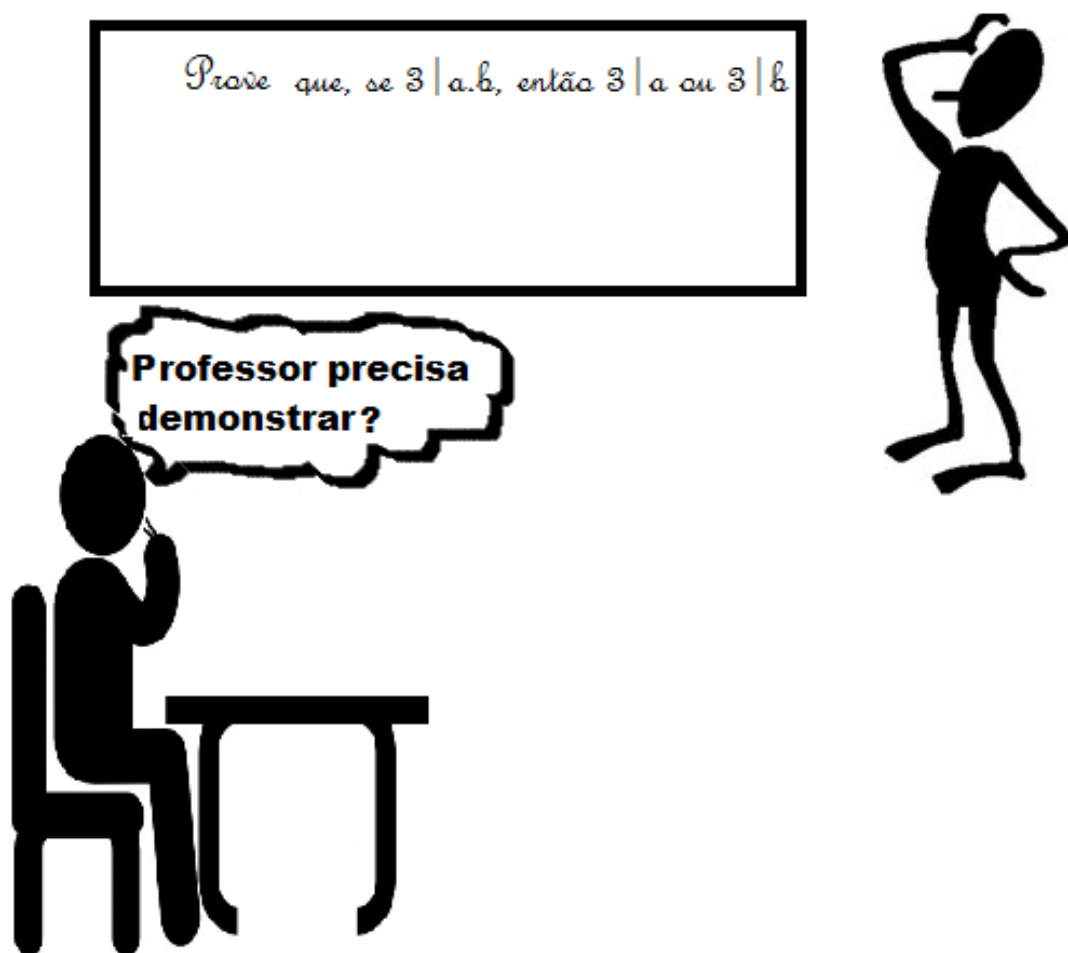


Sim, precisa demonstrar

Wilian Francisco de Araujo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

e-mail: wilianfrancisco@gmail.com



Introdução

Neste presente texto, vamos dar uma perspectiva pessoal sobre as demonstrações. Quantas vezes nos deparamos com a seguinte pergunta, “*professor precisa demonstrar?*” a resposta é sim, precisa demonstrar, nesse sentido este minicurso vem com o intuito de podermos conversar sobre demonstração sem o peso de ter que fazer aquela demonstração para conseguir uma nota, e com isso podermos discutir tirarmos algumas dúvidas. Além da visão pessoal de como demonstrar, Trabalhamos com algumas formas de demonstrar o seu formalismo e como escrever cada uma delas. Faz-se necessário ressaltar que para um bom entendimento e uma boa escrita de demonstração precisamos ler e fazer demonstrações para ganharmos experiência.

Sumário

1	Preliminares	4
2	Demonstrações	7
2.1	Demonstração direta	8
2.2	Demonstração indireta	9
2.3	Demonstração pela contra-positiva	10
2.4	Indução Matemática	11
3	Alguns Exercícios para demonstrações	13
	Referências Bibliográficas	15

Capítulo 1

Preliminares

Nesta seção vamos relembrar alguns conceitos de lógica, como proposição, condicional, bicondicional, implicação, equivalência e argumento.

Observação 1.1. *Antes de iniciarmos vamos fazer uma pequena redação respondendo pelo menos as seguintes perguntas:*

- 1) *O que é uma demonstração para mim.*
- 2) *Eu consigo demonstrar?*
- 3) *Quais são as minhas dificuldades?*
- 4) *O que eu gostaria de ouvir neste minicurso?*

Definição 1.2. *Proposição é uma sentença declarativa, afirmativa e que deve exprimir um pensamento de sentido completo, podendo ser escrita na forma simbólica ou na linguagem usual.*

Exemplo 1.3. a) $\sqrt{3} < 2$

b) 2 é um número *ímpar*

O valor lógico da proposição **e a** verdade se a proposição for verdadeira, **e a** falsidade se a proposição for falsa.

Podemos construir novas proposições juntando duas ou mais proposições, as palavras que ligam estas proposições são chamadas de conectivos, **os** conectivos mais utilizados na Matemática são: “e” (\wedge), “ou” (\vee), “se... então ...” (\rightarrow) e **o** “se e somente se” (\leftrightarrow).

p	$\sim p$	p	q	$p \wedge q$
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
		F	V	F
		F	F	F

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F	F	V

Definição 1.6. Dizemos que uma proposição p é equivalente a q se a tabela-verdade de $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, ou seja, sua tabela-verdade é sempre verdadeira.

Observação 1.7. *Vamos listar algumas equivalência importantes que vamos utilizar no decorrer do nosso texto:*

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \quad e \quad \sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

Leis de Morgan.

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

Contra-positiva.

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow c$$

Redução ao absurdo.

Definição 1.8. *Sejam H_1, H_2, \dots, H_n e T , proposições quaisquer, diremos que um argumento é válido se a condicional*

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow T$$

for uma implicação.

A validade de um argumento é obtida através da utilização das regras de implicação e de equivalência ou de outros resultados previamente estabelecidos chamamos de demonstração a todo este processo que permite concluir a validade do argumento.

Capítulo 2

Demonstrações

Como vimos no fim do seção anterior as demonstrações são usadas para garantir a veracidade de um resultado. Nem sempre mostrar a validade de um resultado é rápido, por exemplo o último Teorema de Fermat demorou mais de 300 anos para conseguir ser demonstrado, ou simples, como por exemplo a prova de que “*Todo grupo de ordem ímpar é solúvel*” tem 255 páginas. As demonstrações feitas nas disciplinas de graduação geralmente são mais simples, mas estamos vivendo em uma época em que queremos tudo muito rápido, e com isso não queremos parar e pensar mais do que “um” minuto para fazer uma demonstração. As demonstrações precisam de um pouco de dedicação.

Um problema que enfrentamos geralmente é o seguinte:

Quando um aluno fala “*professor não consigo demonstrar*”, geralmente perguntamos onde você parou? E as vezes a resposta é “*não consigo nem começar*”, como começar a demonstração?

Primeiramente precisamos organizar nossas ideias, para isso algumas perguntas podem nos ajudar.

1) Para que demonstrar?

Demonstramos para verificar a validade da afirmação, para aprender e para convencer quem ler a nossa demonstração de que o resultado é válido.

2) O que quero demonstrar?

Saber qual é a afirmação é um importante passo para começarmos a pensar.

3) O que temos de hipóteses?

Outra coisa importante é saber identificar as hipóteses do enunciado.

4) Quais são os resultados que posso utilizar?

Tente identificar todos os resultados já vistos e que possam te auxiliar.

Pensando na primeira pergunta, vamos supor que temos o seguinte problema. “Encontre um número natural de dois algarismos que somado com o número formado pelo mesmos algarismos em ordem contrária resulta em um quadrado perfeito.” É claro que podemos ter respostas instantâneas, por exemplo 29, mais surgem as perguntas, temos somente um número? Se temos mais quais são? Como neste problema, fazer uma demonstração permite responder com certeza algumas perguntas. Para fazermos a demonstração, além das perguntas, mais alguns cuidados tem que ser tomado, por exemplo, o que você pensou é o que você está escrevendo, chegou a conclusão. A demonstração tem que ter rigor, clareza, formalismo e organização, mas para obter essas coisas não é necessário usar palavras sofisticada, podemos usar palavras simples para fazer uma boa demonstração.

2.1 Demonstração direta

Nesta seção vamos fazer alguns exemplos de demonstração direta.

Na demonstração direta utilizamos diretamente as hipóteses do argumento e as implicações se equivalências lógicas que temos disponíveis

Proposição 2.1. *Se n é um número par, então n^2 é um número par.*

Antes de começarmos a demonstração vamos responder as perguntas feitas anteriormente.

1) Para que demonstrar?

Vamos verificar se a afirmação é realmente verdadeira.

2) O que quero demonstrar?

Quero demonstrar que n^2 é par.

3) O que temos de hipóteses?

n é um número par.

4) Quais são os resultados que posso utilizar?

Podemos utilizar operações com números inteiros e a definição de que um número é par se ele é da forma $2.k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Se n é um número par, então existe um número $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que, $n = 2.k_1$. Assim $n^2 = (2.k_1)^2 = 2^2.k_1^2 = 4.k_1^2 = 2(2.k_1^2)$ como $2.k_1^2 \in \mathbb{Z}$, fazendo $k = 2.k_1^2$, temos que, $n^2 = 2.k$ o que prova que n^2 é par. \square

Exercício 1. *Fixe três Algarismos distintos e diferente de zero. Forme os seis números com dois Algarismos distintos tomado dentre os Algarismos fixados. Mostre que a soma desses números é igual a 22 vezes a soma dos três Algarismos fixados.*

Exercício 2. *Qual número é maior: 31^{11} ou 17^{14} ?*

Exercício 3. *Mostre que se $a^2 - a = 0$, então $a = 1$ ou $a = 0$*

2.2 Demonstração indireta

Nesta seção vamos fazer algumas demonstrações da forma indireta.

Se temos uma argumento

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \rightarrow T$$

válido, podemos usar a equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow c$ onde c é uma contradição, e reescrever o argumento da seguinte maneira

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \sim T \rightarrow c.$$

Na demonstração indireta utilizamos as hipóteses do argumento com a adição da negação da tese e as implicações se equivalências lógicas que temos disponíveis

Exercício 4. Se n^2 é par, então n é par.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que n é ímpar, assim $n = 2k + 1$ onde $k \in \mathbb{Z}$, logo $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ é ímpar, o que é um absurdo. Logo n é par. \square

Exercício 5. Mostre que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, isto é, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Ora se p for ímpar, $p = 2k + 1$, então $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ que é ímpar, mas $2q^2$ é par, o que é um absurdo.

Se p for par, isto é, $p = 2k$, então $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$, ou seja $q^2 = 2K^2$. Logo q é par, portanto $\text{mdc}(p, q) \geq 2$ o que é um absurdo. \square

2.3 Demonstração pela contra-positiva

Na demonstração pela contra-positiva utilizamos a seguinte equivalência

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

Exercício 6. Mostre que n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Observe que sair do fato de que n^2 é ímpar pode ser um pouco complicado.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração pela contra-positiva. Suponhamos que n não seja ímpar, ou seja, n é par, assim $n = 2k$, logo $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ portanto n^2 é par. Isto prova nosso resultado. \square

2.4 Indução Matemática

Vamos descrever um método para demonstrações chamado de indução.

Teorema 2.2. *Seja $p(n)$ uma sentença aberta definida em um subconjunto dos inteiros maiores ou iguais a um elemento dado a . Suponhamos que se consiga provar o seguinte:*

a) $p(a)$ é verdadeira;

b) Se $r \geq a$ e $p(r)$ é verdadeira, então $p(r+1)$ também é verdadeira.

Então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Exemplo 2.3. Prove que $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n \geq 1$;

Sempre temos que ter em mente as nossas perguntas, aqui o que queremos demonstrar é $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, o que isso significa? querendo provar que a soma dos n números positivos é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Vamos tentar entender melhor

$$p(1) \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$p(2) \quad 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

Demonstração: 1º Passo: provar a primeira proposição.

$$p(1) \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Logo $p(1)$ é verdadeira. 2º Passo: Supor que para um certo r a proposição é verdadeira.

Suponhamos que para $r \geq 1$ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + r = \frac{r(r+1)}{2}$. 3º Passo vamos mostrar que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (r+1) = \frac{(r+1)((r+1)+1)}{2}. \text{ De fato, } \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + r}_{\text{hip. de ind.}} + (r+1) =$$

$$\frac{r(r+1)}{2} + r + 1 = \frac{r(r+1) + 2(r+1)}{2} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Portanto, pelo teorema anterior $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$ □

O plano geral para provar usando indução seria:

i) Entenda o que você quer provar, qual é a afirmação $p(n)$ o que ela significa;

- ii) Prove o primeiro caso. (1º Passo);
- iii) Suponha que para um certo r a proposição é verdadeira. Esse é o chamado passo de indução. (2º Passo);
- iv) Prove que para o caso $r + 1$ a proposição também é verdadeira. Para provar você irá utilizar o segundo passo.

Exercício 7. *Demonstre por indução as seguintes proposições envolvendo números naturais.*

a) $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)2}{4}$

c) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n + 1)$

d) $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

Exercício 8. *Mostre usando indução que se a é um número natural, então $3|a^3 - a$.*

Capítulo 3

Alguns Exercícios para demonstrações

Neste capítulo são dados alguns exercícios para demonstrar utilizando apenas poucas definições e resultados específicos.

Exercício 9. Se $d \mid (b + a)$ ou $d \mid (b - a)$, e $d \mid a$, então $d \mid b$.

Observação 3.1. Dizemos que $a \mid b$ se $b = ka$ para algum inteiro k .

Exercício 10. Sejam a, b números inteiros e p um número primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Exercício 11. Sejam p_1, p_2, \dots, p_n primos distintos.

Mostre que $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ não é divisível por nenhum desses primos.

Exercício 12. Suponha que n seja um número inteiro divisível por a e b . Sabendo que $\text{mdc}(a, b) = 1$, mostre que n é divisível por $a \cdot b$.

Vamos precisar das propriedades de números inteiros e das seguintes desigualdades.

Dado três pontos arbitrário A, B e C no plano, temos que $AB + BC \geq AC$ e a igualdade é válida se e somente se o ponto B pertence ao segmento AC .

Em um triângulo, o maior entre dois lados quaisquer é o lado oposto ao ângulo maior.

Exercício 13. Prove que, se $AB = AC$, então os ângulos ABC e ACB são iguais.

Exercício 14. Se $ABCD$ é um quadrilátero convexo tal que $AB + BD < AC + CD$. Prove que $AB < AC$

Obrigado a todos

Referências Bibliográficas

- [1] *Fossa, J. A.* : Introdução às técnicas de demonstração na Matemática.2ed. Livraria da Física, São Paulo, (2009).
- [2] *Fomin, D., Genkin, S. ...[et al.]* : Círculos Matemáticos.IMPA, Rio de Janeiro, (2010).
- [3] *Filho, D.C.M.*: Manual de Redação Matemática.Rio de Janeiro, SBM (2014).