ANAIS

IV SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

A Matemática na Harmonia da Natureza

Página do Evento
http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/IV_semat/index.php

Toledo-PR
Maio - 2016

ANAIS

IV SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

A Matemática na Harmonia da Natureza

Página do Evento

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/IV_semat/index.php

Toledo-PR

Maio – 2016

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (4: 2016: Toledo, PR)

Anais da IV Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR), 02 a 06 de maio de 2016. / organizado pelo Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. - Toledo, PR, 2016.

59 f.

Modo de Acesso: World Wide Web: <http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/IV_semat/index.php>.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo - Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo

SUMÁRIO

A ASTRONOMIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Aplicações em Geometria Analítica

Marcos Willian da Silva Santos[1]
FAMPER – Faculdade de Ampére
marcoswilian50@outlook.com

1. APRESENTAÇÃO

O estudo da Astronomia no ambiente escolar geralmente ocorre de forma pincelada dentro das disciplinas de Ciências ou Física. Entretanto, tal conteúdo possui valor metodológico inestimável, usufruindo de uma interdisciplinaridade única e com aplicações matemáticas em diversos conteúdos. Assim sendo, neste trabalho foi feito um estudo sobre a Astronomia, sua interdisciplinaridade, e aplicações nos mais diversos conteúdos de matemática. Por fim, foi elaborada uma proposta de atividade voltada ao ensino médio, dentro do estudo da Geometria Analítica.

Assim, como diversas técnicas utilizadas pela astronomia recorrem à matemática, é possível ao professor unir o útil ao agradável ao trabalhar com conteúdos matemáticos por meio de situações decorrentes da astronomia. Desta forma, as aulas se tornarão mais dinâmicas e atraentes, gerando possivelmente melhores resultados.

Diante disso, efetuou-se o estudo da Geometria Analítica com o auxílio de situações oriundas da astronomia, de forma a enriquecer e tornar mais atraente para o aluno o processo de ensino aprendizagem.

2. A astronomia e a interdisciplinaridade

O atual cenário do ensino escolar apresenta-se de forma fragmentada e desarticulada, formando indivíduos despreparados para lidar com situações que exijam uma formação crítica e interconectada, e o ensino da matemática não é exceção.

A matemática é, em muitos casos, julgada pelos alunos como uma disciplina difícil, com poucas aplicabilidades e tediosa de ser manuseada, sendo poucos os estudantes com habilidade suficiente para lidar com ela. Isto ocorre muito provavelmente a dois principais fatores: primeiramente, pelo fato dos estudantes já chegarem à escola possuindo tais

[1] Graduando em Matemática na Faculdade de Ampére (FAMPER), bolsista do Programa Universidade para Todos (Prouni).

conceitos formados, oriundos de seus pais e contexto social; e segundamente pela forma que a disciplina foi trabalhada pelos seus antigos professores da área.

Segundo o PCN introdutório do ensino fundamental “toda a pessoa – criança, adolescente ou adulto – deve poder se beneficiar de uma formação concebida para responder às suas necessidades educativas fundamentais”, sendo eles conceitos, atitudes e valores.

Porém, com o advento da fragmentação do conhecimento, conteúdos de determinada disciplina são construídos sem a presença de outros, ofertando uma formação insatisfatória perante as reais necessidades do educando. Diante disso, conforme afirma Signorelli,

> “A construção de uma escola democrática passa, necessariamente, pelo rompimento com essa visão seletiva e propedêutica, e uma das formas de empreender essa construção é desenvolver um ensino interdisciplinar. Um ensino no qual as atividades de aprendizagem dêem prioridade à capacidade de pensar os problemas reais que afligem a sociedade, problemas esses que não pertencem a uma disciplina específica e que para serem resolvidos precisam dos conhecimentos científicos disciplinares. ”

Assim, uma educação interdisciplinar pode fornecer a base para a construção dos conhecimentos escolares, indo além de um modelo fragmentado e focado na especialização, para ofertar uma formação plena e integralizada.

Nesse contexto, devido à sua interdisciplinaridade, a Astronomia se apresenta como uma possibilidade de unir diversas áreas do conhecimento, partindo do fascínio natural dos alunos pelo tema para explorar, de forma paralela, conteúdos de diversas disciplinas. Por meio de projetos ou mesmo atividades embutidas na rotina da classe, é possível trabalhar de forma conjunta com conteúdos de Matemática (geometria analítica, plana e espacial, funções, sequências, estatística, etc), Física (gravitação, leis de Keler), Química (termoquímica), Biologia (origem da vida), História (antiga Grécia e Egito), Geografia (cartografia), Português (interpretação e produção de textos), Educação Artística (apresentações sobre astronomia nas 7 manifestações artísticas) e Educação Física (tecnologias do esporte), Inglês e Espanhol (produção e interpretação de textos), Filosofia (primeiros filósofos), sociologia (primeiras escolas sociológicas) e demais disciplinas contempladas pelo currículo da escola.

Além disso, tecnologias utilizadas nas mais variadas áreas do saber surgiram a partir da astronomia, como: telecomunicações, detectores de raio-X, sensores de luz, etc.; e é mais uma possibilidade para o professor partir de tais aparatos tecnológicos para desenvolver determinado conteúdo dentro de sua disciplina. Desta forma, haverá a contextualização dos conteúdos que, conforme esclarece Paula e Fernandes (2009, p. 01), "A contextualização, associada à interdisciplinaridade, vem sendo divulgada pelo MEC como princípio curricular central dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), capaz de produzir uma revolução no ensino".

Portanto, independente da estratégia metodológica adotada pelo educador, a Astronomia se apresenta como uma opção para explorar a interdisciplinaridade, especialmente num contexto onde é evidente a necessidade de desfragmentação da educação.

2.1 A astronomia e tendências de ensino da Matemática

No atual contexto educacional, as discussões em torno da importância da utilização das tendências de ensino da matemática vêm ganhando força, e já não é raro se deparar com professores explorando tais recursos com seus alunos. Conforme afirma Maior e Trobia (2009, p. 05), isto ocorre por que

> "O professor de matemática está sendo desafiado a ser substituído pelo educado matemático que vê a matemática como um campo investigativo, onde ele vai construir seus próprios métodos e não apenas seguir modismos de opinião pública".

Assim, na busca de seus próprios métodos, o docente tende a se identificar com algumas tendências, que passarão a reger os encaminhamentos metodológicos de suas aulas. Conforme expõe a Secretária de Estado da Educação (2009), as tendências metodológicas que caracterizam a Educação Matemática são: Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática, Investigação Matemática e Resolução de Problemas.

Em cada uma das tendências, há a possibilidade de se explorar o estudo da astronomia e, através dos encaminhamentos metodológicos correspondentes, utilizá-la como instrumento para facilitar o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

2.2 Astronomia: uma aplicação matemática

Pensando no trabalho com progressões, sabe-se que a força gravitacional presente nos corpos celestes atrai a matéria que estiver próxima para seu centro, de forma que quanto mais perto, maior é a atração. Assim, a gravidade gera um efeito de aceleração da matéria, ou seja, altera sua velocidade em direção ao centro gravitacional. Da Física Clássica, sabe-se que o cálculo da aceleração é expresso por $a=\Delta v/\Delta t$, onde a representa a aceleração, Δv a variação de velocidade e Δta variação de tempo. Desta maneira, para uma aceleração de 10 m/s^2, valor muito próximo ao da Terra, a variação de velocidade viria a ocorrer da seguinte forma:

$a = \Delta v/\Delta/t \Rightarrow 10 = \Delta v/1 \Rightarrow \Delta v = 10.$

$a = \Delta v/\Delta t \Rightarrow 10 = \Delta v/2 \Rightarrow 10x2 = \Delta v \Rightarrow \Delta v = 20.$

O mesmo padrão se repete até que o corpo alcance a superfície, gerando uma Progressão Aritmética da forma (0, 10, 20, 30, ...). Assim, partindo de uma situação problema e utilizando-se de um conteúdo básico de Física, o professor pode introduzir e aprofundar o estudo das progressões, de uma forma atrativa para o aluno e que não se limita à análise e aplicação de fórmulas e teoremas matemáticos.

Sob a mesma perspectiva, é possível trabalhar a Progressão Geométrica por meio da análise do crescimento de algumas espécies de bactérias presentes no corpo do astronauta, que terão de utilizar os recursos necessários para lidar com a falta ou o excesso dos mesmos em seus organismos. Destaca-se a possibilidade de se realizar um trabalho interdisciplinar aliado à disciplina de Biologia.

Passando a lidar com os conjuntos, inicialmente, é possível introduzir o conteúdo a partir das classificações dos corpos celestes, explorando suas divisões em grupos e subgrupos. Tendo esta noção inicial sido estabelecida, as operações com conjuntos podem ser associadas a situações observáveis no Universo, através da relação entre amontoados e seus elementos. Por exemplo, o planeta Terra está contido ($\subset$) no Sistema Solar, enquanto o planeta Kepler-22 não está ($\not\subset$); desta forma o Sistema sola contém ($\supset$) o planeta Terra, o qual pertence ($\in$)ao sistema citado, diferentemente de Kepler-22, que não pertence ($\notin$).

No estudo de funções, particularmente da função afim, o docente pode explorar situações problemas presentes no âmbito da astronomia, e expressá-las por meio de funções afim. Por exemplo, a altura de um foguete ou satélite x segundos após sua decolagem; a descrição do movimento de um corpo no espaço, e posteriormente analisado no plano cartesiano; a altura dos satélites que orbitam a Terra, gerando uma função constante; etc.

Já para as funções polinomiais de segundo grau, sugere-se analisar a trajetória de corpos celestes pelo Universo, que devido às forças gravitacionais dos planetas e estrelas próximos, podem formar uma parábola que, por sua vez, é descrita algebricamente por uma função quadrática. Desta forma, pode-se partir de textos, vídeos ou problemas que contemplem situações semelhantes à descrita.

Pensando nas funções exponenciais e logarítmicas, é sabido que a decomposição ou dissolução de diversas substâncias, como o açúcar numa xícara de café, pode ser descrita por uma função exponencial. Também o crescimento de algumas plantas e espécies de animais e bactérias são apresentados na forma da função citada. Diante disso, há um amplo contexto a ser explorado pelo professor, desde textos e vídeos até a elaboração de projetos e o emprego da interdisciplinaridade.

Por fim, evidencia-se que, não só nestes, mas em vários conteúdos matemáticos do ensino médio é possível se utilizar da astronomia como recurso metodológico para fortalecer a aprendizagem dos estudantes, conforme será exemplificado nos itens2 e 3 a seguir, com a utilização da astronomia para o estudo da Geometria Analítica.

3. ATIVIDADES PROPOSTAS

ESTUDO DO PONTO

1- Um grupo de jovens acampou as margens de um rio, montando sua barraca no ponto médio do segmento que une as árvores A(-1,4) e B(5,2). Além disso, sabe-se que no ponto C(-3,5) há uma caverna na qual um urso está hibernando e que, quando os jovens produzem muito barulho, o urso acorda oferecendo risco ao grupo. Dado que quando o urso chega ao ponto médio entre o acampamento e a caverna seus passos podem ser ouvidos, determine:

a) As coordenadas do ponto onde eles acamparam;

b) As coordenadas a partir das quais pode-se ouvir o urso;

c) A distância que o urso deve percorrer para alcançar o acampamento.

Utilize o texto seguinte para as questões 2 e 3:

"Uma constelação fácil de enxergar do hemisfério sul é Órion. Para identificá-la devemos localizar 3 estrelas próximas entre si, de mesmo brilho, e alinhadas. Elas são chamadas Três Marias, e formam o cinturão da constelação de Órion, o caçador. Seus nomes são Mintaka, Alnilan e Alnitaka. A constelação tem a forma de um quadrilátero com as Três Marias no centro. O vértice nordeste do quadrilátero é formado pela estrela avermelhada Betelgeuse, que marca o ombro direito do caçador. O vértice sudoeste do quadrilátero é formado pela estrela azulada Rigel, que marca o pé esquerdo de Órion. Estas são as estrelas mais brilhantes da constelação. "

2- Assumindo-se que, no sistema cartesiano, as estrelas Betelgeuse e Rigel são representadas pelos pontos A(3,9) e B(-7,0), respectivamente, e que a constelação de Órion tem aproximadamente a figura de um quadrado, determine:

a) A localização dos pontos noroeste e sudoeste da constelação;

b) A área e o perímetro do "quadrado de Órion";

c) As coordenadas do ponto central da constelação, ou seja, o ponto no qual as diagonais do quadrado se cruzam (ponto médio dos segmentos AC e BD).

3- Antigamente, na era das grandes explorações marítimas, os navios utilizavam das estrelas e suas coordenadas para se localizarem em pleno alto-mar. Certa vez, um navegador, estando desorientado, consultou o céu e verificou que a estrela Mintaka estava localizada no ponto A(-1,y), enquanto a estrela Alnitaka estava posicionada no ponto B(1,4). Além disso, o navegador sabe que as estrelas "Saiph" e "EtaOrionis", localizadas no eixo das abscissas e sendo ambas equidistantes aos pontos A e B, determinam a direção oeste e leste, respectivamente. Sabendo-se que a distância entre as estrelas A e B, sob o ponto de vista do observador, é $2\sqrt{2}$ unidades de medida, determine as coordenadas às quais ele deve se direcionar para seguir as direções oeste e quais coordenadas ele deve se direcionar para seguir a direção leste.

Considerações Finais.

Ao término deste estudo, conclui-se a importância de se trabalhar com recursos metodológicos que permitam dar sentido à aprendizagem de determinado conteúdo, de forma a despertar maior interesse no aluno, consequentemente maior empenho do mesmo, e fugir de um modelo tradicional que se limita à aprendizagem de fórmulas e suas aplicações.

Para isso, a astronomia se apresenta como uma possibilidade extremamente rica, por se aplicar à diversas disciplinas e, particularmente na matemática. Espera-se um nível de aprendizagem satisfatória na maioria dos alunos, que passará a demonstrar maior capacidade de interpretação de problemas matemáticos contextualizados.

REFERÊNCIAS

Signoreli, V. **Disciplinas e interdisciplinaridade**. Equipe Educa Rede.
Disponível em educarede.com.br (acesso em junho/2015).

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental. MEC/SEF, 1998.

PAULA, Elvis de; FRANCISCO, Fernandes C. R. **Educação Matemática pela Contextualização da Astronomia.** XIII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e IX Encontro Latino Americano de Pós-Graduação – Universidade do Vale do Paraíba, 2009.

PARANÁ, SEED. **Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica**, Curitiba, 2009.

Maior, Ludovico; Trobia, José. **Tendências metodológicas de ensino-aprendizagem em educação matemática**: resolução de problemas – um caminho. Governo do Paraná. Curitiba, 2009.

AS DIRETRIZES CURRICULARES PARA OS CURSOS DE MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO CURSO DE MATEMÁTICA DA FACULDADE DE AMPÉRE–PR (FAMPER)

Rogério Rech[1]
FAMPER – Faculdade de Ampére
rechrogerio@gmail.com

Marcos Willian da Silva Santos[2]
FAMPER - Faculdade de Ampére
marcoswilian50@outlook.com

1. Apresentação.

O presente artigo busca discutir as questões da legislação, e, efetivação das diretrizes curriculares da Matemática no ensino superior. De maneira geral são apontados alguns elementos da ingerência nacional, de forma específica a questão da legislação estadual, e, de forma elucidativa e particular o caso da Licenciatura em Matemática com Ênfase em Computação da Famper. A intenção é apresentar especificidades dessa licenciatura, do ponto de vista de dificuldades e possíveis avanços na sua implantação, bem como fazer uma retrospectiva a partir da avaliação in loco feita pelo Ministério da Educação para autorização do curso (MEC, 2011) e reconhecimento (MEC, 2015).

Em primeiro lugar uma licenciatura deve atender o que preconiza a legislação nacional. Uma coordenação de curso tem a responsabilidade de formular uma proposta inicial que cumpra com o mínimo estabelecido, ou seja, professores nas devidas formações, estrutura física, salas, bibliotecas, um projeto pedagógico exequível, e plano geral da instituição onde se apresenta uma estrutura que possa garantir com as necessidades do curso.

[1] Doutor em Educação pela Pontifícia Universidade Católica (PUC-PR).

[2] Graduando em Matemática na Faculdade de Ampére (FAMPER), bolsista do Programa Universidade para Todos (Prouni).

Por outro lado há problemas operacionais que não podemos desconsiderar. Uma instituição particular como a Famper tem dificuldade em manter o professor formado que iniciou as atividades quando da autorização do curso, mas que no reconhecimento do mesmo curso não faz mais parte da instituição. A metade de nossos professores não são os mesmos do credenciamento de 2011. Em geral são aprovados em instituições públicas e por melhores condições financeiras buscam outras oportunidades de trabalho. Esta rotatividade é o primeiro problema a ser enfrentado pela instituição.

Um segundo, tão importante está nas taxas de aprovação. Mesmo que a proposta curricular preconize esta questão, na prática há dificuldades. Aprovação pode mascarar a realidade e reprovação inviabilizar um curso em função da redução dos alunos. De modo que temos que olhar para o projeto, para o governo, e, para os alunos não necessariamente nesta ordem.

Assim a circulação dos documentos, diretrizes nacionais, projetos da instituição são alterados quando da apropriação pelo Núcleo Docente Estruturante (NDE). Isso inclui mudanças necessárias como a inclusão de professores de outros cursos, mas da mesma instituição cujo foco ou linha de pesquisa é diferente da Licenciatura em Matemática com Ênfase em Computação. Por exemplo, um professor de Pedagogia quando trabalha Didática da Matemática pode comprometer o trabalho se a coordenação não estiver atenta. Uma coisa é o planejamento, outra é a aula do professor.

Existem instâncias que são apropriadas e guardiãs do curso, em especial o NDE e o colegiado. Ministério da Educação (MEC) recomenda o Núcleo Docente Estruturante (NDE). O parecer nº 04 de 17 de junho de 2010 diz que o NDE é um bom indicador da qualidade de um curso de graduação e um elemento de diferenciação quanto ao comprometimento da instituição com o bom padrão acadêmico. Ressalta que o papel do Colegiado do Curso não pode ser confundido com o NDE, o primeiro é mais amplo inclusive com a participação de alunos na discussão dos procedimentos de ensino. O segundo é mais restrito, “alma do curso”, com professores de maior formação que tratam mais especificamente das mudanças de ementas e são focados no “o que” ensinar. (BRASIL, 2010).

Enquanto o colegiado, segundo a lei nº 9.192, de 21 de dezembro (BRASIL, 1995) é constituído de representantes dos diversos segmentos da sociedade, observando o mínimo de 70% de docentes, o NDE de acordo com o parecer nº 04 de 17 de junho (CONAES, 2010) é composto exclusivamente pelo coordenador do curso e pelos docentes. Assim os professores do NDE podem ser os mesmos do colegiado, mas nem todos os componentes do colegiado podem ocupar o NDE.

O Art. 3º do parecer nº 04 diz que as Instituições de Ensino Superior, por meio dos seus colegiados superiores, devem definir as atribuições e os critérios de constituição do NDE, atendidos, no mínimo, os seguintes requisitos: (a) cinco professores pertencentes ao corpo docente do curso, destes pelo menos 60% com titulação acadêmica obtida em programas de pós-graduação *Stricto Sensu;* (b) ter todos os membros em regime de trabalho de tempo parcial ou integral, sendo pelo menos 20% em tempo integral; (c) assegurar estratégia de renovação parcial dos integrantes do NDE de modo a assegurar continuidade no processo de acompanhamento do curso (BRASIL, 2001).

Assim o curso de Licenciatura em Matemática na Famper surge de uma necessidade regional pela demanda em formar professores, e, adequando-se às necessidades e determinações do governo (Ministério da Educação). Estávamos dispostos a cumprir a legislação e preocupados com a qualidade do curso, mas também em dinamizar de tal forma que tivéssemos acadêmicos que viabilizassem o curso na questão financeira.

O ensino superior público no Brasil segue uma dinâmica que combina o recebimento de recursos do Estado e o cumprimento de normativas estatais. O ensino superior privado está sujeito à legislação estatal, mas tem seus próprios recursos financeiros, mas não são tipos puros, ou seja, público restrito ou particular restrito. Exemplo disso é o Programa Universidade para Todos (Prouni) onde alunos recebem bolsas de estudo do governo federal para estudar em faculdades particulares. Outra aproximação entre Estado e instituições particulares é o

Financiamento Estudantil (FIES), por esse processo o Estado através de seus bancos oficiais oferece financiamento aos acadêmicos com juros acessíveis.

Uma coisa há em comum entre instituições públicas e privadas do ensino superior: a forma de avaliação do Ministério da Educação (MEC). Mesmo que as universidades públicas tenham autonomia para criar cursos seus alunos precisam fazer avaliações nacionais. No caso das faculdades particulares são três as fases de avaliação dos cursos: a autorização e credenciamento, o reconhecimento e avaliação dos acadêmicos pelo Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE).

2.0 A Licenciatura em Matemática com Ênfase em Computação da Famper.

A Licenciatura em Matemática com Ênfase em Computação da Famper foi pensada desde 2008, sendo autorizada em 2011. A Famper já possui outras licenciaturas o que facilitou a compreensão do desafio de formar professores, além de que o quadro docente para o curso pode ser aproveitado. “É um olho no gato e outro na frigideira”, ao mesmo tempo cumprir as determinações legais e ter acadêmicos dispostos a fazer o curso.

Utilizamos a estratégia da ênfase em computação para garantir uma “proposta moderna” de curso. Recentemente percebemos que foi um equívoco, dada a impossibilidade de conciliar Matemática, ensino e computação em um curso apenas. A proposta inicial foi alicerçar a licenciatura em três pilares: (a) Matemática Clássica; (b) Computação Matemática; (c) Pedagogia e Matemática. As disciplinas estão dentro dessas três linhas de estudo para que se forme um professor com conhecimento matemático, que saiba usar o computador e ainda saiba ensinar.

Qual a percepção do Ministério da Educação com relação à autorização e credenciamento do curso em 2011? Foram considerados pontos positivos: (a) a coerência do projeto pedagógico; (b) o compromisso dos dirigentes e da coordenação do curso; (c) a estrutura básica para recebimento do curso. Com relação aos pontos negativos: (a) o problema de vínculo dos professores que possuem pouca carga horária no curso; (b) falta de aderência de alguns professores de outras formações; (c) falta de compreensão de alguns professores da proposta. (MEC, 2011).

Por fim a comissão de credenciamento pediu alguns ajustes nos livros didáticos e definiu que projetos e as ações propostas são procedentes e plausíveis. Elaborou um parecer avaliando em três dimensões: (a) organização didático-pedagógica onde o conceito foi 3; (b) corpo docente com conceito 4; (c) instalações físicas, conceito 3. (MEC, 2011).

O que diz o Ministério da Educação com relação ao Curso de Matemática da Famper em relação ao reconhecimento? O curso de Matemática teve coerência com a proposta original, número de vagas, carga horária, satisfação dos alunos, currículo adequado. Além disso, foram colocados pontos positivos como a questão do coordenador estar a dez anos na instituição, por outro lado o tempo médio de permanência do corpo docente no curso é de aproximadamente 3 anos. (MEC, 2015).

A comissão atribuiu à primeira dimensão, ou seja, a organização didático-pedagógica, a nota 3,6 justificando que diante da realidade regional, o profissional que se forma em Matemática na Famper tem acesso ao domínio do conhecimento elaborado e científico sendo respeitado nas questões empíricas. É possível a relação entre o conhecimento sistematizado e sua aplicação, em geral nos estágios e nas oficinas pedagógicas. Constatou a dificuldade da questão da computação no curso, diante da proposta e da falta de formação de professores neste quesito. (MEC, 2015).

Na segunda dimensão, qual seja a do corpo docente fomos avaliados com nota 3,9. Foram considerados aspectos positivos: (a) depoimento dos alunos com relação aos docentes; (b) o envolvimento e a experiência dos professores na educação básica; (c) o nível de confiança da comunidade em geral nesses professores do curso; (d) a forma de avaliação e o comprometimento dos professores; (e) o colegiado que se reúne com frequência. Percebemos uma fragilidade após a avaliação do MEC, apesar da exigência de mestres e doutores ser apenas de 33% do curso, quando da visita in loco, o percentual de doutores e mestres acrescenta uma pontuação nas questões de pesquisa, esta foi a informação recebida. (MEC, 2015).

Na terceira dimensão, referente à estrutura, fomos avaliados com nota 3,4. Tivemos algumas restrições com relação aos livros disponibilizados e as salas de aula ainda não totalmente adequadas. Os laboratórios de informática ainda não estão perfeitamente operacionais, mas atendemos o básico e necessário. O conceito final acumulado foi a nota 4. (MEC, 2015).

3.0 Algumas considerações.

Buscamos apresentar um caso particular do curso da Licenciatura em Matemática com Ênfase em Computação da Faculdade de Ampere – PR. Dois documentos foram basilares e permitiram a discussão: (a) o credenciamento, e, (b) o reconhecimento do curso. No primeiro fomos avaliados com conceito 3 e no segundo com conceito 4. Diante de nossas condições existe uma satisfação dos alunos, do corpo docente e da instituição e uma necessidade de reformular o curso nas questões mais nevrálgicas: (a) formação de professores; (b) aprendizado dos alunos e notas baixas em avaliações; (c) rotatividade de professores; (d) falta de foco no curso, a questão da computação nunca foi bem resolvida.

Formamos 17 alunos na primeira turma e temos aproximadamente uma centena de alunos. Do ponto de vista formal buscamos atender as exigências legais como livros de chamada, atas do NDE, participação em eventos como as Semanas Acadêmicas. Com relação à inserção nos projetos de extensão oficializou-se um projeto de formação de professores do ensino fundamental da Região Sudoeste do Paraná.

São oficinas ofertadas gratuitamente, com o compromisso dos professores de sala de aula para que apresentem suas angústias e a forma como estão ensinando. Esse contato com os acadêmicos que também participam do curso mostra a realidade a ser enfrentada pelo futuro professor. São oficinas que tratam de computação e matemática, laboratório de matemática e uso de materiais, cursos que interagem arte e matemática e discussão sobre a História da Matemática.

Estamos nos aproximando de duas centenas de certificados. Existe boa aceitação na comunidade regional. Assim para além do confronto, pensamos que é possível atender as exigências do Ministério da Educação (MEC) e ao mesmo tempo apresentar o curso aos professores parceiros que recebem certificação e ao mesmo tempo ajudam no curso. Assim, coletivamente somos todos criativos.

Apresentamos até o momento as questões referentes ao ensino e extensão. Um curso precisa também de pesquisa. Temos então um trabalho iniciado com um estudo sobre livro didático. A intenção é perceber como os conteúdos do livro didático foram se alterando no Brasil. De certa forma a disciplina que mais usa livro didático no Brasil é Matemática. Outra pesquisa realizada é do laboratório de ensino da Matemática.

Temos dialogado com a Universidade Nacional de Misiones (UNAM – AR) e com o Instituto Ruy Montoya da mesma cidade. Essas instituições têm cursos de matemática já há algumas décadas. Somos motivados pelo fato de que dada uma cultura diferenciada os procedimentos pedagógicos são diferenciados. Em um futuro próximo pensamos no intercâmbio dos alunos da Famper com estas instituições. Ainda na questão da internacionalização firmamos um convênio com a Universidade Antonio Camacho de Cali na Colômbia para intercâmbios de alunos. Recebemos três professores visitantes que têm contribuído com a instituição.

Os alunos têm avaliado positivamente os professores e mais da metade de nossos acadêmicos já são professores no Sudoeste do Paraná. Temos ainda poucas reprovações, considerando os aspectos históricos da Matemática. Mas não conseguimos equacionar esta questão com qualidade, ou seja, como manter os acadêmicos e manter bons coeficientes nas avaliações? Outra questão é como atender melhor os alunos, professores que não estão dispostos a fazer esse atendimento e a falta de remuneração para atividade. Por fim, dentro da realidade e das limitações de um curso, o curso de Licenciatura em Matemática com Ênfase em

Computação, é resultado do grande esforço da instituição, de seus professores e de seus acadêmicos.

REFERÊNCIAS

BRASIL (2001). CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (CNE). **Parecer CNE/CES 1.302/2001.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/130201mat.pdf. Acesso em: 23 de julho de 2012.

BRASIL (2010). **PARECER nº 04 de 17 de junho de 2010**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=6884-parecer-conae-nde4-2010&Itemid=30192. Acesso em 23 de julho de 2012.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (2011). **Autorização do Curso de Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Ampere – Famper**. Protocolo: 200815342. Código MEC: 335893.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (2015). Reconhecimento **do Curso de Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Ampere – Famper**. Protocolo: 201413708. Código MEC: 980787.

EVASÃO NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UTFPR CAMPUS TOLEDO: PRIMEIRAS IMPRESSÕES

Vinícius Franco Vasconcelos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
v.f.v.math@gmail.com

Bárbara Winiarski Diesel Novaes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
barbaradiesel@yahoo.com.br

1 INTRODUÇÃO

"Baixa procura e evasão acendem alerta em licenciatura na UFMG[1]". O artigo de Luiza Muzzi alerta para um "apagão" de professores nos próximos cinco anos em uma das maiores universidades do país. Segundo dados da UFMG à jornalista, "estudo da instituição mostra queda de quase 90% na procura por cursos de formação de professores". Enquanto o número de formandos diminui ano a ano, o índice de desistência em alguns cursos de licenciatura desta instituição chega a mais de 50%.

O problema da evasão não é um assunto novo. Há vários trabalhos que tratam do tema, tanto na educação básica, quanto no ensino superior. Nos últimos anos, a evasão dos cursos de licenciatura, como anuncia a reportagem, é crítico e pode impactar de forma desastrosa a educação básica brasileira. A nossa preocupação como integrantes do curso de licenciatura em Matemática da UTFPR – campus Toledo é tentar compreender, num primeiro momento, porque os alunos evadem, para num segundo momento pensar em mecanismos que diminuam a taxa de evasão, que também é muito elevada[2].

Deste modo, o presente trabalho procura mapear, de forma preliminar, possíveis causas da evasão no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – campus Toledo, levantar algumas hipóteses deste abandono e possivelmente contribuir para o debate da temática com as demais licenciaturas de Matemática do Brasil. A questão que norteia o trabalho é: Porque os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – campus Toledo evadem?

2 FATORES PARA EVASÃO NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Existem escolas públicas com boa qualidade de ensino e escolas privadas com má qualidade de ensino. Apesar disso, segundo Moreira et al. (2012), o índice de desempenho dos alunos de escolas privadas é superior ao dos de escolas públicas, e como na rede privada há, em geral, melhores condições de trabalho, os professores mais qualificados buscam as escolas particulares, perpetuando assim um "ciclo vicioso", segundo os autores.

Analisando dados do Saeb de 2003 e focalizando a falta de professores para o ensino médio, o Conselho Nacional de Educação afirma que: "A disparidade se reflete também no acesso à universidade pública, onde a larga maioria dos cursos de maior prestígio social é frequentada, quase que exclusivamente, por alunos egressos da rede privada." (BRASIL, 2007, p.6 apud MOREIRA et al., 2012, p. 20). No levantamento feito por Moreira et al. (2012), a maioria dos ingressantes nos cursos de Licenciatura em Matemática são provenientes de escolas públicas.

[1] Artigo publicado no Jornal O tempo em 18/05/2015 e disponível no site: <http://www.otempo.com.br/cidades/baixa-procura-e-evas%C3%A3o-acendem-alerta-em-licenciaturas-na-ufmg-1.1040448>. Acessado em: 23 de abril de 2016.

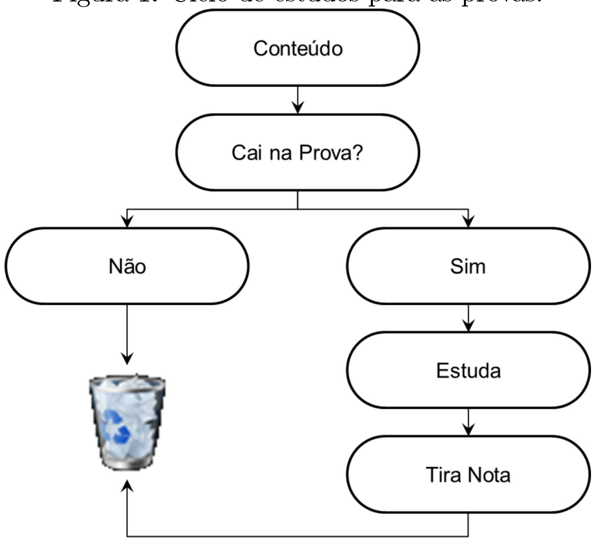
[2] Como se trata de um estudo preliminar, ainda não se tem os dados oficiais, mas aproximam-se de 40%.

Outro aspecto a ser considerado, é que uma Licenciatura em Matemática, além de ser um curso de licenciatura, também é um curso de Matemática. A Matemática, por sua vez, é construída de forma que cada conteúdo depende de conteúdos vistos anteriormente e, sem eles, é difícil – quiçá impossível – avançar na matéria. Porém, com a precariedade do ensino básico, muitas vezes o ingressante do curso sequer teve contato com o que é assumido como conhecido por ele. É notável entre os ingressantes a frequente falta de conhecimentos matemáticos do ensino básico, tanto que são ministradas aulas de nivelamento durante o primeiro semestre do curso (porém insuficientes para repor anos de defasagem escolar). Os ingressantes afirmam, em alguns casos, estarem vendo o conteúdo pela primeira vez.

Ainda no levantamento feito por Moreira et al. (2012), a maioria dos ingressantes nos cursos de Licenciatura em Matemática escolheram o curso por ser de Matemática e não por ser uma licenciatura. Uma pesquisa[3] feita com os ingressantes de 2014 a 2015 da UTFPR Toledo corroborou com os resultados de Moreira et al, sendo que a maioria dos estudantes estudou o ensino médio em escola pública e optou pelo curso primeiramente por ser de Matemática.

Em relação a como estudar, há nas escolas brasileiras uma noção distorcida de que se deve estudar para as provas, para tirar boas notas e ser aprovado. Nesse processo, a aprendizagem é deixada em segundo plano, sendo o objetivo principal ser aprovado. Isso se torna claro em perguntas de alunos como "Esse conteúdo cai na prova?" ou em ênfases de professores como "Prestem atenção que isso cai na prova", e é reforçado quando os pais ou responsáveis se preocupam mais com a nota do filho do que se ele aprendeu de fato o conteúdo. Como o objetivo do estudo não é a aprendizagem, muitas vezes o conteúdo é esquecido logo após a prova, mesmo que inconscientemente. Essa distorção também aparece no ensino superior, conforme representado na figura 1, por meio da "lata de lixo". O que ocorre é que no Ensino Superior, esse modelo pode funcionar até certo ponto, mas na medida em que o curso avança, torna-se insustentável e pode levar os estudantes a desistirem do curso.

Figura 1: Ciclo de estudos para as provas.



Fonte: Autores

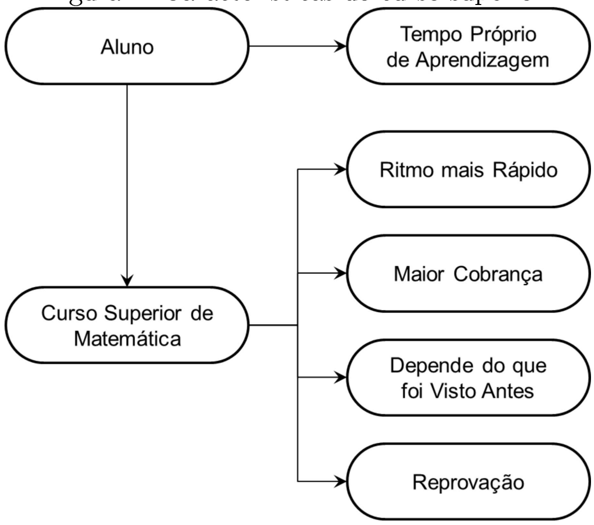
Seguindo uma linha Ausubeliana, Pivatto e Schuhmacher (2013) afirmam que para haver aprendizagem, além dos pré-requisitos assumidos como conhecidos (conceitos subsunçores), também é necessário que o aluno tenha predisposição para aprender o conteúdo. Por se tratar de um curso superior de Licenciatura em Matemática, assume-se a existência dessa predisposição, ao menos até certo ponto.

Um calouro de Licenciatura em Matemática (figura 2) oriundo principalmente de escola pública

[3]Pesquisa realizada pelo Colegiado do Curso, na figura do professor de História da Educação e gentilmente cedida para realização deste trabalho.

se depara com um ritmo mais rápido de ensino, maior cobrança e com conteúdos que dependem de pré-requisitos que às vezes ele nunca viu. Muitas vezes o resultado disso é alguma reprovação ou a execução mecânica de um processo não totalmente assimilado – o "estudar para a prova" – que pode funcionar como uma bomba-relógio que explodirá nos semestres seguintes do curso, como por exemplo, na disciplina de Análise (ver Gomes et al. (2015)).

Figura 2: Características do curso superior.



Fonte: Autores

Neri (2009) aponta alguns motivos para a evasão escolar no ensino básico, entre eles destaca: dificuldade de acesso à escola; necessidade de trabalho e geração de renda; falta intrínseca de interesse; outros motivos. A partir desses motivos, pode-se inferir alguns para a evasão no ensino superior. Outro possível motivo apontado por Leon e Menezes-Filho (2002) é a reprovação, porém no próprio artigo os autores dizem que esta vem perdendo peso como determinante da evasão escolar – lembrando que eles só abordam a evasão no ensino básico.

Quanto à falta intrínseca de interesse, partindo do pressuposto que quando o aluno ingressou no curso superior ele estava interessado – e desconsiderando a possibilidade do curso não corresponder às suas expectativas iniciais –, levantam-se algumas indagações que podem surgir durante o curso, tais como se o curso vale à pena ou se o curso é realmente o que se quer fazer. Há algo que pode ser feito para manter os alunos interessados?

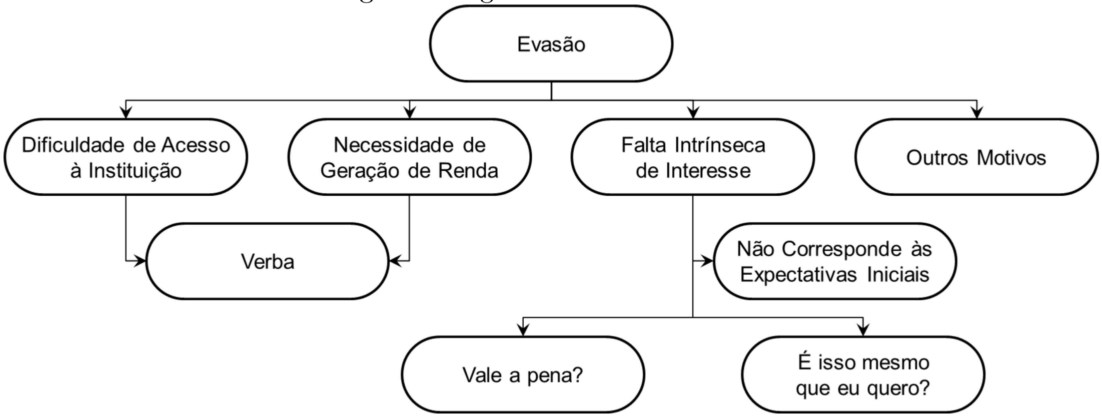
Sem a pretensão de abordar todos os motivos para uma possível evasão do estudante de licenciatura do ensino superior e levando em consideração estudos anteriores sobre a temática, são ressaltados alguns motivos na figura 3, dos quais muitos fogem ao controle da instituição.

Durante o curso são estudadas diversas tendências pedagógicas cujos objetivos são, dentre outros, tornar a Matemática atraente para os alunos no ensino básico. Mas como manter a Matemática do ensino superior atraente para quem ingressa num curso de licenciatura? Como um professor de Matemática pode despertar o interesse pela Matemática se ele mesmo não tiver interesse?

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo apresentado de forma muito preliminar procurou levantar algumas hipóteses sobre os fatores que levam os acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática da UTFPR – campus Toledo a evadirem. Muito do que foi discutido são ideias iniciais, vindas da observação e precisam ser aprofundadas em trabalhos futuros.

Figura 3: Alguns Motivos de Evasão.



Fonte: Autores

A construção argumentativa sinaliza que uma reestruturação do curso de Licenciatura em Matemática, de forma a torná-lo mais atrativo, interessante e que desperte mais o interesse dos licenciandos pode contribuir para a diminuição da evasão entre os estudantes interessados. Esse poderia ser um dos fatores para a desistência, mas não é o único. Os baixos salários, as condições de trabalho da educação básica, a violência escolar são outros fatores que justificam e muito a evasão, infelizmente.

Referências

[1] MOREIRA, P. C.; FERREIRA, E. B.; JORDANE, A.; NÓBRIGA, J. C. C.; FISCHER, M. C. B.; SILVEIRA, E.; BORBA, M. de C. **Quem quer ser professor de matemática?** Zetetiké, FE/Unicamp, v. 20, n. 37, p. 11-33, jan/jun 2012.

[2] PIVATTO, B.; SCHUHMACHER, E. **Conceitos de teoria da aprendizagem significativa sob a ótica dos mapas conceituais a partir do ensino de Geometria.** REVEMAT, Florianópolis (SC), v. 8, n. 2, p. 194-221, 2013.

[3] NERI, M. C. **Motivos da evasão escolar.** FGV/IBRE, CPS, Rio de Janeiro, p. 4-15, 2009.

[4] LEON, F. L. L.; MENEZES-FILHO, N. A. **Reprovação, avanço e evasão escolar no Brasil.** Pesquisa e Planejamento Econômico, v. 32, n. 3, p. 417-451, dez 2002.

[5] GOMES, D. O.; GARCIA, S. C. O.; SILVA, L. D.; BARONI, R. L. S. **Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1242-1267, dez. 2015.

GENERALIZAÇÃO DA LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON.

Leonardo Guillermo Felipe.
Universidade Estadual do Oeste do Paraná.
leogui27@yahoo.com.br

Janete Terezinha Chimbida.
Universidade Estadual do Oeste do Paraná.
janterchim@yahoo.com.br

RESUMO.

O cálculo fracionário abre a possibilidade de generalizar os conceitos de derivada e integral de ordens inteiras a ordens arbitrárias. Neste contexto, propomos uma generalização da lei do resfriamento de Newton, isto é, substituímos a derivada de ordem inteira por outra de ordem $\beta \in (0,1]$. Para manter a unidade dimensional na equação física introduzimos um novo parâmetro λ. Este parâmetro caracteriza a existência de estruturas fracionárias no sistema. Mostraremos que existe uma relação entre a ordem da derivada fracionária β e o novo parâmetro λ. Devido a esta relação, a solução da correspondente equação diferencial fracionária será dada em termos da função Mittag-Leffler, dependendo apenas da ordem fracionária β. Os resultados da solução da equação diferencial fracionária serão analisados e interpretados. O caso clássico é recuperado no limite quando $\beta = 1$.

1.INTRODUÇÃO.

Em 1695 numa carta, L'Hôpital questionou seu amigo Leibniz a respeito do significado de $D^n = d^n f(x)/dx^n$ no caso em que n fosse um número fracionário. Em sua resposta Leibniz utilizou uma série infinita para calcular $D^{1/2}$ e profetizou: *Este é um aparente paradoxo do qual um dia interessantes consequências serão obtidas,* Ross [13]. A partir deste fato histórico, o cálculo fracionário chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, entre outros. De particular importância destacamos os trabalhos de Abel publicados em 1823, que, segundo Oldham [11] foi o primeiro a fornecer uma aplicação do cálculo fracionário na resolução de uma equação integral que aparece na modelagem do problema da isócrona. Este fato abriu novas perspectivas ao desenvolvimento da teoria das Equações Integrais e do Cálculo Fracionário.

De acordo com Podlubny [12], durante aproximadamente três séculos a teoria do cálculo fracionário desenvolveu-se exclusivamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas. A justificativa para isto, talvez seja, a aparente descrição satisfatória dos fenômenos naturais com o cálculo de ordem inteiro. A isto devemos agregar a falta de uma interpretação física e geométrica que seja amplamente aceita pela comunidade científica. Contudo, nas últimas décadas, a importância do cálculo fracionário tornou-se evidente com a utilização das equações diferenciais de ordem não inteira para modelar e descrever os diversos fenômenos da natureza, em especial os que possuem dependência temporal, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias, Caputo-Mainardi [2], Constantinescu [3]. Notou-se que, na maioria dos casos, a modelagem feita a partir da equação de ordem fracionária fornecia uma descrição mais precisa que a respectiva de ordem inteira. Por outro lado, têm aparecido vários artigos científicos mostrando as mais variadas aplicações do cálculo fracionário; como por exemplo, problemas quânticos são discutidos através da equação de Schorödinger em Guo-Xu [4], na modelagem de sistemas de transmissão elétrica em Lorenzo-Hartley [7], na teoria de viscoelasticidade em Neymans [10], em mecânica dos fluidos (Kulish-Lage[6]), em bioenergia (Magin-Ovadia [8]), na teoria de controle (Bohannan [1]), dentre outros.

Inserida no contexto da matemática aplicada à modelagem de problemas da ciência e à engenharia, o presente trabalho tem por objetivo a construção sistemática, na sua versão fracionária, do fenômeno físico conhecido como Lei do Resfriamento de Newton, isto é, substituímos a derivada de ordem inteira por outra de ordem $\beta \in (0,1]$. Para manter a consistência dimensional com a equação física introduzimos um novo parâmetro λ.

2.DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO.

Para analisar o comportamento dinâmico de um sistema fracionário é preciso de uma definição apropriada da derivada fracionária. Uma das razões para a complexidade do cálculo fracionário é, talvez, a existência de múltiplas definições que a descrevem. As definições mais comuns encontradas na literatura são as de Riemann-Lioville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Weyl e Riesz, que podem ser consultadas em Podlubny [12], Oldham [11], dentre outros.

O operador derivada fracionária segundo Caputo parece ser mais apropriado para o estudo das equações diferenciais fracionárias, pois, a derivada fracionária da função constante é zero (o qual não ocorre com as outras definições), a transformada de Laplace da derivada fracionária depende das condições iniciais que possuem interpretação física.

Definição 1. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$; n o menor inteiro maior que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $v = n - \alpha$, ou seja, $0 < Re(v) \leq 1$. A derivada fracionária de ordem α de f, segundo Caputo, denotada por D^{α}, é definida da seguinte maneira:

$$D^{\alpha}f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(v)}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{v-1}f^{(n)}(\tau)d\tau, & n-1 < \alpha < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), & \alpha = n \end{cases}$$

onde $n = 1,2, \ldots .. \in \mathbb{N}$ e $\Gamma(v)$ é a função gamma.

A transformada de Laplace é uma ferramenta comumente utilizada na resolução de equações diferenciais ordinárias. Também o será no âmbito fracionário. Assim, a demonstração dos teoremas 1 e 2 podem ser encontrados em Podlubny [12].

Teorema 1. Com as mesmas hipóteses da definição 1 e supondo que $\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\}$ exista; então, $\mathcal{L}\{D^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)$, e

$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)\right\} = D^{\alpha}f(t)$, onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Por outro lado, na aplicação da transformada de Laplace para a solução das equações diferenciais fracionárias, é importante considerar a relação entre a função de Mittag-Leffler e sua transformada.

Definição 2. Dados $\propto > 0$, $\beta > 0$. A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros $E_{\propto,\beta}$ é a função real de variável real definida pela série, $E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{\Gamma(\propto m+\beta)}$.

Teorema 2. Para $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\propto > 0$, $\beta > 0$ e $t > 0$, tem-se,

$\mathcal{L}\left\{t^{\propto n+\beta-1}E_{\propto,\beta}^{(n)}(\pm at^{\propto})\right\} = \frac{n!s^{\propto-\beta}}{(s^{\propto}\mp a)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > |a|^{1/\propto}$; onde, $E_{\propto,\beta}^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}E_{\propto,\beta}(x)$.

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!s^{\propto-\beta}}{(s^{\propto}\mp a)^{n+1}}\right\} = t^{\propto n+\beta-1}E_{\propto,\beta}^{(n)}(\pm at^{\propto})$.

3.MATERIAIS E MÉTODOS.

A Transferência de calor refere-se ao transporte de energia num meio devido a um gradiente de temperatura, e o mecanismo físico que lhe é intrínseco é o movimento aleatório dos átomos ou das moléculas. O cálculo fracionário tem resultado numa poderosa ferramenta na descrição de fenômenos complexos como a difusão anômala na transferência de calor, Metzler [9]. Em virtude do anterior se justifica fazer uma generalização, utilizando operadores fracionários da equação empírica que relaciona o fenômeno da variação de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente (lei do resfriamento de Newton). Experimentalmente, sob certas condições, é possível obter uma boa aproximação da temperatura de uma substância mediante a lei do resfriamento de Newton. Esta lei pode-se enunciar da seguinte maneira: “O fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente”, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \tag{1}$$

em que T é a temperatura do corpo, T_a é a temperatura do meio ambiente e k é uma constante positiva, chamada coeficiente de convecção, que depende das propriedades físicas do corpo. Usando a transformada de Laplace e $T(0) = T_0$ como sendo a condição inicial, encontramos a solução da equação (1),

$$T(t) = T_a + ce^{-kt}. \tag{2}$$

3.1.Representação fracionária da lei de resfriamento de Newton:

Para construir a equação diferencial fracionária correspondente a Eq. (1), substituímos o operador diferencial ordinário $\frac{d}{dt}$ da Eq. (1) pela relação seguinte, (Inizan [5]),

$$\lambda^{\beta-1}\frac{d^\beta}{dt^\beta}, \quad 0 < \beta \le 1, \tag{3}$$

em que $\frac{d^\beta}{dt^\beta}$ denota o operador derivada fracionário de ordem β segundo Caputo e λ é um parâmetro que representa a estrutura fracionária no sistema, sendo o segundo a sua dimensão.

Da expressão (3) podemos observar que, com $\beta = 1$, $\left[\lambda^{\beta-1}\frac{d^\beta}{dt^\beta}\right] = \frac{1}{s} = \left[\frac{d}{dt}\right]$, isto é, a expressão (3) tem dimensão física consistente com o operador $\frac{d}{dt}$, se e só se, o parâmetro λ tem dimensão temporal de segundos, $[\lambda] = s$. Portanto, podemos substituir o operador ordinário da Eq. (1) pela relação (3), obtendo

$$\lambda^{\beta-1}\frac{d^\beta T}{dt^\beta} = -k(T - T_a) \tag{4}$$

Logo, aplicando a transformada de Laplace (Teorema 1) na Eq. (4), com $T(0) = T_0$, resulta, $s^{\beta}T(s) - s^{\beta-1}T_0 + k\lambda^{1-\beta}T(s) - \frac{k\lambda^{1-\beta}T_a}{s} = 0$, ou equivalentemente,

$$T(s) = \frac{AT_a}{s(s^{\beta}+A)} + \frac{s^{\beta-1}T_0}{s^{\beta}+A}. \qquad (5)$$

em que $A = k\lambda^{1-\beta}$.

Aplicando a transformada inversa de Laplace (Teorema 1), na Eq. (5), resulta

$$T(t) = T_a\left(1 - E_{\beta}(-At^{\beta})\right) + T_0E_{\beta}\left(-At^{\beta}\right),$$

ou, $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_{\beta}\left(-k\lambda^{1-\beta}t^{\beta}\right)$, ou ainda,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)E_{\beta}\left[-k^{\beta}\beta^{1-\beta}t^{\beta}\right], \qquad (6)$$

em que $\beta = k\lambda,\ 0 < \lambda \leq \frac{1}{k}$. (7)

A Eq. (6) corresponde a lei de resfriamento de Newton fracionária. Com $\beta = 1$ recuperamos o resultado clássico obtido na Eq. (2).

4.RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO.

A fim de ilustrar numericamente os resultados obtidos na seção anterior, consideramos a solução obtida na Eq. (6), com $T(0) = 75,\ T(1) = 55,\ T_a = 5$ escolhidos arbitrariamente. Simulamos a solução $T(t)$ para $\beta = 1; 0{,}98; 0{,}96; 0{,}94$ (Fig.1) e $\beta = 1; 0{,}9; 0{,}75; 0{,}5$ (Fig.2).

As Fig.1 e 2 mostram a solução $T(t)$ (curva cheia) para o caso clássico ($\beta = 1$). Observa-se claramente um decaimento exponencial típico da solução da equação diferencial ordinária tradicional (1). Neste caso, a condição de estado estacionário é atingido em um intervalo curto de tempo, mesmo para os valores de β próximos de 1 (Fig. 1). No entanto, quando β diminui seus valores, (Fig.2), observa-se efeitos interessantes da solução do modelo fracionário. Assim, percebe-se que o efeito de transmissão de temperatura do corpo diminui mais lentamente com o tempo (decaimento algébrico), onde a solução de estado estacionário é atingido para tempos bastantes longos. Este decaimento algébrico das soluções é explicado quando é tomado em consideração o comportamento assintótico da função Mittag-Leffler para valores grandes de t. As Fig. 1 e 2 mostram que a introdução do operador diferencial fracionário descreve de maneira natural os termos de memória descrito pela definição da derivada fracionária segundo Caputo e correspondem a dissipação intrínseca do sistema. Ou, com outra palavras, dado que as unidades na Eq. (7) são segundos, pode-se definir um tempo de relaxamento fracionário. Este tempo representa o tempo característico necessário para uma perda de energia coerente com o sistema; assim, quando β tende a 0, ocorre uma diminuição no tempo de relaxamento fracionário e portanto a existência de estruturas fracionárias; e quando β tende a 1, tem-se um tempo de relaxamento ordinário e consequentemente a inexistência de estruturas fracionárias.

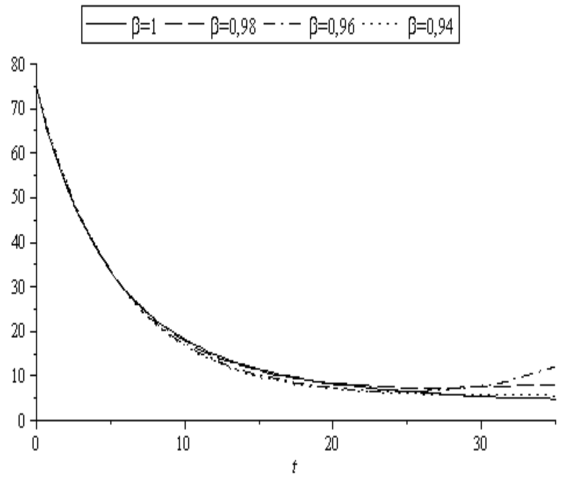


Fig.1- Gráfico das soluções para

$\beta = 1;\ \beta = 0{,}98;\ \beta = 0{,}96;\ \beta = 0{,}94.$

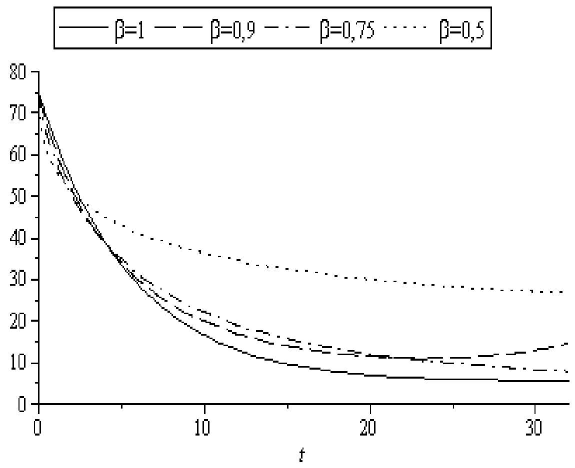


Fig.2- Gráfico das soluções para

$\beta = 1;\ \beta = 0{,}9;\ \beta = 0{,}75;\ \beta = 0{,}5.$

5.CONCLUSÃO.

Neste trabalho discutiu-se a equação diferencial fracionária que descreve a lei de resfriamento de Newton. Mediante a substituição do operador diferencial de ordem inteiro por outra de ordem fracionário β temos sistematizado a construção da equação diferencial fracionária, mesmo como a sua solução. A introdução do parâmetro λ foi importante não apenas para manter a unidade dimensional na equação física, mas também porque a solução da equação diferencial fracionária é dada em termos da função Mittag-Leffler a qual depende apenas da ordem da derivada fracionária β. Devemos salientar também que a abordagem usando derivada fracionária segundo Caputo incorpora e descreve os efeitos de memória de longa duração que estão relacionados com o decaimento algébrico das soluções, mostrados na Fig. 2.

Além disso, o cálculo fracionário permite estudar sistemas complexos, como no caso da transferência de calor. Ao aplicar a teoria do cálculo fracionário à lei do resfriamento de Newton, resulta um modelo no qual estão intrínsecos fenômenos de difusão anômala, pois estes fenômenos surgem a partir da correlação do movimento aleatório das partículas que compõem o material em estudo. Estes fenômenos não podem ser descritos mediante a lei de resfriamento de ordem inteira devido a que na modelagem dos sistemas físicos são tomados em consideração apenas processos ordinários, isto é, seguem comportamentos dinâmicos bem definidos, explicados pelas leis da física clássica. No entanto, o meio é complexo, onde o movimento das partículas seguem trajetórias altamente irregulares.

Finalmente, a partir da discussão acima, vemos que a difusão anômala pode ser investigada mediante a teoria do cálculo fracionário. Assim, o estudo deste tipo de fenômenos, suas extensões e as situações relacionadas a elas possibilitam a investigação de novos cenários, como por exemplo, estudar os processos convectivos de resfriamento e estender a aplicabilidade deste processo para desenvolver novas tecnologias baseadas na refrigeração por convecção.

5.REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA.

[1] BOHANNAN, G.W. **Analog fractional order controller in temperature and motor control applications.** Journal of Vibration and Control, 14, 1487-1498, 2008.

[2] CAPUTO,M. and MAINARDI, F. **A new Dissipation Model Based on Memory Mechanism**. Pure and Applied Geophysics, 91, 8, 134-147, 1971.

[3] CONSTANTINESCU, D. and STOICESCU, M. **Fractal dynamics as long range memory modeling technique.** Physics AUC, 21, 114-120, 2011.

[4] GUO, X. and XU, M. **Some Physical Applications of Fractional Schrödinger Equation**. J. Math. Phys., 47, 2006.

[5] INIZAN, P**. Homogeneous Fractional Embeddings**. J. Math. Phys., 49, 2008.

[6] KULISH, K.B. and LAGE, J.L. **Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics**. J. Fluids Eng. ,124, 803- 806, 2002.

[7] LORENZO, C.F. and HARTLEY, T.T.. **Initialized fractional Calculus**. NASA/TP-2000-209943.

[8] MAGIN, R.L. and OVADIA, M. **Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus**. Journal of Vibration and Control, 14, 1431-1442, 2008.

[9] METZLER, R. and KLAFTER, J. **The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Kinetic Equation.** Phys. Report, 339, 1-77, 2000.

[10] NEYMANS, N. **Dynamic measurement in long-memory materials: fractional calculus evolution of approach to steady state.** Journal of Vibration and Control, 14, 1587-1596, 2008.

[11] OLDHAM, K.B. and SPANIER, J. **The Fractional Calculus**. Academic Press, London,1984.

[12] PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.

[13] ROOS, B. **Fractional Calculus**. Mathematics Magazine, Vol. 50, 115-122, 1977.

O ENSINO DO CÁLCULO NA ESCOLA PRIMÁRIA EM BASES MODERNAS

Camila Koyama Feitoza
UTFPR – Câmpus Toledo
koyamacame@hotmail.com

Barbara Winiarski Diesel Novaes
UTFPR – Câmpus Toledo
barbaraw@utfpr.edu.br

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

"Uma das funções primordiais de qualquer escola é fazer pensar e nenhuma matéria se presta mais a isso do que o cálculo, quando bem ensinado", essa era a tese defendida pelo professor Onofre de Arruda Penteado Júnior[1] em artigo publicado em 1961, na Revista de Pedagogia, publicação destinada aos professores do estado de São Paulo. O autor faz duras críticas a um ensino verbalístico e que não atendia mais um mundo em processo de industrialização e de constantes mudanças. Utiliza como suporte para uma nova maneira de ensinar cálculo, as modernas bases psicológicas da teoria de Jean Piaget.

O presente trabalho é um resultado parcial do trabalho de conclusão de curso (TCC) de um acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo que visa analisar a circulação das ideais de Jean Piaget em Revistas Pedagógicas[2] Brasileiras no que tange as suas contribuições para a matemática do ensino primário no período de 1950 a 1970.

Para iniciar, foi necessária uma seleção das fontes que ocorreu baseada no acervo presente no Acervo Digital do GHEMAT hospedado no Repositório da UFSC. A seleção se deu a partir da pesquisa de Revistas e Publicações da época de interesse que possuíssem relação com as palavras-chave: Jean Piaget, psicogenética, epistemologia

[1] Professor-catedrático de Didática geral e especial da FFCL da USP (PENTEADO JUNIOR, 1961).O mesmo autor publica em 1963 na mesma revista o artigo "A psicologia de Jean Piaget e a Didática". Nos dois artigos indica a leitura de Hans Aebli ("*Didactique psichologique*"), discípulo de Jean Piaget que em sua obra apresenta os princípios do mestre aplicados a situações de ensino.

[2] As Revistas Pedagógicas Brasileiras assim como outros documentos que tem sido fontes de pesquisas para os projetos nacionais e internacionais relativos à história da Educação Matemática do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT) estão alocados em um espaço virtual denominado Repositório Digital alimentados com projetos coletivos de pesquisa, sito em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769> Acessado em 05 de março de 2016.

genética, Dienes e Movimento da Matemática Moderna. Após a filtragem no acervo digital e de leituras sistematizadas, nos atentamos aos textos que possuíssem mais relações com a matemática e a teoria de Jean Piaget. A partir disso, criamos uma tabela (Tabela 1) onde estão presentes os artigos selecionados para análise no TCC.

Tabela 1 – Artigos selecionados

Nº	Ano	Revista	Título	Autor
26	1947[3]	Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos	Orientações Metodológicas da Psicologia Experimental da Infância	Bertamini, Tranquilo
43	1958	Revista Atualidades Pedagógicas	Noções gerais sobre as principais Correntes Psicológicas	Geiling, Glória Konegunda
8[4]	**1958**	**Revista de Pedagogia**	**O Ensino do Cálculo**	**Penteado Júnior, Onofre Arruda**
13	**1961**	**Revista de Pedagogia**	**O Ensino do Cálculo na Escola Primária e Secundária**	**Penteado Júnior, Onofre Arruda**
16	1963	Revista de Pedagogia	A Psicologia de Jean Piaget e a Didática	Penteado Júnior, Onofre Arruda
22	1966	Revista de Pedagogia	Contribuição da Psicologia Genética a Uma Didática Evolutiva	Castro, Amélia Domingues
23	1967	Revista de Pedagogia	Rumo a uma Didática de Fundação Psico-genética	Castro, Amélia Domingues

Fonte: Das autoras, 2016.

O objetivo deste trabalho é descrever as relações do ensino de cálculo na escola primária e a teoria de Jean Piaget apresentadas por Onofre de Arruda Penteado Junior em dois artigos, um de 1958 e outro de 1961 que foram inicialmente apresentados no Congresso de Educação em Ribeirão Preto, em setembro de 1956 (PENTEADO JUNIOR, 1961, p.5). Nesse artigo, buscaremos características marcantes da forma de pensar do autor sobre o ensino do Cálculo, além de perceber as relações estabelecidas pelo mesmo com autores influentes na época como Jean Piaget.

Como ferramentas teórico-metodológicas utilizamos autores franceses que vêm trabalhando com perspectivas ligadas à História Cultural, como Roger Chartier (1990), Dominique Julia (2001), André Chervel (1990), dentre outros. O diálogo com tais autores é

[3] O presente artigo foge a nossa periodização inicial, mas o consideramos necessário, pois é um dos primeiros artigos disponíveis no repositório e que inicia uma discussão sobre Jean Piaget.
[4] Os artigos em negrito serão objeto de estudo deste estudo preliminar.

importante, pois, por meio deles, é possível pensar-se na análise da cultura escolar e nos processos que dão significado a elementos presentes nessa cultura, como os saberes escolares e os saberes de formação de professores, mais especificamente os saberes ligados a teoria psicológica de Jean Piaget.

Compreendemos que a história da educação matemática é um conhecimento necessário para a formação do futuro licenciado, seja em matemática, seja em pedagogia e que o conhecimento sobre o passado pode fazer com que pensemos práticas do presente de forma mais crítica e fundamentada.

Procuraremos responder a seguinte questão: Quais as relações do ensino de cálculo na escola primária e a teoria de Jean Piaget apresentadas por Onofre de Arruda Penteado Junior?

A TEORIA DE JEAN PIAGET E ENSINO DO CÁLCULO

Penteado Júnior (1961) afirma que uma escola tem como função primária fazer com que seus alunos pensem, o que segundo ele, é alcançado com sucesso acima de tudo no ensino de cálculo.

O autor completa que

> o que importa não é a simples repetição de fatos, definições, leis e princípios e sim o ser capaz de resolver situações problemas e isso só se consegue pela inteligência reflexiva, pela capacidade de raciocinar (PENTEADO JUNIOR, 1961, p.5)

Ele defende que é necessária uma completa revisão no ensino em geral, sendo inconcebível o ato de ensinar via memorização. Para essa afirmação o autor se baseia nas contribuições psicológicas de Gestalt e Jean Piaget (PENTEADO JUNIOR, 1961).

Anterior as operações, a criança deve ter construído a noção de número, que de acordo com Penteado Junior (1958)

> não se faz apenas empiricamente, isto é , o número não resulta da observação e comparação de objetos concretos [...] a construção do conceito de número é o resultado da ação conjunta do espírito, da atividade mental que trabalha sobre a realidade do mundo exterior. (PENTEADO JUNIOR, 1958, p.1)

Para melhor explicar quais são essas contribuições de Jean Piaget, o autor apresenta as três fases do pensamento lógico segundo Piaget: a formação da inteligência sensomotora, a formação do pensamento objetivo-simbólico e a formação do pensamento lógico-concreto. As mesmas são expostas pelo autor da seguinte forma:

Penteado Júnior (1961, p.6) cita as fases do desenvolvimento de uma criança, afirmando que em primeiro momento, suas ações são baseadas em “um saber herdado, ou uma primeira direção dada pela natureza, não intencional”. O autor segue falando que já na segunda fase, a criança é capaz de ter

> “um pensamento analógico pré-conceitual, em que designa por um som todos os animais quadrupedes, sem distinção. Tudo que tem quatro pernas é ‘Au, Au’. Percebe coisas concretas, mas não percebe as relações entre as coisas, abstratamente. É o que Piaget denomina pensamento irreversível.” (PENTEADO JUNIOR, 1961, p.6)

Percebendo assim, uma espécie de princípio de noções de separação e seriação. Porém, quando dividida em partes, a criança, muitas vezes se torna incapaz de acrescentar as partes no total e considerá-las componentes dele o que seria a irreversibilidade do pensamento infantil.

Segundo o autor, a capacidade de desenvolver o pensamento reversível vem a partir da terceira fase, onde segundo Penteado Junior (1958) a criança “é capaz de interiorizar a ação e de relacionar partes com partes e com o todo” (p. 7).

Voltando ao contexto escolar, podemos perceber mais uma recepção das ideias de Jean Piaget nas palavras de Penteado Júnior. Isso ocorre quando o mesmo, contrariando o pensamento da escola antiga que visava apenas o resultado final do aluno e não seus meios de obtenção, cita o pensamento piagetiano que “os elementos fundamentais do pensamento não são as imagens estáticas, cópias de modelos exteriores, mas esquemas de atividades cuja elaboração o indivíduo toma parte ativa e importante” (Penteado Júnior 1961, p.7), sendo que o desenvolvimento do educando parte dessa participação do mesmo no processo de aprendizagem.

A partir dessas e outras ideias que o autor defende no texto, o catedrático aponta algumas consequências pedagógicas aplicáveis ao cálculo e demais matérias do currículo da Escola Primária e Secundária. A primeira dessas seria ao ensinar um tema, Penteado Júnior (1958) defende que “é preciso investigar as operações básicas, isto é, as operações efetivas que possam existir na base da noção e começar por essas operações” (p.11), sendo o professor, responsável por auxiliar os alunos gradativamente em níveis, com a utilização de objetos, manuseando, separando e medindo-os. Essa última parte já abrange a segunda consequência, que seria construir uma progressividade, partindo de etapas mais primitivas até as mais avançadas. As últimas três consequências dizem respeito mais a instituição do que ao momento de aula propriamente dito, o autor cita que deve haver centros de melhoria de ensino, onde os alunos poderiam colocar em prática os estudos teóricos, a realização de cursos de férias para realização de práticas a fim de que a teoria se realize na pratica e a divulgação de trabalhos sobre ensino e elaboração de materiais didáticos.

"Conforme já exposto na introdução, Penteado Junior (1961) argumenta que infelizmente o ensino ainda é "muito verbalístico" e "que não corresponde a realidade psicológica do educando e as necessidades sociais de um mundo industrializado e em mudança" (PENTEADO JUNIOR, 1961, p.5). Em suas conclusões sintetiza:

> 1 – A finalidade primordial da escola em geral é ensinar a pensar e não apenas memorizar. A Matemática, quando bem ensinada, é meio inestimável para a consecução dessa finalidade.
> 2 – Os altos estudos universitários só poderão ser bem feitos, se o ensino em geral e o de matemática em especial despertarem, desde cedo, o gosto ao raciocínio rigoroso. O desgosto à Matemática resulta mais do seu mau ensino que da natureza da matéria.
> 3 – O ensino, se mantém tradicional e rotineiro, desconhecendo, na prática, as modernas conquistas psicológicas aplicáveis a didática. A teoria não chega a permear a prática, renovando-a.
> 4 – Os professores no geral e, principalmente, os de matemática não conhecem o processo psicológico da aprendizagem e muitas vezes não são capazes de explicar os porquês dos temas de ensino de modo a que o aluno compreenda de fato. (Ibid., 1961, p.12)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As angústias do professor Penteado Junior, nos remeteram a um artigo recente "Ensino de matemática no Brasil é catastrófico"[5], do novo diretor do IMPA, Marcelo Viana, em artigo publicado na Folha de São Paulo em 28 de janeiro de 2016. A declaração causou muita repercussão entre o senso comum pedagógico, pois o matemático afirma que as crianças nascem gostando de matemática, mas que são os professores se encarregam de acabar com isso. Afirma que um dos elementos que contribui para esse quadro é a formação trágica dos professores e que o IMPA pode ajudar não só descobrindo talentos,

[5] ALVES, Gabriel; VERSOLATO, Mariana. Ensino da matemática é catastrófico, diz novo diretor do IMPA. Caderno Cotidiano. **Folha de S. Paulo**. 28 de outubro de 2015.

mas mudar o pensamento em relação a matemática, mostrar sua importância para a formação de profissionais qualificados e cidadão que não se permitem ser enganados.

Sem entrar no mérito ideológico das declarações do diretor, o fato é que o tema da formação profissional dos professores está novamente na ordem do dia, assim como estava presente na tese do ilustre catedrático.

O estudo do cálculo alinhado as bases psicológicas de Jean Piaget era o anúncio do ensino em bases modernas, necessário para despertar o interesse no cálculo e vital para os estudos mais avançados.

REFERÊNCIAS

BERTAMINI, Tranquilo. Orientações Metodológicas da Psicologia Experimental da Infância. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, São Paulo, v. x, n.26, p. 41-48, 1947. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/130738 >. Acesso em: 22 jan. 2016.

CASTRO, Amélia Domingues, Contribuição da Psicologia Genética a Uma Didática Evolutiva. **Revista de Pedagogia**, São Paulo, ano 12, v. 12, n. 22, p. 7-27, 1966. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128330>. Acesso em: 22 jan. 2016.

CASTRO, Amélia Domingues, Rumo a uma Didática de Fundação Psico-genética. **Revista de Pedagogia**, São Paulo, ano 13, v. 13, n. 23, p. 7-23, 1967. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128331>. Acesso em: 22 jan. 2016.

CHARTIER, R. **A história cultural – entre práticas e representações.** Lisboa: Difel; Rio de Janeiro: Bertrand Brasil S.A., 1990.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação,** Porto Alegre, v. 2, p. 177-229, 1990.

GEILING, Glória Konegunda. Noções gerais sobre as principais Correntes Psicológica. **Revista Atualidades Pedagógicas**, São Paulo, ano IX, n. 43, p. 35-37, 1968. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/133547>. Acesso em: 22 jan. 2016.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista Brasileira de História da Educação**. Campinas, SP: SBHE, n. 1, p. 9-44, 2001.

PENTEADO JUNIOR, Onofre Arruda. O ensino de Cálculo na Escola Primária e Secundária. **Revista de Pedagogia,** São Paulo, ano 7, v. 7, n. 13, jan.-jun., p.5-13, 1961. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128321>. Acesso em: 22 jan. 2016.

PENTEADO JUNIOR, Onofre Arruda. O ensino de Cálculo. **Revista Pedagógica**, São Paulo, ano 4, v. 4, n. 8, p. 1-4, 1958. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/128338>. Acesso em: 22 jan. 2016.

PRÉDIOS AUTOSSUSTENTÁVEIS CONTINUARÃO GANHANDO FORÇA? UMA RESPOSTA VIA MODELAGEM MATEMÁTICA

Thiago Alessi Reichert
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
thiago.reichert@outlook.com

Leonardo Ishihara Casagrande
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
leonardo.ishihara.casagrande@hotmail.com

Lucas Vaz de Camargo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lucas1278@uol.com.br

Mara Cristina Alves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
maracristinaalves.98@gmail.com

Willian Vinicius de Moura Ribeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
WillianMegabites0@gmail.com

1. Introdução

Em resposta ao uso cada vez mais intenso dos recursos naturais, projetos sustentáveis e ecologicamente corretos ganham espaço no mercado da construção civil.

Empreendimentos deste setor possuem um conselho responsável por certificar obras que sigam os parâmetros do sistema LEED (Liderança em Energia e Design Ambiental), lançado em 1999, mas a quantidade de certificações LEED concedidas aumentou consideravelmente no período de 2002 até 2012, o que revela um mercado em expansão.

É possível prever o que acontecerá nos próximos anos com o auxílio da modelagem matemática e verificar a tendência desse setor de construções. Assim, o objetivo deste trabalho será determinar um modelo que promova uma previsão da utilização do sistema LEED em obras, sendo, portanto, de grande importância para a área de Engenharia Civil.

2. Apresentação do Sistema LEED

O artigo "Prédios autossustentáveis ganham força", publicado na Revista Engenharia Civil, faz uma apresentação do Sistema LEED. O texto foi adaptado, sendo este exibido a seguir: [1]

[1] Disponível em: http://rudders.com.br/web/e_folheando.php?galeria_id=16. Acesso em: 18 abr. 2016.

Sustentabilidade é a palavra do momento. A preocupação com o ecossistema atinge todos os setores, e na construção civil não é diferente. A crescente demanda por empreendimentos que não agridam o meio ambiente tem feito com que as construtoras se preocupem cada vez mais em construir edifícios que sigam os parâmetros da certificação LEED.

Lançado em 1999 nos Estados Unidos, o sistema LEED é gerido pelo Conselho Edifícios Verdes (*Green Building Council*). O processo é reconhecido internacionalmente e concede certificação para edifícios de reunião específica de referência ambiental para o desenvolvimento local, eficiência energética, utilização de materiais sustentáveis e ambiente interno. "A certificação LEED é concedida após a conclusão dos empreendimentos. Para recebe-la, o imóvel deve comprovar que minimizou os impactos ambientais em sua obra, deixando um edifício pronto", afirma o gerente-técnico do GBC Brasil, Marcos Casado.

Gráfico 1 – Construções LEED no Mundo

Fonte: Revista Engenharia Civil, Rudders

Os requisitos para todos os níveis da certificação são rigorosos e difíceis de ser atendidos até mesmo para residências e pequenos prédios comerciais. No Brasil, até dezembro de 2012, apenas 78 empreendimentos haviam recebido a certificação LEED e mais de 600 estavam registrados no sistema em busca da certificação.

De tempos em tempos o LEED é revisto para se adequar ao mercado e incorporar novas tecnologias. As mudanças previstas para as futuras versões estão concentradas nas seguintes áreas: designer integrado; uso racional da água; eficiência energética e atmosfera; e materiais, recursos e qualidade ambiental interna. Além disso, a certificação LEED reconhece a iniciativa sustentável de um empreendimento.

Algumas características presentes neste tipo de construção são: designer sustentável e estratégias de construção verde, como tetos altos, iluminação indireta com coleta de luz ou iluminação natural (economia de energia), teto de vidro, sistemas de energia ecologicamente corretos; reciclagem de resíduos de construção, utilização de menos água e energia, desde a fase de construção.

Todas essas características provam que a certificação LEED está transformando o mercado, fornecendo um sistema para promover práticas ecológicas integradas a construção civil e reconhecidas internacionalmente.

3. Problemática

O Gráfico 1 publicado na revista apresenta a quantidade de construções LEED (em milhões de m²) no mundo, certificados pelo Conselho Edifícios Verdes, porém, como a revista é de dezembro de 2012, não há dados recentes sobre as construções LEED neste gráfico.

Conhecer (ou pelo menos estimar) dados mais recentes é importante pois permite compreender se é viável construir um projeto no sistema LEED, perceber a agilidade com que os certificados são concedidos, as tendências de mercado referentes ao empreendimento e a complexidade do processo de certificação.

Considerando este grau de relevância do conhecimento de dados mais atuais, com o auxílio da modelagem matemática, foi proposto estimar esses valores. Ou seja, pretende-se elaborar um modelo que permita encontrar valores posteriores aos apresentados.

A determinação de tais valores permitirá uma série de conclusões relevantes para o setor de construção civil.

4. Desenvolvimento da Modelagem Matemática

O modelo matemático baseado no Gráfico 1 terá a variável ano e a quantidade de obras certificadas (milhões m²) variando em função do ano.

Para a obtenção desse modelo é necessário retomar um trecho do artigo, apresentado no tópico 2:

(1) “Lançado em 1999 nos Estados Unidos, o sistema LEED é gerido pelo Conselho Edifícios Verdes. O processo é reconhecido internacionalmente e concede certificação para edifícios...”

De (1) podemos concluir que, sendo o sistema LEED gerido pelo Conselho de Edifícios Verdes, este conselho é o responsável por conceder as certificações para as obras.

Como o sistema foi lançado em 1999, admite-se a hipótese de que não há nenhuma construção LEED certificada no mundo antes deste ano.

(2) Considerando que o resultado desta modelagem é uma função, concluímos ainda de (1) que, sendo t o número do ano, $f(t) = 0$ para todo $t < 1999$, pois não teremos construções certificadas antes do ano de 1999.

(3) A partir de 1999, como $f(t)$ representa uma área construída (certificada) esta nunca poderá ser menor que 0, para qualquer ano t.

(4) Com base nas observações do Gráfico 1, verifica-se um expressivo crescimento da quantidade de construções certificadas com o sistema LEED entre os anos 2002 e 2009, principalmente, uma vez que neste período de tempo tivemos os maiores crescimentos (proporcionais) de um ano para outro seguinte. (5) Além disso, os valores apresentados neste mesmo gráfico são crescentes para qualquer intervalo de tempo.

Com base nas observações (3) e (4) determinou-se que o gráfico da função f entre o intervalo de 2002 até 2009 terá um comportamento de função exponencial, definida por $g(x) = a \cdot b^{cx}$, uma vez que o gráfico nunca intercepta o eixo x, ou seja, $g(x) \neq 0$ para qualquer valor de x.

Retornando a observação (1), discutiu-se a necessidade de estabelecer um “limitador” para $f(t)$ conforme t aumentava. Como as certificações são concedidas por um conselho específico, o número de certificações não pode ser maior que um certo limite de certificados que os membros e/ou funcionários deste conselho conseguem processar, verificar e emitir.

Entende-se como mais adequado para esta situação, considerando as afirmações acima, uma função logarítmica da forma $h(x) = k \cdot \log_l x + m$. Conclui-se de (5) que esta função deverá ser crescente para qualquer intervalo.

Considerou-se este tipo de função devido suas características, pois sua imagem adquire certa “estabilidade” de crescimento de valores, conforme aumenta-se o ano t, mas mesmo assim mantém crescimento em toda a função.

Será adotado, inicialmente, para a regra da função f, uma equação logarítmica para o intervalo referente aos anos posteriores a 2009.

Assim, ao final da modelagem, a função f será uma função definida por partes, cujo conjunto de sentenças é definido nos procedimentos seguintes.

Para facilitar os cálculos necessários e a construção do gráfico da função f com softwares computacionais, convencionou-se, para este trabalho, que as bases das funções exponenciais e logarítmicas citadas serão ambas determinadas pelo valor da constante e, ou seja, o número de Euler.

Deste modo, $g(x) = a \cdot e^{cx}$ (6) e $h(x) = k \cdot \log_e x + m$, ou ainda, $h(x) = k \cdot \ln(x) + m$. (7)

Para simplificar o processo de construção dos gráficos, tem-se que $x = t - 2001$, em que t é o número do ano.

Tabela 1 – Ano x Construções Certificadas

Ano (t)	x = t - 2001	Obras Certificadas (km²)
2002	1	6,72
2003	2	13,70
2004	3	22,95
2005	4	41,53
2006	5	69,42
2007	6	181,88
2008	7	320,24
2009	8	560,03
2010	9	742,22
2011	10	860,48
2012	11	965,20

Assim, se a regra de g deve ser considerada para os anos entre 2002 e 2009, em termos de x estes valores estarão entre 1 e 8.

A função exponencial g será determinada com as coordenadas dos pontos representantes dos extremos do intervalo de 2002 a 2009. Consultando a Tabela 1 os pontos utilizados serão A(1, 6.72) e B(8, 560.03).

A equação (6) pode ser representada por $y = a \cdot e^{cx}$.

Para A: $6{,}72 = a \cdot e^{c \cdot 1} = a \cdot e^{c}$ (8)

Para B: $560{,}03 = a \cdot e^{8c} = a \cdot e^{c} \cdot e^{7c}$

Usando o encontrado em (8), podemos substituir $a \cdot e^{c}$ por 6,72, obtendo:

$$e^{7c} = \frac{560{,}03}{6{,}72}$$

Logo,

$$c = \frac{\ln\left(\frac{560{,}03}{6{,}72}\right)}{7} \cong 0{,}63184$$

Aplicando em (8) conclui-se que

$$a = \frac{6{,}72}{e^c} \cong 3{,}57243$$

Portanto, $g(x) = 3{,}57243 \cdot e^{0{,}63184x}$.

A função logarítmica h será determinada pelas coordenadas dos pontos representantes dos extremos do intervalo de 2010 até 2012. Consultando a Tabela 1 serão utilizados os pontos C(9, 742.22) e D(11, 965.2).

A equação (7) pode ser representada por $y = k \cdot \ln(x) + m$.

Para C: $742{,}22 = k \cdot \ln(9) + m$ (9) e para D: $965{,}2 = k \cdot \ln(11) + m$. (10)

Subtraindo (9) de (10) obtém-se que $222{,}98 = k \cdot (\ln(11) - \ln(9))$

Logo,

$$k = \frac{222{,}98}{\ln(11) - \ln(9)} \cong 1111{,}1737$$

Substituindo em (9):

$m = 742{,}22 - k \cdot \ln(9) \cong -1699{,}2782$

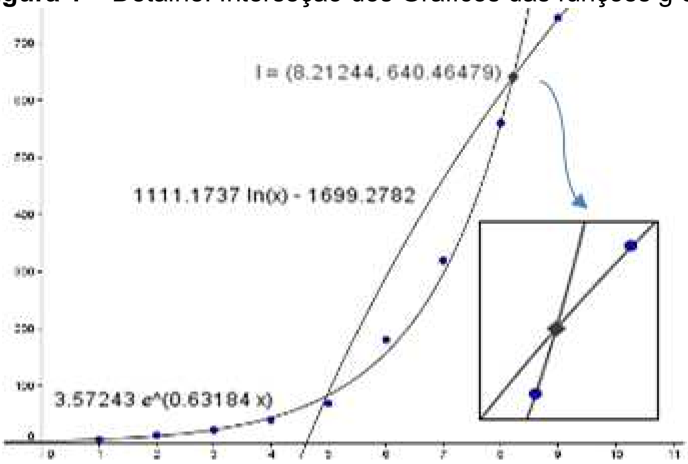
Portanto, $h(x) = 1111{,}1737 \cdot \ln(x) - 1699{,}2782$.

É importante determinar agora a interseção entre os gráficos das funções g e h.

Na verdade, os gráficos dessas funções interceptam-se em dois pontos distintos. Porém o que interessa ao problema é apenas o que possui abscissa menor que 9 e maior que 8, pois representará a "conexão" entre esses gráficos.

(11) O ponto de interseção I(8.21244, 640.46479), em destaque na figura abaixo, possui abscissa de aproximados 8,21244, e portanto, x = 8,21244 satisfaz ambas as equações das funções g e h.

Figura 1 – Detalhe: Interseção dos Gráficos das funções g e h [2]



[2] O gráfico completo pode ser observado acessando o seguinte link: http://ggbtu.be/mtEdqGXZM

5. Resultados

Concluídas as observações pode-se determinar o conjunto de sentenças da função f.

Para t < 1999, ou seja, x < -2, concluímos em (2) que f(x) é nula, logo,

(12) $f(x) = 0$ se $x < -2$;

Já para $x \geq -2$ (ou seja, $t \geq 1999$) até a abscissa x_I do ponto interseção $I(x_I, y_I)$ definido pelos gráficos funções g e h, valor citado em (11). Sendo assim, determina-se que a regra da função f, para o intervalo de -2 até 8,21244, é dada pela regra de g, logo,

(13) $f(x) = 3{,}57243 \cdot e^{0{,}63184x}$ se $-2 \leq x \leq 8{,}21244$

Além disso, é importante observar que para x = -2 a função é descontínua, uma vez que para x < -2, f(x) = 0, e para x = -2 o valor de $f(x) \cong 1{,}0096$.

Adotaremos por convenção que $f(x_I)$ também é determinada por essa regra, o que justifica o intervalo fechado. Vale observar que a função f será descontínua para x = 8,21244, uma vez que temos uma aproximação das coordenadas do ponto de interseção.

Por fim, para valores de x maiores que x_I, f(x) é descrita pela regra de h, logo,

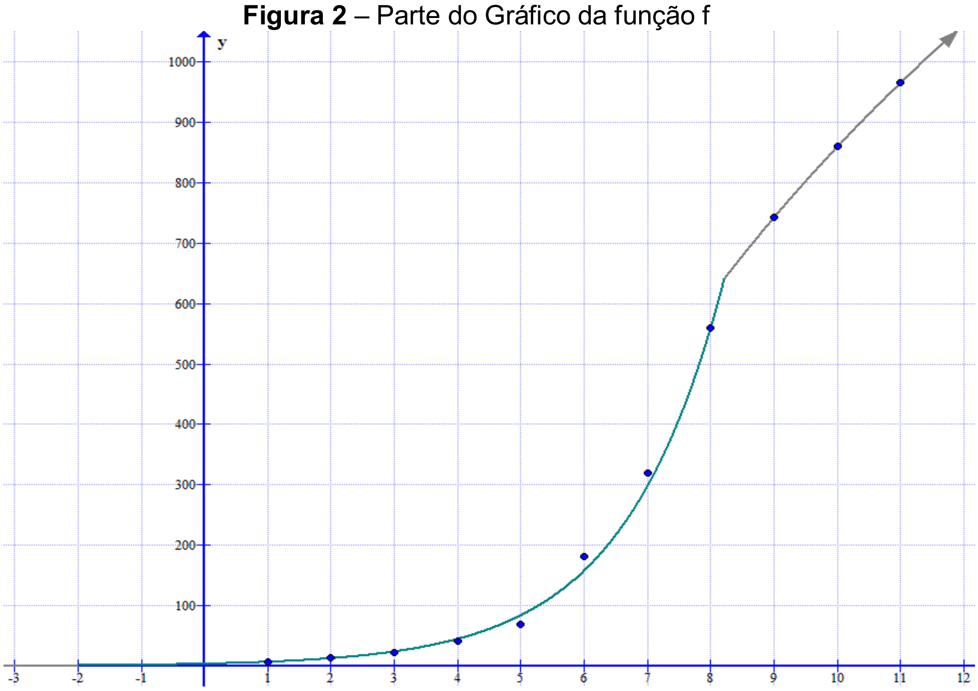
(14) $f(x) = 1111{,}1737 \cdot \ln(x) - 1699{,}2782$ se $x > 8{,}21244$

Portanto, a regra da função f, definida pelas partes (12), (13) e (14) é:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < -2 \\ 3{,}57243 \cdot e^{0{,}63184x} \text{ se } -2 \leq x \leq 8{,}21244 \\ 1111{,}1737 \cdot \ln(x) - 1699{,}2782 \text{ se } x > 8{,}21244 \end{cases}$$

Sendo assim, o gráfico desta função é:

Figura 2 – Parte do Gráfico da função f



6. Variação entre dados obtidos e informados

A validação consiste no processo de aceitação ou não do modelo proposto. O modelo deve ser testado comparando os valores obtidos com os reais definidos. Logo, ao concluir a expressão da regra da função f, definida por partes, é interessante verificar a diferença entre os valores dados no Gráfico 1 e os obtidos com a regra da função. Para isso, observa-se a Tabela 2 com a comparação destes resultados.

Como o objetivo deste modelo é prever os valores posteriores aos pré-definidos e levando em consideração que a variação entre os valores do modelo e os valores reais, dos últimos quatro anos informados na tabela (assim como dos quatro primeiros), é pequena pode-se aprovar o modelo obtido.

Tabela 2 – Comparação de valores do Gráfico e da Função

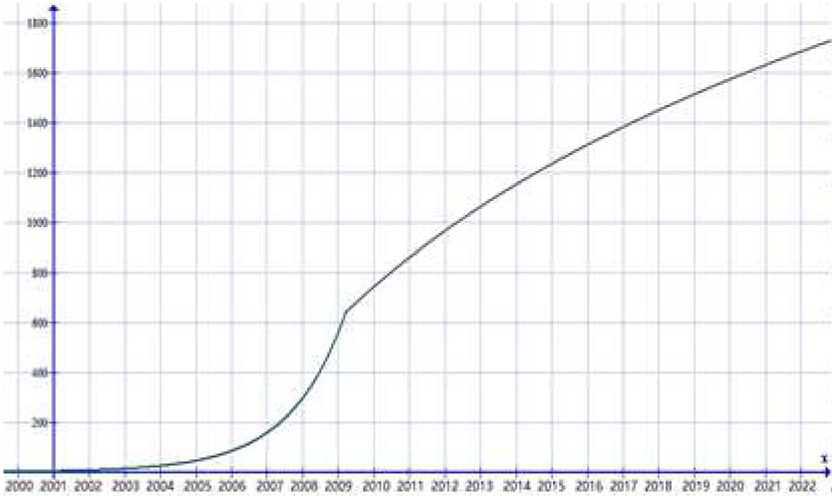
Ano	Gráfico 1	Função f	Variação (v)	v²
2002	6,72	6,72	0,00	0,00
2003	13,70	12,64	-1,06	1,1236
2004	22,95	23,78	0,83	0,6889
2005	41,53	44,73	3,20	10,24
2006	69,42	84,14	14,72	216,6784
2007	181,88	158,27	-23,61	557,4321
2008	320,24	297,71	-22,53	507,6009
2009	560,03	560,03	0,00	0,00
2010	742,22	742,22	0,00	0,00
2011	860,48	859,30	-1,18	1,3924
2012	965,20	965,20	0,00	0,00
-	-	Total	-29,63	1295,1563

7. Conclusão

A figura 2 apresentou o gráfico de f em função de x. Porém, os valores que interessam precisam ser dados em anos. Por isso, sendo t o tempo em anos, temos que $x = t - 2001$. Assim, o gráfico de f em função de t e as previsões para os próximos anos são exibidos na figura 3:

A modelagem matemática permitiu estimar os valores para anos posteriores aos dados pelo artigo, porém com base nesses, possibilitando posicionar-se quanto as perspectivas futuras do sistema LEED.

Figura 3 – Gráfico em Relação ao Ano e Tabela Previsões



Ano (t)	Previsão f(t)
2013	1061,88
2014	1150,83
2015	1233,17
2016	1309,84
2017	1381,55
2018	1448,91
2019	1512,43
2020	1572,50
2021	1629,50
2022	1683,72

A quantidade de construções certificadas tende a continuar aumentando, uma vez que empreendimentos menos poluentes e mais eficientes, sustentáveis e econômicos são cada vez mais importantes, devido ao contexto natural atual, pois criam possibilidades melhores para as próximas gerações. A gestão dos atuais recursos refletirá diretamente sobre as condições naturais oferecidas a humanidade no futuro.

REFERÊNCIAS

PRÉDIOS autossustentáveis ganham força. Rudder, Revista Engenharia Civil, São Paulo, p. 44, dez de 2012.

Uma comparação entre sequências numéricas e sequências de funções

Mayara Vendramini Codognos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
mayaravendramini@hotmail.com

Dr. Rodrigo Manoel Dias Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
romdandrade@gmail.com

1 Sequências numéricas

O estudo de sequências numéricas é essencial para o desolvimento da ideia de limite, visto que, nas sequências, a intuição de limite é mais simples e possibilita resultados capazes de auxiliar no entendimento de temas mais sofisticados, como o das sequências de funções, por exemplo. Nesse sentido, realizar-se-á um estudo comparativo entre as sequências numéricas e sequências cujo os termos são funções.

Definição 1 (Sequência numérica) Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \in \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O n-ésimo termo da sequência será representado por x_n. Além disso, a sequência será indicada por (x_n) [2].

As sequências numéricas podem representar diversos problemas, em que são necessários alguns artifícios para resolvê-los. Sendo assim, um dos principais resultados do estudo de sequências numéricas é o Teorema de Bolzano-Weierstrass, o qual garante a existência de uma subsequência convergente para toda sequência limitada. Para compreender este teorema é necessário, primeiramente, definir o que é uma sequência limitada.

Definição 2. Uma sequência (x_n) é *limitada* quando o conjuntos dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b, tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ [2].

Isso significa que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$, e ainda, implica que existe um $k > 0$, tal que $|x_n| \leq k$.

Exemplo 1. Seja $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(x_n) = (1, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots)$. Observe que essa sequência é limitada, pois pertence ao intervalo $[0, 1]$.

O fato da sequência $x_n = \frac{1}{n}$ pertencer ao intervalo $[0, 1]$ requer uma noção de limite presente na condição de que, para valores muito grandes de n, os termos da sequência se aproximam a cada vez mais de zero, porém não chegam nesse valor. Desse modo, é pertinente identificar o limite de um sequência numérica, isto é, definir quando ocorre sua convergência.

Definição 3. Uma sequência de números reais *converge* para $a \in \mathbb{R}$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, então $|x_n - a| < \epsilon$. Quando o limite existe, denota-se por: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ [1].

Exemplo 2. A sequência $x_n = ne^{-n}$ converge para zero, isto é, $\lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$.

De fato, dado $\epsilon > 0$,

$$n > n_0 \Rightarrow |ne^{-n}| < \epsilon \Leftrightarrow ne^{-n} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{\epsilon}{n} \Leftrightarrow \ln(e^{-n}) < \ln\left(\frac{\epsilon}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-n} < \ln\epsilon - \ln(n)$$

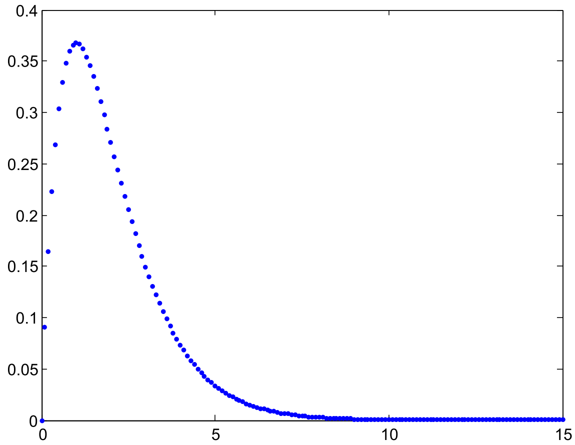
$$\Leftrightarrow -n < \ln\epsilon - \ln(n) \Leftrightarrow -n < \ln\epsilon - \ln n.$$

Como $-\ln n \leq 0$, tem-se:

$$-n < \ln\epsilon.$$

Desse modo, a convergência da sequência ocorre com $n_0 > \ln\epsilon$.

Figura 1: **Gráfico do Exemplo 2**



É fácil observar que, a partir de um certo n natural, os termos da sequência tendem a zero. Além disso, é possível verificar que a sequência é limitada. Então, um questionamento pertinente a se fazer é sobre a possibilidade de se extrair uma restrição de termos dessa sequência de modo que essa restrição seja convergente. Esse é o resultado do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Entretanto, antes de enunciá-lo é necessário definir o que é essa restrição, isto é, uma subsequência de (x_n).

Definição 4. Dada uma sequência (x_n) de números reais, uma *subsequência* de (x_n) é a restrição da função x a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}' = n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$ de $\mathbb{N}$ [2].

Para compreender como ocorre a convergência de uma subsequência, tem-se o teorema a seguir:

Teorema 1. A fim de que $a \in \mathbb{R}$ seja limite de um subsequência de (x_n) é necessário e suficiente que, para todo $\epsilon > 0$, exista uma infinidade de índices n tais que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ [2].

Com isso, é possível enunciar e compreender o Teorema de Bolzano-Weierstrass:

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada (x_n) contém uma subsequência convergente [1].

Demonstração:

Seja A o conjunto formado por números reais de modo que, $x \in A$ se existir no máximo um número finito de índices n tais que x_n seja maior do que x. Como o conjunto x_n é limitado, então existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo n. Logo, $-k$ é uma cota inferior para o conjunto A, então A possui um ínfimo m.

Agora, seja (x_{n_j}) subsequência de (x_n), tal que $(x_{n_j}) \to m$, construída do seguinte modo:

O intervalo $(m-1, m+1)$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n, pois, caso contrário, $m-1$ estaria em A e implicaria em m não ser ínfimo de A. Tomando-se x_{n_1} como um dos termos de x_n, tem-se $|x_{n_1} - m| < 1$.

O intervalo $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n. Seja x_{n_2} um dos termos de x_n, com $n_2 > n_1$, então, $|x_{n_1} - m| < \frac{1}{2}$. De forma análoga, forma-se $x_{n_j} \in (m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j})$, tal que $n_j > n_{j-1} \cdots > n_2 > n_1$.

A subsequência contruída (x_{n_j}) de (x_n) converge para m, quando $j \to \infty$, pois $|x_{n_j} - m| < \frac{1}{j}$, o que conclui a demonstração do teorema.

2 Sequências de funções

No que segue, X denotará um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 5. Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, uma função f_n, definida em X e tomando valores reais [2].

Assim como nas sequências numéricas, a convergência de sequências de funções possuiu um papel importante na solução de alguns problemas matemáticos, os que se reduzem a um sistema de equações diferenciais, por exemplo [2]. Neste trabalho, dois tipos de convergência de sequências de funções serão definidas: a simples e a uniforme.

Definição 6. Uma sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$ de funções *converge simplesmente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, se dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, existir $n_0 = n_0(x, \epsilon)$, com $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ [1].

Exemplo 3. A sequência de funções $f_n(x) = nxe^{-nx}$, considerada em $x \geq 0$, converge simplesmente para $f(x) = 0$.

Observe que, se $x = 0$, a convergência é trivial. Agora, se $0 < x \leq 1$, tem-se que, para todo $\epsilon > 0$ e todo $x \in X$, existe um $n_0 = n_0(x, \epsilon)$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |nxe^{-nx}| < \epsilon \Leftrightarrow nxe^{-nx} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow e^{-nx} < \frac{\epsilon}{nx} \Leftrightarrow \ln(e^{-nx}) < \ln\left(\frac{\epsilon}{nx}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln e^{-nx} < \ln \epsilon - \ln(nx)$$

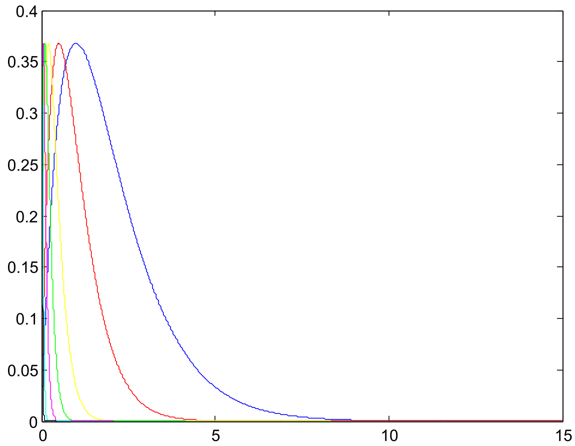
$$\Leftrightarrow -nx < \ln \epsilon - \ln(nx) \Leftrightarrow -nx < \ln \epsilon - \ln n - \ln x.$$

Como $-\ln n \leq 0$, tem-se:

$$-nx < \ln \epsilon - \ln x.$$

Desse modo, a convergência simples da $f_n(x) = nxe^{-nx}$ para $f(x) = 0$ ocorre com $n_0 > \frac{\ln x - \ln \epsilon}{x}$.

Figura 2: **Gráfico do Exemplo 3**



A convergência simples também é chamada de pontual, visto que ela depende do ponto, fazendo com que o natural n_0 dependa também de x, o que não ocorre na convergência uniforme, em que n_0 depende apenas de ϵ.

Definição 7. Uma sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$ de funções *converge uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, se dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in X$, existir n_0 (que depende somente de ϵ), com $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ [1].

Assim como o Teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos principais resultados válidos para as sequências numéricas, existe o Teorema de Arzelà-Ascoli, válido para sequências de funções, que torna-se análogo ao primeiro, desde que se acrescente a hipótese da sequência de funções ser equicontínua.

Definição 8. Uma família $\mathcal{F}$ de funções contínuas, definidas em um intervalo [a,b], é *equicontínua* se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $|x - y| \leq \delta$, para cada $x, y \in [a, b]$ implicar $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, para cada $f \in \mathcal{F}$ [1].

Outra observação a se fazer é o fato de que, no Teorema de Arzelà-Ascoli, a sequência de funções é uniformemente limitada.

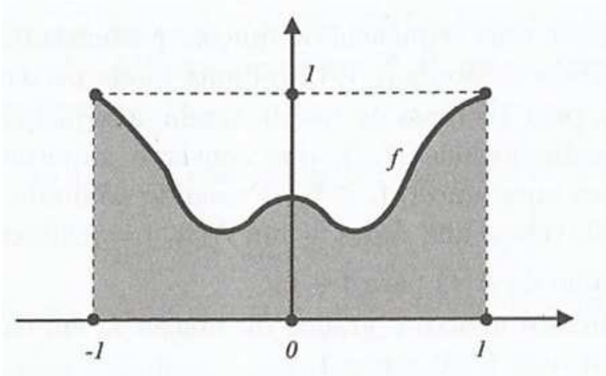
Definição 9. Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita *uniformemente limitada* se existe um número real $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in X$ [2].

Teorema 3 (Arzelà-Ascoli). Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções definidas em um intervalo $[a, b]$. Então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma subsequência que converge uniformemente [1].

De acordo com [2], o Teorema de Arzelà-Ascoli é um instrumento útil para demonstrar a existência de soluções, em que um exemplo de aplicação do teorema está no Cálculo das Variações. onde busca-se determinar uma função que torne máxima ou mínima a área uma certa expressão.

Desse modo, seja $\mathcal{F}$ o conjunto das funções contínuas $f : [-1,1] \to [0,1]$ tais que $f(-1) = f(1) = 1$. A cada função $f \in \mathcal{F}$ associa-se o número $A(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

Figura 3: **Área haruchada $A(f)$.**



Fonte: LIMA, 2014.

O problema consiste em achar $f_0 \in \mathcal{F}$ tal que a área $A(f_0)$ seja mínima, isto é, $A(f_0) \leq A(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Dado que se quer encontrar a área mínima, a função que satisfaz essa exigência não existe, visto que, na resolução do problema, a área encontrada é igual a zero. Porém, reformulando a questão de forma que $\mathcal{F}$ seja equicontínua, é possível utilizar o Teorema de Arzelà-Ascoli para encontrar a área mínima entre todas as áreas [2].

Nesse contexto, pode-se observar a comparação gráfica entre as sequências numéricas e as de funções, visto que, quando toma-se um x fixo na sequência de funções, ela torna-se numérica, adotando o seu critério de convergência.

Desse modo, conclui-se que podem existir propriedades de sequências numéricas, semelhantes às de sequência de funções, exigindo mais hipóteses, como é o caso do Teorema de Arzelà-Ascoli, por exemplo.

Além disso, por meio do exemplo de aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli foi possível observar a importância de analisar possíveis analogias existentes entre teoremas de diferentes assuntos, visto que, a solução do problema só pode ter resultado pela hipótese da equicontinuidade das funções.

Referências

[1] FIGUEIREDO, D. G.: **ANÁLISE I** . 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[2] LIMA, E. L.: **Curso de Análise** . v.1. 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

VARIABILIDADE ESPACIAL DAS PROPRIEDADES QUÍMICAS DO SOLO E DO RENDIMENTO DE GRÃOS DO MILHO EM UM LATOSSOLO NO OESTE DO ESTADO DO PARANÁ

Claudia Borgmann
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
claudia.borg@hotmail.com

Pablo Chang
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
pablo-sdw@hotmail.com

Simone Andreia Roehrs
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
simone_roehrs@hotmail.com

Araceli Ciotti de Marins
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
araceli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

De acordo com o Ministério da Agricultura, o Brasil é o terceiro maior produtor mundial de milho e o segundo maior exportador mundial deste cereal. Além disso, temos o estado do Paraná como um dos maiores produtores do mesmo dentro do cenário brasileiro, sendo uma alternativa economicamente viável para as propriedades paranaenses, tanto que esta foi a cultura que mais incorporou tecnologia nos últimos dez anos.

Visto a importância que o milho exerce no Brasil, como também no estado do Paraná, verificamos que a região Oeste do estado é, segundo Shioga (2009) a maior produtora de milho safrinha, contando com 35,4% da produção total do estado, seguida da região Norte com 31,1% e a região Centro-Oeste com 18,4 %.

Para sustentar o crescimento dessa cultura, houve necessidade de investimentos substanciais, com o intuito de modificar e melhorar a produção de milho no estado e no o país. Assim, verifica-se que teve um impulso em programas de melhoramento, ofertando híbridos mais adaptados e adequados ao clima/solo da região, culminando na incorporação de novas tecnologias (PEIXOTO, 2014).

Contudo, dentro desse ambiente agrícola, e mesmo contando com diversas tecnologias, o maior desafio foi e vem sendo fazer com que tais tecnologias sejam adotadas na íntegra e manejadas corretamente, para que elas surtam o resultado desejado e se mantenham pelo maior período possível. É por meio dessa perspectiva que o agricultor atual procura inovar suas técnicas e desenvolver seu trabalho de modo a incorporar a adoção correta de determinadas práticas à sua rotina.

Para melhorar os resultados e atingir o objetivo de uma superprodução, contamos atualmente com a Agricultura de Precisão, que permite corrigir o solo, desde os mínimos detalhes, diminuindo as possíveis interações negativas entre as plantas e o solo, repercutindo no aumento da resposta e expressão das plantas, possibilitando o aumento da produtividade.

De acordo com Coelho e Silva,

> O conceito de Agricultura de Precisão está normalmente associado à utilização de equipamento de alta tecnologia (seja *hardware*, no sentido genérico do termo, ou *software*) para avaliar, ou monitorizar, as condições numa determinada parcela de terreno, aplicando depois os diversos fatores de produção (sementes, fertilizantes, fitofármacos, reguladores de crescimento, água, etc.) em conformidade (COELHO et al., 2004, p. 2).

O avanço e a dissipação desta nova maneira de se praticar a agricultura, fez surgir a necessidade de técnicas que levam estes conceitos para além das análises de solo, com o intuito e finalidade de aplicação variada de insumos.

Para que se tenha um bom rendimento de grãos e menor custo, é necessário analisar a variabilidade espacial da cultura de milho. Desse modo, se justifica pela quantidade de micronutrientes exigidas em diferentes regiões da área, afinal, de acordo com Favarin, Tezotto e Ragassi (2008), a deficiência ou excesso dos nutrientes nas plantas de milho podem desorganizar os processos metabólicos, assim como crescimento, fotossíntese e respiração.

Levando em consideração o ambiente socioeconômico no qual vivemos, observando que a sociedade e o comércio da região dependem fortemente do agronegócio e principalmente das culturas do milho e da soja, iremos, por meio deste trabalho, apresentar um estudo sobre um experimento acerca da cultura do milho.

Portanto, o objetivo deste trabalho foi estudar, por meio da Geoestatística, a variabilidade espacial da cultura milho, observando a variabilidade espacial de alguns atributos químicos do solo, avaliando seu comportamento de acordo com alguns parâmetros geoestatísticos.

MATERIAIS E MÉTODOS

O experimento foi instalado em uma área de um hectare pertencente à Faculdade Assis Gurgacz, na cidade de Cascavel – PR no ano de 2012. O solo da área foi classificado como Latossolo Vermelho Distroférrico típico, textura argilosa a muito argilosa, substrato basalto e relevo ondulado suave de acordo com EMBRAPA (2006). A declividade média do local do experimento é de 3%. Para a instalação do grid experimental, foram selecionados 133 pontos amostrais, georreferenciados com o uso de um GPS Garmim, modelo 60CSx.

As amostras de solo para a caracterização química advieram de coletas na camada de 0 – 0,1m para determinação dos nutrientes: boro (B: mg/l), cobre (Cu: mg/l), enxofre (S: mg/l) e zinco (Zn: mg/l). Posteriormente, seguiu-se para a realização das análises químicas do solo no Laboratório de Rotina da Universidade Federal de Santa Maria UFSM.

O plantio do milho se sucedeu com a cultivar 30 F 53 PIONNER com adubação de base de 605 kg ha^{-1} de MAP (mono amônio fosfato) e a colheita se efetuou em duas fileiras centrais de 2 metros de comprimento em cada ponto georreferenciado. Além disso, as espigas foram trilhadas e pesadas para determinar a massa de grãos em que os resultados do rendimento de grãos de milho obtidos estão expressos em Mg ha^{-1}, com umidade corrigida para 13%.

Para análise estatística, recorreu-se ao Pacote GeoR do software R. Sendo feita uma análise estatística descritiva e avaliada a estrutura de dependência espacial dos dados utilizando o estimador de Matheron (Matheron, 1962). As semivariâncias foram calculadas utilizando um cuttof de 50% da distância máxima.

Em seguida, utilizou-se dos métodos dos mínimos quadrados ordinários (OLS) para o ajuste dos semivariogramas, que foram ajustados aos modelos teóricos exponencial, gaussiano e esférico. Em seguida, procedeu-se à construção dos mapas de superfície de interpolação por Krigagem, para os nutrientes do solo em estudo e para o rendimento de grãos do milho.

RESULTADOS

A Tabela 1 apresenta a estatística descritiva dos dados coletados. Sendo B: Boro; Cu: Cobre; Zn: Zinco; S: Enxofre; Rend. de milho: rendimento de milho, Q_1: primeiro quartil; Q_3: terceiro quartil.

Tabela 1 – Análise descritiva dos dados dos elementos químicos.

Estatística	B	Cu	Zn	S	Rend. de milho
Média	0,374	3.681	6.174	25.500	9.430
Mediana	0,400	3.000	4.600	25.000	9.337
Q_1	0.300	2.600	3.400	23.000	8.342
Q_3	0.500	4.500	6.900	28.000	10.280
Desvio padrão	0.167	1.666	5.113	4.817	1.459
Variância	0.028	2.777	26.145	23.205	2.129
Coeficiente de Variação	44.790	45.269	82.823	18.888	15.474
Assimetria	-0.046	1.553	2.822	0.514	0.808
Curtose	2.057	5.065	11.416	3.556	4.250

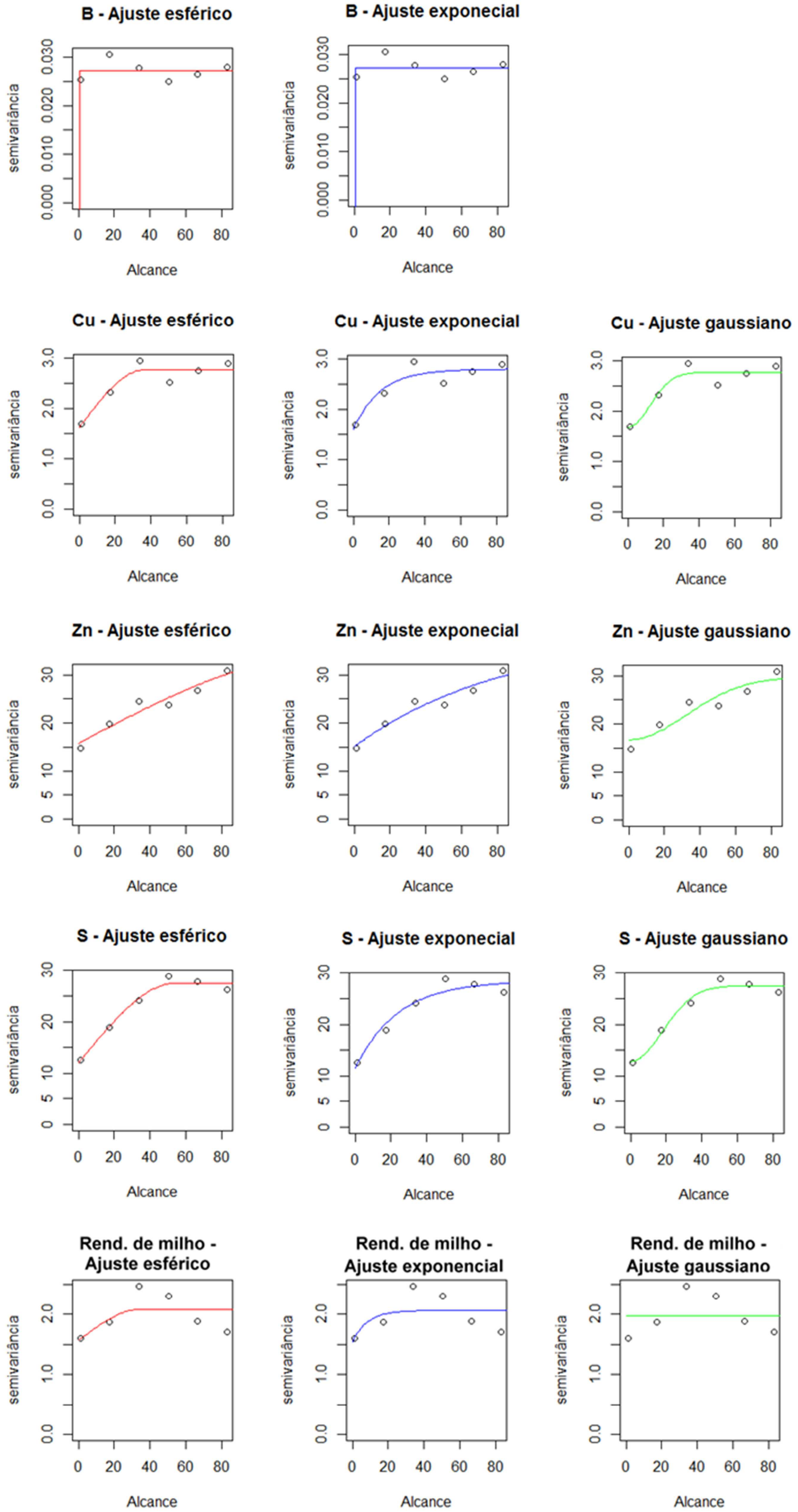
Fonte: Dos autores, 2016.

Pela análise descritiva dos dados, observa-se que o conjunto de dados do Enxofre e do rendimento de milho é considerado homogêneo, pois apresentam coeficientes de variação menor que 30%. Enquanto o conjunto dos demais dados são considerados heterogêneos. Além disso, o Boro apresentou a menor taxa de variância. E em relação ao grau de curtose, todas as curvas correspondentes à sua distribuição de frequência são consideradas platicúrticas, pois os valores estão acima de 0,263.

Pelos valores das assimetrias, podemos concluir que apenas o Boro, apresenta distribuição assimétrica negativa (à esquerda). Enquanto os demais componentes possuem distribuição assimétrica positiva (à direita).

Os gráficos dos semivariogramas ajustados para modelos teóricos exponencial, gaussiano e esférico são apresentados na Figura 1.

Figura 1 – Gráficos dos modelos ajustados.



Fonte: Dos autores, 2016.

Observa-se que algumas vezes os ajustes de cada componente são muito semelhantes quando comparado os três ajustes. A fim de verificar o modelo que melhor se ajusta aos dados e com o propósito de, posteriormente, fazer a krigagem, é necessário aplicar a validação cruzada. Para isso, segundo Faraco (2008), é preciso comparar os erros absolutos de cada componente e indicar qual o menor valor possível.

Abaixo, na Tabela 2, apresentam-se os dados dos erros absolutos, que permitem a identificação de qual melhor modelo ajustado. O EA1 representa o erro absoluto referente ao ajuste esférico, EA2 referente ao ajuste exponencial e EA3 referente ao ajuste gaussiano. Para o Boro, não foi possível ajustar o modelo gaussiano.

Tabela 2 – Erros absolutos (EA).

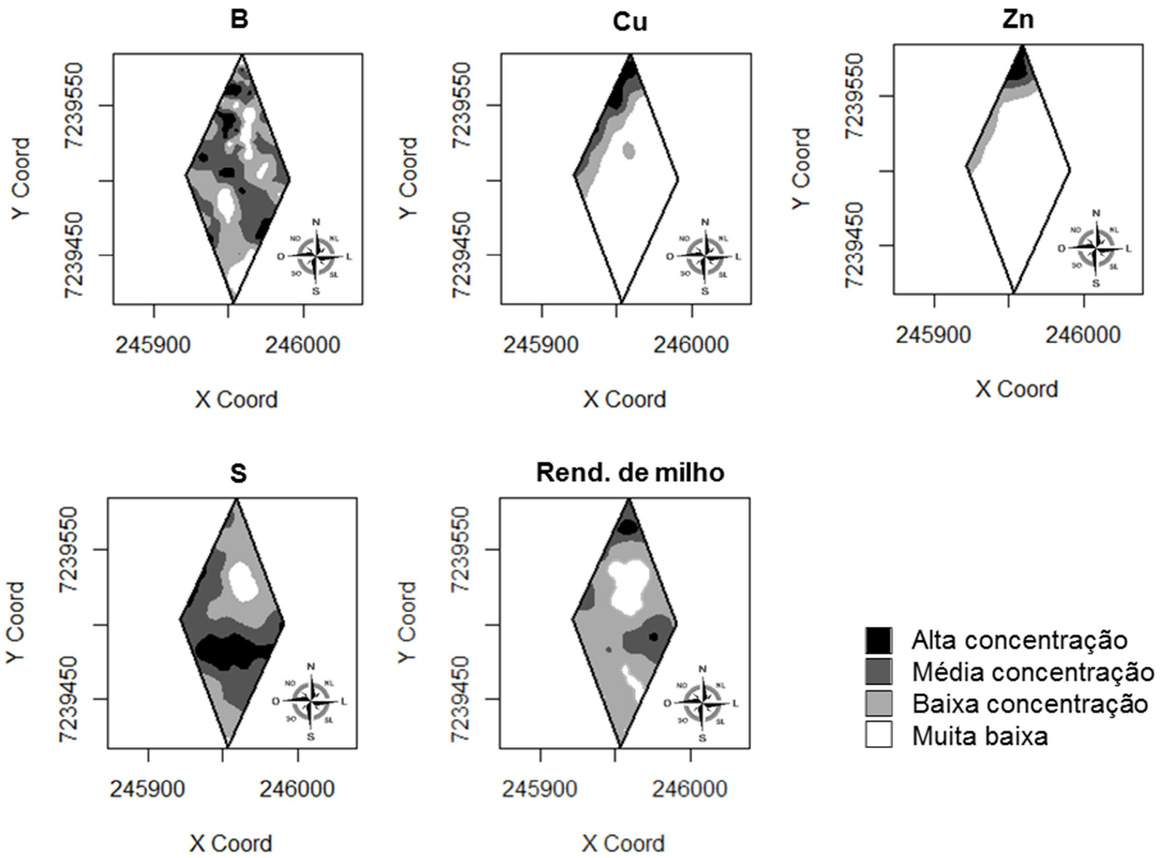
Erros absolutos	B	Cu	Zn	S	Rend. de milho
EA1	**17.445**	**102.394**	**280.068**	**409.176**	140.071
EA2	17.597	102.546	284.280	414.158	**138.812**
EA3	—	103.740	298.019	423.883	151.248

Fonte: Dos autores, 2016.

A partir da tabela, verifica-se que o método melhor ajustado para o rendimento de milho é o modelo exponencial, enquanto para os demais componentes é o modelo esférico, dado que possuem o menor erro absoluto (valores em negrito).

A seguir, apresentam-se os mapas de krigagem indicando as concentrações dos atributos químicos na região coletada para análise, utilizando os modelos que apresentaram menor erro.

Figura 2 – Mapas gerados pelo processo de Krigagem.



Fonte: Dos autores, 2016.

Pelos mapas gerados, observa-se que a quantidade de Boro é praticamente aleatória em toda região, de forma que há alguns pontos fortemente concentrados no Norte e Sudeste, o que pode ser evidenciado pelo semivariograma do atributo químico, pois o mesmo apresentou efeito pepita puro, demonstrando que, segundo Mello et al. (2008), não há dependência espacial entre os dados.

Referente ao Cobre, a quantidade é intensificada apenas pelo Norte e Noroeste, enquanto o resto da região não há concentração de Cobre. Nas mesmas condições estão o Zinco, porém, com maior intensidade no Norte quando comparado ao Cobre.

Sobre a quantidade de Sódio, apresentou forte concentração no centro para baixo e regiões da fronteira em Noroeste.

E por fim, o rendimento de milho foi mais elevado no extremo Norte da área. Observa-se também que no local de menor concentração de enxofre, o rendimento de grãos do milho foi menor, assim como nos locais de maior concentração de zinco e cobre, houve maior rendimento de grãos do milho.

CONCLUSÕES

- A utilização de técnicas de Geoestatística possibilita uma análise mais minuciosa da área em estudo, permitindo ao produtor rural avaliar o comportamento espacial dos atributos do solo em sua propriedade, e posteriormente fazer uma correção do solo mais adequada.
- Visualmente, o cobre, o zinco e o enxofre influenciam positivamente no rendimento de grãos do milho.

REFERÊNCIAS

COELHO, José Castro et al. Agricultura de precisão. **Prefácio, Lisboa**, 2004. Disponível em: <http://agrinov.ajap.pt/diapositos/aprecisao_final/Agricultura/Diapositivos_Agricultura_de_Precisao.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2016.

EMBRAPA – Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. Centro Nacional de Pesquisa de Solos. Ministério da Agricultura e do Abastecimento. Sistema brasileiro de classificação de solos. Brasília: **EMBRAPA** (2006).

FARACO, Mário Antoni. et al. Seleção de modelos de variabilidade espacial para elaboração de mapas temáticos de atributos físicos do solo e produtividade da soja. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, v. 32, n. 2, p. 463-476, 2008.

FAVARIN, J. L.; TEZOTTO, T.; RAGASSI, C. F. Uso racional de micronutrientes na cultura de milho**. Informações Agronômicas** n. 122, jun. 2008.

MATHERON, G. **Traite de geoestatistique appliquée**, v. 1, 1962.

MELLO, Carlos Rogério de. et al. Continuidade espacial de chuvas intensas no estado de Minas Gerais. **Ciênc. agrotec.**, v. 32, n. 2, 2008.

PEIXOTO, Claudio de Miranda. **O milho no Brasil, sua importância e evolução.** Pioneer, 2014. Disponível em: <http://www.pioneersementes.com.br/media-center/artigos/165/o-milho-no-brasil-sua-importancia-e-evolucao>. Acesso em: 22 abr. 2016.

SHIOGA, Pedro Sentaro. Sistemas de produção do milho safrinha no Paraná. **X SEMINÁRIO NACIONAL DE MILHO SAFRINHA**, v. 10, p. 40-54, 2009. Disponível em: <http://www.abms.org.br/milhosafrinha/palestras/palestra11.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2016.