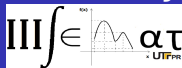


Aplicações: Utilizando geometria plana e espacial na interpretação da resolução de problemas



Prof. Gilberto Souto

Toledo, 06 de maio de 2015



Sumário

- 1 Questionamentos sobre a Matemática
 - Questões de Alunos
 - Curiosidades onde se aplica a Matemática



Sumário

- 1 Questionamentos sobre a Matemática
 - Questões de Alunos
 - Curiosidades onde se aplica a Matemática
- 2 Problema: Contratação de pessoal em uma agência de correios
 - O Problema
 - Pioneiros da Programação Matemática



Sumário

- 1 Questionamentos sobre a Matemática
 - Questões de Alunos
 - Curiosidades onde se aplica a Matemática
- 2 Problema: Contratação de pessoal em uma agência de correios
 - O Problema
 - Pioneiros da Programação Matemática
- 3 Visualização de Poliedros
 - Poliedro
 - Representação de poliedros



Sumário

- 1 Questionamentos sobre a Matemática
 - Questões de Alunos
 - Curiosidades onde se aplica a Matemática
- 2 Problema: Contratação de pessoal em uma agência de correios
 - O Problema
 - Pioneiros da Programação Matemática
- 3 Visualização de Poliedros
 - Poliedro
 - Representação de poliedros
- 4 Resolução do Problema
 - Formulação do Problema
 - Visualização de poliedros em algoritmos
 - Solução do Problema



Questões de Alunos

Perguntas feitas por alunos em diversos níveis do modelo educacional brasileiro que possui como área básica a Matemática:



- 1 O que é, para que serve e onde se aplica a Matemática?



Curiosidades onde se aplica a Matemática

Aplicações

- A Matemática no tratamento de imagens;
- Torres de transmissão;
- Aplicações na Química;
- Trajetória de um projétil;
- Processos de tomada de decisão;
- Cantada utilizando álgebra linear.



O Problema

Contratação de pessoal em uma agência de correios

Uma agência de correios emprega um número diferente de trabalhadores em cada dia da semana:

	dom	seg	ter	qua	qui	sex	sáb
Trabalhadores	11	17	13	15	19	14	16

O acordo sindical obriga cada empregado trabalhar 5 dias consecutivos e após tenha 2 dias de folga seguidos. Pretende-se saber qual o número mínimo de trabalhadores que devem ser contratados para que satisfaça as necessidades diárias da agência de correios?



O Problema

O que é necessário para resolver este problema?

- ❶ Programação Linear Inteira – PLI;
 - ❶ Cálculo de várias variáveis;
 - ❷ Álgebra linear;
 - ❸ Programação – algoritmos;
- ❷ Interpretação e visualização geométrica.



Pioneiros da Programação Matemática



Figura: Cauchy (1789-1857)

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$



Pioneiros da Programação Matemática



Figura: Cauchy (1789-1857)

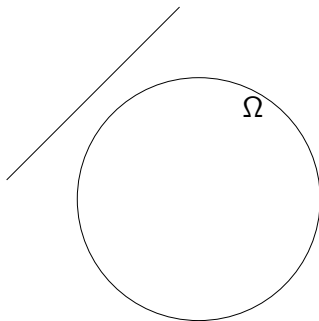
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

- $f(x)$ função linear;
- Ω uma bola.



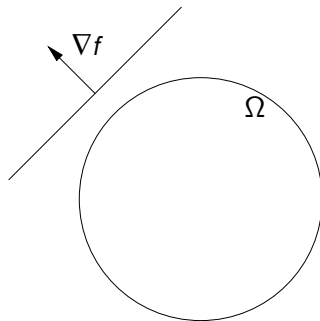
Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



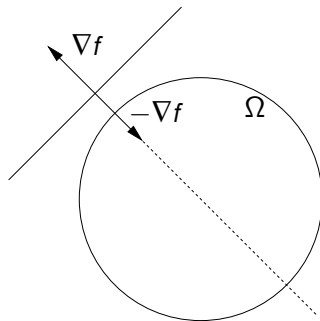
Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



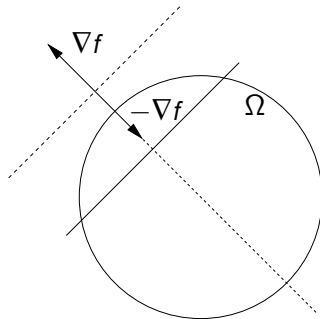
Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



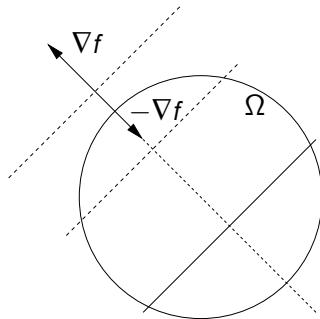
Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



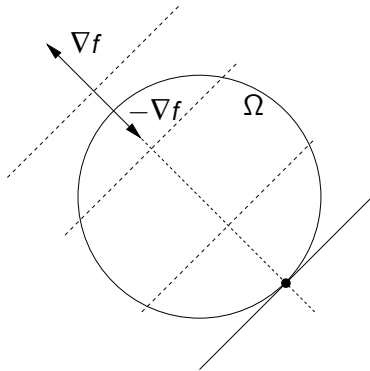
Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



Pioneiros da Programação Matemática

Problema de Cauchy



Problemas de Otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$



Problemas de Otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

- **Programação Linear:** $f(x)$ é linear e Ω poliédrico;



Problemas de Otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

- **Programação Linear:** $f(x)$ é linear e Ω poliédrico;
- **Programação Inteira:** Ω é um conjunto de pontos com componentes inteiras, em geral Ω é definido por um poliedro e $f(x)$ é linear – PLI;



Problemas de Otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

- **Programação Linear:** $f(x)$ é linear e Ω poliédrico;
- **Programação Inteira:** Ω é um conjunto de pontos com componentes inteiras, em geral Ω é definido por um poliedro e $f(x)$ é linear – PLI;
- **Programação Não Linear:** $f(x)$ contínua e Ω é definido por equações e inequações;



Problemas de Otimização

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

- **Programação Linear:** $f(x)$ é linear e Ω poliédrico;
- **Programação Inteira:** Ω é um conjunto de pontos com componentes inteiras, em geral Ω é definido por um poliedro e $f(x)$ é linear – PLI;
- **Programação Não Linear:** $f(x)$ contínua e Ω é definido por equações e inequações;
- **Otimização Combinatória:** Ω é um conjunto discreto, em geral finito (mas muito grande). A Programação Inteira é classificada como um problema de Otimização Combinatória.



Poliedro

Definição (Convexidade)

Um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega.$$

O ponto $\alpha x + (1 - \alpha)y$, em que $\alpha \in [0, 1]$, é denominado a combinação convexa de x e y com parâmetro α .



Poliedro

Definição (Convexidade)

Um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto convexo se para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Omega.$$

O ponto $\alpha x + (1 - \alpha)y$, em que $\alpha \in [0, 1]$, é denominado a combinação convexa de x e y com parâmetro α .

Definição (Envoltória Convexa)

Envoltória convexa de um conjunto $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é o menor conjunto convexo que o contém.



Poliedro

Definição (Politopo)

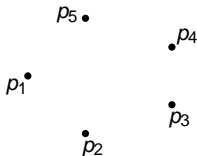
Um politopo é uma envoltória convexa de um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^n .



Poliedro

Definição (Politopo)

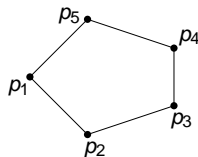
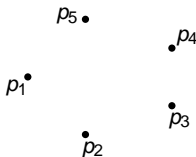
Um politopo é uma envoltória convexa de um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^n .



Poliedro

Definição (Politopo)

Um politopo é uma envoltória convexa de um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^n .



Poliedro

Definição (Hiperplano)

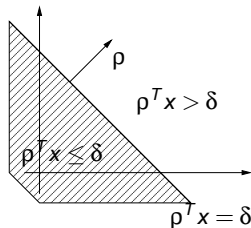
Um hiperplano em \mathbb{R}^n é uma variedade linear de dimensão $n - 1$. É caracterizado pela equação $\rho^T x = \delta$, em que $\rho \in \mathbb{R}^n$ é a normal do hiperplano e $\delta \in \mathbb{R}$.



Poliedro

Definição (Semi-espacos)

Um hiperplano $\rho^T x = \delta$ divide o \mathbb{R}^n em um semi-espaço fechado $\rho^T x \leq \delta$ e um semi-espaço aberto $\rho^T x > \delta$.



Poliedro

Definição (Poliedro)

Um conjunto $P \in \mathbb{R}^n$ é um poliedro se e somente se pode ser representado como uma intersecção finita de semi-espacos fechados.



Poliedro

Teorema

Um conjunto $P \in \mathbb{R}^n$ é um politopo se e somente se é um poliedro limitado.

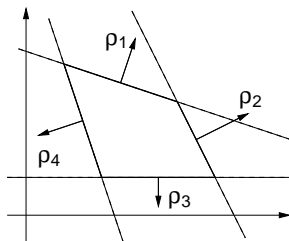
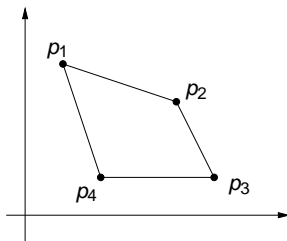


Figura: Representação de um politopo e um poliedro limitado.



Representação de poliedros

Um poliedro P é representado por um sistema de desigualdades definidas por semi-espacos

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho_i^T x \leq \delta_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Construindo a matriz $A^T = [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_m]_{n \times m}$ e $b = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix}$, o poliedro é descrito por

$$Ax \leq b.$$



Representação de poliedros

- Formato de desigualdades;

$$Ax \leq b$$



Representação de poliedros

- Formato de desigualdades;

$$Ax \leq b$$

- Formato de desigualdades com variáveis não negativas (Canônico);

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$



Representação de poliedros

- Formato de desigualdades;

$$Ax \leq b$$

- Formato de desigualdades com variáveis não negativas (Canônico);

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

- Formato de igualdades (Padrão).

$$Ax = b$$

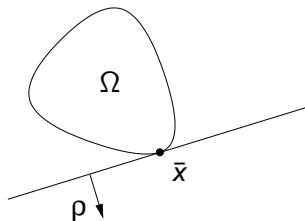
$$x \geq 0$$



Hiperplano Suporte

Definição (Hiperplano Suporte)

Se o hiperplano separador “toca” em Ω , isto é, se $\rho^T \bar{x} = \delta$ para algum $\bar{x} \in \partial\Omega$, então $\rho^T \bar{x} = \delta$ é um suporte de Ω .



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .

Nomeclatura: Considere um poliedro de dimensão q .

- Faces impróprias: todo o poliedro e o conjunto vazio;



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .

Nomeclatura: Considere um poliedro de dimensão q .

- Faces impróprias: todo o poliedro e o conjunto vazio;
- Faces próprias: faces com dimensão $0, 1, \dots, q - 1$;



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .

Nomeclatura: Considere um poliedro de dimensão q .

- Faces impróprias: todo o poliedro e o conjunto vazio;
- Faces próprias: faces com dimensão $0, 1, \dots, q - 1$;
- Faceta: face de dimensão $q - 1$;



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .

Nomeclatura: Considere um poliedro de dimensão q .

- Faces impróprias: todo o poliedro e o conjunto vazio;
- Faces próprias: faces com dimensão $0, 1, \dots, q - 1$;
- Faceta: face de dimensão $q - 1$;
- Vértice: face de dimensão zero;



Definição (Face de um poliedro)

Considere o poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $F \subset P$ é uma face de P se, e somente se $F = \emptyset$ ou $F = P$ ou $F = P \cap S$, em que S é um suporte de P .

Nomeclatura: Considere um poliedro de dimensão q .

- Faces impróprias: todo o poliedro e o conjunto vazio;
- Faces próprias: faces com dimensão $0, 1, \dots, q - 1$;
- Faceta: face de dimensão $q - 1$;
- Vértice: face de dimensão zero;
- Aresta: face de dimensão 1.



Visualização de poliedros



Figura: Clóvis C. Gonzaga



Visualização de poliedros

Formato Canônico

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$



Visualização de poliedros

Sistema linear com desigualdades

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -x \leq 0 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Resolução do Problema de Programação Linear

Otimização Restrita – PL – Formato Padrão

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimizar} \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \quad Ax = b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



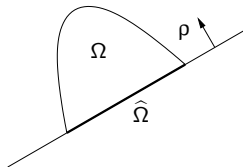
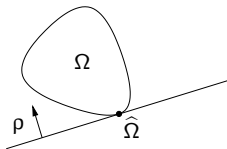
Resolução do Problema

Teorema (Conjunto Solução)

Seja $\hat{\Omega}$ o conjunto de soluções ótimas do problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \rho^T x \\ &\text{sujeito a } x \in \Omega. \end{aligned}$$

O hiperplano $-\rho^T x = \delta$ é um suporte de Ω se e somente se $\hat{\Omega}$ é intersecção de Ω com o hiperplano.



Método Simplex

Teste da Razão

Dados $x \in \mathbb{R}_+^n$ e $h \in \mathbb{R}^n$, o teste da razão se resume em encontrar $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, tal que

$$\bar{\lambda} = \sup\{\lambda \mid x + \lambda h \geq 0\}$$

ou

$$\bar{\lambda} = \min\left\{-\frac{x_i}{h_i} \mid h_i < 0\right\}.$$



Método Simplex

Solução Básica Viável

Chamamos de solução básica viável ao par (x, β) , em que $x \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \subset \{1, \dots, m\}$, com

A_β : base de \mathbb{R}^n ;

$x_\beta \geq 0$;

$x_N = 0$, em que, $N = \{1, \dots, m\} \setminus \beta$;

$Ax = b$.

Método Simplex

Lema

- 1 Se (x, β) é solução básica viável, então x é um vértice.



Método Simplex

Lema

- 1 Se (x, β) é solução básica viável, então x é um vértice.
- 2 Se x é vértice do poliedro, então existem um ou mais conjuntos $\beta \subset \{1, \dots, n\}$, tal que (x, β) é solução básica viável.



Método Simplex

Geometria

Geometricamente, o método simplex determina a direção a partir do vértice x^k dado, escolhendo entre as arestas (faces de dimensão 1) adjacentes ao vértices x^k e que leva a redução do custo. Caso exista tal aresta, o método desloca-se sobre ela (teste da razão) até encontrar o próximo vértice x^{k+1} . Repetindo este processo até obter uma solução ótima, ou determinar que o problema é ilimitado.

Álgebra

Algebricamente, o método simplex salta de base em base.



Visualização de poliedros em algoritmos

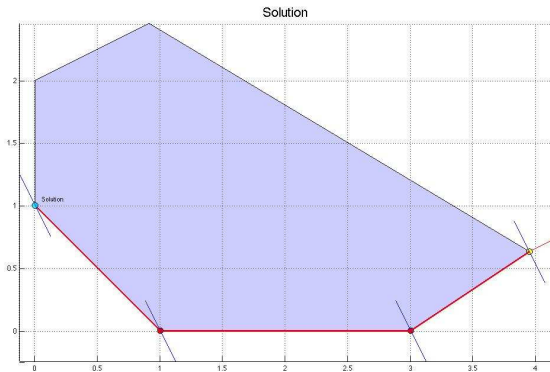


Figura: Método Simplex no \mathbb{R}^2



Visualização de poliedros em algoritmos

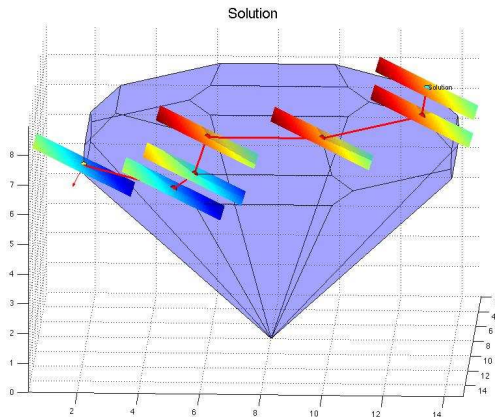


Figura: Método Simplex no \mathbb{R}^3

Visualização de poliedros em algoritmos

- Branch-and-Bound - PLI;

Otimização Restrita – PLI

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimizar} \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \\ & \quad \quad \quad x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Visualização de poliedros em algoritmos

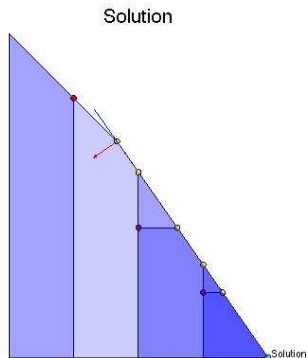
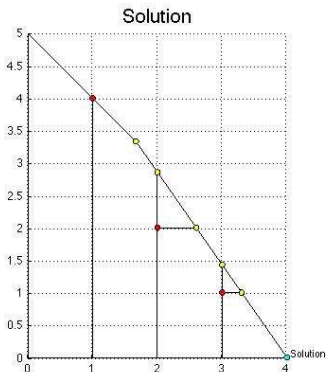


Figura: Branch and Bound no \mathbb{R}^2



Visualização de poliedros em algoritmos

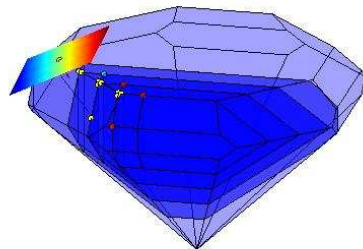
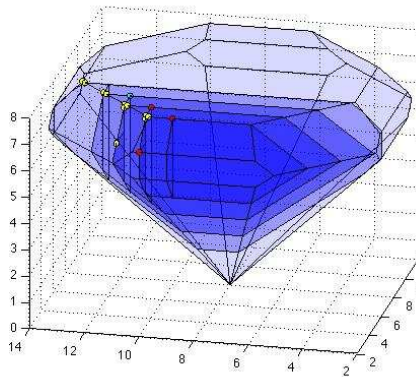


Figura: Branch and Bound no \mathbb{R}^3



Formulação do Problema de PLI

Contratação de pessoal em uma agência de correios

Uma agência de correios emprega um número diferente de trabalhadores em cada dia da semana:

	dom	seg	ter	qua	qui	sex	sáb
Trabalhadores	11	17	13	15	19	14	16

O acordo sindical obriga cada empregado trabalhar 5 dias consecutivos e após tenha 2 dias de folga seguidos. Pretende-se saber qual o número mínimo de trabalhadores que devem ser contratados para que satisfaça as necessidades diárias da agência de correios?



Formulação do Problema

Otimização Restrita – PLI

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimizar} \quad c^T x \\ & \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \\ & \quad \quad \quad x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definição – Variáveis de decisão



Formulação do Problema

Otimização Restrita – PLI

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \text{minimizar} && c^T x \\
 & \text{sujeito a} && Ax \leq b \\
 & && x \geq 0 \\
 & && x \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definição – Variáveis de decisão

- x_i = número de pessoas que começam a trabalhar no dia da semana i ;
 x_1 = número de pessoas que começam a trabalhar no domingo;
 x_2 = número de pessoas que começam a trabalhar na segunda;
 \dots
 x_7 = número de pessoas que começam a trabalhar no sábado



Formulação do Problema

Otimização Restrita – PLI

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^7 x_i \\ & \text{sujeito a} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad \quad x \geq 0 \\ & \quad \quad \quad x \in \mathbb{Z} \end{array}$$



Formulação do Problema

Formulação Matricial do Poliedro

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -11 \\ -17 \\ -13 \\ -15 \\ -19 \\ -14 \\ -16 \end{pmatrix}$$



Solução do Problema utilizando “simplex”

Formulação Matricial do Poliedro

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 5.0000 \\ 1.3333 \\ 3.3333 \\ 2.0000 \\ 7.3333 \\ 0 \\ 3.3333 \end{pmatrix}$$



Solução do Problema utilizando “branch and bound”

Formulação Matricial do Poliedro

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Questões

- O que é Matemática para você?



Questões

- O que é Matemática para você?
- Para que serve a Matemática e onde se aplica?



Questões

- O que é Matemática para você?
- Para que serve a Matemática e onde se aplica?
- Como abordar no ensino fundamental, ensino médio e universitário as aplicações com base na Matemática?



OBRIGADO!

souto@utfpr.edu.br

