left[\frac{2x_1+r(n-1)(n+1)}{2}\right].
\end{aligned}$$

Cabe observar que se na expressão de S_n acima tomarmos $x_1=1$ e $r=1$ recaímos na expressão obtida para a_n.

2.4. Exemplo.

Na Figura 4 temos o exemplo de um quadrado natural de ordem 6, cujos elementos fazem parte da progressão aritmética $x_n=12+8(n-1)$. Se escolhermos 6 elementos seguindo as mesmas regras descritas para o de ordem 4, teremos que a soma dos seis elementos será igual a: $S_6=n\left[\frac{2x_1+r(n-1)(n+1)}{2}\right]=6\left[\frac{2\cdot 12+8\cdot(6-1)(6+1)}{2}\right]=912.$

12	20	28	36	44	52
60	68	76	84	92	100
108	116	124	132	140	148
156	164	172	180	188	196
204	212	220	228	236	244
252	260	268	276	284	292

Figura 4 – Quadrado Natural de ordem 6 com elementos de uma progressão aritmética
Fonte: Os autores

3. Considerações Finais

Ao termino do nosso estudo pudemos concluir que o truque envolvendo o quadrado natural de ordem 4 é um caso particular do que ocorre em quadrados naturais de ordem n qualquer, mais ainda, pudemos encontrar o termo geral para a sequência que fornece os valores da constante mágica de um quadrado natural de ordem n dada. Além de realizar esta generalização, pudemos identificar que na segunda generalização, em que os termos do quadrado natural estão em progressão aritmética, também é possível encontrar um termo geral para a sequência que fornece os valores da constante mágica de um quadrado natural de ordem n dada.

Por fim, cabe ainda cabe ainda a menção a alguns fatos que observamos, mas que por questões de brevidade, decidimos não explorar neste texto:

1. Os números obtidos através da soma das linhas de um quadrado natural formam uma progressão aritmética y_n de primeiro termo $y_1 = \frac{n}{2}[2x_1 + r(n-1)]$ e razão $s = rn^2$; os números obtidos através da soma das colunas de um quadrado natural formam uma progressão aritmética z_n de primeiro termo $z_1 = \frac{n}{2}[2x_1 + rn(n+1)]$ e razão $t = rn$.
2. A soma dos $\frac{n}{2}$ primeiros elementos de uma linha com a soma dos últimos $\frac{n}{2}$ elementos pertencendo à linha colocada simetricamente em relação à linha mediana, é igual a S_n. O mesmo resultado vale para as colunas.

3. Se em um quadrado natural de ordem n formarmos um quadrado de ordem $n-1$, tomando os números que não estão na primeira coluna e na última linha e deste escolhermos $n-1$ números teremos como soma $a_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)^3+\frac{1}{2}(n-1)^2+n-1$.

Como mencionado anteriormente, pela brevidade deste trabalho, não vamos nos ocupar em verificar a veracidade destes fatos, ficando esta tarefa para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

MORGADO, César Augusto; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. – Rio de Janeiro: SBM, 2015.