

Minicurso: Matemática e Arte

Dra. Vanessa Largo

Ms. Heloísa Cristina da Silva

Esse minicurso será desenvolvido em duas partes. Em um primeiro momento será abordado o assunto Razão Áurea. O interesse pelo tema é justificado pela estreita relação existente entre Razão Áurea e beleza. Além dessa primeira relação, o Número de Ouro, resultante da Razão Áurea, pode ser encontrado em outros contextos como por exemplo, na determinação do $\sin 18^\circ$, na determinação do ângulo em que $\cos x = \tan x$ e a relação entre as potências do Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci.

Em um segundo momento, trataremos do tema Arte Africana, tendo como base alguns estudos de Paulus Gerdes, apresentados em seu livro “Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas”. Paulus Gerdes é um educador matemático que desenvolve a pesquisa etnomatemática na África. Iniciou sua investigação em Moçambique, no final da década de 1970/1980, na formação de professores da Matemática. Visitou várias culturas, como Tonga e Makwe, em Moçambique e as Cokwe, em Angola. A pesquisa de Gerdes o levou a descoberta de curvas-de-espelho. Além disso, Gerdes descobriu que as belas curvas dos desenhos do povo africano se relacionam com outras curvas traçadas por egípcios, célticos e mulheres do Sul da Índia. Toda a sua investigação pode ser consultada em seu livro, nesse minicurso, apresentaremos uma pequena introdução da pesquisa realizada por Gerdes.

Sejam todos bem-vindos ao minicurso Matemática e Arte!!!!

A Razão Áurea

Definição 1: Dizemos que um ponto C divide um segmento \overline{AB} na *razão áurea* se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Chamando $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$, temos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

$$\begin{aligned}
a(a-x) &= x^2 \\
a^2 + ax &= x^2 \\
x^2 + ax - a^2 &= 0 \\
x &= \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} \\
x &= \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}
\end{aligned}$$

Como x é uma medida de comprimento, usaremos somente o resultado positivo:

$$x = \frac{a(-1 + \sqrt{5})}{2}$$

Como desejamos saber qual é a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} &= \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\varphi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Construção geométrica do segmento áureo

Roteiro para o Geogebra:

1. Construa um segmento $\overline{AB} = a$ (Terceiro item da barra de ferramentas, no item “segmento definido por dois pontos”).
2. Trace a perpendicular por um dos pontos, por exemplo A (Quarto item da barra de ferramentas, no item “reta perpendicular”).
3. Trace o ponto médio do segmento $\overline{AB} = \frac{a}{2}$ (Segundo item da barra de ferramentas, no item “ponto médio ou centro”).
4. Trace uma circunferência com centro em A e raio \overline{AC} (Sexto item da barra de ferramentas, no item “compasso”).
5. Marque o ponto D na interseção da reta perpendicular, traçada no item 2, com a circunferência, traçada no item 4 (Segundo item da barra de ferramentas, no item “novo ponto”).
6. Trace o segmento de reta passando por B e D, resultando o triângulo retângulo BD (Segundo item da barra de ferramentas, no item “segmento de reta definido por dois pontos”).
7. Trace uma circunferência com centro em D e raio $\overline{AC} = \frac{a}{2}$ (Sexto item da barra de ferramentas, no item “compasso”).
8. Marque o ponto E na interseção da circunferência, traçada no item 7, com o segmento de reta \overline{BD} (Segundo item da barra de ferramentas, no item “novo ponto”).

9. Transfira a medida \overline{BE} para o segmento \overline{AB} (Sexto item da barra de ferramentas, no item “compasso”).
10. Marque o ponto F no segmento \overline{AB} (Segundo item da barra de ferramentas, no item “novo ponto”).
11. O ponto F é o ponto que divide o segmento \overline{AB} na razão áurea.

Definição 2: Chama-se *retângulo áureo* o retângulo no qual a razão de suas medidas obedece a razão áurea.

Definição 3: Chama-se *triângulo áureo* o triângulo semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa φ e catetos 1 e $\sqrt{\varphi}$.

Atividades

1. Será que há alguma particularidade quando calculamos a área e o perímetro de um retângulo áureo?

RESOLUÇÃO:

Área:

$$A = ax = a \left(\frac{-a+a\sqrt{5}}{2} \right) = a^2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) = a^2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} \right) = a^2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2(-1-\sqrt{5})} = a^2 \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) = \frac{a^2}{\varphi}$$

Perímetro:

$$2p = 2x + 2a = 2 \left(\frac{-a+a\sqrt{5}}{2} \right) + 2a = -a + a\sqrt{5} + 2a = -a + a\sqrt{5} = a(1 + \sqrt{5})$$

2. Quais valores de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tais que $\cos x = \tan x$?

RESOLUÇÃO:

$$\cos x = \tan x$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x = \sin x$$

$$1 - \sin^2 x = \sin x$$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x > 0$. $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}$

3. Qual o valor de $\sin 18^\circ$?

RESOLUÇÃO:

Precisamos lembrar que:

$$\sin 2u = 2\sin u \cdot \cos u$$

$$\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$$

Para $u = 18^\circ$:

$$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ$$

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$

Para $u = 72^\circ$:

$$\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = 2(2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ)(1 - 2\sin^2 18^\circ)$$

Como $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ \neq 0$

$$\frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{(4\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ)(1 - 2\sin^2 18^\circ)}{\sin 18^\circ}$$

$$1 = 4\sin 18^\circ(1 - 2\sin^2 18^\circ)$$

Chamando $x = \sin 18^\circ$

$$1 = 4x(1 - 2x^2)$$

$$1 = 4x - 8x^3$$

$$8x^3 - 4x + 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 4x - 2) = 0$$

Resolvendo a equação, encontramos os valores:

$$x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

Como $\sin 18^\circ$ não pode ser $\frac{1}{2}$, pois $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ e $\sin 18^\circ > 0$, então $\sin 18^\circ = \frac{1}{2\varphi}$. Como consequência, $\cos 72^\circ = \frac{1}{2\varphi}$.

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$$