

Minicurso: Otimização - Modelos e Métodos

Prof^a Dr^a Diane Rizzotto Rossetto

III Semana da Matemática da UTFPR - Toledo

6 de maio de 2015

O problema

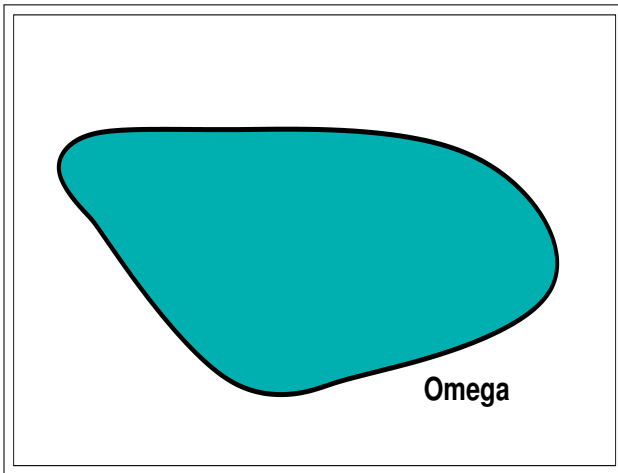
Um problema de **otimização contínua**, na sua forma mais geral, pode ser definido como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \quad (1)$$

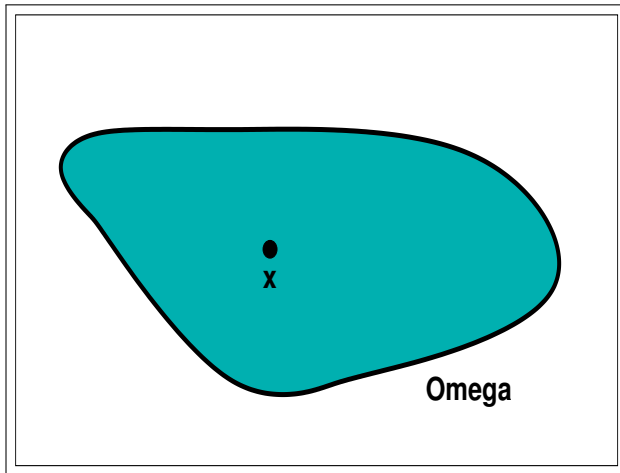
onde a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto das restrições.

Método \Leftrightarrow Receita de Bolo

Como resolver

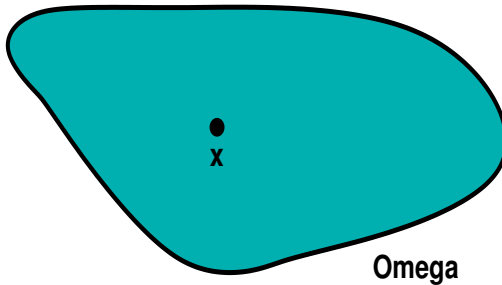


Como resolver

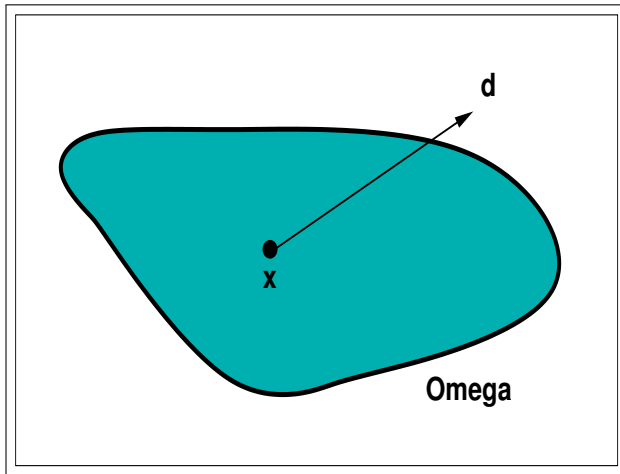


Como resolver

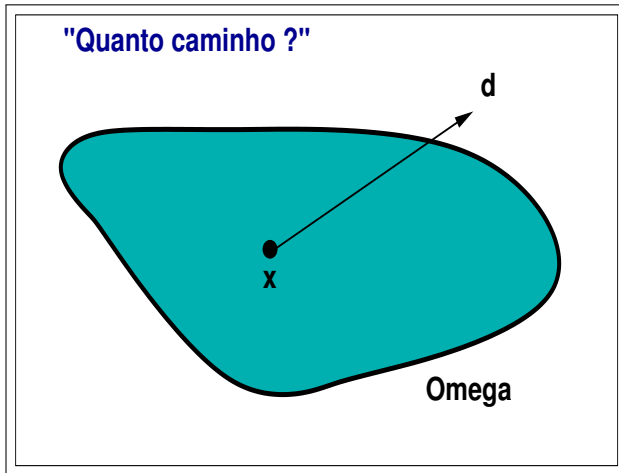
"O que eu devo fazer?"



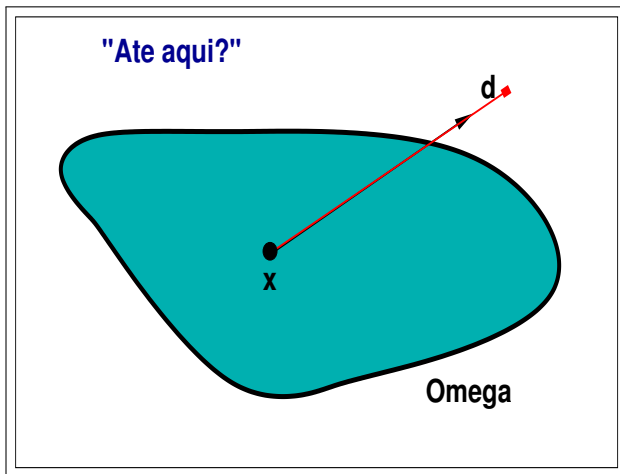
Como resolver



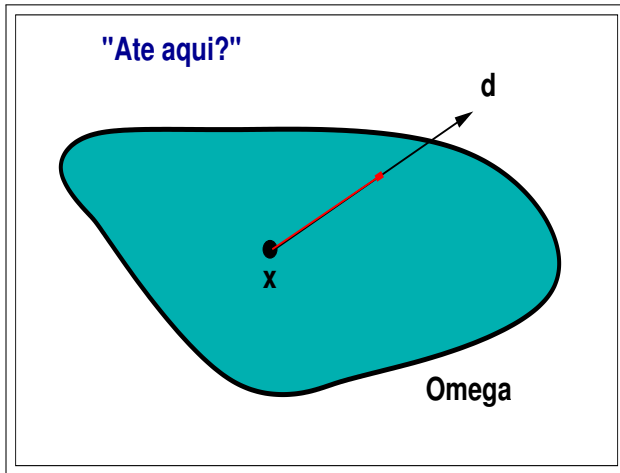
Como resolver



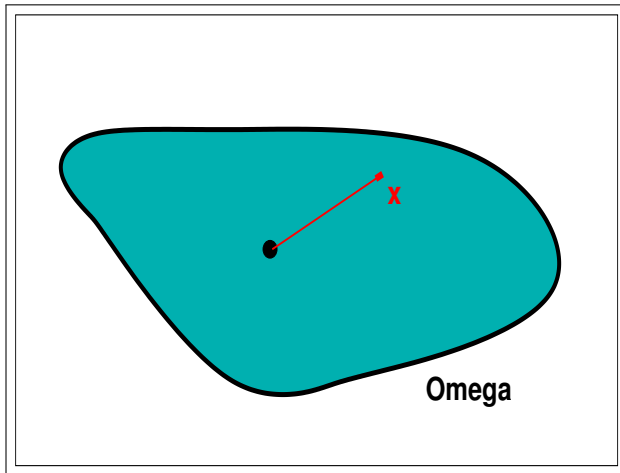
Como resolver



Como resolver



Como resolver



Modelo

Um modelo é uma representação de um sistema real.

Em um modelo matemático para um problema de otimização, são incluídos três elementos principais:

- ▶ Função objetivo;
- ▶ Variáveis de decisão;
- ▶ Restrições.

- ▶ Programação Linear
- ▶ Programação Inteira
- ▶ Programação Quadrática
- ▶ Programação Convexa
- ▶ Programação Não Linear

Parte I - Modelos de PL

Um modelo de PL é um modelo matemático de otimização no qual a função que define o **objetivo** a ser otimizado e as funções que definem as **restrições** são todas **lineares** .

Produção de Fertilizantes

Exemplo 1

Uma empresa produz dois tipos de fertilizantes (H e L) a partir de três matérias-primas distintas que são utilizadas da seguinte forma:

Matéria-Prima	Quantidade em (kg)		Disponibilidade em kg
	H	L	
1	2	1	1500
2	1	1	1200
3	1	0	500
Venda (\$)	15	10	

Quanto a empresa deverá produzir de cada fertilizante para maximizar o ganho com suas vendas?

Precisamos identificar

- ▶ Objetivo
- ▶ Variáveis de decisão
- ▶ Parâmetros
- ▶ Restrições

Variáveis de decisão

- ▶ x_1 quantidade a ser produzida do fertilizante H (kg).
- ▶ x_2 quantidade a ser produzida do fertilizante L (kg).

Parâmetros

- ▶ 2, 1, 1, 1, 1, 0, 15 e 10.

Restrições

- Disponibilidade de matéria-prima

matéria-prima 1: $2x_1 + x_2 \leq 1500$

matéria-prima 2: $x_1 + x_2 \leq 1200$

matéria-prima 3: $x_1 \leq 500$

- Restrições de positividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Formulação do objetivo

Maximizar o ganho com a de produtos: $15x_1 + 10x_2$

$$\text{Maximizar } f(x) = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{sujeito a } 2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Fabricação de composto alimentar

Exemplo 2

Uma empresa fabrica um composto alimentar de baixa caloria a partir de dois ingredientes básicos cuja composição nutricional é apresentada na seguinte tabela:

Ingredientes	unidades			Custo
	carb	prot	vit	
1	7	2	1	0,60
2	5	4	2	0,45
Necessidades				
mínimas	8	15	3	

Determinar a quantidade de cada ingrediente que resulte num composto alimentar de custo mínimo.

Precisamos identificar

- ▶ Objetivo
- ▶ Variáveis de decisão
- ▶ Parâmetros
- ▶ Restrições

Variáveis de decisão

- ▶ x_1 quantidade utilizada do ingrediente 1.
- ▶ x_2 quantidade utilizada do ingrediente 2.

Parâmetros

- ▶ 7; 2; 1; 5; 4; 2; 0,6 e 0,45.

Restrições

- ▶ Requerimentos nutricionais mínimos

carboidratos: $7x_1 + 5x_2 \geq 8$

proteínas: $2x_1 + 4x_2 \geq 15$

vitaminas: $1x_1 + 2x_2 \geq 3$

- ▶ Restrições de positividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$

Formulação do objetivo

Minimizar o custo total de produção: $0,6x_1 + 0,45x_2$

$$\text{Minimizar } f(x) = 0,6x_1 + 0,45x_2$$

$$\begin{aligned}\text{sujeito a } \quad & 7x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 15 \\ & 1x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Problemas com formulações equivalentes

- 1 Formulação de dietas;
- 2 Fabricação de tintas/rações;
- 3 Obtenção de óleos lubrificantes;
- 4 Produção de ligas metálicas.

Otimizar
(Min/Max)

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (\text{ou } \geq, \text{ou } =)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (\text{ou } \geq, \text{ou } =)$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \leq b_n \quad (\text{ou } \geq, \text{ou } =)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad (\text{ou } \leq)$$

- ▶ x_1, \dots, x_n são chamadas **variáveis de decisão** .
- ▶ Um vetor x que satisfaz todas as restrições é chamado de **solução viável** .
- ▶ O conjunto de soluções viáveis é chamado de **conjunto viável** ou **região viável** .
- ▶ Uma solução viável x^* que minimiza (ou maximiza) a função objetivo é chamada de **solução ótima** do problema de otimização.

Como resolver?

Parte II - Método gráfico

Ideia

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;
- ▶ Analisar a função objetivo dentro da região viável e determinar onde ela é máxima ou mínima.

Exemplo 1

Produção de Fertilizantes

$$\text{Maximizar } f(x) = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{sujeito a } 2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

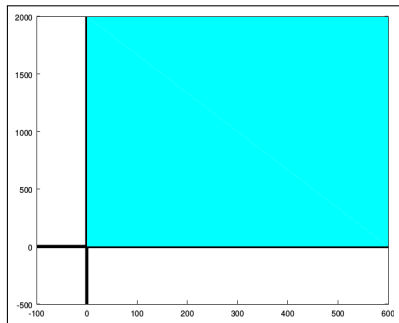


Figura : $x_1, x_2 \geq 0$

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

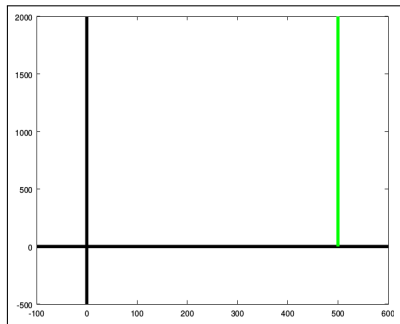


Figura : $x_1 = 500$

Método Gráfico

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

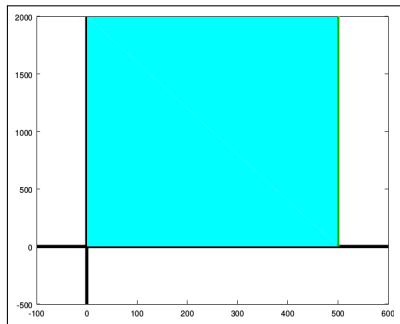


Figura : $x_1 \leq 500$

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

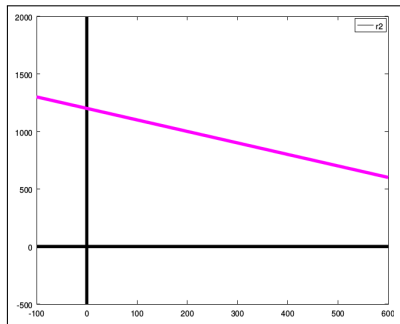


Figura : $x_1 + x_2 = 1200$

Método Gráfico

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

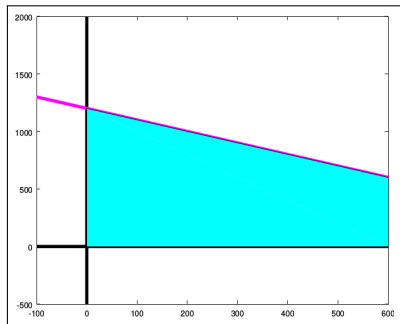


Figura : $x_1 + x_2 \leq 1200$

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

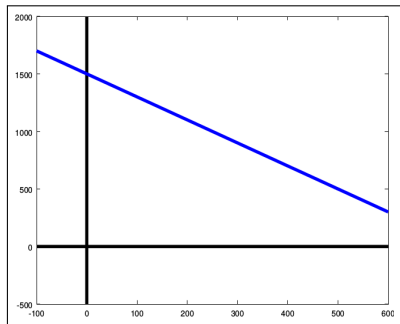


Figura : $2x_1 + 1x_2 = 1500$

Método Gráfico

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições:

$$2x_1 + 1x_2 \leq 1500$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$x_1 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

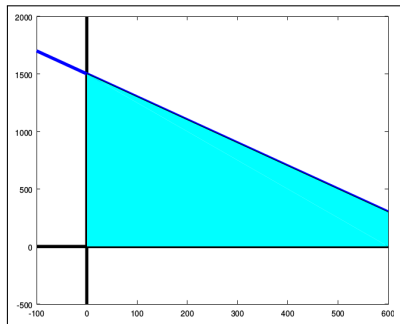


Figura : $2x_1 + 1x_2 \leq 1500$

Método Gráfico

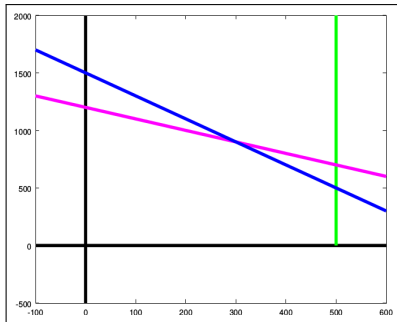


Figura : Intersecções

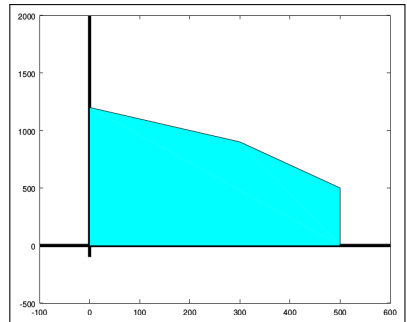


Figura : Região Viável

- ▶ Analisar a função objetivo dentro da região viável e determinar onde ela é máxima ou mínima.

Procuramos o maior valor para o número real c tal que

$$15x_1 + 10x_2 = c,$$

e (x_1, x_2) pertença ao conjunto viável.

- ▶ Analisar a função objetivo dentro da região viável e determinar onde ela é máxima ou mínima.

Procuramos o maior valor para o número real c tal que

$$15x_1 + 10x_2 = c,$$

e (x_1, x_2) pertença ao conjunto viável.

Curva de nível

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$CN(c) = \{(x, y) \in A \mid f(x_1, x_2) = c\}$$

é chamado de **curva de nível** de f correspondente ao nível c .

As curvas de nível da função objetivo são dadas por

$$x_2 = \frac{c - 15x_1}{10}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Curva de nível

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$CN(c) = \{(x, y) \in A \mid f(x_1, x_2) = c\}$$

é chamado de **curva de nível** de f correspondente ao nível c .

As curvas de nível da função objetivo são dadas por

$$x_2 = \frac{c - 15x_1}{10}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Método Gráfico

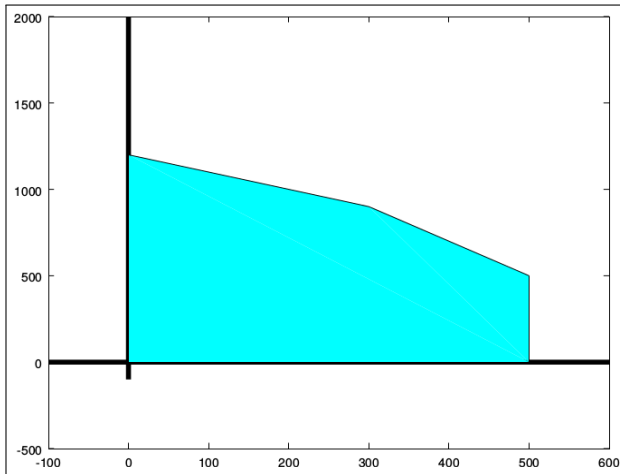


Figura : Região Viável

Método Gráfico

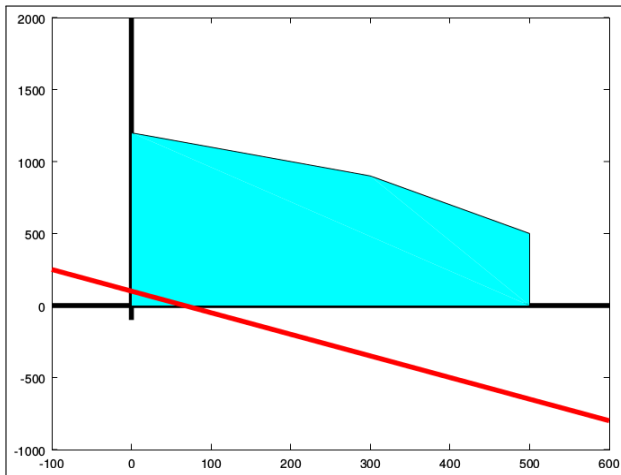


Figura : $c = 1000$

Método Gráfico

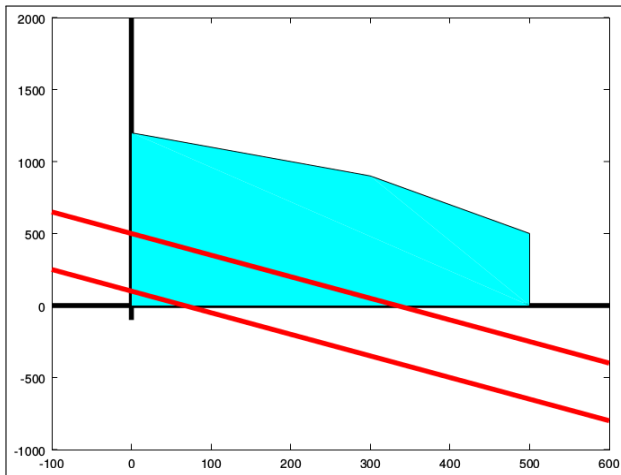


Figura : $c = 5000$

Método Gráfico

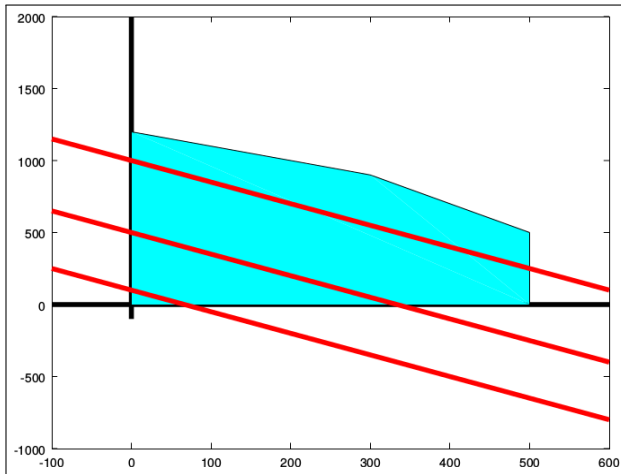


Figura : $c = 10000$

Método Gráfico

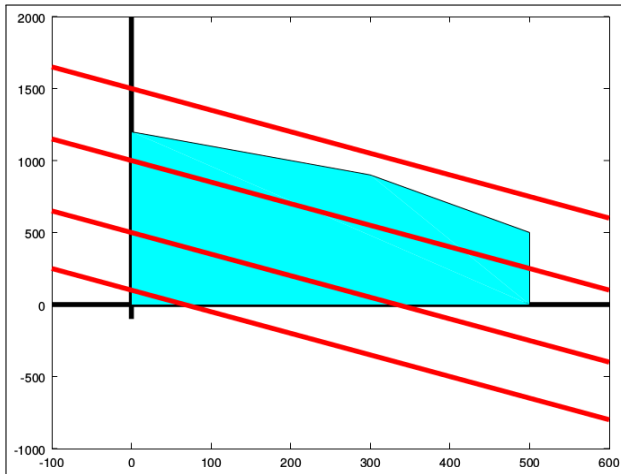


Figura : $c = 15000$

Método Gráfico

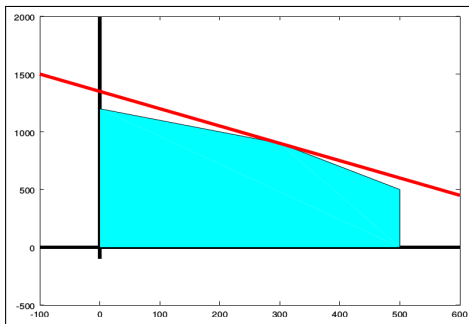


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 1500 \\ x_1 + x_2 = 1200 \end{cases}$$

$$x^* = (300, 900)$$

$$f(x^*) = 13500$$

Método Gráfico

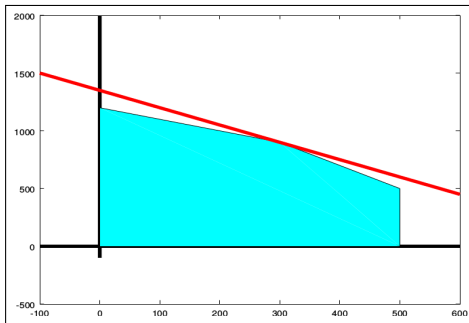


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 1500 \\ x_1 + x_2 = 1200 \end{cases}$$

$$x^* = (300, 900)$$

$$f(x^*) = 13500$$

Método Gráfico

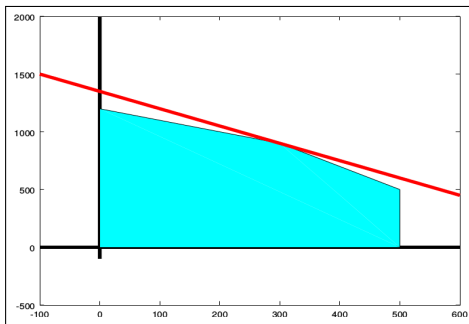


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 1500 \\ x_1 + x_2 = 1200 \end{cases}$$

$$x^* = (300, 900)$$

$$f(x^*) = 13500$$

Exemplo 2

Fabricação de composto alimentar

$$\text{Minimizar } f(x) = 0,6x_1 + 0,45x_2$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } \quad & 7x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 15 \\ & 1x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Método Gráfico

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$\begin{aligned}7x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\2x_1 + 4x_2 &\geq 15 \\1x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

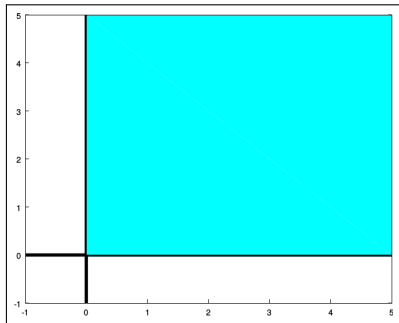


Figura : $x_1, x_2 \geq 0$

Método Gráfico

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$7x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 15$$

$$1x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

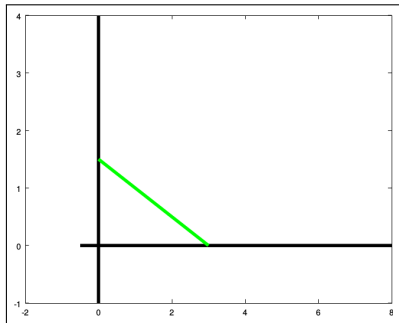


Figura : $1x_1 + 2x_2 = 3$

Método Gráfico

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$7x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 15$$

$$1x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

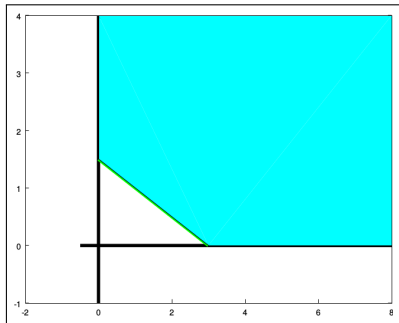


Figura : $21x_1 + 2x_2 \geq 3$

Método Gráfico

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$7x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 15$$

$$1x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

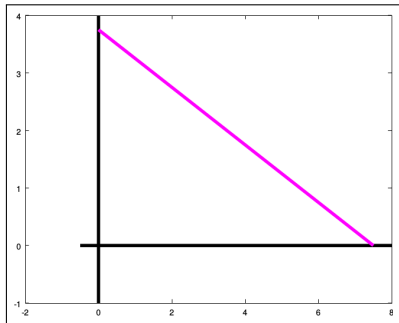


Figura : $2x_1 + 4x_2 = 15$

Método Gráfico

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$\begin{aligned}7x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\2x_1 + 4x_2 &\geq 15 \\1x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

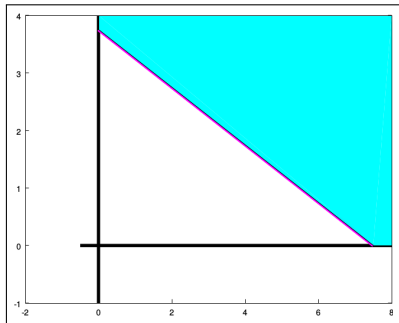


Figura : $2x_1 + 4x_2 \geq 15$

- Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$\begin{aligned}7x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\2x_1 + 4x_2 &\geq 15 \\1x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

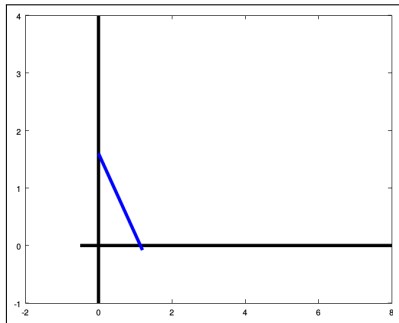


Figura : $7x_1 + 5x_2 = 8$

Método Gráfico

- ▶ Esboçar a região viável definida pelas equações das restrições;

$$\begin{aligned}7x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\2x_1 + 4x_2 &\geq 15 \\1x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

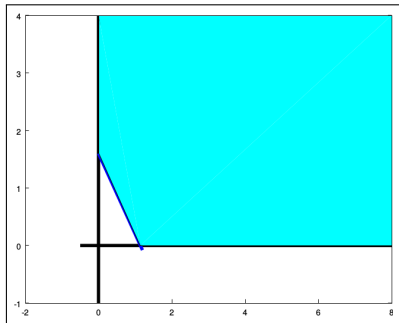


Figura : $7x_1 + 5x_2 \geq 8$

Método Gráfico

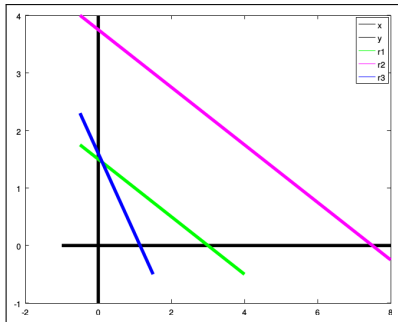


Figura : Intersecções

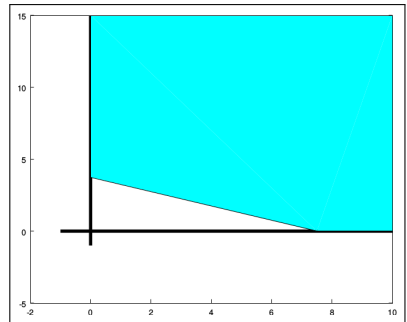


Figura : Região Viável

- ▶ Analisar a função objetivo dentro da região viável e determinar onde ela é máxima ou mínima.

Procuramos o menor valor para o número real c tal que

$$0,6x_1 + 0,45x_2 = c,$$

e (x_1, x_2) pertença ao conjunto viável.

- ▶ Analisar a função objetivo dentro da região viável e determinar onde ela é máxima ou mínima.

Procuramos o menor valor para o número real c tal que

$$0,6x_1 + 0,45x_2 = c,$$

e (x_1, x_2) pertença ao conjunto viável.

Método Gráfico

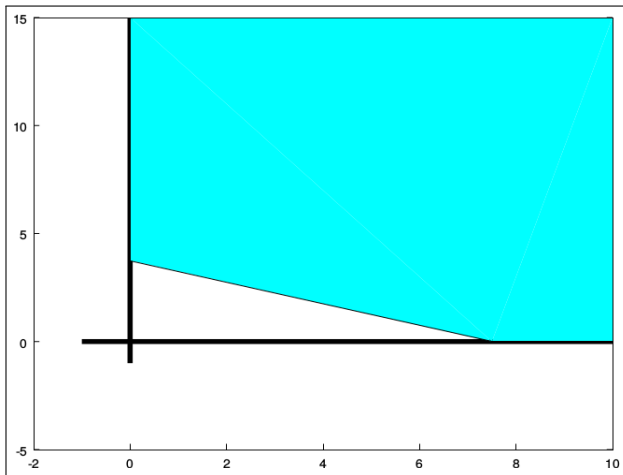


Figura : Região Viável

As curvas de nível da função objetivo são dadas por

$$x_2 = \frac{c - 0,6x_1}{0,45}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Método Gráfico

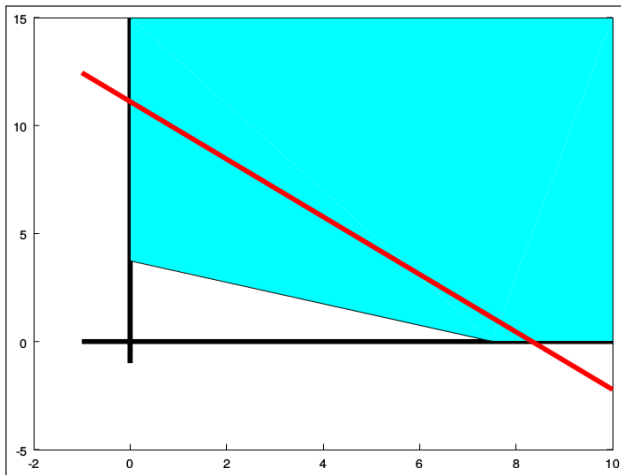


Figura : $c = 5$

Método Gráfico

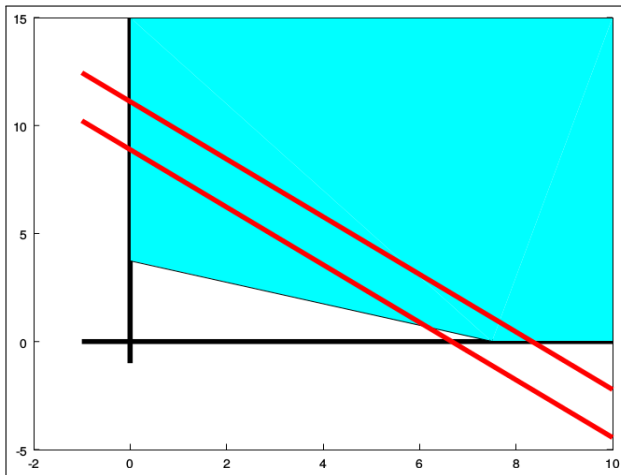


Figura : $c = 4$

Método Gráfico

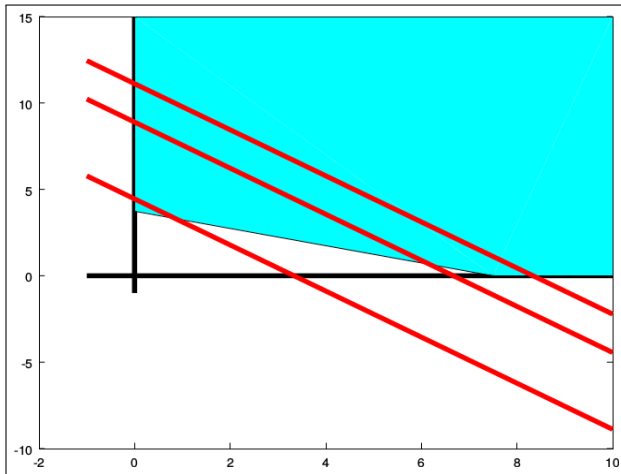


Figura : $c = 2$

Método Gráfico

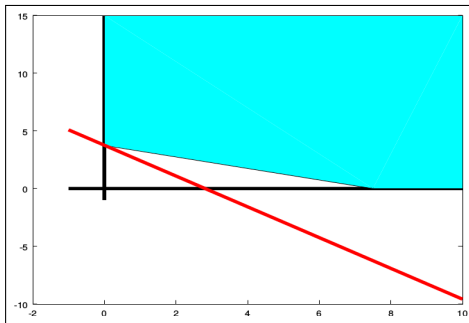


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(0, \frac{15}{4}\right) \\ f(x^*) &= 1,6875 \end{aligned}$$

Método Gráfico

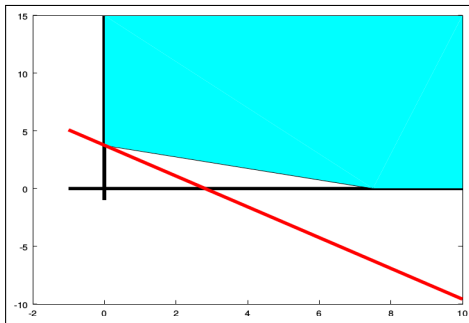


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(0, \frac{15}{4}\right) \\ f(x^*) &= 1,6875 \end{aligned}$$

Método Gráfico

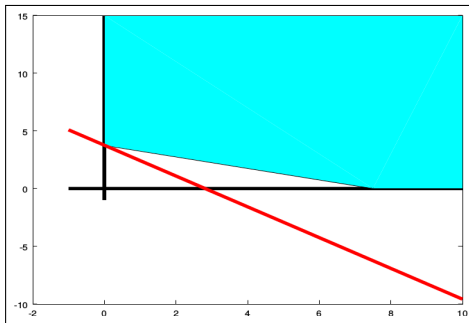


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(0, \frac{15}{4}\right) \\ f(x^*) &= 1,6875 \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\text{Minimizar } f(x) = -4x_1 - 40x_2$$

$$\text{sujeito a } -2x_1 + x_2 \geq -8$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Método Gráfico

$$-2x_1 + x_2 \geq -8$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

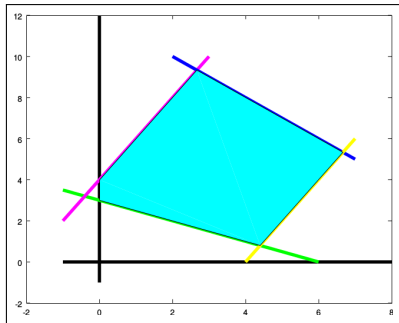


Figura : Conjunto Viável

Método Gráfico

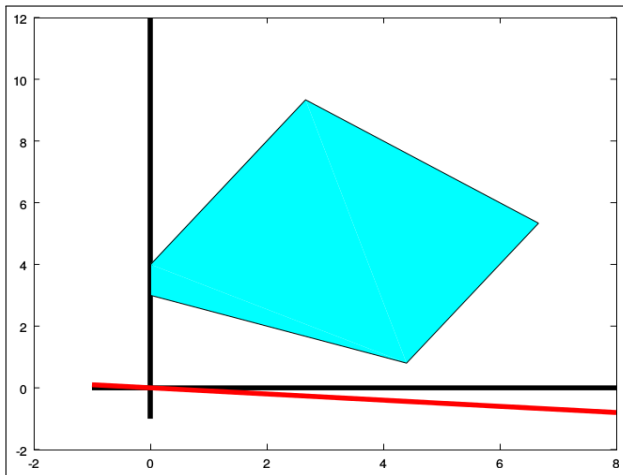


Figura : $c = 0$

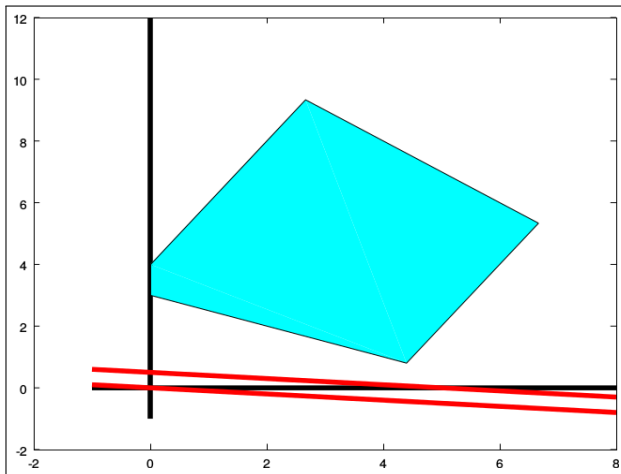


Figura : $c = -20$

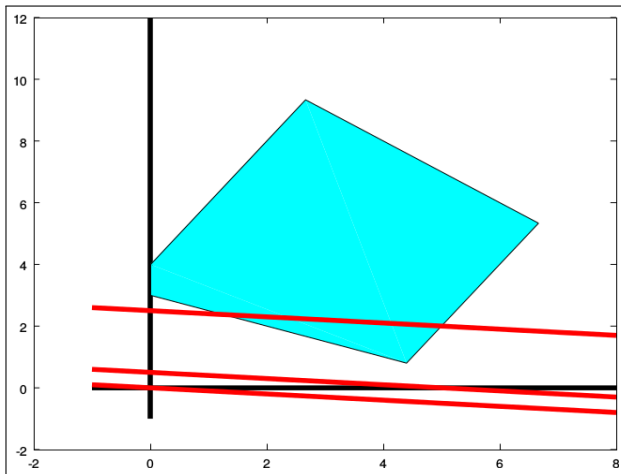


Figura : $c = -100$

Método Gráfico

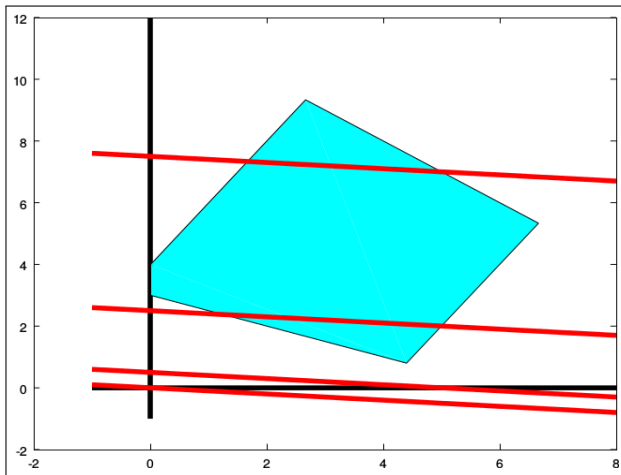


Figura : $c = -300$

Método Gráfico

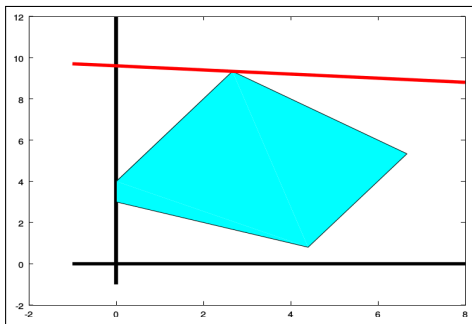


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ -4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right) \\ f(x^*) &= -384 \end{aligned}$$

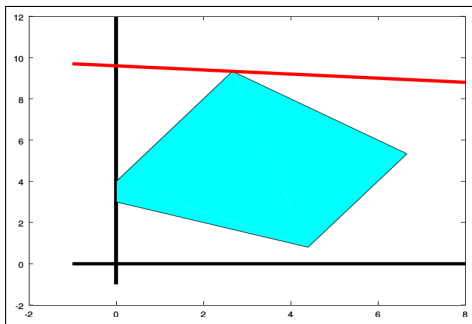


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ -4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right) \\ f(x^*) &= -384 \end{aligned}$$

Método Gráfico

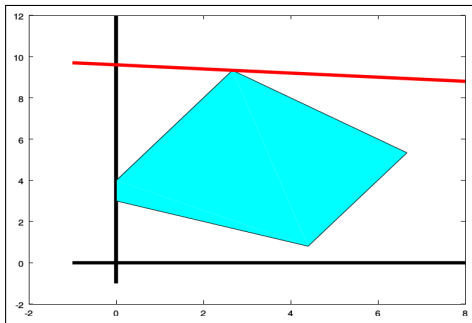


Figura : Solução Ótima

A solução está na intersecção das retas:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 60 \\ -4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right) \\ f(x^*) &= -384 \end{aligned}$$

Perguntas

- 1 Sempre é possível resolver um PL pelo método gráfico?
- 2 Como as soluções forem encontradas?
- 3 É possível ensinar Otimização no ensino básico?

Perguntas

- 1 Sempre é possível resolver um PL pelo método gráfico?
- 2 Como as soluções forem encontradas?
- 3 É possível ensinar Otimização no ensino básico?

Perguntas

- 1 Sempre é possível resolver um PL pelo método gráfico?
- 2 Como as soluções forem encontradas?
- 3 É possível ensinar Otimização no ensino básico?

Parte III - Modelos clássicos

O problema de Alocação de Recursos

Exemplo 1

Um gerente está executando o planejamento da produção de 3 produtos em 4 máquinas. Todos os produtos podem ser fabricados por todas as máquinas. Os custos unitários de produção de cada produto são apresentados na seguinte tabela:

Produto	Máquina (\$ / unidade)			
	1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

O problema de Alocação de Recursos

Exemplo 1

Cada unidade de um produto requer uma quantidade fixa de horas em cada máquina, de acordo com a tabela abaixo:

Produto	Máquina (h/u)				Demanda (unidades)
	1	2	3	4	
1	0.3	0.25	0.2	0.2	4000
2	0.2	0.3	0.2	0.25	5000
3	0.8	0.6	0.6	0.5	3000
Disponibilidade (horas)	1500	1200	1500	2000	

Deseja-se minimizar o custo total de produção.

O problema de Alocação de Recursos

Precisamos identificar

- ▶ Objetivo
- ▶ Variáveis de decisão
- ▶ Parâmetros
- ▶ Restrições

O problema de Alocação de Recursos

Variáveis de decisão

- 1 x_{ij} unidades de produto i produzido pela máquina j .

Neste caso devem assumir apenas valores inteiros não-negativos.

Parâmetros

O problema de Alocação de Recursos

Restrições: demanda do produto

$$\text{Produto 1: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 4000$$

$$\text{Produto 2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 5000$$

$$\text{Produto 3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 3000$$

Restrições: capacidade de produção das máquinas

$$\text{Máquina 1: } 0.3x_{11} + 0.2x_{21} + 0.8x_{31} \leq 1500$$

$$\text{Máquina 2: } 0.25x_{12} + 0.3x_{22} + 0.6x_{32} \leq 1200$$

$$\text{Máquina 3: } 0.2x_{13} + 0.2x_{23} + 0.6x_{33} \leq 1500$$

$$\text{Máquina 4: } 0.2x_{14} + 0.25x_{24} + 0.5x_{34} \leq 2000$$

Formulação do objetivo

Minimizar o custo total de produção:

$$\begin{aligned} f(x) = & 4x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} \\ & + 6x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} \\ & + 12x_{31} + 10x_{32} + 8x_{33} + 11x_{34} \end{aligned}$$

O problema de Alocação de Recursos

Minimizar

$f(x)$

sujeito a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 4000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 5000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 3000$$

$$0.3x_{11} + 0.2x_{21} + 0.8x_{31} \leq 1500$$

$$0.25x_{12} + 0.3x_{22} + 0.6x_{32} \leq 1200$$

$$0.2x_{13} + 0.2x_{23} + 0.6x_{33} \leq 1500$$

$$0.2x_{14} + 0.25x_{24} + 0.5x_{34} \leq 2000$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

O problema de Alocação de Funcionários

Exemplo 2

Uma empresa necessita de um número diferente de funcionários de acordo com o dia da semana:

Dia:	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	Sab	Dom
N ^o Func.	17	13	15	19	14	16	11

Por exigência sindical, cada empregado trabalha cinco dias consecutivos e descansa dois.

Formular o problema tal que o número de empregados contratados seja o mínimo necessário para atender as necessidades de cada dia.

O problema de Alocação de Funcionários

Precisamos identificar

- ▶ Objetivo
- ▶ Variáveis de decisão
- ▶ Parâmetros
- ▶ Restrições

O problema de Alocação de Funcionários

Variáveis de decisão

x_i = número de funcionários COMEÇANDO a trabalhar no dia i .

Desta forma, cada empregado começa a trabalhar em um único dia, não sendo contado mais de uma vez.

Formulação do objetivo:

Minimizar $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

O problema de Alocação de Funcionários

Restrições

Quantidade mínima de funcionários em cada dia

Pense sobre quem estará trabalhando na segunda? Terça? Quarta?
... Domingo?

O problema de Transporte

O Problema de Transporte consiste em determinar o menor custo (ou o maior lucro) em transportar produtos de várias origens para vários destinos.

Exemplos:

- 1 Transportar produtos de várias fábricas para vários locais de estoque;
- 2 Transportar produtos de vários pontos de estoque para várias lojas;

O problema de Transporte

Exemplo 3

Uma companhia enlata ervilhas em 3 unidades, O_1 , O_2 e O_3 , e transporta por caminhão para quatro pontos de estoque D_1 , D_2 , D_3 e D_4 . Os custos para transportar de cada ponto de origem para cada ponto de destino são mostrados na seguinte tabela:

	D_1	D_2	D_3	D_4
O_1	464	513	654	867
O_2	352	416	690	791
O_3	995	682	388	685

O produto deve ser enviado diretamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo os requerimentos em cada destino:

O problema de Transporte

Exemplo 3

As limitações nas origens e nos destinos (em número de caminhões) são dados pelas tabelas abaixo:

Oferta:

O_1	O_2	O_3
75	125	100

Demanda:

D_1	D_2	D_3	D_4
80	65	70	85

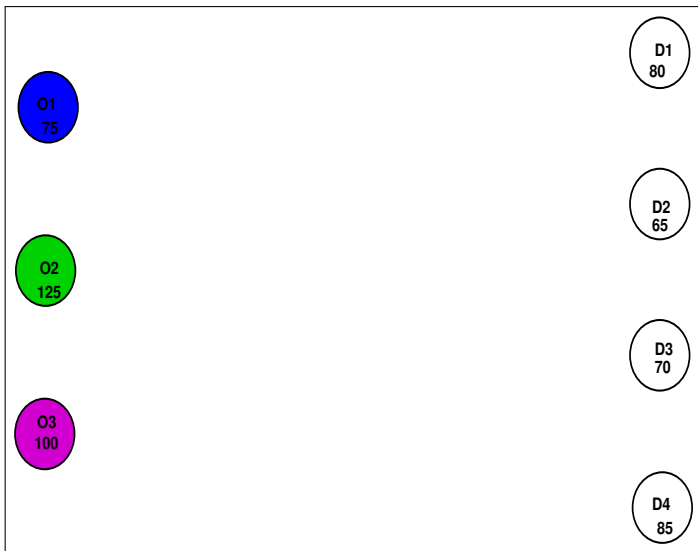
Deseja-se minimizar o custo de transporte.

O problema de Alocação de Recursos

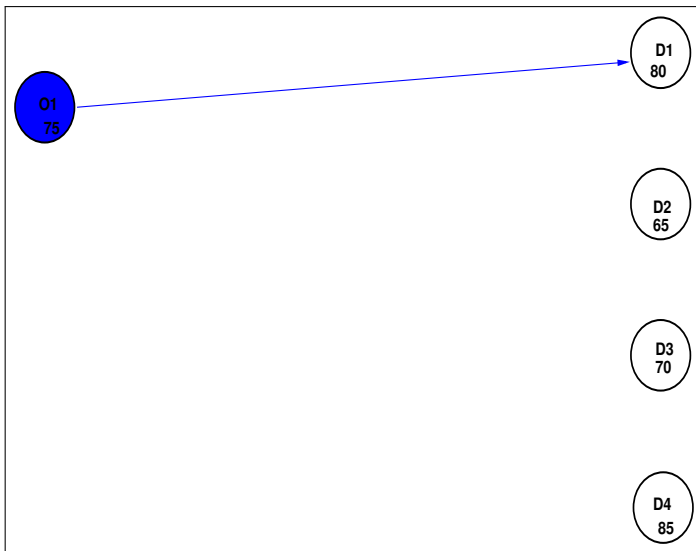
Precisamos identificar

- ▶ Objetivo
- ▶ Variáveis de decisão
- ▶ Parâmetros
- ▶ Restrições

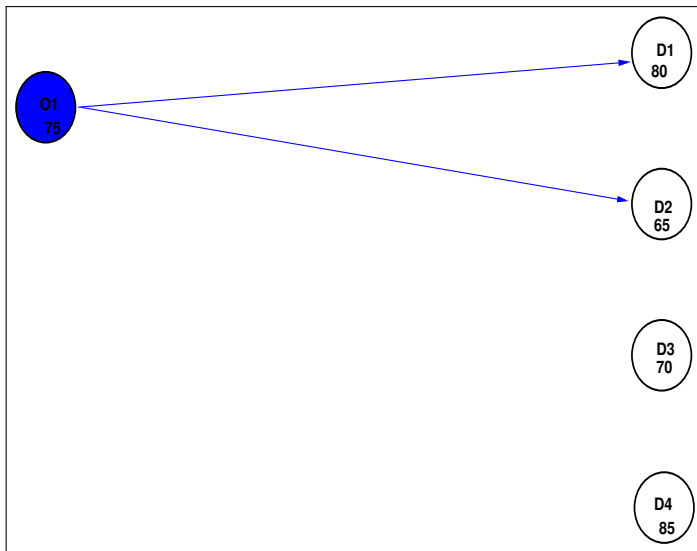
O problema de Transporte



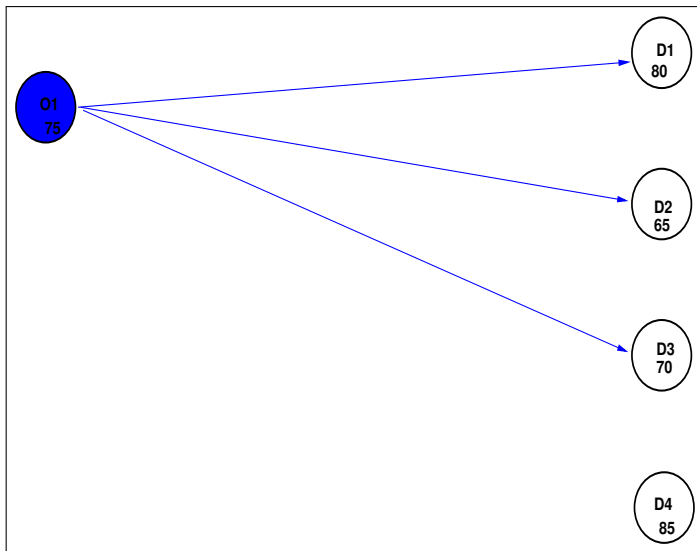
O problema de Transporte



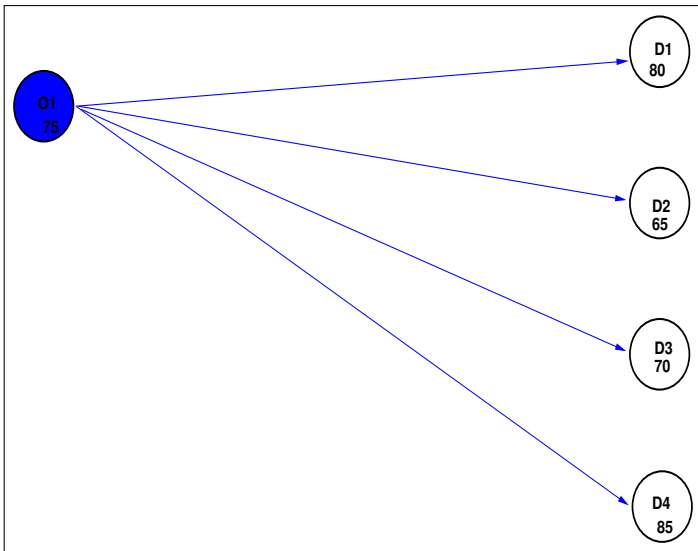
O problema de Transporte



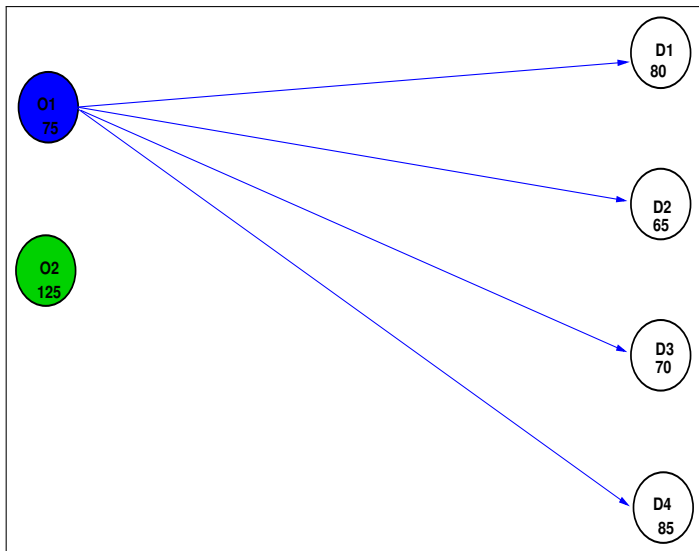
O problema de Transporte



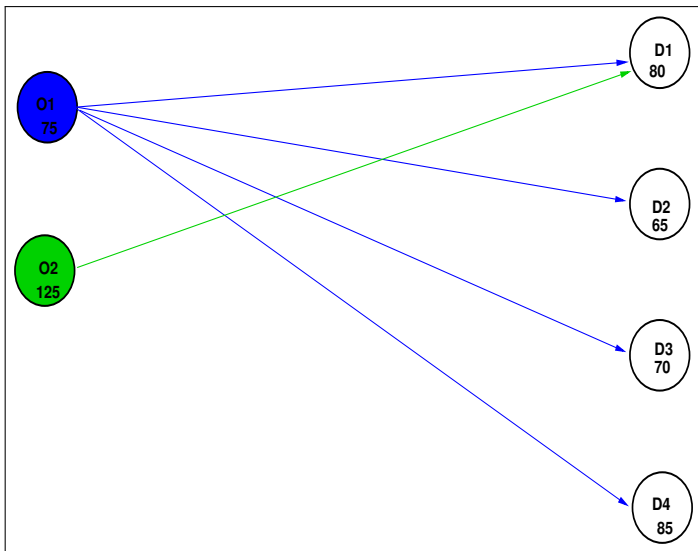
O problema de Transporte



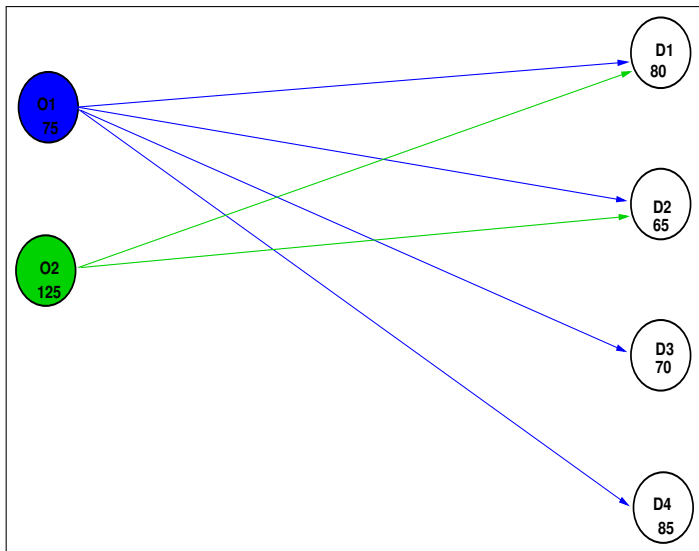
O problema de Transporte



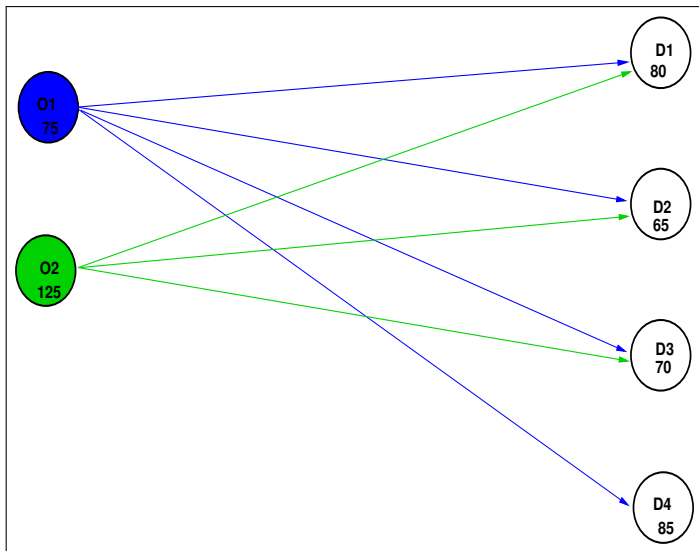
O problema de Transporte



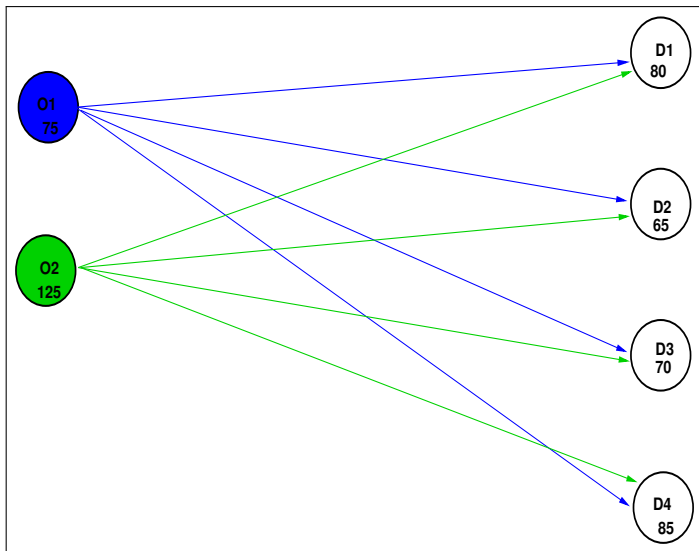
O problema de Transporte



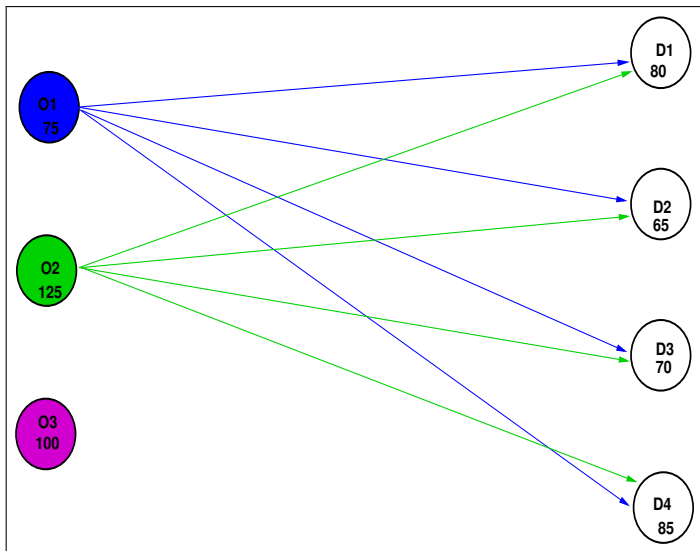
O problema de Transporte



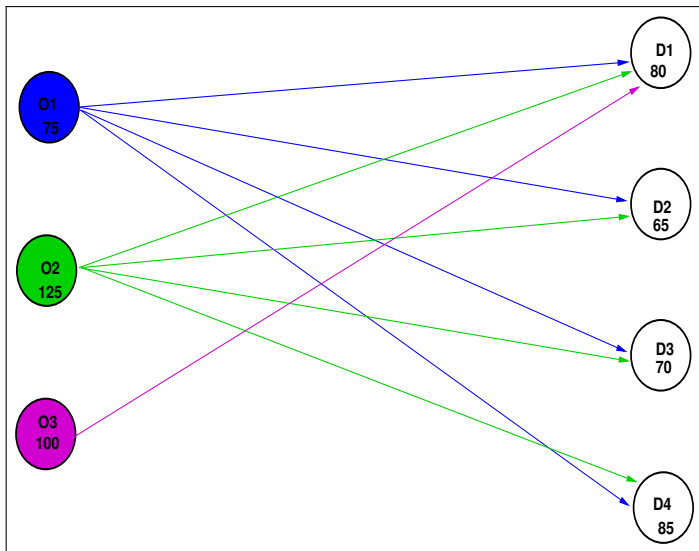
O problema de Transporte



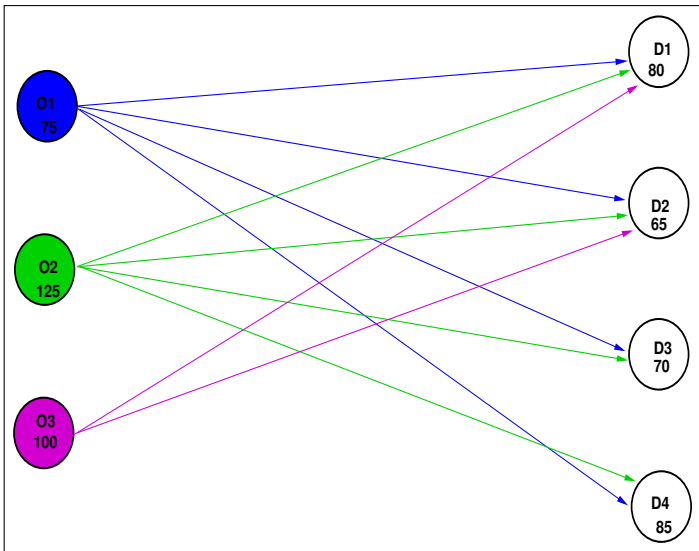
O problema de Transporte



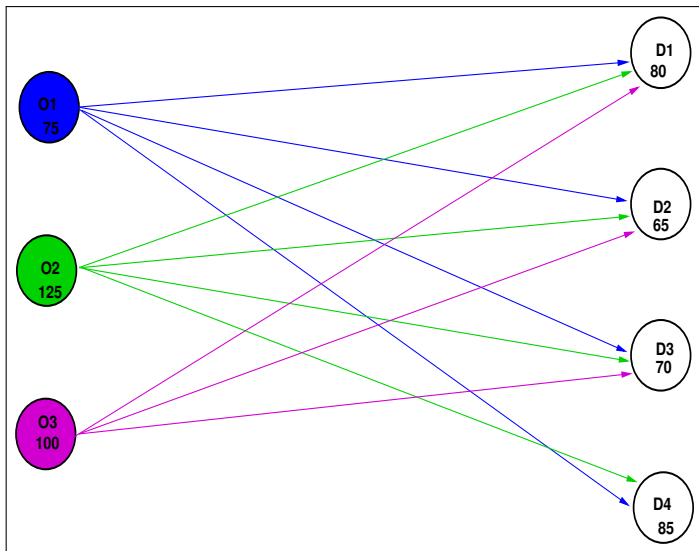
O problema de Transporte



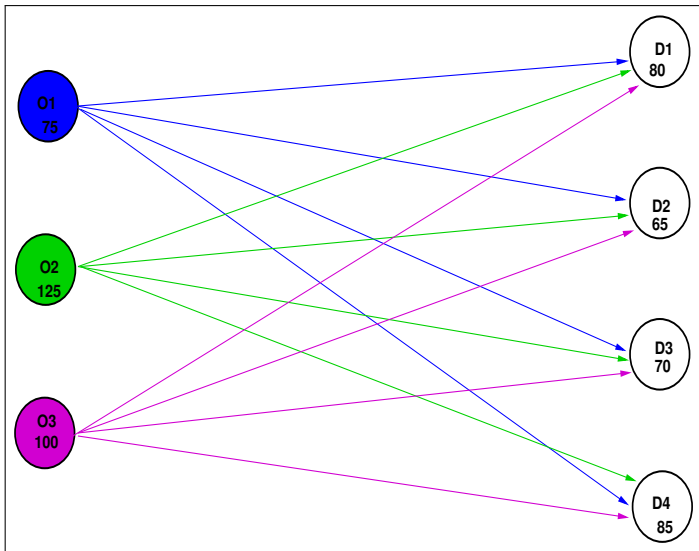
O problema de Transporte



O problema de Transporte



O problema de Transporte



O problema de Transporte

Variáveis de decisão

x_{ij} = quantidade de caminhões enviados da origem i para o destino j , $i=1,2,3$ e $j= 1,2,3,4$.

O problema de Transporte

Restrições

- ▶ Oferta de cada ponto de origem;
- ▶ Demanda de cada destino.

O problema de Transporte

Função Objetivo

O objetivo é Minimizar $f(x)$ onde:

$$\begin{aligned} f(x) = & 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} \quad (\text{custo } O1) \\ & + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} \quad (\text{custo } O2) \\ & + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34} \quad (\text{custo } O3) \end{aligned}$$

é a soma dos custos de envio das caixas a partir de cada ponto de origem para cada ponto de destino.

O problema de Transporte

Minimizar

$$f(x)$$

sujeito a $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$ (oferta em 01)

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 125 \quad (\text{oferta em } 02)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \quad (\text{oferta em 03})$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \quad (\text{demanda em } D1)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 65 \quad (\text{demanda em } D2)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70 \quad (\text{demanda em } D3)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \quad (\text{demanda em } D4)$$

O problema de Transporte

Minimizar

 $f(x)$

sujeito a $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 75$ (oferta em 01)

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 125 \quad (\text{oferta em } 02)$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \quad (\text{oferta em 03})$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \quad (\text{demanda em } D1)$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 65 \quad (\text{demanda em } D2)$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70 \quad (\text{demanda em } D3)$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \quad (\text{demanda em } D4)$$

Esta faltando alguma restrição???

O problema de Transporte

Importante!!!

Para que o problema tenha solução, ele deve estar balanceado, isto é, o total de oferta deve ser igual ao total de demanda.

No exemplo anterior:

Total de oferta: $75 + 125 + 100 = 300$

Total de demanda: $80 + 65 + 70 + 85 = 300$

O problema de Transporte

Importante!!!

Para que o problema tenha solução, ele deve estar balanceado, isto é, o total de oferta deve ser igual ao total de demanda.

No exemplo anterior:

Total de oferta: $75 + 125 + 100 = 300$

Total de demanda: $80 + 65 + 70 + 85 = 300$

Se a oferta total for maior que a demanda total???

Deve-se então criar um destino fictício com

$$demanda = oferta\ total - demanda\ total$$

Os custos de distribuição associados a este destino devem nulos.

O problema de Transporte

Exemplo

Suponha que no exemplo anterior tivéssemos os seguintes dados de oferta e demanda:

Oferta:

O_1	O_2	O_3
90	125	100

Demanda:

D_1	D_2	D_3	D_4
80	65	70	85

Como total de Oferta é maior que o total de Demanda devemos balancear este problema.

O problema de Transporte

Exemplo

Suponha que no exemplo anterior tivéssemos os seguintes dados de oferta e demanda:

Oferta:

O_1	O_2	O_3
90	125	100

Demanda:

D_1	D_2	D_3	D_4
80	65	70	85

Como total de Oferta é maior que o total de Demanda devemos balancear este problema.

O problema de Transporte

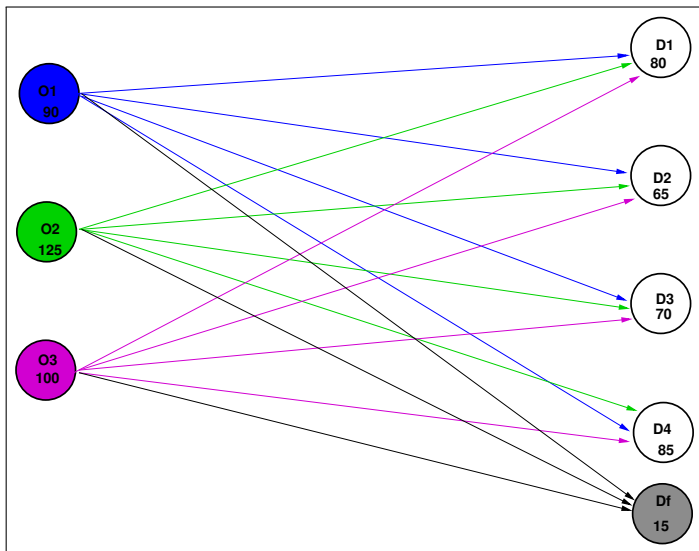


Figura : Inserimos um destino Fictício

O problema de Transporte

Os custos para transportar de cada ponto de origem para cada ponto de destino são mostrados na seguinte tabela:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_f
O_1	464	513	654	867	0
O_2	352	416	690	791	0
O_3	995	682	388	685	0

E para este problema temos:

Oferta Total: $90 + 125 + 100 = 315$

Demanda Total: $80 + 65 + 70 + 85 + 15 = 315$

O problema de Transporte

O objetivo é Minimizar $f(x)$ onde:

$$\begin{aligned} f(x) = & 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 0x_{1f} \quad (\text{custo } O1) \\ & + 352x_{21} + 416x_{22} + 690x_{23} + 791x_{24} + 0x_{2f} \quad (\text{custo } O2) \\ & + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34} + 0x_{3f} \quad (\text{custo } O3) \end{aligned}$$

é a soma dos custos de envio das caixas a partir de cada ponto de origem para cada ponto de destino.

O problema de Transporte

Minimizar

$$f(x)$$

sujeito a $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1f} = 90$ (oferta em 01)

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{2f} = 125 \quad (\text{oferta em 02})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{3f} = 100 \quad (\text{oferta em 03})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \quad (\text{demanda em D1})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 65 \quad (\text{demanda em D2})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70 \quad (\text{demanda em D3})$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 85 \quad (\text{demanda em D4})$$

$$x_{1f} + x_{2f} + x_{3f} = 15 \quad (\text{demanda em Df})$$

$$x_{ij} \in \mathbb{N}$$

O problema de Transporte

- 1 Quando a oferta total é maior que a demanda total, o problema admite outra formulação?
- 2 Quando a demanda total é maior que a oferta total, faz sentido pensar na resolução do problema de transporte?

O problema de Transporte

Definindo:

- ❶ x_{ij} = número de unidades a transportar da origem i para o destino j ;
- ❷ c_{ij} = custo do transporte de uma unidade da origem i para o destino j ;
- ❸ a_i = quantidade disponível na origem i ;
- ❹ b_j = quantidade requerida no destino j .

O problema de Transporte

Podemos escrever o problema de Transporte da seguinte forma:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^n b_i$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Parte IV - Método Simplex

$$\begin{array}{ll}
 \text{Otimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\
 (\text{Min/Max}) & \\
 \text{sujeito a} & Ax \leq b \text{ (ou } \geq, \text{ ou } =) \\
 & x \geq 0
 \end{array}$$

onde:

- ▶ O vetor $c \in \mathbb{R}^n$ é chamado vetor de custos.
- ▶ O vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é formado pelas variáveis de decisão.
- ▶ O vetor $b \in \mathbb{R}^m$ contém os parâmetros.
- ▶ A matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ contém os parâmetros.
- ▶ Vamos supor que A tem m linhas LI.

Forma geral

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & Ax \geq b \end{array}$$

Forma canônica (ou padrão)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Exemplo 1

Escrever o seguinte problema na forma canônica:

$$\text{Minimizar } f(x) = -4x_1 - 40x_2$$

$$\text{sujeito a } -2x_1 + x_2 \geq -8$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 60$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Para transformar o sistema de inequações em um sistema de equações introduzimos variáveis chamadas de **variáveis residuais**.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

O problema na forma canônica é:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) = -4x_1 - 40x_2 \\
 &\text{sujeito a} && -2x_1 + x_2 - r_1 = -8 \\
 &&& 5x_1 + 5x_2 + r_2 = 60 \\
 &&& -4x_1 + 2x_2 + r_3 = 8 \\
 &&& x_1 + 2x_2 - r_4 = 6 \\
 &&& x_1 \geq 0 \\
 &&& x_2 \geq 0 \\
 &&& r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Quem são os candidatos a resolver este problema?

O problema na forma canônica é:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && f(x) = -4x_1 - 40x_2 \\
 &\text{sujeito a} && -2x_1 + x_2 - r_1 = -8 \\
 &&& 5x_1 + 5x_2 + r_2 = 60 \\
 &&& -4x_1 + 2x_2 + r_3 = 8 \\
 &&& x_1 + 2x_2 - r_4 = 6 \\
 &&& x_1 \geq 0 \\
 &&& x_2 \geq 0 \\
 &&& r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Quem são os candidatos a resolver este problema?

Os vetores $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$ tal que $Ax = b$, para

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Observações

- 1 O número de variáveis ($n = 6$) é superior ao número de equações ($m = 4$).
- 2 O sistema é possível e indeterminado:
 - ▶ Infinitas soluções.
 - ▶ Precisamos obter todas?

Observações

- 1 O número de variáveis ($n = 6$) é superior ao número de equações ($m = 4$).
- 2 O sistema é possível e indeterminado:
 - ▶ Infinitas soluções.
 - ▶ Precisamos obter todas?

Observações

- ❶ O número de variáveis ($n = 6$) é superior ao número de equações ($m = 4$).
- ❷ O sistema é possível e indeterminado:
 - ▶ Infinitas soluções.
 - ▶ Precisamos obter todas?

Observações

- ❶ O número de variáveis ($n = 6$) é superior ao número de equações ($m = 4$).
- ❷ O sistema é possível e indeterminado:
 - ▶ Infinitas soluções.
 - ▶ Precisamos obter todas?

Simplex

- ▶ Parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do PPL;
- ▶ A partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente.

Simplex

- ▶ Parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do PPL;
- ▶ A partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viáveis de valor igual ou melhor que a corrente.

O algoritmo possui:

- 1 um critério de escolha que permite encontrar sempre novos e melhores soluções viáveis;
- 2 e um critério que consegue determinar se a solução viável escolhido é ou não uma solução ótima.

Definição

$P \subset \mathbb{R}^n$ é um **poliedro** se existem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}.$$

Exemplo 1

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq -8 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

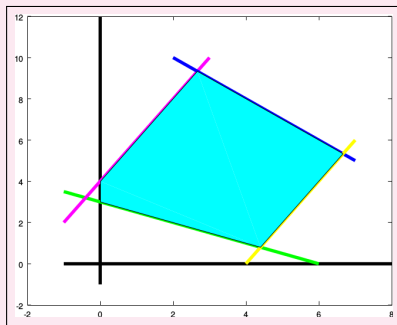


Figura : Poliedro P

Exemplo 2

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq -4 \\ -x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

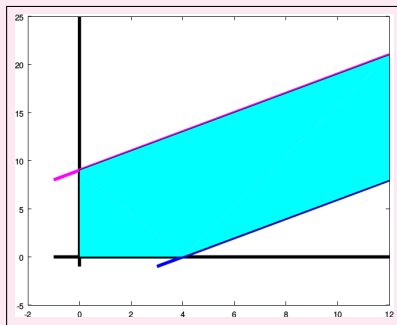


Figura : Poliedro P ilimitado

Exemplo 3

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -4 \\ -x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

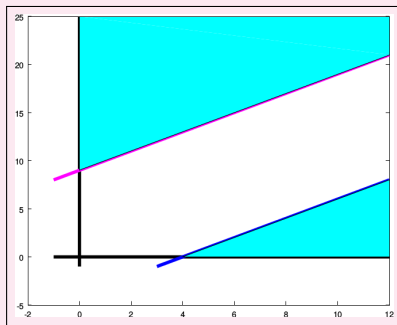


Figura : Poliedro P inviável

Observações

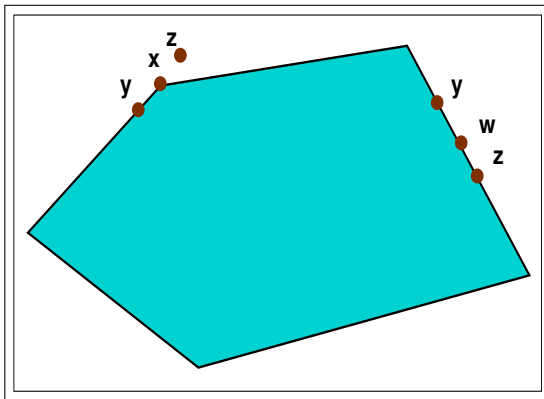
- 1 O conjunto viável de qualquer PPL é um poliedro.
- 2 Todo poliedro é uma intersecção finita de semi-espacos.

Observações

- 1 O conjunto viável de qualquer PPL é um poliedro.
- 2 Todo poliedro é uma intersecção finita de semi-espacos.

Definição

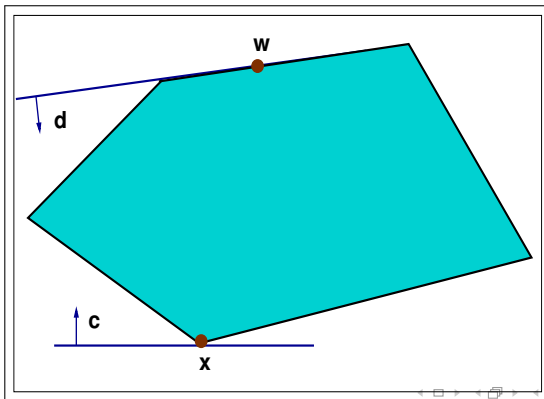
Seja P um poliedro. $\bar{x} \in P$ é um **ponto extremo** de P se não existem $y, z \in P$, $y \neq z$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que $\bar{x} = \lambda y + (1 - \lambda)z$.



Definição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro. $\bar{x} \in P$ é um **vértice** de P se existe $c \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\langle c, \bar{x} \rangle < \langle c, y \rangle, \text{ para todo } y \in P - \{\bar{x}\}.$$



Definição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro e A_i a i -ésima linha da matriz A . Se x satisfaz $\langle A_i, x \rangle = b_i$ dizemos que esta restrição é **ativa** em x .

Definição

Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\tilde{x} \in R^n$. \tilde{x} é dita **solução básica** se todas as restrições de igualdade são satisfeitas e além disso dentre as restrições ativas existem n linearmente independentes.

Uma **solução básica viável** é uma solução que satisfaz todas as restrições, inclusive as inativas.

Teorema

Seja P um poliedro e $\bar{x} \in P$. São equivalentes:

- (i) \bar{x} é um vértice;
- (ii) \bar{x} é um ponto extremo;
- (iii) \bar{x} é uma solução básica viável.

Definição

O conjunto $P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ define um **poliedro na forma canônica**.

Forma canônica (ou padrão)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Definição

O conjunto $P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ define um **poliedro na forma canônica**.

Forma canônica (ou padrão)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

A partir de agora iremos considerar:

- ▶ o PPL na forma canônica;
- ▶ $m \leq n$;
- ▶ a matriz A tem m linhas LI ($\text{posto}(A)=m$) .

Note que:

- ▶ a matriz $A = (A^1 \mid A^2 \mid \cdots \mid A^n)$ pode ser descrita em função das suas colunas;
- ▶ podemos extrair um conjunto de índices $I = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, $b_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- ▶ podemos definir a matriz $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \cdots \mid A^{b_m})$.

Note que:

- ▶ a matriz $A = (A^1 \mid A^2 \mid \cdots \mid A^n)$ pode ser descrita em função das suas colunas;
- ▶ podemos extrair um conjunto de índices $I = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, $b_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- ▶ podemos definir a matriz $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \cdots \mid A^{b_m})$.

Note que:

- ▶ a matriz $A = (A^1 \mid A^2 \mid \cdots \mid A^n)$ pode ser descrita em função das suas colunas;
- ▶ podemos extrair um conjunto de índices $I = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, $b_i \in \{1, 2, \cdots, n\}$;
- ▶ podemos definir a matriz $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \cdots \mid A^{b_m})$.

Definição

Considere $P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ e que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui (m) linhas linearmente independentes. Então $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ é **solução básica de P_c** se e somente se

- (i) $A\tilde{x} = b$,
- (ii) existem índices b_1, \dots, b_m tais que as colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são linearmente independentes,
- (iii) e $\tilde{x}_i = 0$, para todo $i \notin \{b_1, \dots, b_m\}$.

Seja uma solução básica $\tilde{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ x_{b_{m+1}} = 0 \\ \vdots \\ x_{b_n} = 0 \end{pmatrix}$$

Reescrevemos:

- ▶ $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m})$, m colunas LI
- ▶ $N = (A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n})$
- ▶ $A = (B \mid N)$

Seja uma solução básica $\tilde{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ x_{b_{m+1}} = 0 \\ \vdots \\ x_{b_n} = 0 \end{pmatrix}$$

Reescrevemos:

- ▶ $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m})$, m colunas LI
- ▶ $N = (A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n})$
- ▶ $A = (B \mid N)$

Seja uma solução básica $\tilde{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ x_{b_{m+1}} = 0 \\ \vdots \\ x_{b_n} = 0 \end{pmatrix}$$

Reescrevemos:

- ▶ $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m})$, m colunas LI
- ▶ $N = (A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n})$
- ▶ $A = (B \mid N)$

Seja uma solução básica $\tilde{x} =$

$$\begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ x_{b_{m+1}} = 0 \\ \vdots \\ x_{b_n} = 0 \end{pmatrix}$$

Reescrevemos:

- ▶ $B = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m})$, m colunas LI
- ▶ $N = (A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n})$
- ▶ $A = (B \mid N)$

Note que,

$$\blacktriangleright (B \quad N) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

$$\blacktriangleright (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m}) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \end{pmatrix} = b$$

Sendo assim,

$$\blacktriangleright x_B = B^{-1}b$$

Note que,

$$\blacktriangleright (B \quad N) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

$$\blacktriangleright (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m}) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \end{pmatrix} = b$$

Sendo assim,

$$\blacktriangleright x_B = B^{-1}b$$

Note que,

$$\triangleright (B \quad N) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

$$\triangleright (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m}) \begin{pmatrix} x_{b_1} \\ x_{b_2} \\ \vdots \\ x_{b_m} \end{pmatrix} = b$$

Sendo assim,

$$\triangleright x_B = B^{-1}b$$

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Se \tilde{x} é uma solução básica:

- ▶ as variáveis x_{b_1}, \dots, x_{b_m} são chamadas **variáveis básicas**,
- ▶ as restantes são chamadas **não-básicas**.
- ▶ As colunas A^{b_1}, \dots, A^{b_m} são chamadas **colunas básicas**.
- ▶ Chamamos de **matriz básica** à matriz

$$B = \left(A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_m} \right).$$

- ▶ Chamamos de **matriz não básica** à matriz

$$N = \left(A^{b_{m+1}} \mid A^{b_{m+2}} \mid \dots \mid A^{b_n} \right).$$

- ▶ O correspondente vetor básico é $x_B = (x_{b_1}, \dots, x_{b_m})^t$.

Teorema

Seja P_c um poliedro e $\bar{x} \in P_c$. São equivalentes:

- (i) \bar{x} é um vértice;
- (ii) \bar{x} é um ponto extremo;
- (iii) \bar{x} é uma solução básica viável ($\bar{x} \geq 0$).

Proposição

O conjunto dos **vértices** de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado por

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Exemplo 4

Qual o número máximo de vértices do seguinte poliedro?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

Exemplo 4

Qual o número máximo de vértices do seguinte poliedro?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

Exemplo 4

O conjunto de índices $I = \{1, 2, 3, 5\}$ corresponde a um vértice do seguinte poliedro?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- ▶ As colunas A^1, A^2, A^3, A^5 são LI ?
- ▶ $x_B = B^{-1}b \geq 0$?

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

► As colunas A^1 , A^2 , A^3 , A^5 são LI ?

► $x_B = B^{-1}b \geq 0$?

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- ▶ As colunas A^1, A^2, A^3, A^5 são LI ?
- ▶ $x_B = B^{-1}b \geq 0$?

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 5$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -34 \\ 92 \end{pmatrix}$$

► Solução básica não corresponde a um vértice:

$$\tilde{x} = (18; -6; -34; 0; 92; 0).$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 5$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -34 \\ 92 \end{pmatrix}$$

► Solução básica não corresponde a um vértice:

$$\tilde{x} = (18; -6; -34; 0; 92; 0).$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 5$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -34 \\ 92 \end{pmatrix}$$

► Solução básica não corresponde a um vértice:

$$\tilde{x} = (18; -6; -34; 0; 92; 0).$$

$$\triangleright B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 5$$

$$\triangleright x_B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -34 \\ 92 \end{pmatrix}$$

► Solução básica não corresponde a um vértice:

$$\tilde{x} = (18; -6; -34; 0; 92; 0).$$

Exemplo 4

O conjunto de índices $I = \{2, 3, 4, 5\}$ corresponde a um vértice do seguinte poliedro?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\bar{x} = (0; 3; 11; 45; 2; 0).$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\bar{x} = (0; 3; 11; 45; 2; 0).$$

$$\triangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\triangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 45 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\bar{x} = (0; 3; 11; 45; 2; 0).$$

Exemplo 4

O conjunto de índices $I = \{2, 3, 4, 6\}$ corresponde a um vértice do seguinte poliedro?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 - r_1 & = & -8 \\ 5x_1 + 5x_2 + r_2 & = & 60 \\ -4x_1 + 2x_2 + r_3 & = & 8 \\ x_1 + 2x_2 - r_4 & = & 6 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ r_1, r_2, r_3, r_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\tilde{x} = (0; 4; 12; 40; 0; 2).$$

$$\blacktriangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\blacktriangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\tilde{x} = (0; 4; 12; 40; 0; 2).$$

$$\triangleright B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det(B) = 2$$

$$\triangleright x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Solução básica corresponde ao vértice:

$$\tilde{x} = (0; 4; 12; 40; 0; 2).$$

O que difere um vértice de outro?

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \\ 45 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Observações

- ▶ Soluções básicas distintas correspondem a bases distintas (uma base está associada a um sistema de equações que possui solução única);
- ▶ Duas bases diferentes podem corresponder à mesma solução básica (que satisfaz dois sistemas de equações).
- ▶ Todo poliedro canônico não-vazio possui (pelo menos um) vértice.

Observações

- ▶ Soluções básicas distintas correspondem a bases distintas (uma base está associada a um sistema de equações que possui solução única);
- ▶ Duas bases diferentes podem corresponder à mesma solução básica (que satisfaz dois sistemas de equações).
- ▶ Todo poliedro canônico não-vazio possui (pelo menos um) vértice.

Observações

- ▶ Soluções básicas distintas correspondem a bases distintas (uma base está associada a um sistema de equações que possui solução única);
- ▶ Duas bases diferentes podem corresponder à mesma solução básica (que satisfaz dois sistemas de equações).
- ▶ Todo poliedro canônico não-vazio possui (pelo menos um) vértice.

Algoritmo 1 Construção de Vértices

- 1: Escolha m índices $I = \{b_1, \dots, b_m\}$ tais que as colunas $A^{b_1}, A^{b_2}, \dots, A^{b_m}$ sejam linearmente independentes;
 - 2: Faça $x_i = 0$ para todo $i \notin I$;
 - 3: Resolva o sistema $\sum_{i \in I} A^i x_i = b$; ($x_B = B^{-1}b$)
 - 4: Teste se a solução é viável. ($x \geq 0$)
-

Teorema

Seja o PPL

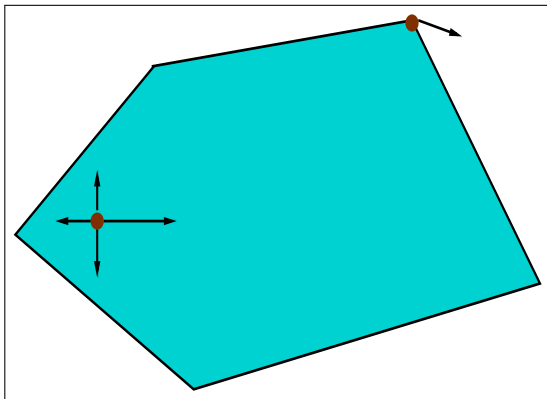
$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = \langle c, x \rangle \\ \text{sujeito a} & x \in P_c \end{array}$$

e suponha que P possui pelo menos um vértice. Então ou o valor ótimo do PPL é $-\infty$, ou existe um vértice de P que é solução ótima do PPL.

Como decidir (é possível?) qual é o vértice que corresponde a solução ótima de um PPL?

Definição

$d \in \mathbb{R}^n$ é chamada de **direção viável** a partir de $x \in P$ se existe $\theta > 0$ tal que $x + \theta d \in P$.



Observação

A partir de um vértice, precisamos caminhar por uma direção que nos leve (apenas) para outro vértice (Solução básica adjacente) .

- ▶ Seja x um vértice, d uma direção e $\theta > 0$,
- ▶ Precisamos construir um novo vértice da forma $y = x + \theta d$.
- ▶ Exigindo que $d_j = 1$ para alguma variável não básica x_j , e $d_i = 0$ para todas as outras variáveis não-básicas,
- ▶ O novo ponto $y = x + \theta d$ deverá satisfazer:

$$\begin{cases} y_B &= x_B + \theta d_B \\ y_j &= x_j + \theta d_j = 0 + \theta 1 = \theta \\ y_i &= x_i + \theta d_i = 0 + \theta 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

- ▶ Seja x um vértice, d uma direção e $\theta > 0$,
- ▶ Precisamos construir um novo vértice da forma $y = x + \theta d$.
- ▶ Exigindo que $d_j = 1$ para alguma variável não básica x_j , e $d_i = 0$ para todas as outras variáveis não-básicas,
- ▶ O novo ponto $y = x + \theta d$ deverá satisfazer:

$$\begin{cases} y_B &= x_B + \theta d_B \\ y_j &= x_j + \theta d_j = 0 + \theta 1 = \theta \\ y_i &= x_i + \theta d_i = 0 + \theta 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

- ▶ Seja x um vértice, d uma direção e $\theta > 0$,
- ▶ Precisamos construir um novo vértice da forma $y = x + \theta d$.
- ▶ Exigindo que $d_j = 1$ para alguma variável não básica x_j , e $d_i = 0$ para todas as outras variáveis não-básicas,
- ▶ O novo ponto $y = x + \theta d$ deverá satisfazer:

$$\begin{cases} y_B &= x_B + \theta d_B \\ y_j &= x_j + \theta d_j = 0 + \theta 1 = \theta \\ y_i &= x_i + \theta d_i = 0 + \theta 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

- ▶ Seja x um vértice, d uma direção e $\theta > 0$,
- ▶ Precisamos construir um novo vértice da forma $y = x + \theta d$.
- ▶ Exigindo que $d_j = 1$ para alguma variável não básica x_j , e $d_i = 0$ para todas as outras variáveis não-básicas,
- ▶ O novo ponto $y = x + \theta d$ deverá satisfazer:

$$\begin{cases} y_B &= x_B + \theta d_B \\ y_j &= x_j + \theta d_j = 0 + \theta 1 = \theta \\ y_i &= x_i + \theta d_i = 0 + \theta 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

- ▶ Seja x um vértice, d uma direção e $\theta > 0$,
- ▶ Precisamos construir um novo vértice da forma $y = x + \theta d$.
- ▶ Exigindo que $d_j = 1$ para alguma variável não básica x_j , e $d_i = 0$ para todas as outras variáveis não-básicas,
- ▶ O novo ponto $y = x + \theta d$ deverá satisfazer:

$$\begin{cases} y_B &= x_B + \theta d_B \\ y_j &= x_j + \theta d_j = 0 + \theta 1 = \theta \\ y_i &= x_i + \theta d_i = 0 + \theta 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

- ▶ y deve pertencer ao poliedro P_c , para algum valor de θ ,
- ▶ $Ay = b$ e $y \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} b &= Ay \\ &= A(x + \theta d) \\ &= Ax + \theta Ad \\ &= b + \theta Ad \end{aligned}$$

- ▶ y deve pertencer ao poliedro P_c , para algum valor de θ ,
- ▶ $Ay = b$ e $y \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} b &= Ay \\ &= A(x + \theta d) \\ &= Ax + \theta Ad \\ &= b + \theta Ad \end{aligned}$$

- ▶ y deve pertencer ao poliedro P_c , para algum valor de θ ,
- ▶ $Ay = b$ e $y \geq 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} b &= Ay \\ &= A(x + \theta d) \\ &= Ax + \theta Ad \\ &= b + \theta Ad \end{aligned}$$

► $Ad = 0,$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) + d_j A_j + \left(\sum_{i \neq B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) \\ &= Bd_B + A^j \end{aligned}$$

► $d_B = -B^{-1}A^j$

► $y \geq 0???$

► $Ad = 0,$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) + d_j A_j + \left(\sum_{i \neq B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) \\ &= Bd_B + A^j \end{aligned}$$

► $d_B = -B^{-1}A^j$

► $y \geq 0???$

► $Ad = 0,$

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i=B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) + d_j A_j + \left(\sum_{i \neq B_1, \dots, B_m} A_i d_i \right) \\ &= Bd_B + A^j \end{aligned}$$

► $d_B = -B^{-1}A^j$

► $y \geq 0???$

Definição

A direção

$$\begin{cases} d_B &= -B^{-1}A^j \\ d_j &= 1 \\ d_i &= 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

é chamada de **j-ésima direção básica** .

(Nos leva, apenas, para outro vértice)

Definição

A direção

$$\begin{cases} d_B &= -B^{-1}A^j \\ d_j &= 1 \\ d_i &= 0, \quad i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

é chamada de **j-ésima direção básica** .

(Nos leva, apenas, para outro vértice)

- A variação do valor da função objetivo andando-se na j -ésima direção básica d será

$$\begin{aligned}\langle c, y \rangle - \langle c, x \rangle &= \langle c, x + \theta d \rangle - \langle c, x \rangle \\ &= \theta \langle c, d \rangle \\ &= \theta \langle (c_B; c_N), (d_B; 0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0) \rangle \\ &= \theta(c_j + \langle c_B, d_B \rangle) \\ &= \theta(c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle)\end{aligned}$$

(Se a variação é negativa, isso significa???)

- A variação do valor da função objetivo andando-se na j -ésima direção básica d será

$$\begin{aligned}\langle c, y \rangle - \langle c, x \rangle &= \langle c, x + \theta d \rangle - \langle c, x \rangle \\ &= \theta \langle c, d \rangle \\ &= \theta \langle (c_B; c_N), (d_B; 0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0) \rangle \\ &= \theta(c_j + \langle c_B, d_B \rangle) \\ &= \theta(c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle)\end{aligned}$$

(Se a variação é negativa, isso significa???)

- A variação do valor da função objetivo andando-se na j -ésima direção básica d será

$$\begin{aligned}\langle c, y \rangle - \langle c, x \rangle &= \langle c, x + \theta d \rangle - \langle c, x \rangle \\ &= \theta \langle c, d \rangle \\ &= \theta \langle (c_B; c_N), (d_B; 0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0) \rangle \\ &= \theta(c_j + \langle c_B, d_B \rangle) \\ &= \theta(c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle)\end{aligned}$$

(Se a variação é negativa, isso significa???)

Definição

Seja x uma solução básica e B a matriz básica associada. Para cada índice j definimos o **j-ésimo custo reduzido** como

$$\bar{c}_j = (c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle).$$

(É a variação da função objetivo entre dois vértices.)

Definição

Seja x uma solução básica e B a matriz básica associada. Para cada índice j definimos o **j-ésimo custo reduzido** como

$$\bar{c}_j = (c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle).$$

(É a variação da função objetivo entre dois vértices.)

Observação

Se j é um índice básico, então,

$$\begin{aligned}\bar{c}_j &= c_j - \langle c_B, B^{-1} A^j \rangle \\ &= c_j - \langle c_B, e^j \rangle \\ &= c_j - c_j \\ &= 0\end{aligned}$$

Teorema

Seja \bar{x} uma solução básica viável e \bar{c} o **vetor de custos reduzidos**.
Então

- (i) Se $\bar{c} \geq 0$, então \bar{x} é solução ótima do PPL.
- (ii) Se \bar{x} é solução ótima do PPL (e não-degenerada), então $\bar{c} \geq 0$.

(Ou seja, se existir alguma índice j tal que $c_j < 0$ então a solução não é ótima.)

Teorema

Seja \bar{x} uma solução básica viável e \bar{c} o **vetor de custos reduzidos**.
Então

- (i) Se $\bar{c} \geq 0$, então \bar{x} é solução ótima do PPL.
- (ii) Se \bar{x} é solução ótima do PPL (e não-degenerada), então $\bar{c} \geq 0$.

(Ou seja, se existir alguma índice j tal que $c_j < 0$ então a solução não é ótima.)

Definição

Uma matriz básica é dita **ótima** se

- (i) $B^{-1}b \geq 0$ e
- (ii) $\bar{c} = c - (c_B^t \cdot B^{-1}A)^t$.

Exemplo 5

O vértice associado ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$ corresponde a uma solução ótima?

$$\text{Minimizar} \quad f(x) = -4x_1 - 40x_2$$

$$\text{sujeito a} \quad -2x_1 + x_2 - r_1 = -8$$

$$5x_1 + 5x_2 + r_2 = 60$$

$$-4x_1 + 2x_2 + r_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 - r_4 = 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0$$

► Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► A base e o vértice associados ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$ são:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► A base e o vértice associados ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$ são:

► Sejam

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► A base e o vértice associados ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$ são:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ▶ O custo reduzido é dado por $\bar{c} = c - (c_B^t \cdot B^{-1}A)^t$

- ▶ Note que $c_B = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- ▶ e $B^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- ▶ O custo reduzido é dado por $\bar{c} = c - (c_B^t \cdot B^{-1}A)^t$

- ▶ Note que $c_B = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- ▶ e $B^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- ▶ O custo reduzido é dado por $\bar{c} = c - (c_B^t \cdot B^{-1}A)^t$

- ▶ Note que $c_B = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

- ▶ e $B^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

► Logo

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \right] = \begin{pmatrix} -84 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► Sendo assim x^0 não é vértice ótimo.

► Logo

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \right] = \begin{pmatrix} -84 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► Sendo assim x^0 não é vértice ótimo.

- Precisamos construir outro vértice da $y = \tilde{x} + \theta d$ onde:

$$d = \begin{cases} d_B & = -B^{-1}A^j \\ d_j & = 1 \\ d_i & = 0, \ i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

para algum índice j não básico tal que $c_j < 0$, ou seja, $j = 1$.

- Precisamos construir outro vértice da $y = \tilde{x} + \theta d$ onde:

$$d = \begin{cases} d_B &= -B^{-1}A^j \\ d_j &= 1 \\ d_i &= 0, \ i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

para algum índice j não básico tal que $c_j < 0$, ou seja, $j = 1$.

- Precisamos construir outro vértice da $y = \tilde{x} + \theta d$ onde:

$$d = \begin{cases} d_B & = -B^{-1}A^j \\ d_j & = 1 \\ d_i & = 0, \ i \neq j, b_1, b_2, \dots, b_m \end{cases}$$

para algum índice j não básico tal que $c_j < 0$, ou seja, $j = 1$.

- ▶ Como $j = 1$

$$d_B = -B^{-1}A^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- ▶ $d_1 = 1$

- ▶ $d_5 = 0$

- ▶ Como $j = 1$

$$d_B = -B^{-1}A^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- ▶ $d_1 = 1$

- ▶ $d_5 = 0$

- ▶ Como $j = 1$

$$d_B = -B^{-1}A^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- ▶ $d_1 = 1$

- ▶ $d_5 = 0$

- ▶ Como $j = 1$

$$d_B = -B^{-1}A^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- ▶ $d_1 = 1$

- ▶ $d_5 = 0$

► Ou seja,

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Como escolher o tamanho do passo θ ?
- Há um tamanho máximo para o passo θ ?

► Ou seja,

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Como escolher o tamanho do passo θ ?
- Há um tamanho máximo para o passo θ ?

► Ou seja,

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Como escolher o tamanho do passo θ ?
- Há um tamanho máximo para o passo θ ?

- Para verificar a viabilidade do novo ponto, ou seja, se $y \geq 0$, temos duas situações possíveis:

1 $d \geq 0$: neste caso $x + \theta d \geq 0$, para todo $\theta \geq 0$.

2 d possui alguma coordenada negativa: neste caso, existe um índice b_i tal que $d_{b_i} < 0$, e o valor máximo de θ que garante viabilidade será

$$\theta^* = \min_{\{b_i \mid d_{b_i} < 0\}} \left(-\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right).$$

- Para verificar a viabilidade do novo ponto, ou seja, se $y \geq 0$, temos duas situações possíveis:

❶ $d \geq 0$: neste caso $x + \theta d \geq 0$, para todo $\theta \geq 0$.

❷ d possui alguma coordenada negativa: neste caso, existe um índice b_i tal que $d_{b_i} < 0$, e o valor máximo de θ que garante viabilidade será

$$\theta^* = \min_{\{b_i \mid d_{b_i} < 0\}} \left(-\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right).$$

- Para verificar a viabilidade do novo ponto, ou seja, se $y \geq 0$, temos duas situações possíveis:

❶ $d \geq 0$: neste caso $x + \theta d \geq 0$, para todo $\theta \geq 0$.

❷ d possui alguma coordenada negativa: neste caso, existe um índice b_i tal que $d_{b_i} < 0$, e o valor máximo de θ que garante viabilidade será

$$\theta^* = \min_{\{b_i \mid d_{b_i} < 0\}} \left(-\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right).$$

Voltando ao exemplo 5

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\},$$

► Ou seja,

$$\theta^* = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\}.$$

Voltando ao exemplo 5

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\},$$

► Ou seja,

$$\theta^* = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\}.$$

Voltando ao exemplo 5

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\},$$

► Ou seja,

$$\theta^* = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\}.$$

- ▶ Portanto,

$$\theta^* = \frac{8}{3}$$

- ▶ E o novo vértice é

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$$

Generalizando

- ▶ Supondo que $\theta^* = -\frac{x_{b_k}}{d_{b_k}}$,
- ▶ o novo ponto $y = x + \theta^* d$ satisfaz:

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_B & = & x_B + \theta^* d_B & = x_B + \frac{x_{b_k}}{d_{b_k}} B^{-1} A^j \geq 0 \\ y_{b_k} & = & x_{b_k} + \theta^* d_{b_k} & = x_{b_k} - \frac{x_{b_k}}{d_{b_k}} d_{b_k} = 0 \\ y_j & = & x_j + \theta^* d_j & = -\frac{x_{b_k}}{d_{b_k}} > 0 \\ y_i & = & x_i + \theta^* d_i & = 0 + \theta^* 0 = 0, \quad i \neq j, b_1, \dots, b_m \end{array} \right.$$

- ▶ Substituindo a variável x_{b_k} pela variável x_j na base,
- ▶ obtemos a nova base $\{b_1, \dots, b_{k-1}, j, b_{k+1}, \dots, b_m\}$ associada a y , com a matriz básica:
- ▶ $\tilde{B} = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_{k-1}} \mid A^j \mid A^{b_{k+1}} \mid \dots \mid A^{b_m})$

y é adjacente a x pois possui $m - 1$ variáveis básicas em comum.

- ▶ Substituindo a variável x_{b_k} pela variável x_j na base,
- ▶ obtemos a nova base $\{b_1, \dots, b_{k-1}, j, b_{k+1}, \dots, b_m\}$ associada a y , com a matriz básica:
- ▶ $\tilde{B} = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_{k-1}} \mid A^j \mid A^{b_{k+1}} \mid \dots \mid A^{b_m})$

y é adjacente a x pois possui $m - 1$ variáveis básicas em comum.

- ▶ Substituindo a variável x_{b_k} pela variável x_j na base,
- ▶ obtemos a nova base $\{b_1, \dots, b_{k-1}, j, b_{k+1}, \dots, b_m\}$ associada a y , com a matriz básica:
- ▶ $\tilde{B} = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_{k-1}} \mid A^j \mid A^{b_{k+1}} \mid \dots \mid A^{b_m})$

y é adjacente a x pois possui $m - 1$ variáveis básicas em comum.

- ▶ Substituindo a variável x_{b_k} pela variável x_j na base,
- ▶ obtemos a nova base $\{b_1, \dots, b_{k-1}, j, b_{k+1}, \dots, b_m\}$ associada a y , com a matriz básica:
- ▶ $\tilde{B} = (A^{b_1} \mid A^{b_2} \mid \dots \mid A^{b_{k-1}} \mid A^j \mid A^{b_{k+1}} \mid \dots \mid A^{b_m})$

y é adjacente a x pois possui $m - 1$ variáveis básicas em comum.

Teorema

- 1 As colunas A_{b_i} , $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$, e A_j são linearmente independentes e \tilde{B} é uma matriz básica;
- 2 O vetor $y = x + \theta^* d$ é uma solução básica viável associada à matriz básica \tilde{B} .

Algoritmo 2 Simplex

- 1: No início da iteração conhecemos uma base formada pelas colunas $A^{b_1}, A^{b_2}, \dots, A^{b_m}$ e o vértice associado x ;
- 2: Calcule os custos reduzidos $\bar{c}_j = (c_j - \langle c_B, B^{-1}A^j \rangle)$ para todos os índices não-básicos j .
- 3: Se $\bar{c} \geq 0$, x é uma solução ótima e o algoritmo pára.
- 4: Do contrário, escolha algum j tal que $\bar{c}_j < 0$.
- 5: Calcule $d_B = -B^{-1}A^j$:
- 6: Se $d_B \geq 0$, tem-se $\theta^* = \infty$. O valor ótimo é $-\infty$ e o algoritmo pára.
- 7: Se existe algum componente $d_{b_i} < 0$, define-se

$$\theta^* = \min_{\{d_{b_i} < 0\}} \left(-\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right).$$

- 8: Seja k um índice tal que $\theta^* = -\frac{x_{b_k}}{d_{b_k}}$. Forme uma nova base substituindo A^{b_k} por A^j .
- 9: Os valores da nova solução básica y são dados por $y_j = \theta^*$, $y_{b_k} = 0$ e $y_{b_i} = x_{b_i} + \theta^* d_{b_i}$, para $i \neq k$ (coordenadas básicas).

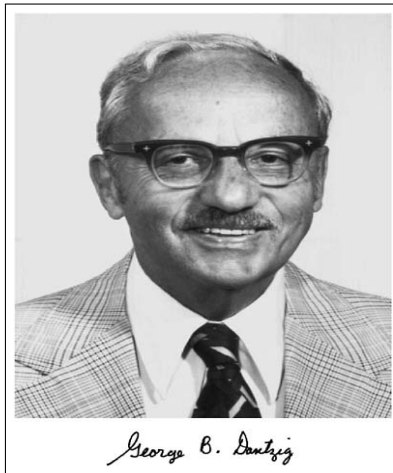


Figura : George Dantzig - 1947

Exemplo 6

Encontre, se existir, a solução ótima do PPL abaixo. Como vértice inicial use a solução básica viável associada ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$.

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & f(x) = -4x_1 - 40x_2 \\ \text{sujeito a} & -2x_1 + x_2 - r_1 = -8 \\ & 5x_1 + 5x_2 + r_2 = 60 \\ & -4x_1 + 2x_2 + r_3 = 8 \\ & x_1 + 2x_2 - r_4 = 6 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & r_1, r_2, r_3, r_4 \geq 0\end{array}$$

Dados do problema

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 60 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Iteração 0

A base inicial e o vértice associados ao conjunto $I = \{2, 3, 4, 6\}$ são:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Iteração 1

► Otimalidade do vértice atual: $\bar{c} = \begin{pmatrix} -84 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$

► Sendo assim x^0 não é vértice ótimo.

Iteração 1

- ▶ Otimalidade do vértice atual: $\bar{c} = \begin{pmatrix} -84 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ▶ Sendo assim x^0 não é vértice ótimo.

- Escolha da variável que entra na base (escolha da direção) :
 x_1

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Ou seja, x_1 entra na base.

- Escolha da variável que entra na base (escolha da direção) :
 x_1

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Ou seja, x_1 entra na base.

- Escolha da variável que entra na base (escolha da direção) :
 x_1

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Ou seja, x_1 entra na base.

- Escolha da variável que sai na base (escolha do tamanho do passo) :

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\} = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\} = \frac{8}{3}$$

- Portanto, x_4 sai da base

► E o novo vértice é $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$

- Escolha da variável que sai na base (escolha do tamanho do passo) :

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\} = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\} = \frac{8}{3}$$

- Portanto, x_4 sai da base

► E o novo vértice é $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$

- Escolha da variável que sai na base (escolha do tamanho do passo) :

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\} = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\} = \frac{8}{3}$$

- Portanto, x_4 sai da base

► E o novo vértice é $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$

- Escolha da variável que sai na base (escolha do tamanho do passo) :

$$\theta^* = \min_{\{b_i=4\}} \left\{ -\frac{x_{b_i}}{d_{b_i}} \right\} = \min \left\{ -\frac{40}{-15} \right\} = \frac{8}{3}$$

- Portanto, x_4 sai da base

► E o novo vértice é $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \\ 40 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$

Iteração 2

A base inicial e o vértice associados ao conjunto $I = \{1, 2, 3, 6\}$ são:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad x^1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{28}{3} \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{46}{3} \end{pmatrix}$$

- ▶ Otimalidade do vértice atual:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{28}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Sendo assim x^1 é vértice ótimo.
- ▶ O valor ótimo é $f(x^1) = -384$

- ▶ Otimalidade do vértice atual:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{28}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Sendo assim x^1 é vértice ótimo.
- ▶ O valor ótimo é $f(x^1) = -384$

- ▶ Otimalidade do vértice atual:

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{28}{5} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Sendo assim x^1 é vértice ótimo.
- ▶ O valor ótimo é $f(x^1) = -384$

Em aberto

- ▶ Solução Inicial
- ▶ Empates
- ▶ Ciclagem \times Degenerescência

Parte V - PNL

O problema

Um problema de **otimização contínua**, na sua forma mais geral, pode ser definido como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

onde a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R}^n , $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto das restrições.

Exemplo 1

$$\text{minimizar } f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$$\text{sujeito a } (x_1, x_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 1\}$$

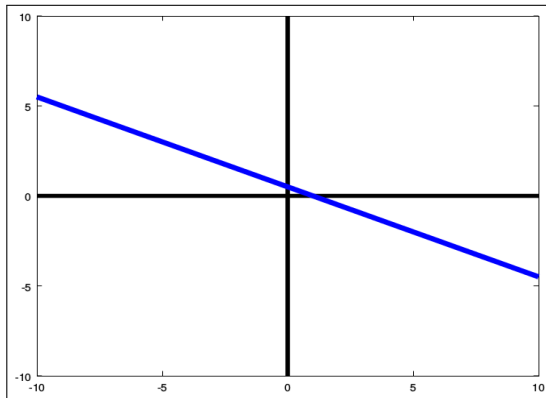


Figura : Região Viável

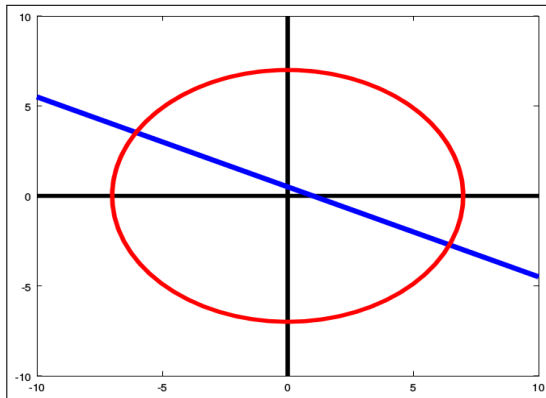


Figura : $c=49$

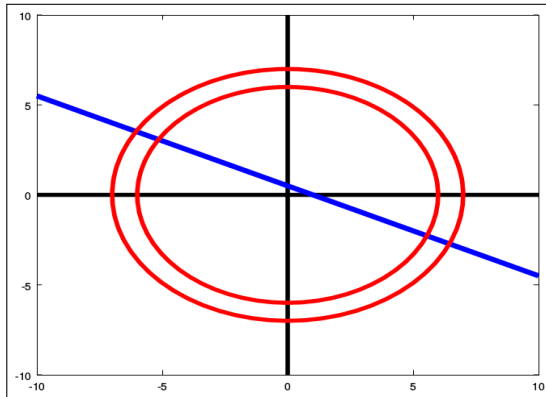


Figura : $c=36$

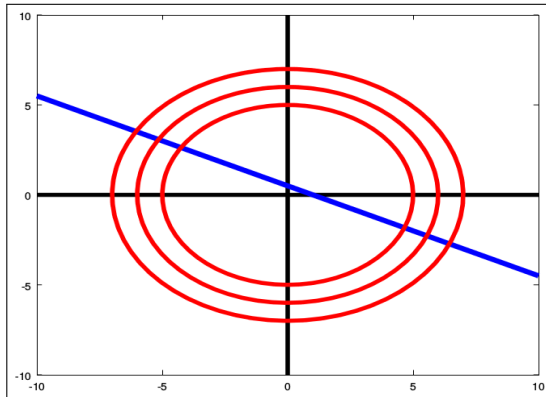


Figura : $c=25$

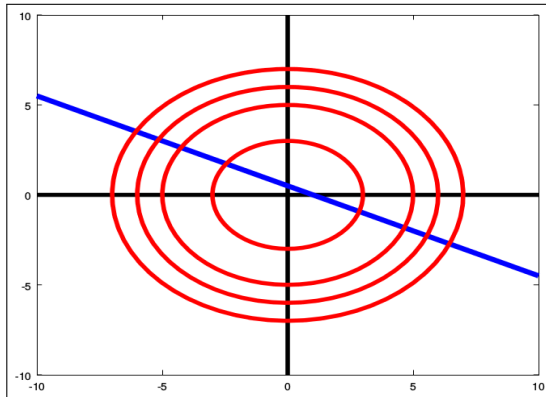


Figura : $c=9$

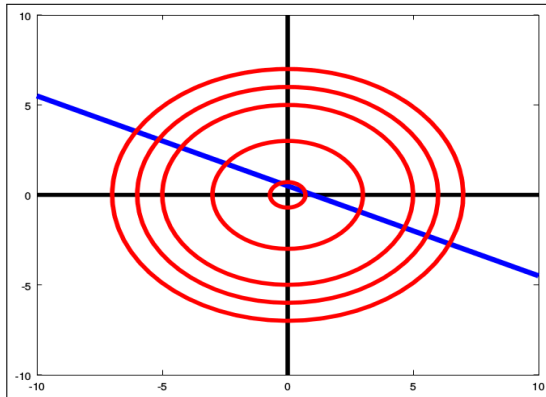


Figura : $c=0,5$

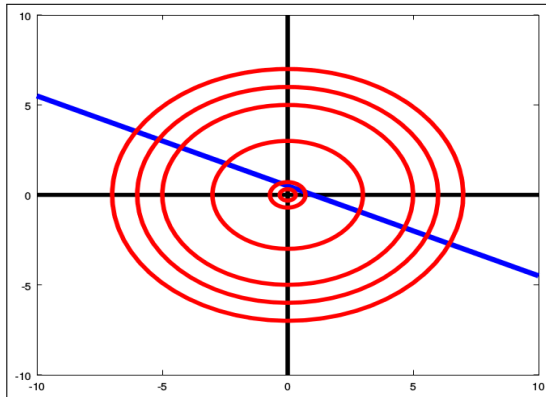


Figura : $c=0,1$

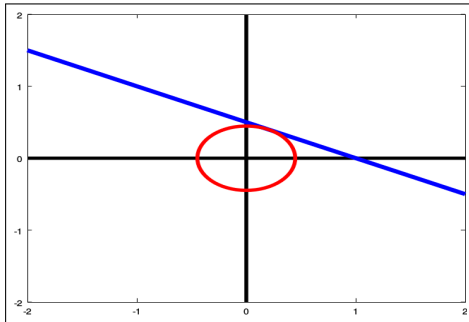


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{5} \\ x^* &= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ f(x^*) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

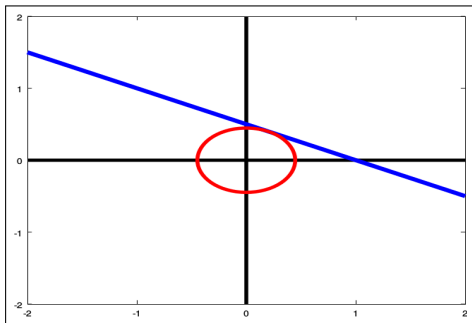


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{5} \\ x^* &= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ f(x^*) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

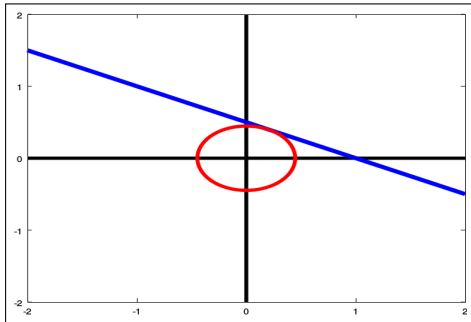


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{5} \\ x^* &= \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ f(x^*) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

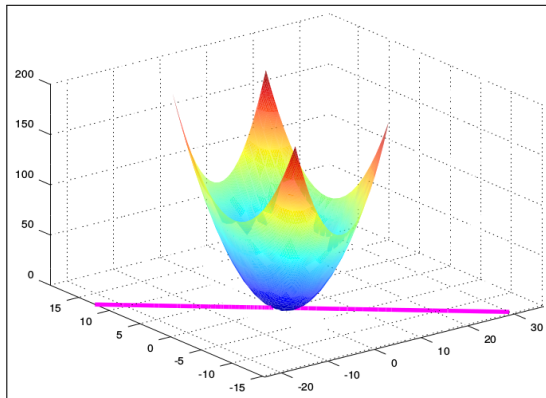


Figura : Parabolóide

Exemplo 2

$$\text{minimizar } f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$$

$$\text{sujeito a } (x_1, x_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x_1-3)^2}{36} + \frac{(x_2-2)^2}{25} = 1\} \quad (2)$$

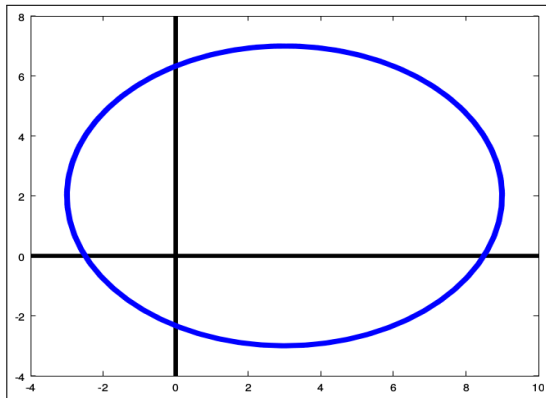


Figura : Região Viável

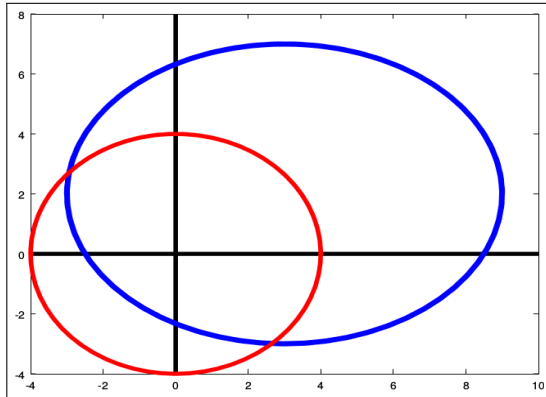


Figura : $c=16$

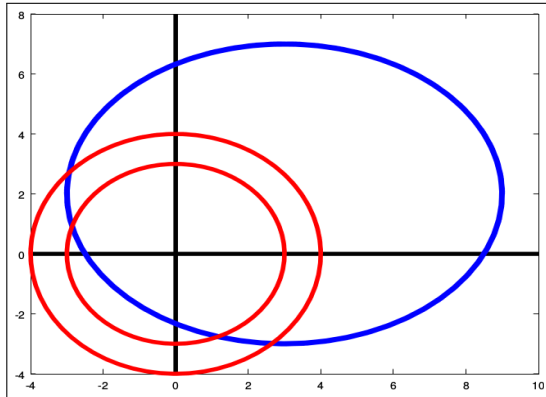


Figura : $c=9$

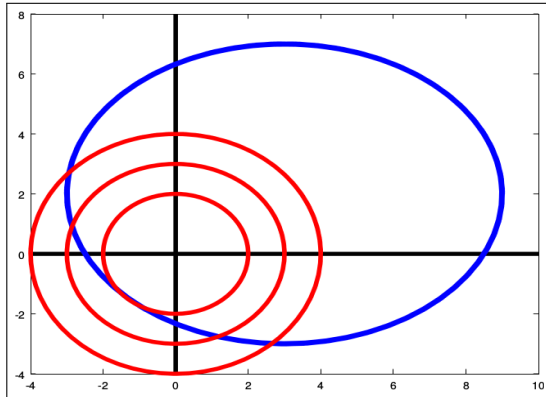


Figura : $c=4$

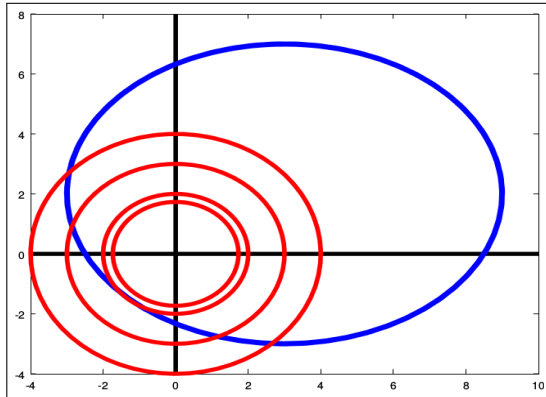


Figura : $c=3$

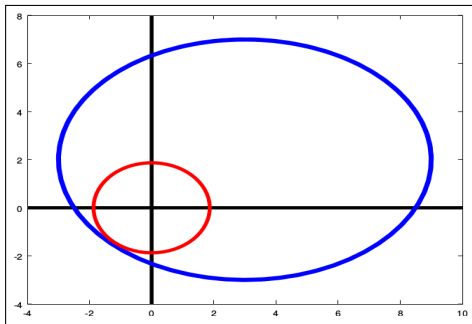


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ \frac{(x_1-3)^2}{36} + \frac{(x_2-2)^2}{25} = 1 \end{cases}$$

$$c =$$

$$x^* =$$

$$f(x^*) =$$

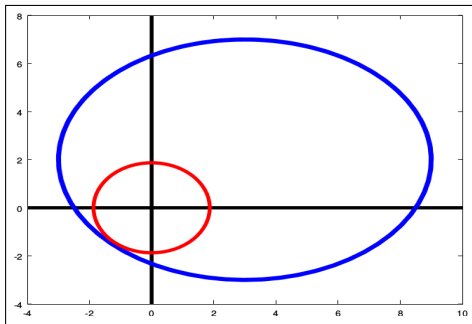


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ \frac{(x_1-3)^2}{36} + \frac{(x_2-2)^2}{25} = 1 \end{cases}$$

$$c =$$

$$x^* =$$

$$f(x^*) =$$

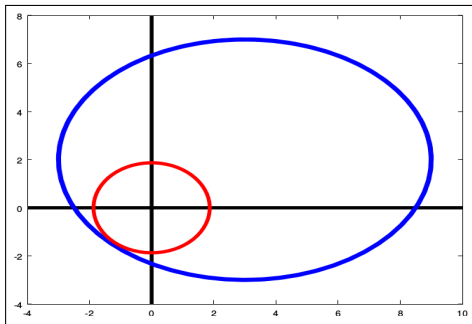


Figura : Solução Ótima

A solução está na (única) intersecção:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = c \\ \frac{(x_1-3)^2}{36} + \frac{(x_2-2)^2}{25} = 1 \end{cases}$$

$$c =$$

$$x^* =$$

$$f(x^*) =$$

Perguntas

- ▶ Quando é possível resolver o problema graficamente?
- ▶ E se o número de restrições aumenta?
- ▶ Como desenvolver métodos?
- ▶ (Sequência de subproblemas mais fáceis.)

Perguntas

- ▶ Quando é possível resolver o problema graficamente?
- ▶ E se o número de restrições aumenta?
- ▶ Como desenvolver métodos?
- ▶ (Sequência de subproblemas mais fáceis.)

Perguntas

- ▶ Quando é possível resolver o problema graficamente?
- ▶ E se o número de restrições aumenta?
- ▶ Como desenvolver métodos?
- ▶ (Sequência de subproblemas mais fáceis.)

Perguntas

- ▶ Quando é possível resolver o problema graficamente?
- ▶ E se o número de restrições aumenta?
- ▶ Como desenvolver métodos?
- ▶ (Sequência de subproblemas mais fáceis.)

Um problema de **otimização irrestrita** é definido como

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

onde a função objetivo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em \mathbb{R}^n .

Exemplo 3

$$\text{minimizar } f(x) = (1 - 2x)^2 + x^2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Exemplo 3

$$\text{minimizar } f(x) = (1 - 2x)^2 + x^2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Exemplo 3

$$\text{minimizar } f(x) = (1 - 2x)^2 + x^2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

- ▶ Quem são “os candidatos” a solução deste problema?
- ▶ Qual o critério para decidir se um ponto é ponto de mínimo ou ponto de máximo?

Método Gráfico

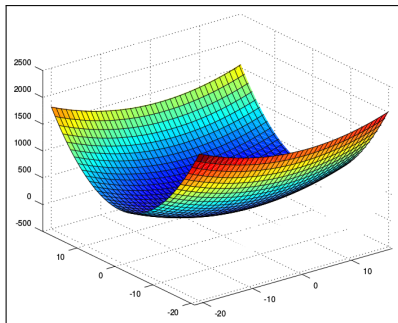


Figura : Gráfico

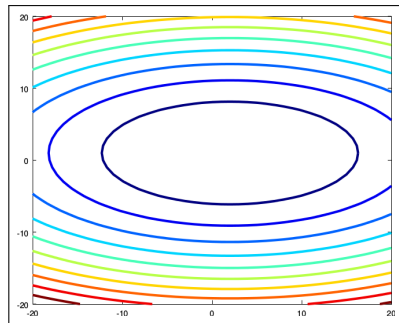


Figura : Curvas de Nível

Teorema (condição necessária de 1ª ordem)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f , então

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

- Para um problema com n variáveis é simples resolver $\nabla f(x) = 0$?

Teorema (condição necessária de 1ª ordem)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f , então

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

- Para um problema com n variáveis é simples resolver $\nabla f(x) = 0$?

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

Observe que

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 8x_2 - 8 \end{pmatrix}$$

Definição

Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que cumpre a condição acima é dito **ponto crítico ou estacionário** da função f .

- ▶ Algoritmos devem procurar pontos críticos!!!

Definição

Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ que cumpre a condição acima é dito **ponto crítico ou estacionário** da função f .

- ▶ Algoritmos devem procurar pontos críticos!!!

Teorema (condição necessária de 2ª ordem)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f , então a matriz Hessiana de f no ponto x^* é **semidefinida positiva**, isto é,

$$\langle d, \nabla^2 f(x^*) d \rangle \geq 0,$$

para todo $d \in \mathbb{R}^n$.

Teorema (condição suficiente de 2ª ordem)

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um ponto estacionário da função f e $\nabla^2 f(x^*)$ é **definida positiva**, então x^* é minimizador local estrito de f .

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

Observe que

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- ▶ Devemos andar por direções que nos levem a pontos críticos.
- ▶ Devemos andar por direções que nos levem a pontos com valor da função objetivo menor que o valor no ponto atual.

- ▶ Devemos andar por direções que nos levem a pontos críticos.
- ▶ Devemos andar por direções que nos levem a pontos com valor da função objetivo menor que o valor no ponto atual.

Definição

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que d é uma **direção de descida** para f , a partir de x , quando existe um $\delta > 0$ tal que $f(x + td) < f(x)$, para todo $t \in (0, \delta)$.

Teorema

Se $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$, então d é uma direção de descida para f , a partir de x .

Proposição

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Então,

- (i) $d = -\nabla f(x)$ é direção de descida;
- (ii) Entre todas as direções de descida $d = -\nabla f(x)$ é a direção de máxima descida;

Algoritmo 3 Método do Gradiente

- 1: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$
 - 2: REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
 - 3: Defina $d^k = -\nabla f(x^k)$
 - 4: Defina o tamanho do passo $\theta_k > 0$ (obtenha um adequado)
 - 5: Faça $x^{k+1} = x^k + \theta_k d^k$
 - 6: $k = k + 1$
-

Método do Gradiente

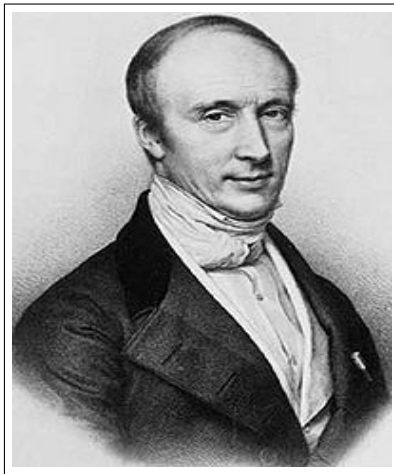


Figura : Cauchy: 1789-1857

Exemplo 4

$$\text{minimizar } f(x) = (x_1)^2 + 4(x_2)^2 - 4x_1 - 8x_2$$

$$\text{sujeito a } x \in \mathbb{R}$$

Iteração 0

Como $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 8x_2 - 8 \end{pmatrix}$

Aproximação inicial,

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Iteração 0

Como $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 8x_2 - 8 \end{pmatrix}$

Aproximação inicial,

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Iteração 0

Como $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 8x_2 - 8 \end{pmatrix}$

Aproximação inicial,

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Iteração 1

► Direção: $d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Iteração 1

► Direção: $d^0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta_0 d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^0) = 0$ e $f(x^1) = -3$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta_0 d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^0) = 0$ e $f(x^1) = -3$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta_0 d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^0) = 0$ e $f(x^1) = -3$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^1 = x^0 + \theta_0 d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^0) = 0$ e $f(x^1) = -3$

Iteração 2

► Direção: $d^1 = -\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Iteração 2

► Direção: $d^1 = -\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

► $f(x^1) = -3$ e $f(x^2) = -3,75$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

► $f(x^1) = -3$ e $f(x^2) = -3,75$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

► $f(x^1) = -3$ e $f(x^2) = -3,75$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^2 = x^1 + \theta d^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

► $f(x^1) = -3$ e $f(x^2) = -3,75$

Iteração 3

► Direção: $d^2 = -\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Iteração 3

► Direção: $d^2 = -\nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^2) = -3,75$ e $f(x^3) = -3,93$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^2) = -3,75$ e $f(x^3) = -3,93$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^2) = -3,75$ e $f(x^3) = -3,93$

► Passo: se $\theta = 0.25$

► Novo ponto:

$$x^3 = x^2 + \theta d^2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

► É ponto crítico? $\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 8 \end{pmatrix}$

► $f(x^2) = -3,75$ e $f(x^3) = -3,93$

Perguntas

- 1 Quantas vezes repetimos este processo?
- 2 Quando parar?
- 3 Fizemos a melhor escolha para o tamanho do passo?

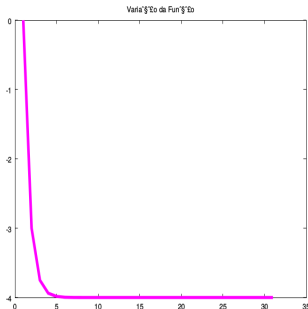
Perguntas

- 1 Quantas vezes repetimos este processo?
- 2 Quando parar?
- 3 Fizemos a melhor escolha para o tamanho do passo?

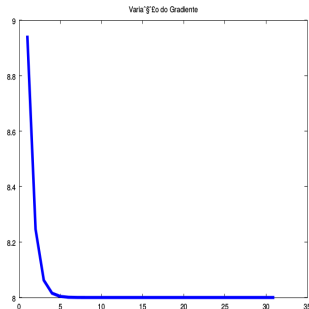
Perguntas

- 1 Quantas vezes repetimos este processo?
- 2 Quando parar?
- 3 Fizemos a melhor escolha para o tamanho do passo?

Método Gradiente



(a) Variação da Função



(b) Variação do Gradiente

Solução Ótima

- ▶ $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ▶ $\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ▶ $f(x^*) = -8$

Bibliografia



D. Bertsimas, and J. N. Tsitsiklis.
Introduction to Linear Optimization.
Athena Scientific, Belmont, 1997.



M. C. Goldbarg, e H. P. L. Luna
Otimização Combinatória e Programação Linear
2ªed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.



J. Nocedal, and S. J. Wright.
Numerical Optimization.
Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, 1999.



A. A. Ribeiro, e E. W. Karas
Otimização Contínua: aspectos teóricos e computacionais.
São Paulo: Cengage Learning, 2013.



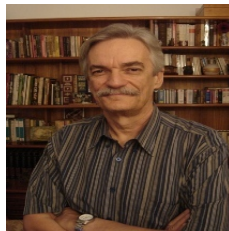
F. Oliveira.
Notas do Mini-curso: Introdução à otimização sob incerteza.
UNESP, 2013.

Otimização Contínua

Os precursores



(c) C. C. Gonzaga - UFRJ e UFSC



(d) J. M. Martinez - UNICAMP



(e) C. Humes - USP



(f) A. IUSEM - IMPA

- ▶ International Symposium on Mathematical Programming (2006- Rio de Janeiro)
- ▶ SIAM
- ▶ Brazilian Workshop on Continuous Optimization (2016 - Manaus)

- ▶ International Symposium on Mathematical Programming (2006- Rio de Janeiro)
- ▶ SIAM
- ▶ Brazilian Workshop on Continuous Optimization (2016 - Manaus)

- ▶ International Symposium on Mathematical Programming (2006- Rio de Janeiro)
- ▶ SIAM
- ▶ Brazilian Workshop on Continuous Optimization (2016 - Manaus)

Onde e com Quem Estudar



(a) R. Andreani



(b) S. A. Santos



(c) P. J. S. Silva

Figura : UNICAMP

Onde e com Quem Estudar



(a) B. F. Svaiter



(b) M. Solodov

Figura : IMPA

Onde e com Quem Estudar

- ▶ USP: E. Birgin, G. Haeser
- ▶ UFPR: Y. Juan, E. W. Karas
- ▶ UFSC: M. A. Marques, J. B. Francisco
- ▶ UFG: O. P. Ferreira, J. Y. B. Cruz

Onde e com Quem Estudar

- ▶ USP: E. Birgin, G. Haeser
- ▶ UFPR: Y. Juan, E. W. Karas
- ▶ UFSC: M. A. Marques, J. B. Francisco
- ▶ UFG: O. P. Ferreira, J. Y. B. Cruz

Onde e com Quem Estudar

- ▶ USP: E. Birgin, G. Haeser
- ▶ UFPR: Y. Juan, E. W. Karas
- ▶ UFSC: M. A. Marques, J. B. Francisco
- ▶ UFG: O. P. Ferreira, J. Y. B. Cruz

Onde e com Quem Estudar

- ▶ USP: E. Birgin, G. Haeser
- ▶ UFPR: Y. Juan, E. W. Karas
- ▶ UFSC: M. A. Marques, J. B. Francisco
- ▶ UFG: O. P. Ferreira, J. Y. B. Cruz

"Todo matemático que não é um pouco poeta, nunca será um matemático completo." (Weierstrass)

Feliz dia da Matemática!!!