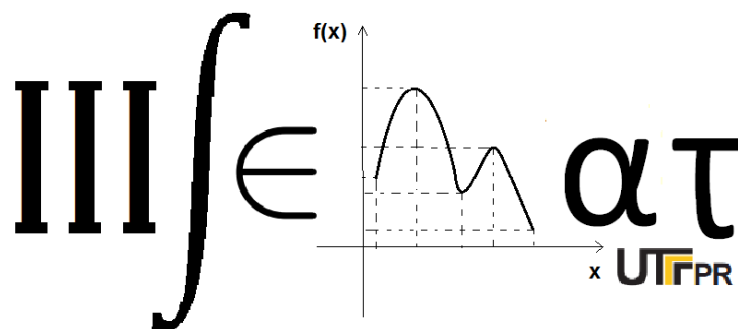




ANAIS

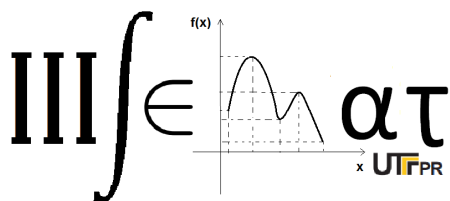
III SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Página do Evento
http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/III_semat/index.php

Toledo-PR
Maio - 2015



III Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Toledo, 04 a 8 de maio de 2015

ANAIS

III SEMANA DA MATEMÁTICA

UTFPR TOLEDO

A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Página do Evento

http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/III_semat/index.php

Toledo-PR
Maio - 2015

S471 Semana da Matemática UTFPR Toledo (3: 2015:
Toledo, PR)

Anais da III Semana da Matemática UTFPR, Toledo
(PR), 04 a 08 de maio de 2015. / organizado pelo Curso de
Licenciatura em Matemática da UTFPR, Campus Toledo. -
Toledo, PR, 2015.

101 f. (Acesso Físico)

Modo de Acesso: World Wide Web:

<[http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/III semat/index.php](http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/III_semat/index.php)>.

ISSN 2358-4947

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Currículo -
Educação. I. SEMAT. II. UTFPR. III. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca UTFPR / Toledo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	4
2	HISTÓRICO DO EVENTO	4
3	OBJETIVOS	5
4	PÚBLICO-ALVO	5
5	PERÍODO DE REALIZAÇÃO	5
6	PERIODICIDADE DO EVENTO	5
7	REALIZAÇÃO	6
8	COMISSÃO ORGANIZADORA	6
9	COMISSÃO CIENTÍFICA	6
10	COMISSÃO DE PARECERISTAS	6
11	CRONOGRAMA DO EVENTO	7
12	TRABALHOS COMPLETOS	9
12.1	BREVE SÍNTESE DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA . .	10
12.2	BIJEÇÕES ENTRE CONJUNTOS INFINITOS	18
12.3	O USO DE VÍDEOS NO NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA COMO FERRA- MENTA DA EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA	26
12.4	REPRESENTAÇÕES EM ÁLGEBRA DE LIE E ALGUNS EXEMPLOS	33
12.5	A IMPORTÂNCIA DAS ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRI- CULAR DISCUTIDA A PARTIR DE MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE FRAÇÕES GERATRIZES	38
12.6	UM ESTUDO GEOESTATÍSTICO SOBRE A PRODUTIVIDADE DA SOJA UTILI- ZANDO A VALIDAÇÃO CRUZADA	46
12.7	ENTRELAÇAMENTO ENTRE OS CONTEÚDOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL E O PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA .	53

12.8 UMA PROPOSTA DE ENSINO: HALLOWEEN E A MATEMÁTICA	61
12.9 ANÁLISE DE UMA QUESTÃO DO ENEM À LUZ DOS PCNs, DAS DCEs E DA MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM	70
12.10 DIFICULDADE E DEFICIÊNCIA: QUAL A DIFERENÇA NO CONTEXTO ESCO- LAR?	79
12.11 PROPOSTA DE ANÁLISE MULTIVARIADA PARA O SISTEMA DE DETECÇÃO DE FALHAS EM BLOCOS DE CONCRETO DA BARRAGEM DE ITAIPU	85
12.12 MODELAGEM MATEMÁTICA: APROVEITAMENTO DA ÁGUA DE CHUVA . . .	94

1 INTRODUÇÃO

O curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR Câmpus Toledo é um curso novo, visto que teve início no segundo semestre do ano de 2011, apresentando hoje seis turmas num total de 110 alunos.

Tem como preocupações preparar o acadêmico para o exercício do Magistério no Ensino Fundamental e Médio, bem como formar pesquisadores em Matemática, Educação Matemática, Matemática Aplicada e Estatística, que tenham uma postura crítica e reflexiva.

Diante dessas preocupações a III Semana da Matemática - III SEMAT se propõem a trazer renomados professores pesquisadores em educação matemática, matemática pura e aplicada para compartilhar conhecimentos e trocar experiências. Uma das metas do evento é propiciar a aproximação entre acadêmicos, pesquisadores e professores de matemática, buscando ampliar a relação do curso com as demais instituições de ensino.

Eventos desta natureza trazem reflexões por abordarem temas atuais de grande relevância para os acadêmicos e professores do curso além dos demais participantes. Para isso, os convidados apresentarão palestras, mesas redondas e oficinas. O evento proporcionará, ainda, a oportunidade de se formarem novos grupos, parcerias e contatos, em âmbito nacional e regional, para o desenvolvimento de novos projetos de pesquisa e extensão.

2 HISTÓRICO DO EVENTO

O curso de Licenciatura em Matemática do Câmpus Toledo iniciou-se em 2011/2 e realizou no ano de 2013 a I Semana da Matemática – I SEMAT, que contou com a presença de 100 participantes. Evento este que proporcionou troca de experiências e integração, além disso, foram apresentadas comunicações científicas, espaço considerado essencial para formação de intelectuais críticos.

Em outubro de 2014 a Semana da Matemática realiza sua segunda edição contando com 126 inscritos e a participação de professores de outras instituições.

3 OBJETIVOS

A III SEMAT teve como objetivo possibilitar a integração dos saberes (Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Aplicada) além de compartilhar experiências e conhecimentos entre estudantes (de Instituições Públicas e Privadas) e Professores e/ou Pesquisadores do Brasil, especialmente do estado do Paraná e mais especificamente da região oeste, favorecendo a formação continuada para os acadêmicos do curso e mostrando-lhes os caminhos que podem ser percorridos para o desenvolvimento de pesquisas nos mais diferentes campos da Matemática. O evento também propiciará por meio das apresentações orais a divulgação das pesquisas e trabalhos produzidos pelos acadêmicos e demais participantes.

4 PÚBLICO-ALVO

Graduandos, pós-graduandos e Profissionais das áreas de Educação, Educação Matemática, Matemática Pura e Matemática Aplicada.

5 PERÍODO DE REALIZAÇÃO

O evento foi realizado nos dias 04, 05, 06, 07 e 08 de maio de 2015. No dia 04 as atividades foram realizadas no auditório da Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUC, Câmpus Toledo e nas salas de aula do Câmpus da UTFPR Toledo nos demais dias.

6 PERIODICIDADE DO EVENTO

Esta foi a III Semana da Matemática do Câmpus da UTFPR Toledo. O evento repetir-se-á anualmente.

7 REALIZAÇÃO

O evento foi realizado pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) sob a responsabilidade da comissão organizadora, nomeada pelo colegiado de curso em reunião realizada no dia 22 de outubro de 2014, Ata no 9/2014-COMAT, e designando como coordenador o professor Dr. Wilian Francisco de Araujo.

8 COMISSÃO ORGANIZADORA

A Comissão Organizadora do evento (Tabela 1) foi composta por professores – Doutores e Mestres - pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo e por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

Tabela 1: Componentes da Comissão Organizadora do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo	UTFPR – câmpus Toledo Coordenador
Prof. Ma. Larissa Hadeborn Vieira	UTFPR – câmpus Toledo Coordenadora
Prof. Me. Adriano Gomes de Santana	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR – câmpus Toledo

9 COMISSÃO CIENTÍFICA

A Comissão Científica do evento (Quadro 2) foi composta por professores pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo.

10 COMISSÃO DE PARECERISTAS

A Comissão de pareceristas do evento (Quadro 3) foi composta por professores pertencentes ao quadro permanente da UTFPR, Câmpus Toledo e de convidados externos.

Tabela 2: Componentes da Comissão Científica do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE
Prof. Me. Adriano Gomes de Santana	UTFPR – câmpus Toledo Presidente
Prof. Ma. Larissa Hagedorn Vieira	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo	UTFPR – câmpus Toledo

Tabela 3: Componentes da Comissão de Pareceristas do Evento

DOCENTES	UNIVERSIDADE
Prof. Me. Adriano Gomes de Santana	UTFPR – câmpus Toledo Presidente
Prof ^a . Dr ^a . Barbara W. Diesel Novaes	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Me. Cezar Ricardo de Freitas	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Dione Ines Christ Milani	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Larissa Hagedorn Vieira	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Me. Leandro Antunes	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Me. Márcio Paulo de Oliveira	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Ma. Márcia Regina Piovesan	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Me. Renato Francisco Merli	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan	UTFPR – câmpus Toledo
Prof ^a . Dr ^a . Rosangela A. B. Assumpção	UTFPR – câmpus Toledo
Prof ^a . Dr ^a . Vanessa Largo	UTFPR – câmpus Toledo
Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo	UTFPR – câmpus Toledo

11 CRONOGRAMA DO EVENTO

PALESTRA DE ABERTURA - Matemática, tecnologias e Possibilidades

- Profa. Dra. Carmen Vieira Mathias - UFSM - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria/RS.

PALESTRA DE ENCERRAMENTO - Um pouco da Matemática por trás dos Origamis

- Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - UEM - Universidade Estadual de Maringá, Maringá/PR.

Tabela 4: Cronograma do Evento

Data	Horário	Programação	Local
04/05/2014	14h00 às 16h00	Minicurso da tarde A	UTFPR
	18h00 às 19h00	Inscrições e entrega de material	
	19h00 às 20h00	Solenidade de abertura	PUC
	20h00 às 21h00	Palestra de abertura	
	21h00 às 21h20	Coffee break	
	21h20 às 22h30	Palestra 1	
05/05/2014	14h00 às 16h00	Minicurso da tarde A	UTFPR
	19h00 às 20h40	Minicurso A	
	20h40 às 21h00	Coffee break	
	21h00 às 22h30	Minicurso B	
06/05/2014	14h00 às 15h00	Minicurso da tarde A	UTFPR
	15h00 às 18h00	Minicurso da tarde B	
	19h00 às 20h40	Minicurso A	
	20h40 às 21h00	Coffee break	
	21h00 às 22h30	Minicurso B	
07/05/2014	14h00 às 16h00	Minicurso da tarde A e B	UTFPR
	19h00 às 21h00	Apresentações orais dos professores	
	21h00 às 21h20	Coffee break	
	21h20 às 22h30	Apresentações orais dos alunos	
08/05/2014	14h00 às 16h00	Minicurso da tarde A	UTFPR
	19h00 às 21h00	Palestra de encerramento	
	21h00 às 23h00	Jantar por adesão	

PALESTRA 1 - Diversificação de tarefas no Ensino de Matemática

- Profa. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco, Pato Branco/PR

MINICURSO DA TARDE A

1TA) Prof. Dr. Wilian Franciso de Araujo - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo, Toledo/PR.

Título: Sim, precisa demonstrar

MINICURSO DA TARDE B

1TB) Prof. Me. Jorge Augusto Vasconcelos Alves - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo, Toledo/PR.

Título: Introdução ao Lego Mindstorms

MINICURSOS A

- 1A) Prof. Me. Rubens Ferronato - Brink Mobil Equipamentos Educacionais LTDA.
 Título: O Ensino da Matemática na Educação Inclusiva
- 2A) Prof. Dra. Diane Rizzotto Rossetto - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Curitiba, Curitiba/PR.
 Título: Otimização - Modelos e Métodos
- 3A) Prof. Me. Adriano Gomes de Santana - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo, Toledo/PR.
 Título: Um minicurso não linear de LaTeX

MINICURSOS B

- 1B) Prof. Dr. Eleomar Cardoso Júnior - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo, Toledo/Pr.
 Título: Introdução à estabilidade de sistemas autônomos planos e modelos para interação populacional
- 2B) Prof. Me. Gilberto Souto - UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Pato Branco, Pato Branco/PR
 Título: Aplicações utilizando Geometria Plana e Espacial na interpretação da Resolução de Problemas

12 TRABALHOS COMPLETOS

Na sequência são apresentados os trabalhos publicados nesta edição da SEMAT.

BREVE SÍNTESE DO DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Anderson Ervino Schwertner¹
 Universidade do Minho (Portugal)
 andersonschwertner@hotmail.com

INTRODUÇÃO

“A essência da matemática está em sua liberdade.” (Georg Cantor, apud EVES, 1995, p.545).

O surgimento da Geometria Hiperbólica e a sua posterior consolidação foi um ponto de ruptura no pensamento matemático tradicional, endossada pela teoria do espaço de Kant².

Tal como afirma Howard Eves: “Uma consequência de alcance muito maior [do surgimento das geometrias não-euclidianas] foi a libertação da geometria de seus moldes tradicionais” (1995, p.544), e não só da geometria, mas sim, causando uma verdadeira revolução na Matemática como um todo, inaugurando novas formas de fazer matemática, fazendo imergir a necessidade de uma nova axiomática, rompendo a ideia generalizada da Matemática como algo pronto e estático a ser descoberto e alicerçando-a como um produto do pensamento humano, entre outros. (ESTRADA, 2000; EVES, 1995).

Procurando compreender o desenvolvimento do processo que desencadeou tamanha revolução, este artigo busca apresentar de maneira clara e concisa os principais acontecimentos que fulguraram neste período de cerca 2.300 anos, que separam Euclides de Alexandria, e o seu famoso livro “Elementos”, da axiomática proposta por David Hilbert, em 1899, através de uma abordagem suportada pela metodologia de revisão bibliográfica.

O presente artigo constitui-se uma adaptação de um trabalho complementar apresentado na unidade curricular de História do Pensamento Matemático, ministrada pelo Professor Doutor João Caramalho Domingues (UMINHO), ao qual desde já agradeço pelo auxílio e revisão deste material. Também gostaria de registrar meu agradecimento ao Professor Doutor Rodolfo Vertuan (UTFPR), pelas preciosas dicas fornecidas.

¹ Aluno do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Minho (UMINHO). Bolsista do Programa de Licenciaturas Internacionais da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (PLI-CAPE).

² A teoria do espaço e do tempo de Immanuel Kant (1724-1804) tem como princípio fundamental a ideia de que o espaço é uma estrutura já existente no espírito humano, sendo os postulados da geometria euclidiana inerentes ao espírito e sem os quais seria impossível alcançar resultados fiáveis sobre o espaço. (EVES, 1995).

OS ELEMENTOS DE EUCLIDES E O QUINTO POSTULADO

Euclides foi um matemático grego que viveu entre os séculos IV e III a. C., sabe-se muito pouco sobre sua vida, supõe-se que foi professor no recém-fundado Museu em Alexandria e também que tenha estudado com discípulos de Platão ou até mesmo na própria Academia em Atenas. Com base em relatos de matemáticos e historiadores posteriores, acredita-se que tenha escrito pelo menos dez obras, das quais apenas cinco chegaram aos dias atuais relativamente completas. (KATZ, 2009; STRUIK, 1992; BOYER, 1996).

Seu maior feito foi reunir, organizar e sistematizar grande parte do conhecimento matemático elementar da época em 13 volumes, chamados de “Elementos”. Para tal feito, considerou inicialmente catorze “axiomas”, sendo nove noções comuns e cinco postulados³:

Postulados:

1. Traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto;
2. Prolongar uma reta limitada, continuamente, em linha reta;
3. Descrever um círculo com quaisquer centro e distância;
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si;
5. Se uma reta incidente em duas retas fizer os ângulos interiores do um mesmo lado menores do que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos menores do que dois ângulos retos.

Noções comuns:

1. Coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;
2. Se a iguais se adicionarem iguais, os todos serão iguais;
3. Se a iguais se subtraírem iguais, os restos serão iguais;
4. Se a iguais se adicionarem desiguais, os todos serão desiguais;
5. Os dobros da mesma coisa são iguais entre si;
6. As metades da mesma coisa são iguais entre si;
7. Coisas que se ajustam uma á outra são iguais entre si;
8. O todo é maior que a parte;
9. Duas retas não contêm uma área.

Os quatro primeiros postulados são intuitivos e de fácil verificação, porém o quinto, devido a sua complexidade, gerou diversas discussões e divergências, não sendo aceito de

³ Neste trabalho, adotei a versão apresentada pelo Prof.º Dr.º João Caramalho Domingues em suas notas de aula da unidade curricular de História do Pensamento Matemático, na Universidade do Minho (Portugal).

imediato como um postulado, mas sim como uma propriedade resultante da combinação dos quatro primeiros postulados. O próprio Euclides evitava ao máximo fazer uso do mesmo, utilizando-o somente quando os outros axiomas não conseguiam substituí-lo, mais especificamente, adiou sua utilização até a proposição 29 do livro I. Muitos matemáticos possuíam esta visão e tentaram, sem obter sucesso, demonstrar a dependência do quinto postulado com relação aos anteriores. Estes estudiosos deram os primeiros passos rumo a Geometria Hiperbólica. Veremos a seguir a colaboração de alguns desses matemáticos. (CARMO, 1997; EVES, 1995; STRUIK, 1992; ESTRADA, 2000).

AS TENTATIVAS ÁRABES E PERSA

O físico e matemático árabe Ibn al-Haytham (aprox. 965-1039 d.C.), mais conhecido como Alhazem, procurou demonstrar a independência do 5º postulado de Euclides através do método de redução ao absurdo. Para tal, considerou o quadrilátero ABCD, cujos ângulos em A, B e C são retos, e assumiu também que o lugar geométrico de um ponto que se move de modo a permanecer equidistante a uma reta dada é, impreterivelmente, paralela a reta considerada. Contudo, este argumento é equivalente ao 5º postulado, desacreditando sua demonstração. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

Figura 1 – Quadrilátero adotado por Alhazem.



Fonte: O autor.

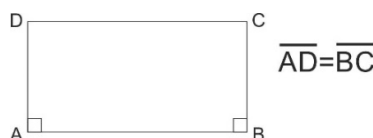
Omar Khayyam (1048-1131 d.C.), um matemático persa, também se interessou por tentar provar o postulado das paralelas. Considerou um quadrilátero ABCD, com ângulos retos em A e B e as arestas AD e BC de mesmo comprimento. Provou inicialmente que os ângulos em C e D devem ser iguais, restando então três alternativas:

- i) C e D são agudos;
- ii) C e D são retos;
- iii) C e D são obtusos.

Facilmente verificou que o terceiro caso levava a uma contradição e, tomando por pressuposto que duas retas que se aproximam indefinidamente se interceptam, mostrou que o caso em que C e D são agudos também leva a uma contradição, o que demonstrava a proposição 29 do livro I e consequentemente o postulado 5. Entretanto, sua premissa era

equivalente ao 5º postulado, o que também invalidou sua demonstração. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

Figura 2 – Quadrilátero de Khayyan.



Fonte: O autor.

Já no século XIII d.C., Nasir ad-Din at-Tusi (1201-1274 d.C.), mais conhecido por Nasiredin, notou falhas nas demonstrações de Alhazem e de Khayyam e se empenhou em tentar demonstrar o postulado, valendo-se do quadrilátero de Kyyam. Nasiredin também não obteve sucesso, uma vez que repetiu o erro de seus antecessores, tomando como axioma uma afirmação equivalente ao quinto postulado de Euclides. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

OS PRIMEIROS RESULTADOS DA NOVA GEOMETRIA

Giovanni Saccheri (1667-1733 d.C.) foi padre jesuíta, professor de filosofia na Universidade de Turim e posteriormente, lecionou matemática na Universidade de Pádua. A sua obra de maior importância foi “Euclides ab omni naevo vindicatus”, isto é, “Euclides livre de toda falha”, publicado no ano de sua morte. Nesta obra, Saccheri aceita os quatro primeiros postulados e as vinte e oito primeiras proposições deles decorrentes⁴. Valendo-se da lógica, do método de redução ao absurdo e do quadrilátero de Khayyan⁵ (Figura 2), procura demonstrar o quinto postulado. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

De modo análogo a Khayyan, considera três hipóteses para os ângulos C e D (ambos retos ou agudos ou obtusos), verifica facilmente que a hipótese do ângulo obtuso leva a um absurdo, demonstra que a hipótese do ângulo reto é equivalente ao 5º postulado de Euclides, contudo, desconcertado com a dificuldade encontrada em descartar a hipótese do ângulo agudo, acaba por afirmar que:

A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa; porque é repugnante à natureza das linhas retas. (Saccheri, apud Katz, 2009, p.693).

É importante salientar que Saccheri, ao tentar provar a inconsistência da hipótese do ângulo agudo, encontrou diversos teoremas da Geometria Hiperbólica, entretanto, por estar

⁴ Este conjunto de postulados e proposições é conhecido por descrever a Geometria Absoluta, isto é, propriedades que se verificam em qualquer geometria.

⁵ Tal quadrilátero, ficou conhecido posteriormente por Quadrilátero de Saccheri.

procurando uma contradição, possivelmente acabou por não perceber a relevância de seus resultados. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

Poucos anos depois, Johann Lambert (1728-1777 d.C.), um matemático de grande prestígio natural da Alsácia, também tentou provar a dependência do quinto postulado de Euclides. Em seu trabalho “*Die theorie der Parallellinien*”, publicado em 1786, Lambert utiliza um artifício semelhante ao de Saccheri e adota como construção auxiliar o Quadrilátero de Alhazem (Figura 1), que a partir de então, ficou conhecido como Quadrilátero de Lambert. (BOYER, 1996).

Lambert explorou as hipóteses do ângulo agudo e do ângulo obtuso, sendo muito mais prolífero que Saccheri ao estabelecer novos teoremas, descobrindo tanto proposições relativas a Geometria Hiperbólica quanto da Geometria Esférica. Lambert também supôs, a partir das propriedades encontradas no caso do ângulo agudo e de sua familiaridade com a Trigonometria Esférica, que esta se verificava sobre uma esfera de raio imaginário. Tal suposição mostrou-se correta posteriormente, com as investigações de Franz Taurinus (1794-1874 d.C.). (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; KATZ, 2009).

Adrien-Marie Legendre (1752-1833 d. C.) ganhou muito prestígio por sua obra “*Éléments de géométrie*”, no qual simplifica de modo sistemático e rígido, muitas das proposições presentes nos “Elementos de Euclides”. Seu trabalho teve tanta influência, que substituiu a obra de Euclides no estudo da geometria em diversos países da Europa e nos Estados Unidos da América durante muitas décadas. Foi nesta obra também, que Legendre tentou provar o quinto postulado com base nos outros quatro, porém não obteve sucesso. Contudo, assim como Saccheri e Lambert, encontrou diversos teoremas da Geometria Hiperbólica. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000).

UMA NOVA GEOMETRIA: A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

O primeiro matemático a acreditar na independência do quinto postulado de Euclides foi, muito provavelmente, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.), um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Acredita-se que tenha tomado conhecimento do “Problema das Paralelas”⁶ ainda com 15 anos de idade e inicialmente tentou demonstrá-lo, contudo logo se convenceu que não era possível. Gauss não publicou nada acerca de uma

⁶ “Problema da Paralelas” é como ficou conhecido o problema da demonstração da dependência, ou não, do quinto postulado de Euclides em relação aos demais. É possível que a alcunha “Problema das Paralelas” tenha-se originado do enunciado do postulado de Playfair, equivalente ao quinto postulado de Euclides, o qual afirma que: “Por um ponto exterior uma reta passa uma e uma só reta paralela à dada.” (ESTRADA, 2000).

geometria não-euclidiana, porém em diversas cartas trocadas com matemáticos da época, diz-se convencido que exista tal geometria e que esta é consistente, tendo ele mesmo encontrado diversos resultados, que vieram a ser teoremas da Geometria Hiperbólica. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; EVES, 1995; STRUIK, 1992).

Nikolai Lobachewski (1792-1586 d.C.), professor e matemático russo da Universidade de Kazan, dedicou mais de vinte anos de sua vida ao estudo da Geometria Hiperbólica, cabendo a ele a primeira apresentação pública acerca desta nova geometria, ocorrida em 1826 para a Sociedade de Física-Matemática de Kazan, e também a publicação do primeiro livro sobre Geometria Hiperbólica em 1829. Infelizmente, devido a impopularidade da língua russa no exterior e a diversos outros fatores, o trabalho de Lobachewski foi praticamente ignorado pela comunidade científica durante muitos anos. (BOYER, 1996; ESTRADA, 2000; EVES, 1995; KATZ, 2009).

Assim como seus predecessores, Lobachewsky tentou provar o quinto postulado de Euclides sem obter sucesso. Entre 1823 e 1826, passou a considerar a hipótese do quinto postulado ser realmente independente dos demais e ao negar a existência do quinto postulado e substituí-lo pelo axioma: “Por um ponto dado P, fora de uma reta r, existem pelo menos duas paralelas a essa reta r”⁷, acabou por descobrir de modo independente diversos teoremas da Geometria Hiperbólica. (BOYER, 1996; EVES, 1995).

Coincidentemente, ainda na primeira metade do século XIX, o oficial húngaro János Bolyai (1802-1860 d.C.) obteve também os mesmos resultados de Lobachewsky. János era filho de Farkas Bolyai, um antigo colega de universidade de Gauss e, assim como o pai, interessou-se pelo “Problema das Paralelas”. (STRUIK, 1992).

Ao negar o quinto postulado em busca de uma contradição na Geometria Absoluta, o que provaria sua dependência em relação aos demais postulados, János se depara com uma grande quantidade de novos teoremas, consistentes entre si e reconhece de imediato a importância de seus resultados, diferentemente do que sucedeu a Saccheri. Em 1832, János finalmente publica sua pesquisa, intitulada “Ciência do Espaço Absoluto”, como um apêndice de um livro didático escrito por seu pai: o “Tentamen”. (BOYER, 1996; EVES, 1995, STRUIK, 1992).

A consistência da hipótese do ângulo agudo não tardou em ser demonstrada por Eugenio Beltrami (1835-1900 d.C.), Felix Klein (1849-1925 d.C.), Henry Poincaré (1854-1912 d.C.) e diversos outros. O método utilizado consistiu da construção de um modelo onde os teoremas derivados da hipótese do ângulo agudo pudessem ser observados em um

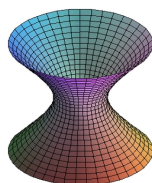
⁷ Posteriormente, tal axioma ficou conhecido por Axioma de Lobachewsky.

espaço de Geometria Euclidiana, desta forma, qualquer contradição nos resultados implicaria uma contradição na Geometria Euclidiana. Assim, tornou-se possível também demonstrar a independência do quinto postulado de Euclides. (ESTRADA, 2000; EVES, 1995).

Como já dito anteriormente, os primeiros matemáticos a explorar a Geometria Hiperbólica e a definir suas propriedades foram Saccheri, Lambert, Gauss, Lobachewsky e Bolyai. Tal geometria surge da adoção dos quatro primeiros grupos da Axiomática de Hilbert⁸, dos quais o quinto grupo, o Axioma das Retas Paralelas, equivalente ao quinto postulado de Euclides, é substituído pelo Axioma de Lobachewsky. (ESTRADA, 2000).

A Geometria Hiperbólica desenvolve-se sob uma superfície que apresenta curvatura negativa (Figura 3). Diversos modelos já foram criados para melhor explicitá-la, tais como: o disco e o semiplano de Poincaré, a pseudoesfera de Beltrami e o disco de Klein. (ARCARI, 2008; ESTRADA, 2000; ZIEGLER, 2008).

Figura 3 – Hiperbolóide, uma superfície de curvatura negativa.



Fonte: < <http://www.matematicasdigitales.com/wp-content/uploads/Hiperboloide-de-una-hoja.png> >.

A seguir, enumera-se alguns resultados característicos da Geometria Hiperbólica:

- i) Por um mesmo ponto passam infinitas retas paralelas umas as outras;
- ii) Retas paralelas nunca são equidistantes;
- iii) A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e, quanto maior a área do triângulo, menor é a soma dos seus ângulos internos;
- iv) Se dois triângulos apresentam os três ângulos respectivamente iguais, então os triângulos são congruentes. Isto é, além dos casos de congruência usuais da Geometria Euclidiana (LLL, ALA, LAL), há mais um caso de congruência, o caso AAA;

⁸ David Hilbert (1862-1943 d.C.) foi um notável matemático e lógico alemão. Seu maior trabalho foi publicado em 1899, intitulado “Fundamentos da Geometria”, onde propõe uma exposição axiomática formal para a geometria. A Axiomática de Hilbert substitui os cinco postulados de Euclides por um conjunto de cinco grupos de axiomas, a saber: Axiomas de Incidência, Ordem, Congruência, Continuidade e por fim Axioma das Paralelas. (ARCARI, 2008).

- v) A medida da circunferência de um círculo é maior do que π vezes o seu diâmetro;
- vi) Não existem retângulos na Geometria Hiperbólica, as formas geométricas mais próximas são os Quadriláteros de Lambert e os Quadriláteros de Saccheri. (ARCARI, 2008; ESTRADA, 2000; ZIEGLER, 2008).

REFERÊNCIAS

- ARCARI, Inedio. Um texto de Geometria Hiperbólica. 2008. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?view=vtls000441676>>. Acesso em: 12 jan. 2015.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996. 496 p. Tradução de Elza Gomide.
- CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias Não-Euclidianas. Matemática Universitária, São Paulo, v. 1, n. 6, p.25-48, dez. 1997. Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n06/n06_Artigo02.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2015.
- ESTRADA, Maria Fernanda et al. História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. 608 p.
- EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. Campinas: Unicamp, 1995. 843 p. Tradução de Hygino Domingues.
- KATZ, Victor J.. A History of Mathematics: An Introduction. 3. ed. Boston: Addison-wesley, 2009. 976 p.
- STRUIK, Dirk J.. História Concisa das Matemáticas. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992. 395 p. Tradução de João C. S. Guerreiro.
- ZIEGLER, Janaina de Ramos. Geometria Euclidiana Plana e Geometria Hiperbólica: Comparação de conceitos e propriedades. 2008. 42 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Área de Ciências Naturais e Tecnológicas, Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2008. Disponível em: < <http://www.unifra.br/cursos/matematica/downloads/Janaina%20de%20Ramos%20Ziegler.pdf.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2015.

Bijeções entre Conjuntos Infinitos

Vinicius Franco Vasconcelos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
v.f.v.math@gmail.com

Adriano Gomes de Santana
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrianosantana@utfpr.edu.br

1 Introdução

Quando trabalhamos com conjuntos infinitos e nos perguntamos “*Quantos elementos tem determinado conjunto?*”, muitos se contentam com a resposta “*Infinitos elementos.*”, porém nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma “quantidade de elementos” (mesma cardinalidade). Para responder à pergunta inicial, precisamos primeiro formalizar o que é dois conjuntos terem a mesma cardinalidade. Esse trabalho procura, além de fazer tal formalização, dar diversos exemplos de conjuntos infinitos e mostrar algum outro (geralmente $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$) que tenha a mesma cardinalidade.

A linguagem usada foi pensada para alunos dos segundo e terceiro anos do ensino médio, e procura desenvolver a capacidade de abstração dos alunos, podendo também ser interessante para alunos dos primeiros semestres de cursos superiores nas áreas de exatas. Assim sendo, o pré-requisito básico é o conteúdo de teoria dos conjuntos de ensino médio. É desejável também algum conhecimento de propriedades básicas dos conjuntos numéricos (decomposição em fatores primos, representação em diferentes bases, etc.).

Embora não explicitado, é considerada a teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC).

2 Funções

Teorema 1. Dados dois conjuntos A e B não-vazios, existe uma função injetora de A em B se, e somente se, existe uma função sobrejetora de B em A .

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $f : A \rightarrow B$ injetora. Tome um $a \in A$. Considere a função $g : B \rightarrow A$ definida como $g(y) = x$, se $y \in \text{Im } f$ e $f(x) = y$, e $g(y) = a$ caso contrário. É claro que g é sobrejetora.

($\Leftarrow$) Seja $f : B \rightarrow A$ sobrejetora. Para cada $y \in A$, considere o conjunto $B_y = \{x \in B : f(x) = y\}$, que é não-vazio pois f é sobrejetora. Considere a função $g : A \rightarrow B$ tal que para cada $y \in A$ é fixado um $x \in B_y$ de tal forma que $g(y) = x$. Como dados $y_1, y_2 \in A$, se $y_1 \neq y_2$ então $B_{y_1} \cap B_{y_2} = \emptyset$, temos que a função g é injetora. ■

Definição 1. Dados dois conjuntos A e B , se existir uma função $f : A \rightarrow B$ bijetora, escrevemos $|A| = |B|$. Caso contrário, escrevemos $|A| \neq |B|$. Quando $|A| = |B|$, dizemos que A e B são *equipotentes*, ou que A e B têm a mesma *cardinalidade*. Se existir uma função $g : A \rightarrow B$ injetora, escrevemos $|A| \leq |B|$. Se $|A| \leq |B|$ e $|A| \neq |B|$, escrevemos $|A| < |B|$.

Intuitivamente, $|A| = |B|$ significa que A e B têm a “mesma quantidade de elementos”, e $|A| < |B|$ que A tem “menos elementos” do que B .

Teorema 2. Para quaisquer conjuntos A , B e C , são válidas as seguintes propriedades:

- (i) $|A| = |A|$;
- (ii) se $|A| = |B|$, então $|B| = |A|$;
- (iii) se $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| = |C|$;
- (iv) se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$;
- (v) se $|A| < |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| < |C|$;
- (vi) se $|A| = |B|$ e $|B| < |C|$, então $|A| < |C|$.

Demonstração. (i) A função identidade de A em A é bijetora.

(ii) Seja $f : A \rightarrow B$ bijetora. A função $f^{-1} : B \rightarrow A$ é bijetora.

(iii) Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ bijetoras. A função $g \circ f : A \rightarrow C$ é bijetora.

(iv) Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ injetoras. A função $g \circ f : A \rightarrow C$ é injetora.

(v) Sejam $f : A \rightarrow B$ injetora e $g : B \rightarrow C$ bijetora. A função $g \circ f : A \rightarrow C$ é injetora. Suponha que exista uma função $h : A \rightarrow C$ bijetora, teríamos $|A| = |C|$ e $|B| = |C|$, o que implica $|A| = |B|$ (pelos itens (ii) e (iii)), contradição.

(vi) Análogo ao item (v). ■

Teorema 3 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder). Dados dois conjuntos A e B , se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.

A demonstração de tal teorema está anexa ao final do trabalho.

Teorema 4. Dados quatro conjuntos A , B , C e D , se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então são válidas as seguintes propriedades:

- (i) se $A \subseteq B$, então $|A| \leq |B|$;
- (ii) se $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, então $|A \cup B| = |C \cup D|$;
- (iii) $|A \times B| = |C \times D|$.

Demonstração. (i) A função identidade de A em B é injetora.

(ii) Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ bijetoras. A função $h : A \cup B \rightarrow C \cup D$ definida como $h(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$ se $x \in B$ é bijetora.

(iii) Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ bijetoras. A função $h : A \times B \rightarrow C \times D$ definida como $h(x, y) = (f(x), g(y))$ é bijetora. ■

3 Conjuntos Infinitos

No decorrer do texto consideramos o número zero como um número natural.

Definição 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $[n] = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$. Um conjunto A é dito *finito* se $|A| = |[n]|$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e escrevemos simplesmente $|A| = n$. Caso A não seja finito, dizemos que A é *infinito*.

Exemplo 1. $2\mathbb{N}$ (ou $\{k \in \mathbb{N} : 2 \mid k\}$), o conjunto dos números naturais pares.

A função $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ definida como $f(x) = 2x$ é bijetora, e, portanto, $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.

Exemplo 2. $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números inteiros.

A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(x) = 2x$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -2x - 1$ se $x < 0$ é bijetora, e, portanto, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$.

Exemplo 3. $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais.

Pelo Exemplo 2, existe uma função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Lembrando que cada número racional pode ser escrito de maneira única da forma p/q com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, a função $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $g(p/q) = 2^{f(p)} \cdot 3^q$ é injetora. Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, temos, pelos teoremas 4 e de Cantor-Bernstein-Schröder, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Exemplo 4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, o conjunto dos pares ordenados de números naturais.

As funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como $f(x) = (x, 0)$ e $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $g(x, y) = 2^x \cdot 3^y$ são injetoras. Segue do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

Teorema 5. Dado um conjunto A infinito, temos $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Demonstração. Seja $[n]$ como na Definição 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome um $a_n \in A \setminus \{a_i \in A : i \in [n]\}$, que existe pois A é infinito. Considere a função $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ definida como $f(x) = a_x$. É claro que a função f assim definida é injetora. ■

Definição 3. Um conjunto A é chamado de *enumerável* se $|A| \leq |\mathbb{N}|$.

O Teorema 5 dá uma ideia intuitiva de $\mathbb{N}$ como o “menor infinito”, isto é, se $|A| < |\mathbb{N}|$, então A é finito. Assim, é fácil ver que um conjunto A é enumerável se, e somente se, A é finito ou A é equipotente a $\mathbb{N}$. Equivalentemente, A é equipotente a $\mathbb{N}$ se, e somente se, A é infinito e enumerável (é imediato do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder).

Exemplo 5. $\mathbb{P}$, o conjunto dos números naturais primos.

Como $\mathbb{P}$ é infinito e $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$, temos, pelos teoremas 4, 5 e de Cantor-Bernstein-Schröder, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}|$.

Teorema 6 (Definição de Dedekind-Infinito). Dado um conjunto A , temos que A é infinito se, e somente se, existe um $B \subsetneq A$ tal que $|A| = |B|$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como A é infinito, pelo Teorema 5, temos $|\mathbb{N}| \leq |A|$. Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ injetora. Considere a função $g : A \rightarrow A \setminus \{f(0)\}$ definida como $g(x) = f(k+1)$ se $x \in \text{Im } f$ e $f(k) = x$, e $g(x) = x$ caso contrário. A função g assim definida é bijetora, logo, $|A| = |A \setminus \{f(0)\}|$.

($\Leftarrow$) É conhecido que se A é finito e $B \subsetneq A$, então $|B| < |A|$. O resultado segue pela contrapositiva. ■

Note que o Teorema 6 dá uma caracterização de conjuntos infinitos, isto é, poderíamos de forma equivalente ter definido conjunto infinito desse modo sem a necessidade de definir antes conjunto finito ou mesmo número natural.

Exemplo 6. $\mathbb{Q}[x]$, o conjunto dos polinômios de uma variável com coeficientes racionais.

Para cada $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ não-nulo, considere ∂P o grau de $P(x)$ e a_k o coeficiente de x^k em $P(x)$. Pelos exemplos 3 e 5, existem funções $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ bijetoras. Considere a função $h : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $h(P(x)) = \prod_{i=0}^{\partial P} g(i)^{f(a_i)} - 1$ se $P(x)$ é diferente do polinômio nulo, e $h(P(x)) = 0$ caso contrário. A função h assim definida é bijetora, e, portanto, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}[x]|$.

Exemplo 7. $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais.

Suponha que exista uma função sobrejetora $f : \mathbb{N} \rightarrow]0, 1]$. Para cada número $x \in]0, 1]$, x possui uma única representação decimal infinita, isto é, $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$ com $\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$ infinito. Para cada $k \in \mathbb{N}$, considere a representação decimal infinita de $f(k)$ escrita como $0, f(k, 0) f(k, 1) f(k, 2) \dots f(k, n) \dots$. Seja $y_k = f(k, k) + 1$ se $f(k, k) \neq 9$, e $y_k = 1$ caso contrário. Temos que $y = 0, y_0 y_1 y_2 \dots y_n \dots$ não pertence à imagem de f , contrariando o fato de f ser sobrejetora, absurdo. Como $]0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, não existe $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bijetora. Logo, como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, pelo Teorema 4, temos $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Obtemos assim um primeiro exemplo de conjunto infinito “maior” do que $\mathbb{N}$. O Teorema de Cantor visto mais à frente dá um método para, dado um conjunto A , obter um conjunto com mais elementos do que A .

Exemplo 8. $]0, +\infty[$ (também denotado por $\mathbb{R}_+^*$), o conjunto dos números reais positivos.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ definida como $f(x) = e^x$ é bijetora. Logo, $|\mathbb{R}| = |]0, +\infty[|$.

Exemplo 9. $]0, 1[$ e $[0, 1]$, os intervalos aberto e fechado dos números reais entre 0 e 1.

Considere a função $f :]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[$ definida como $f(x) = 1/x - 1$. A função f assim definida é bijetora, e, pelo Exemplo 8 e Teorema 2, temos $|\mathbb{R}| = |]0, 1[|$.

Considere agora a função $g : [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ definida como $g(x) = x/2$ se $x = 1/2^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = x/3$ se $x = 1/3^n$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $g(0) = 1/3$ e $g(x) = x$ nos demais casos. A função g assim definida é bijetora, logo $f \circ g : [0, 1] \rightarrow]0, +\infty[$ é bijetora. Pelo Exemplo 8 e Teorema 2, temos $|\mathbb{R}| = |[0, 1]|$.

Exemplo 10. $[0, 1] \times [0, 1]$, um quadrado de lado 1.

Para cada número $x \in [0, 1]$, considere a representação decimal infinita de x . Considere a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x, y) = 0, x_0 y_0 x_1 y_1 \dots x_n y_n \dots$, onde $x = 0, x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$ e $y = 0, y_0 y_1 y_2 \dots y_n \dots$. A função f assim definida é injetora. Considere agora a função $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida como $g(x) = (x, 0)$. A função g assim definida é injetora. Logo, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|[0, 1]| = |[0, 1] \times [0, 1]|$, e, pelo Exemplo 9 e Teorema 2, $|\mathbb{R}| = |[0, 1] \times [0, 1]|$.

Exemplo 11. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais.

Pelos exemplos 9 e 10 e teoremas 2 e 4, temos $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$.

Exemplo 12. $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos.

A função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(x, y) = x + iy$ é bijetora. Logo, pelo Exemplo 11 e Teorema 2, temos $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

Exemplo 13. $\mathbb{R}^n$, o conjunto das n -uplas ordenadas de números reais.

Pelo Exemplo 11, temos $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$. Pelo Teorema 4, temos $|\mathbb{R}^{m+1}| = |\mathbb{R}^{m+2}|$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, usando $n - 2$ vezes o Teorema 2, obtemos $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$.

Exemplo 14. $\mathbb{I}$ (também denotado por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), o conjunto dos números irracionais.

Considere o conjunto $A = \{a \cdot \pi^b : a \in \mathbb{Q} \text{ e } b \in \mathbb{N}\}$. Note que $\mathbb{Q} \subseteq A$ e que $a \cdot \pi^b \in \mathbb{Q}$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ definida como $f(x) = x + 1$ se $x \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x$ caso contrário. Claro que f é bijetora. Considere agora a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ definida como $g(x) = \pi \cdot f(x)$ se $x \in A$ e $g(x) = x$ caso contrário. A função g assim definida é bijetora, e, portanto, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{I}|$. Em particular, pelos exemplos 3 e 7 e pelo Teorema 2, temos $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{I}|$.

O Exemplo 14 pode, a princípio, parecer um pouco anti-intuitivo devido ao fato de que se a e b são números irracionais quaisquer com $a < b$, então existe um número racional c tal que $c \in]a, b[$. De fato, vale um resultado mais geral que o do Exemplo 14: se A é enumerável, então $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus A|$.

Definição 4. Dado um conjunto A , o conjunto dos subconjuntos de A é denotado por $\mathcal{P}(A)$, e é chamado de *conjunto das partes* de A .

Teorema 7. Dados dois conjuntos A e B , se $|A| = |B|$, então $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Demonstração. Seja $f : A \rightarrow B$ bijetora. A função $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ definida como $F(K) = \{f(k) \in B : k \in K\}$ é bijetora. ■

Teorema 8 (Teorema de Cantor). Para todo conjunto A , temos $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Demonstração. Considere a função $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definida como $f(x) = \{x\}$. Temos que f é injetora, e, portanto, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Suponha agora que exista $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ sobrejetora. Seja $B = \{x \in A : x \notin g(x)\}$. Tome um $x \in B$ qualquer, temos que $x \notin g(x)$, o que implica $g(x) \neq B$. Tome agora um $x \in A \setminus B$ qualquer, temos que $x \in g(x)$, o que implica $g(x) \neq B$. Portanto não existe um $x \in A$ tal que $g(x) = B$, o que contraria o fato de g ser sobrejetora, absurdo. Logo, não existe uma função de A em $\mathcal{P}(A)$ bijetora, e, portanto, $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$. ■

Note que dado um conjunto A , temos que se $|A| < |\mathbb{N}|$, então A é finito, e se A é finito, então $\mathcal{P}(A)$ também é finito. Logo, pelo Teorema de Cantor, concluímos que não existe um conjunto A tal que $|\mathcal{P}(A)| = |\mathbb{N}|$.

Teorema 9 (União Enumerável de Enumeráveis). Dados dois conjuntos A e B com $A \subseteq \mathcal{P}(B)$, se A é enumerável e todo $K \in A$ é enumerável, então o conjunto $C = \{k \in B : \text{existe um } K \in A \text{ tal que } k \in K\}$ é enumerável.

Demonstração. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ injetora e, para cada $K \in A$, considere a função $f_K : K \rightarrow \mathbb{N}$ injetora. Considere agora a função $g : C \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como $g(x) = (f(K), f_K(x))$ se $x \in K$ e não existe $K' \in A$ tal que $x \in K'$ e $f(K') < f(K)$. A função g assim definida é injetora, e, pelo Exemplo 4, existe $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijetora. Logo, a função $h \circ g : C \rightarrow \mathbb{N}$ é injetora. ■

Exemplo 15. $\mathbb{A}$, o conjunto dos números reais algébricos sobre os racionais.

Primeiramente, um número real x é dito algébrico sobre os racionais se x é raiz de algum polinômio não-nulo com coeficientes racionais. Para cada polinômio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ não-nulo, considere o conjunto R_P das raízes reais de $P(x)$, isto é, $R_P = \{k \in \mathbb{R} : P(k) = 0\}$. Pelo Exemplo 6, sabemos que $\mathbb{Q}[x]$ é enumerável, e que para cada $P(x)$ não-nulo R_P é enumerável (R_P é finito e tem no máximo ∂P elementos). Logo, pelo Teorema 9, o conjunto $\mathbb{A} = \{k \in \mathbb{R} : \text{existe um } P(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ tal que } k \in R_P\}$ é enumerável. Temos

ainda que se $n \in \mathbb{N}$, então $n \in \mathbb{A}$, pois n é raiz do polinômio $x - n$. Logo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}$, o que implica, pelos teoremas 4 e de Cantor-Bernstein-Schröder, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{A}|$.

Observe que no exemplo anterior não usamos o Teorema 9 exatamente da mesma forma que foi enunciado, mas que isso não causa problemas. Poderíamos ter considerado o conjunto $A = \{R_P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : P(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$, que é enumerável, e fazer $\mathbb{A} = \{k \in \mathbb{R} : \text{existe um } R_P \in A \text{ tal que } k \in R_P\}$.

Definição 5. Dados dois conjuntos A e B , o conjunto das funções de A em B é denotado por B^A .

A notação usada para denotar o conjunto das funções não é sugestiva por acaso. Os teoremas 11 e 12 mostram algumas semelhanças com a potenciação de números naturais.

Teorema 10. Dados quatro conjuntos A, B, C e D , se $|A| = |C|$ e $|B| = |D|$, então $|B^A| = |D^C|$.

Demonstração. Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ bijetoras. A função $F : B^A \rightarrow D^C$ definida como $F(h) = g \circ h \circ f^{-1}$ é bijetora. ■

Teorema 11. Para quaisquer conjuntos A, B e C , são válidas as seguintes propriedades:

- (i) se $B \cap C = \emptyset$, então $|A^B \times A^C| = |A^{B \cup C}|$;
- (ii) $|A^C \times B^C| = |(A \times B)^C|$;
- (iii) $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.

Demonstração. (i) Sejam $f : B \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow A$. Considere a função $h : A^B \times A^C \rightarrow A^{B \cup C}$ definida como $h(f, g)(x) = f(x)$ se $x \in B$ e $h(f, g)(x) = g(x)$ se $x \in C$. A função h assim definida é bijetora.

(ii) Sejam $f : C \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow B$. Considere a função $h : A^C \times B^C \rightarrow (A \times B)^C$ definida como $h(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in C$. A função h assim definida é bijetora.

(iii) Seja $f : C \rightarrow A^B$. Considere a função $h : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$ definida como $h(f)(x, y) = f(y)(x)$ para cada $x \in B$ e cada $y \in C$. A função h assim definida é bijetora. ■

Teorema 12. Para todo conjunto A , temos $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$.

Demonstração. Para cada $K \in \mathcal{P}(A)$, considere a função $\chi_K : A \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\chi_K(x) = 1$ se $x \in K$ e $\chi_K(x) = 0$ caso contrário (função característica de K). Considere a função $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ definida como $F(K) = \chi_K$. Não é difícil ver que F é inversível e $F^{-1}(f) = \{k \in A : f(k) = 1\}$. Logo, temos que a função F é bijetora, e, portanto, $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$. ■

Exemplo 16. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, o conjunto das partes dos números naturais.

Considerando a representação usual dos números reais na base dez, temos que a função $F : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definida como $F(f) = 0, f(0)f(1)f(2) \dots f(n) \dots$ é injetora.

Considere agora os números reais escritos na base 2. Analogamente, os números do intervalo $[0, 1]$ serão da forma $0, d_0 d_1 d_2 \dots d_n \dots$, onde $d_i \in \{0, 1\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. A função $G : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definida como $G(f) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)/2^{i+1} = 0, f(0)f(1)f(2) \dots f(n) \dots$ é sobrejetora.

Segue dos teoremas 1 e de Cantor-Bernstein-Schröder que existe uma função bijetora de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ em $[0, 1]$, e, pelo Exemplo 9 e teoremas 2 e 12, temos $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Perceba que o resultado do Exemplo 7 é consequência direta do Exemplo 16 usando o Teorema de Cantor. De fato, o Exemplo 16 fornece uma relação entre a “quantidade de elementos” dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ bem mais forte do que o Exemplo 7.

Exemplo 17. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, o conjunto das seqüências de números naturais.

Para cada $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, considere o gráfico de f definido como $G_f = \{(k, f(k)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\}$. Considere a função $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definida como $F(f) = G_f$. A função F assim definida é injetora. Pelo Exemplo 4 e Teorema 7, temos $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Como $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, pelos teoremas 2, 4, 12 e de Cantor-Bernstein-Schröder, temos $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$, e, pelo Exemplo 16, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Note que, de forma análoga ao Exemplo 17, pelo Exemplo 11, obtemos $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$.

Exemplo 18. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, o conjunto das seqüências de números reais.

Para cada $f \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ e $k \in \mathbb{N}$, considere a representação decimal infinita de $f(k)$ (exceto quando $f(k) = 0$) escrita como $0, f(k, 0)f(k, 1)f(k, 2) \dots f(k, n) \dots$. Pelo Exemplo 4, existe $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijetora. Considere a função $F : [0, 1]^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definida como $F(f) = 0, f(g(0))f(g(1))f(g(2)) \dots f(g(n)) \dots$. A função F assim definida é injetora. A função $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ definida como $G(x) = g$ onde $g(k) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (isto é, $G(x)$ é a função constante x) é injetora. Logo, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|[0, 1]| = |[0, 1]^{\mathbb{N}}|$, e, pelo Exemplo 9 e pelos teoremas 2 e 10, temos $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$.

Exemplo 19. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, o conjunto das funções reais contínuas.

Dado $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ existe uma única função $f_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_{\mathbb{Q}}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, e a função $F : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ definida como $F(f) = f_{\mathbb{Q}}$ é injetora. Considere a função $G : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ definida como $G(f)(x) = f(x)$ se $x \in \mathbb{Z}$ e $G(f)(x) = (x - a) \cdot (f(a + 1) - f(a)) + f(a)$ se $x \in]a, a + 1[$ com $a \in \mathbb{Z}$ (isto é, o gráfico de $G(f)$ no intervalo $[a, a + 1]$ é o segmento de $(a, f(a))$ até $(a + 1, f(a + 1))$). A função G assim definida é injetora. Logo, pelos exemplos 2, 3, 18 e teoremas 2, 10 e de Cantor-Bernstein-Schröder, temos $|\mathbb{R}| = |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})|$.

4 Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder

Neste anexo apresentamos uma demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder. A ideia da demonstração é tomar seqüências de subconjuntos encaixantes.

Definição 6. Dados três conjuntos A , B e C , com $C \subseteq A$, e uma função $f : A \rightarrow B$, o conjunto $\{f(k) \in B : k \in C\}$ é chamado de *imagem* de f por C , e é denotado por $f[C]$. Em particular, $f[A] = \text{Im } f$.

Teorema 13. Para quaisquer conjuntos A , B , C e D , com $C, D \subseteq A$, e $f : A \rightarrow B$ injetora, são válidas as seguintes propriedades:

- (i) $f[C \cup D] = f[C] \cup f[D]$;
- (ii) $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$;
- (iii) $f[C \setminus D] = f[C] \setminus f[D]$;
- (iv) $C \subseteq D$ se, e somente se, $f[C] \subseteq f[D]$;
- (v) $|C| = |f[C]|$.

Demonstração. (i) Temos:

$$f(x) \in f[C \cup D] \Leftrightarrow x \in C \cup D \Leftrightarrow x \in C \text{ ou } x \in D \Leftrightarrow f(x) \in f[C] \text{ ou } f(x) \in f[D] \Leftrightarrow f(x) \in f[C] \cup f[D]$$

Portanto, $f[C \cup D] = f[C] \cup f[D]$.

(ii) Análogo ao item (i).

(iii) Análogo ao item (i).

(iv) $(\Rightarrow)$ Dado $f(x) \in f[C]$, temos $x \in C$. Como $C \subseteq D$, temos $x \in D$ e $f(x) \in f[D]$.

$(\Leftarrow)$ Dado $y \in C$, temos $f(y) \in f[C]$. Como $f[C] \subseteq f[D]$, temos $f(y) \in f[D]$ e $y \in D$.

(v) Como f é injetora, então $f : C \rightarrow f[C]$ é bijetora. ■

Teorema 14. Para quaisquer conjuntos A , B e C , se $A \supseteq B \supseteq C$ e $|A| = |C|$, então $|A| = |B|$.

Demonstração. Seja $\varphi : A \rightarrow C$ bijetora. Considere as funções $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definidas como $f(0) = A$ e $f(n+1) = \varphi[f(n)]$, $g(0) = B$ e $g(n+1) = \varphi[g(n)]$, e $h(n) = f(n) \setminus g(n)$. Temos $f(0) \supseteq g(0) \supseteq f(1)$ e, pelo Teorema 13, $f(n) \supseteq g(n) \supseteq f(n+1)$, o que implica $h(n) \cap h(m) = \emptyset$ se $n \neq m$.

Seja $D = \{k \in A : k \in h(n) \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$. Pelo Teorema 13, $\varphi[h(n)] = \varphi[f(n) \setminus g(n)] = \varphi[f(n)] \setminus \varphi[g(n)] = f(n+1) \setminus g(n+1) = h(n+1)$, e, portanto, $\varphi[D] = D \setminus h(0) = D \setminus (A \setminus B) \subseteq B$.

Considere a função $\psi : A \rightarrow B$ definida como $\psi(x) = \varphi(x)$ se $x \in D$ e $\psi(x) = x$ caso contrário. A função ψ assim definida é bijetora. ■

Demonstração do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder. Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ injetoras. Temos que a função $g \circ f : A \rightarrow A$ é injetora. Pelo Teorema 13, temos $|A| = |g[f[A]]|$ e $|B| = |g[B]|$. Como $f[A] \subseteq B$, temos, pelo Teorema 13, $g[f[A]] \subseteq g[B]$. Logo, como $g[B] \subseteq A$, pelos teoremas 2 e 14, temos $|A| = |B|$. ■

5 Considerações Finais

Alguns resultados que obtemos quando trabalhamos com conjuntos infinitos podem parecer anti-intuitivos num primeiro contato, por não valerem para conjuntos finitos. É o caso dos exemplos 4 e 11, que podem ser generalizados como “se A é infinito, então $|A| = |A \times A|$ ”, ou o Exemplo 17, que pode ser generalizado como “se A é infinito, então $|\mathcal{P}(A)| = |A^A|$ ”. A definição de infinito dada por Dedekind (Teorema 6) também pode soar estranha, mas justamente por não tratar de conjuntos finitos.

Um problema que ficou em aberto por vários anos (e o primeiro da lista de problemas de Hilbert) é a Hipótese do Continuum, que diz que não existe um conjunto A tal que $|\mathbb{N}| < |A|$ e $|A| < |\mathbb{R}|$. A solução desse problema pode soar estranha num primeiro contato: Foi demonstrado que a hipótese do continuum não pode ser demonstrada, porém tampouco sua negação pode. Isso significa que a existência de um conjunto nas condições citadas é independente da teoria dos conjuntos adotada.

O leitor que quiser ver mais sobre o assunto tratado nesse trabalho pode procurar sobre aritmética cardinal, aritmética ordinal e ZFC. Para um primeiro contato mais formal, recomendamos [1].

Referências

- [1] HRBACEK, Karel & JECH, Thomas: **Introduction to Set Theory, Third Edition**, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics (1999).

O USO DE VIDEOS NO NIVELAMENTO DE MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DA EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

Victor Fernando Casarotto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
victor.casarotto@hotmail.com

Marcia Regina Piovesan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
marciapiovesan@utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O número de alunos que tem ingressado no ensino superior tem aumentado substancialmente nas últimas décadas por causa de medidas governamentais que têm aprimorado o acesso e aumentado o número de vagas.

Nesse contexto, o número de alunos que trazem lacunas no aprendizado também tem aumentado proporcionalmente ao número de vagas correspondentes. E pesquisas na área de Educação Matemática têm apontado que a Matemática é uma das áreas com maior número de defasagem na formação da Educação Básica.

Essas lacunas, se não preenchidas, logo no início do ingresso do aluno podem ser fortes motivos da desistência e evasão do curso. Pensando nisso, a comunidade matemática das universidades tem debatido sobre formas e estratégias de preencher tais lacunas, como por exemplo, disciplinas de pré cálculo, aulas de apoio, mentorias, disciplinas eletivas e os nivelamentos (retomada dos conteúdos matemáticos básicos que foram ensinados incorretamente ou não ensinados).

Nesse sentido, a proposta desse artigo é tratar de um caso de uma universidade brasileira que possui um curso de licenciatura em matemática e que tem utilizado como estratégia para melhoria de tais ingressantes, uma mescla de aulas presenciais, vídeo aulas e resolução de exercícios via um ambiente virtual de

aprendizagem (AVA), utilizamos o Moodle. Para tanto, nas próximas seções será discutida a importância do nivelamento, em seguida será tratada a evolução e necessidade do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação em sala de aula, posteriormente falar-se-á sobre a produção de vídeo aulas e por fim será apresentado um relato de experiência sobre a produção de materiais para o ambiente virtual de aprendizagem.

NIVELAMENTO OU PRÉ CÁLCULO

Como apontam Ferreira, Laurenti e Araújo (2004, p. 1)

é notório que a realidade educacional brasileira atual está em crise em todos os seus níveis, mas principalmente no ensino médio, tendo como reflexo a má formação universitária. Esse fato nos leva a refletir sobre formas de melhorar a qualidade do ensino e, conseqüentemente, diminuir a desigualdade social.

Com isso muitas faculdades começaram a discutir as dificuldades em matemática.

Muitos alunos que ingressam no ensino superior possuem uma defasagem muito grande no que diz respeito à disciplina de matemática. Por isso, conscientes do problema e, na tentativa de amenizá-lo, instituiu-se o Programa de Nivelamento de Matemática (PNM) para os alunos ingressantes (FERREIRA; LAURENTI; ARAÚJO, 2004).

A educação à distância pode ser uma abordagem promissora para o problema do nivelamento do conhecimento no ensino superior, pois permite uma aprendizagem mais flexível e personalizada. Um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) pode ser usado para apoiar a interação e um amplo leque de contextos de aprendizagem. Pode também promover a aprendizagem formal e informal, por meio de estudo dirigido individual. O Curso de Nivelamento de Matemática é um exemplo de aprendizagem mediada pela tecnologia de informática e comunicação (TIC), na qual a metodologia da Educação à Distância cria um ambiente de aprendizagem significativo e estimulante, que permite aos estudantes aprender de diversas maneiras (FREIRE; NASSER; CARDADOR, 2008).

TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Pesquisas revelam que o uso das TIC, como ferramenta didático-pedagógica, traz uma grande contribuição para a prática escolar em qualquer nível de ensino e áreas do conhecimento. No entanto, ela impõe mudanças nos métodos de trabalho dos professores, gerando modificações no funcionamento nos espaços de ensino (ROSA; ROSA, 2007).

O advento das TIC dá aos professores novos métodos de auxílio ao processo ensino e aprendizagem multidisciplinar. Alguns autores destacam as linguagens de programações, os sistemas tutoriais, as caixas de ferramentas, simulações, animações, a comunicação mediada por computador, os vídeos, a aquisição de dados por meio de computadores e por fim o que pode englobar todos os aspectos reunidos, que seria a *WEB* (sistema de informações ligadas através de hiperligações em forma de texto, vídeo, som e outras animações digitais que permitem ao usuário acessar uma infinidade de conteúdos através da internet.) (GIORDAN, 2005).

Além disso, é importante que os alunos já tenham contato com esse tipo de tecnologia, pois muitos não têm condições de ter um computador em casa, e assim podendo se alfabetizar tecnologicamente na escola. O computador é uma ponte entre sujeito e conhecimento, devemos utilizá-la como ferramenta e também prótese, pois vai além de reparar uma falha, modifica a maneira de construir o conhecimento. Usando a internet em nosso favor, temos muitos meios de ajudar o aprendizado do aluno, como *webquest*, que são sites especificamente projetados para o aprendizado de determinado conteúdo, assim estimulando a pesquisa e o senso crítico. Temos blogs, que são paginas da internet de fácil atualização, onde postam experiências e reflexões, atividades e curiosidades e fatos de determinada disciplina. (ROLKOUSKI, 2011)

Educação à distância, modalidade de educação que utiliza meios tecnológicos de informação, não é apenas troca de e-mail, pode ter momentos presenciais. As

faculdades utilizam esse tipo de educação com as disciplinas não presenciais. Para que esse tipo de educação funcione precisamos de interação, diálogo e colaboração, professor-aluno ou aluno-aluno. (BORBA; MALHEIROS, 2007).

A formação continuada onde há reflexão sobre a prática pedagógica, colaboração e discussão entre professores, e trocas de experiências. O professor a distância pode ser o mesmo da presencial, ela só tem que aderir a uma metodologia diferente e ter um tempo disponível para dúvidas, pois a função principal dele é orientar a aprendizagem. A educação a distância parece fácil, porém demanda mais tempo de preparação. O professor deve saber como dar aulas a distância, através de chats ou vídeo conferências, falar pausadamente e manejar o ambiente (BORBA; MALHEIROS, 2007).

Mas as TIC não são as salvação dos problemas pedagógicos, a melhoria da aprendizagem das disciplinas nas escolas depende da habilidade do professor, mas também não temos que temer as tecnologias, nem idolatrá-las, elas ajudam a moldar a aprendizagem (BORBA; PENTEADO, 2012).

RELATO DE EXPERIÊNCIA

O relato aqui tratado é decorrente de dois projetos, um relacionado ao nivelamento de matemática básica em um curso noturno de licenciatura em matemática e o outro relacionado à produção de recursos educacionais digitais (RED) nomeado de “Matemática Essencial na Era Digital” que ocorreu em uma universidade federal no ano de 2014, com uma turma de 21 alunos do 1º semestre que teve início em agosto de 2014.

O projeto de produção de recursos educacionais digitais em sua instância primária busca colaborar na melhoria do ensino e da aprendizagem dos conteúdos matemáticos essenciais para o curso de licenciatura em matemática. Desse modo, buscamos por meio desse projeto: produzir vídeoaulas para o projeto de Nivelamento do Curso de Licenciatura em Matemática, produzir um repositório com arquivos digitais no formato GGB, do software livre de geometria dinâmica Geogebra, desenvolver sequências de ensino disponibilizadas no Ambiente Virtual

de Aprendizagem (Moodle), utilizando as vídeoaulas e/ou os arquivos digitais GGB e utilizar a Lousa Digital como meio de interação entre professor e aluno.

Dadas as condições do curso de nivelamento e o nosso propósito, inicialmente foi realizado um estudo sobre os conteúdos matemáticos (razão, proporção e regra de três), em seguida, foi elaborado um plano de aula com sequências didáticas voltadas para o ensino à distância (com o uso do software Geogebra), ou seja, sua utilização no ambiente virtual de aprendizagem (Moodle). Realizadas essas etapas, gravamos duas vídeoaulas (uma para razão e, outra para proporção e regra de três) que foram gravadas com auxílio do software *atube Catcher*, por meio de capturas de tela de slides pré preparados no Power Point e, posteriormente foi utilizado o *Corel Video Studio Pro X7* para edição do mesmo e as postamos no *Youtube* e disponibilizamos o link no Moodle. Além dessas vídeoaulas também foram postados no moodle, como materiais complementares, jogos e simuladores disponibilizados por outros repositórios.

O nivelamento utiliza o Moodle como forma de avaliar os alunos, pois nele se encontra as atividades avaliativas e postamos os vídeos antes de cada avaliação, para ajudar os alunos a recordar esses conteúdos.

CONCLUSÃO

Como já citado anteriormente, vimos que o número de alunos que ingressam no ensino superior tem aumentado, e os alunos que trazem lacunas no aprendizado também têm aumentado proporcionalmente ao número de vagas correspondentes. Essas lacunas, se não preenchidas, logo no início do ingresso do aluno podem ser fortes motivos da desistência e evasão do curso.

Por isso, conscientes do problema e, na tentativa de amenizá-lo, diversas universidades têm instituído programas como o de Nivelamento. Tais programas aliados ao uso de das TIC, como ferramenta didático-pedagógica, tem proporcionado uma grande contribuição para a prática escolar.

Com isso fizemos um estudo dos conteúdos e o plano de aula no mesmo, para assim começarmos a produção das vídeo-aulas.

Percebemos que grande maioria dos acadêmicos não realizou a atividade, mas os que realizaram, tiveram um bom resultado. Deste modo podemos concluir que o nivelamento é muito importante na vida dos acadêmicos, pois ajuda a relembrar conteúdos, ou mesmo, aprender conteúdos não vistos na educação básica. E com o uso de TICs e o modelo de EaD, podemos ensinar sem prejudicar a grade do curso (pois colocando uma matéria presencial de nivelamento, precisaria utilizar o horário de outra matéria, que teria que ser colocada em outro período e assim estragando a grade planejada) e facilitando a maneira de repassar esses conteúdos aos alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cíntia Soares. Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área. 2006. 13 p. TCC(Curso de Matemática) - Universidade Católica de Brasília – UCB. Disponível em: www.ucb.br/sites/100_103_tcc_12006_cinthiasoaresdealmeida.pdf Acesso em: 27 fev. 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

BRASIL. **Decreto nº 2.494, de 10 de Fevereiro de 1998**. Brasília, DF: Câmara dos Deputados, 1998.

COSTA, Jacqueline Moraes; ARAÚJO, Artur Torres; SILVA, Bárbara de Mariz. A midiatização no processo de ensino e aprendizagem. **Revista Tecnologias na Educação**. Belo Horizonte, ano 6, n. 11, p. 1-12, dez. 2014. Disponível em: <http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wp-content/uploads/2014/12/A-midiatiza%C3%A7%C3%A3o-no-processo-de-ensino-e-aprendizagem.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2015.

DANTAS, Jorge Luiz Barbosa. FORMAÇÃO DE PROFESSORES PARA O USO DAS TICs NA ESCOLA. **Revista Tecnologias na Educação**. Belo Horizonte, ano 6, n. 10, p. 1-11, jul. 2014. Disponível em: <http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wp-content/uploads/2014/06/Forma%C3%A7%C3%A3o-de-professores-para-uso-das-tics-na-escola-uma-experi%C3%Aancia-na-cidade-de-Sete-Lagoas.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2015.

FERREIRA, Alexandre Marcos de Mattos Pires, LAURENTI, Fábio; ARAÚJO, Suely Trevizam. Programa de Nivelamento de Matemática. In: Congresso Internacional de Educação a Distância, XI, 2008. Salvador- BA. **Anais**. Salvador- BA: ABED, 2004. Disponível em: <<http://www.abed.org.br/congresso2004/por/htm/151-TC-D2.htm>> Acesso em: 27 fev. 2015.

FREIRE, June Lessa; NASSER, Lilian; CARDADOR, Débora Mendonça. Educação a Distância: solução para o nivelamento de Matemática na Educação Superior. In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, IV, 2008. Rio de Janeiro. **Anais**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. Disponível em: <<http://limc.ufrj.br/hitem4/papers/22.pdf>>. Acesso em: 17 mar. 2015.

GIORDAN, Marcelo. O Computador na Educação em Ciências: Breve Revisão Crítica Acerca de Algumas Formas de Utilização. **Ciência & Educação**, v. 11, n. 2, p. 279-304, 2005.

ROLKOUSKI, Emerson. **Tecnologias no Ensino de Matemática**, 1ª edição: Editora ibpex, 2011.

ROSA; Cleci Teresinha Werner; ROSA, Alvaro Becker. Ensino de Física: Tendências e desafios na prática docente. **Revista Ibero-americana de Educacion**, v. 7, n 42, p. 1-12, mai. 2007.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Educação a distância online**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

Representações em álgebra de Lie e alguns exemplos

Artur Adolfo Falkovski

Orientador: Wilian Francisco de Araújo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná Campus Toledo

artur_adolfo@hotmail.com

1 Introdução

Esse trabalho contém parte do conteúdo estudado no PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) que tem por finalidade estudar álgebras de Lie, porém o tópico principal desse trabalho é exemplificar as representações e apresentar como elas se comportam dentro da Álgebra. Primeiro será feito um breve explanação sobre o que é uma álgebra de Lie para depois ser abordado o tópico de representações.

2 Álgebra de Lie

Definição .1. Uma álgebra de Lie consiste de um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto, chamado de colchete ou comutador de Lie, definido por $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, que satisfaça as seguintes propriedades:

1. Bilinear, ou seja, linear a cada entrada:

$$\alpha[X, Y] = [\alpha X, \alpha Y];$$

2. Antissimétrico, isto é, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$;

3. A identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Exemplo .2. • O conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, $\mathfrak{gl}\{n, \mathbb{K}\}$, é uma álgebra de Lie e seu colchete é dado por:

$$[X, Y] = XY - YX$$

• A álgebra de Heisenberg. Na base $\{X, Y, Z\}$ com os colchetes entre os elementos da base definidos por: $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = 0$, $[Y, Z] = 0$, é uma álgebra de Lie.

• Álgebras associativas com o comutador definido da forma:

$$[X, Y] = XY - YX$$

são álgebras de Lie.

• Qualquer espaço vetorial com $[\cdot, \cdot] = 0$ é uma álgebra de Lie.

• O espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o comutador dado pelo produto vetorial, é uma álgebra de Lie.

3 Subálgebra

Definição .3. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado para o colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ se $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Exemplo .4. Álgebras abelianas: $[,] = 0$. Para este caso, a estrutura de Lie não acrescenta nada à estrutura do espaço vetorial.

Exemplos de álgebras abelianas:

- (a) Se $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g}$ é abeliana.
- (b) Todo subespaço de dimensão 1 de uma álgebra de Lie qualquer é uma subálgebra abeliana.
- (c) O espaço das matrizes diagonais é uma subálgebra abeliana de $gl(n, \mathbb{K})$.

Exemplo .5. Subálgebras de $gl(n, \mathbb{K})$:

- (a) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in gl(n, \mathbb{K}) : X + X^t = 0\}$ onde X^t indica a matriz transposta de X .

$$X, Y \in gl(n, \mathbb{K})$$

$$[X, Y] = XY - YX$$

$$[X, Y]^t = -X^t Y^t + Y^t X^t = -(YX)^t + (XY)^t$$

$$[X, Y] + [X, Y]^t = XY - YX + -(YX)^t + (XY)^t = XY + (XY)^t - (YX + (YX)^t) = 0,$$

como o colchete é fechado para esse subespaço, então, ele é uma subálgebra.

contraexemplo:

$$\{X \in gl(n, \mathbb{K}) : X = X^t\}$$

$$[X, Y] = XY - YX = X^t Y^t - Y^t X^t = (YX)^t - (XY)^t$$

$$[X, Y]^t = (XY - YX)^t = (XY)^t - (YX)^t.$$

Assim, $[X, Y] \neq [X, Y]^t$, portanto, o colchete não é fechado para esse subespaço, assim ele não é uma subálgebra.

- (b) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in gl(n, \mathbb{K})\}$. Também podendo ser representado como $\mathfrak{sl}(n)$.

- (c) O subespaço das matrizes triangulares superiores com a diagonal principal nula

$$\{X \in gl(n, \mathbb{K}) : X = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\}$$

é uma subálgebra.

- (d) O subespaço das matrizes triangulares superiores

$$\{X \in gl(n, \mathbb{K}) : X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\}$$

é uma subálgebra.

4 Ideal

Definição .6. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é ideal se

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \text{ger}\{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

É claro que todo ideal é uma subálgebra, mas, nem toda subálgebra é um ideal.

Exemplo .7. O subespaço de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ gerado por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ é uma subálgebra por ser unidimensional.

Não é um ideal, pois,

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Morfismos

Definição .8. Uma transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (com $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie) é um

- Homomorfismo se $\psi[X, Y] = [\psi X, \psi Y]$;
- Isomorfismo se for um homomorfismo inversível;
- Automorfismo se for um isomorfismo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

6 Representações

Seja V um espaço vetorial e $gl(V)$ o espaço vetorial das transformações lineares de V . Seja $\mathfrak{g}$ também uma álgebra de Lie (Sobre o mesmo corpo de escalares que V). Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$$

Representação adjunta.

Para um elemento X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear

$$ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$$

definida por $ad(X)(Y) = [X, Y]$. A aplicação

$$ad : X \in \mathfrak{g} \mapsto ad(X) \in gl(\mathfrak{g}).$$

Representações duais.

Dada uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V , pode se tomar ρ^* de $\mathfrak{g}$ no dual V^* de V dada pela formula

$$\rho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \rho(X) \text{ onde } \lambda \in V^*.$$

Derivações.

Definição .9. Uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma derivação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se satisfizer

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Exemplo .10. Seja

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{K}) : X = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

a álgebra de Heisenberg. Tome a base $\{X, Y, Z\}$ com

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Suas constantes de estrutura são dadas por $[X, Y] = Z$ e os outros colchetes são todos nulos. Assim, $ad(Z) = 0$, para calcular $ad(X)$, $ad(Y)$ para a base $\{X, Y, Z\}$ temos:

$$\begin{aligned} ad(X)X &= 0 = 0X + 0Y + 0Z \\ ad(X)Y &= Z = 0X + 0Y + 1Z \\ ad(X)Z &= 0 = 0X + 0Y + 0Z. \end{aligned}$$

Construindo a matriz da representação adjunta temos utilizando propriedades de Álgebra Linear:

$$ad(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Repare que os termos da primeira linha são os coeficientes de X , os da segunda são os de Y e os da terceira o de Z .

$$\begin{aligned} ad(Y)X &= -Z = 0X + 0Y - 1Z \\ ad(Y)Y &= 0 = 0X + 0Y + 0Z \\ ad(Y)Z &= 0 = 0X + 0Y + 0Z. \end{aligned}$$

Construindo a matriz da representação adjunta temos ,como no caso anterior:

$$ad(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$ad(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad ad(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo .11. A álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \text{ tal que } \text{tr} X = 0\}$, calculando a matriz da representação adjunta na base $\{X, Y, Z\}$, onde:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E as contantes de estruturas são dadas por:

$$[Y, X] = 2X, [Y, Z] = -2Z, [X, Z] = Y.$$

Assim:

$$ad(X)X = 0 = 0X + 0Y + 0Z$$

$$ad(X)Y = -2X = -2X + 0Y + 0Z$$

$$ad(X)Z = Y = 0X + 1Y + 0Z$$

$$ad(Y)X = 2X = 2X + 0Y + 0Z$$

$$ad(Y)Y = 0 = 0X + 0Y + 0Z$$

$$ad(Y)Z = -2Z = 0X + 0Y + -2Z$$

$$ad(Z)X = -Y = 0X - 1Y + 0Z$$

$$ad(Z)Y = 2Z = 0X + 0Y + 2Z$$

$$ad(Z)Z = 0 = 0X + 0Y + -0Z.$$

portanto:

$$ad(X) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ad(Y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ad(Z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Referências

- [1] SAN MARTIN, L.A.B.: **Álgebras de Lie**. São Paulo:UNICAMP, 2.ed (2010).

A IMPORTÂNCIA DAS ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR DISCUTIDA A PARTIR DE MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE FRAÇÕES GERATRIZES

Guilherme de Martini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo – PR
guilhermedemartini@live.com

Simone Andreia Roehrs
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo – PR
simone_roehrs@hotmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo – PR
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Nos cursos de licenciatura em matemática é comum encontrar perguntas dos discentes como: “para que eu vou usar isso?” ou “por que tenho que aprender esse conteúdo se nem vou ensiná-lo na Educação Básica?”. É nesse panorama que esse artigo pretende discutir a importância das Atividades Práticas como Componente Curricular (APCCs) enquanto momentos que possibilitem o estabelecimento das relações entre os conteúdos aprendidos na graduação e os conteúdos ensinados na Educação Básica.

Para mostrar a necessidade desse tipo de prática será utilizado o exemplo das dízimas periódicas. A partir de uma breve conceituação histórica sobre as mesmas, este trabalho pretende analisar duas formas de obtenção de frações geratrizes, sob a ótica do ensino fundamental e, do ensino superior. O objetivo da explanação destes dois métodos é evidenciar a relação existente entre os conteúdos nas duas modalidades de ensino.

Apesar dessa relação, é importante ressaltar que há diferenças entre a matemática que os alunos de uma licenciatura em matemática discutem e aprendem no curso e a matemática que eles vão ter que ensinar para seus futuros alunos (SANTOS; LINS, 2008, p. 3).

Pretende-se com isso, como já dito anteriormente, refletir sobre a importância das Atividades Práticas como Componente Curricular, levando os alunos a uma análise sobre as relações entre os conteúdos ensinados no curso de licenciatura e, aqueles ensinados

na Educação Básica, já que essa relação é dificilmente percebida devido à complexidade dos conteúdos presentes nas ementas.

Assim, o presente texto é dividido em quatro partes, sendo elas: uma seção sobre as APCCs, outra sobre as dízimas periódicas, mais uma sobre os métodos de obtenção da fração geratriz e por fim, apresentam-se as considerações finais.

ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR (APCCs)

As Atividades Práticas como Componente Curricular correspondem às atividades realizadas pelo acadêmico, tendo a oportunidade de aprimorar seu conhecimento e aplicar à realidade escolar.

A importância destas atividades pode ser evidenciada na Resolução do Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno de 2002, que estabelece dentre outros, a carga horária de 400 (quatrocentas) horas de APCCs, vivenciadas ao longo do curso (BRASIL, 2002, p. 1).

O parecer CNE/CES n.º 15 de 2005 define componente curricular como:

[...] o conjunto de atividades formativas que proporcionam experiências de aplicação de conhecimentos ou de desenvolvimento de procedimentos próprios ao exercício da docência. Por meio destas atividades, são colocados em uso, no âmbito do ensino, os conhecimentos, as competências e as habilidades adquiridos nas diversas atividades formativas que compõem o currículo do curso. As atividades caracterizadas como prática como componente curricular podem ser desenvolvidas como núcleo ou como parte de disciplinas ou de outras atividades formativa (BRASIL, 2005, p. 3).

Tais atividades podem ser diluídas entre as diversas disciplinas de um curso de licenciatura ou podem ser concentradas em disciplinas específicas. No caso desse texto, por causa da experiência vivenciada pelos autores, o entendimento das APCCs é o da diluição em várias disciplinas, como por exemplo: Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, História da Matemática, entre outras.

Para um olhar mais apurado, será analisado o caso da disciplina de Cálculo, cujo estudo de séries e sequências pode ser relacionado ao estudo das dízimas periódicas.

DÍZIMAS PERIÓDICAS

Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, surgiu a necessidade do conceito de fração e de notação para frações (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 14). Para os egípcios os

números fracionários não eram frações propriamente ditas, eram consideradas o inverso de um número. Sendo assim, eram representadas no sistema numérico, pela fração $\frac{1}{n}$, o que significa que ao se dividir algo por n partes, $\frac{1}{n}$ é quanto cada um recebe. Assim, para Boyer e Merzbach (2012, p.31) “as escritas hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, com numerador um [...] o recíproco de qualquer número era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado”, como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Fração Unitária Egípcia



Fonte: BOYER; MERZBACH, 2012, p. 31

A partir disso, conforme Dante (2012, p. 26) e Andriani e Vasconcellos (2012, p. 156) podemos definir dízimas periódicas como números decimais onde existe uma repetição de um ou mais algarismos infinitamente e, estas podem ser representadas na forma de fração.

Como por exemplo: 0,3333... que pode ser representada como $\frac{1}{3}$; 0,3636... que pode ser

representada como $\frac{4}{11}$. Depara-se então, com a necessidade de englobar a representação de números racionais, que segundo Paiva (2009, p. 26) é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo.

O que leva a discussão do próximo tópico é justamente o modo de obter uma fração que dá origem a dízima periódica, chamada fração geratriz, para posteriormente poder estabelecer relações entre os métodos apresentados.

MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DA FRAÇÃO GERATRIZ

A fração geratriz produz dízimas periódicas simples ou compostas, sendo que as simples apresentam o período logo após a vírgula, já as compostas possuem uma parte não periódica antes do período (DANTE, 2013, p. 22). Exemplos destas duas representações:

- Dízima periódica simples: 1,666...

- Dízima periódica composta: 0,23555...

Serão apresentados dois métodos para a obtenção dessas frações, exemplificando-os. Primeiramente será exposto um método usualmente utilizado em livros didáticos do Ensino Fundamental, o qual consiste em resolver um sistema de equação de uma incógnita. Este método funciona, pois o algoritmo para resolução pede que se multiplique a dízima periódica por uma potência de 10, de acordo com a periodicidade. Logo após, ao subtrair a dízima multiplicada, pela primeira, é eliminado a parte periódica. Os passos para a resolução seguem como nos exemplos 1 e 2.

Exemplo 1) 0,454545... (dízima periódica simples)

Para encontrar a fração geratriz, primeiro é necessário relacionar a dízima periódica com uma incógnita.

$$x = 0,454545... \quad (1)$$

Em seguida, multiplica-se os dois lados da igualdade por um múltiplo de 10, de acordo com a quantidade de algarismos do período.

$$100x = 45,454545... \quad (2)$$

Subtrai-se a equação (2) da equação (1).

$$\begin{array}{r} 100x = 45,454545... \\ - \quad x = 0,454545... \\ \hline 99x = 45 \end{array}$$

$$x = \frac{45}{99}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 0,454545... é $\frac{5}{11}$.

Exemplo 2) 0,47777... (dízima periódica composta)

Primeiro é necessário relacionar a dízima periódica com uma incógnita.

$$x = 0,47777...$$

Em seguida, multiplica-se os dois lados da igualdade por um múltiplo de 10, de acordo com a quantidade de algarismos que não fazem parte do período.

$$10x = 4,7777...$$

Separa-se a parte inteira da decimal.

$$10x = 4 + 0,7777... \quad (3)$$

Resolve-se a dízima periódica simples $0,7777\dots$ como no exemplo anterior.

Obtém-se da equação (3):

$$10x = 4 + \frac{7}{9}$$

$$x = \frac{43}{90}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica $0,47777\dots$ é $\frac{43}{90}$.

Outro método possível para encontrar a fração geratriz, se dá por meio de séries geométricas, parte da ementa da disciplina de Cálculo, onde se transforma a dízima periódica em uma soma de termos, de modo que cada termo é obtido a partir do anterior multiplicado por uma razão r .

Conforme define Thomas (2012, p.15), a série geométrica é da forma (1) apresentada abaixo, onde a e r são números reais fixos e $a \neq 0$. Se $|r| \neq 1$, pode-se determinar a convergência ou divergência da série da seguinte maneira:

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n \quad (1)$$

Multiplicando a igualdade por r ,

$$rs_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1} \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2),

$$s_n - rs_n = a + ar^{n+1}$$

Fatorando,

$$s_n(1-r) = a(1+r^{n+1})$$

$$s_n = \frac{a(1+r^{n+1})}{1-r}$$

Se $|r| < 1$, então r^{n+1} tende a zero quando n tende ao infinito e, portanto

$$s_n \text{ tende a } \frac{a}{1-r}.$$

Aqui, como a dízima será escrita em forma de uma série, logicamente será convergente, portanto a demonstração limita-se somente para este caso.

Logo, se $|r| < 1$, então .

Para encontrar a fração geratriz a partir desse método, seguem os exemplos 3 e 4, sendo utilizadas as mesmas dízimas dos exemplos 1 e 2, respectivamente.

Exemplo 3) 0,454545... (dízima periódica simples)

Como mostrado anteriormente, a dízima periódica pode ser escrita como uma série geométrica, logo:

$$0,454545... = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \dots$$

O que pode ser escrito da forma:

$$0,454545... = 0,45 \left(\frac{1}{100} \right)^0 + 0,45 \left(\frac{1}{100} \right)^1 + 0,45 \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \dots$$

Com isso, consegue-se determinar o termo geral da sequência, que somando seus termos infinitos, resulta em uma expressão denominada série infinita:

A soma dessa série portanto é dada por:

$$\frac{0,45}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{0,45}{\frac{99}{100}} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

Logo, a fração geratriz da dízima periódica 0,454545... é $\frac{5}{11}$.

Exemplo 4) 0,47777... (dízima periódica composta)

Neste caso, o processo é análogo ao do primeiro método, que consiste em separar a parte periódica da dízima, da parte não periódica, transformando assim em uma dízima periódica simples.

$$0,47777... = 0,4 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots$$

Que pode ser escrito da forma:

$$0,47777... = 0,4 + 0,07 \left(\frac{1}{10} \right)^0 + 0,07 \left(\frac{1}{10} \right)^1 + 0,07 \left(\frac{1}{10} \right)^2 + \dots$$

Neste caso, após o primeiro termo obtém-se uma série geométrica, então, consegue-se denominar o termo geral da série: .

A soma dessa série portanto é dada por:

$$\frac{0,07}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,07}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{90}$$

Logo, segue que a igualdade é válida:

$$0,47777... = \frac{4}{10} + \frac{7}{90} = \frac{43}{90}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 0,47777... é $\frac{43}{90}$.

Com isso, consegue-se mostrar que os dois métodos servem também para uma mesma finalidade, ficando explícito que existe uma relação entre as abordagens da Educação Básica e do Ensino Superior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

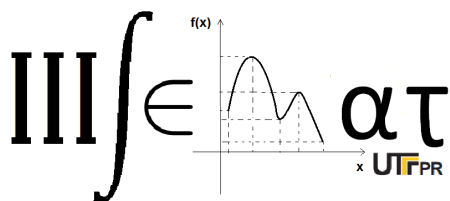
Procurando sanar problemas de aplicação de conteúdos, as APCCs surgem como alternativa ao estudo de maneiras de aproveitamento do que o licenciando vê em sala de aula. Para exemplificar, foi utilizado um método de resolução para obtenção de fração geratriz de uma dízima periódica, visto na disciplina de Cálculo, que pudesse também ser aplicado na Educação Básica, dentro da sua realidade.

Assim, ao abordar dois métodos de resolução de um exercício, percebe-se a necessidade de propiciar aos futuros professores momentos destinados a conhecerem a realidade na qual atuarão. Desta forma, é imprescindível que tenham experiências práticas desde o início do processo de sua formação, principalmente em disciplinas como Álgebra, Cálculo, Geometria Analítica, consideradas mais difíceis.

As APCCs propiciam estes momentos, mostrando que é possível conectar os conteúdos do Ensino Superior com os conteúdos da Educação Básica, antes mesmo dos Estágios Obrigatórios. Assim, ao fazer relações de conteúdos aprendidos, o licenciando deve fazer uma reflexão, afim de desenvolver uma análise crítica reflexiva referente à prática escolar no ensino básico, confrontando os conteúdos discutidos em sala na graduação.

REFERÊNCIAS

- ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, A. J. **Praticando a Matemática** - 8º ano – 3. ed. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. – 3ª ed. – São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. **Parecer CNE/CES n. 15, de 2005**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/pces0015_05.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- BRASIL. **Resolução CNE/CP n. 2, de 2002**. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf>>. Acesso em: 23 abr. 2015.
- DANTE, L. R. **Projeto Telaris: Matemática** - oitavo ano – 1ª ed. – São Paulo: Ática, 2012.
- PAIVA, M. **Matemática – Paiva** – 1ª ed. – São Paulo: Moderna, 2009.



III Semana da Matemática da UTFPR – Toledo
A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Toledo, 04 a 8 de maio de 2015

SANTOS, J. R. V.; LINS, R. C. **Formação Matemática do Professor nas Disciplinas de Conteúdo Matemático de um Curso de Licenciatura em Matemática**. EBRAPEM – 2008. Rio Claro. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/272-1-A-GT1_Viola%20dos%20Santos_ta.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2015.

STEWART, J. **Cálculo – Volume 2**. – 6ª ed. – São Paulo: Cengage – Learning, 2010.

THOMAS, G. B. **Cálculo – Volume 2**. – 12ª ed. – São Paulo: Pearson, 2012.

Um Estudo Geoestatístico sobre a Produtividade da Soja Utilizando a Validação Cruzada

Viviane Vanessa Dohl
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 viviane@alunos.utfpr.edu.br

Rosângela Aparecida Botinha Assumpção
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 rosangelaa@utfpr.edu.br

1 Introdução

A agricultura de precisão vem crescendo a cada dia entre os processos de análises do solo e produtividade. Atualmente os estudos que a envolvem consistem na compreensão da distribuição espacial dos dados que são coletados em uma referida área de terra. Esses dados são analisados de modo que possamos inferir sobre toda a área com uma determinada precisão e de um jeito que o agricultor possa tratar cada parte de sua área de acordo com as necessidades específicas do local.

Nesse sentido, a geoestatística vem com o propósito de ser instrumento para esse tipo de análise, desde que os dados coletados apresentem algum tipo de dependência espacial.

A geoestatística consiste basicamente em um estudo sobre as variáveis regionalizadas, que nada mais é do que uma função espacial numérica que varia de um local para outro com uma certa continuidade, ou seja, existe uma função que é capaz de expressar essa dependência. Esta função é denominada de modelo espacial linear. Os modelos mais comuns são o exponencial, gaussiano e esférico.

O método da validação cruzada permite identificar qual é o modelo espacial linear que melhor representa os dados reais, permitindo assim que se faça boas inferências. Esse método consiste em retirar cada um dos pontos da amostra, separadamente, e estimá-lo. faz-se isso com todos os pontos da amostra. À partir do valor do ponto amostrado e o estimado são calculados o erro médio, erro médio reduzido, desvio padrão do erro médio, desvio padrão do erro médio reduzido e o erro absoluto, os quais são utilizados para identificar o melhor modelo espacial linear.

2 Referencial Teórico

Por geoestatística entende-se o estudo feito sobre determinada amostra, quando é identificada continuidade espacial, ou seja, quando é verificada um grau de organização ou continuidade, e então parâmetros como a média e o desvio padrão da estatística clássica não são suficientes para representar o fenômeno em questão, pois tratam os dados como independentes. Para que possamos determinar qual das estatísticas que utilizaremos: clássica ou espacial, usaremos o semivariograma que expressa essa dependência espacial entre os dados da amostra [1]

Segundo [2], a geoestatística se baseia em conceitos probabilísticos, onde acaba utilizando os dados coletados para estimar a correlação espacial e para fazer as estimativas. Na geoestatística o ideal é que os dados coletados na área desejada sejam consistentes em toda a área.

A geoestatística é utilizada para estimar incertezas associadas a locais onde não foram retiradas amostras e ainda prever valores nesses locais. Para que possamos estimar valores desconhecidos, ou seja, para predizermos valores de um certo ponto no espaço de onde não foi coletada a amostra, a partir dos dados amostrais, devemos verificar a variabilidade dos dados e postular um modelo que descreva essa variabilidade, estimar os parâmetros do modelo se existirem e por fim, caso o modelo seja aceito, ainda nos resta testá-lo e prever com embasamento estatístico as informações obtidas por esse processo.

Uma ferramenta importante e principal para a geoestatística é o semivariograma que é definido por [4] como um estimador da função semivariância para variáveis regionalizadas com distribuição normal de probabilidade apresentado pela equação 1:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(s_i) - Z(s_i + h)]^2 \quad (1)$$

o semivariograma é construído de acordo com os parâmetros: $(a = g(\varphi_3))$, $(C = \varphi_1 + \varphi_2)$ e (φ_1)

O alcance $(a = g(\varphi_3))$ é a distância a partir do qual os valores passam a ser independentes, ele separa os campos estruturados dos campos aleatórios. Em outras palavras ele reflete o grau de homogeneização entre as amostras [2].

O patamar $(C = \varphi_1 + \varphi_2)$ é o ponto de estabilidade do semivariograma, igual a variância dos valores da variável corresponde ao ponto em que o mesmo estabiliza. Deste ponto em diante, considera-se a não existência de dependência espacial entre as amostras.

Por fim, o efeito pepita (φ_1) é atribuído a erros de mensuração aliado ao fato dos dados não terem sido coletados em intervalos pequenos para representar o comportamento espacial do fenômeno [7]. É o valor da função semivariograma na origem $(h=0)$. Teoricamente esse valor deveria ser zero, pois duas amostras tomadas nas mesmas coordenadas não deveriam possuir diferença entre as distâncias.

Dessa forma, o patamar $(C = \varphi_1 + \varphi_2)$, o alcance $(a = g(\varphi_3))$ e o efeito pepita (φ_1) , se tornam os parâmetros que devemos buscar ao quantificar a dependência das variáveis regionalizadas, matéria prima do estudo.

O semivariograma mostra características discretas dos pares: valor e localização, porém esse gráfico é contínuo e não pontual como parece, para tanto é necessário que ajustemos uma função, ou modelo, como também podemos nos referir, de modo que se aproxime da melhor maneira possível dos pontos do semivariograma.

Uma das características que esse modelo, função, precisa garantir é que as variâncias calculadas sejam todas positivas, e então temos três modelos que se adaptam a maioria das situações encontradas, são eles: esférico, exponencial e gaussiano.

Para que possamos analisar a melhor adaptação do modelo a ser utilizado, precisamos verificar os quatro parâmetros essenciais para que definamos a estrutura de dependência espacial, são eles:

i) **Efeito pepita** (φ_1) : na teoria, quando a distância h é zero, o valor da semivariância é igual a zero, porém, na prática, isto não acontece e a medida que h aproxima-se de zero, o valor do semivariograma aproxima-se de um valor positivo chamado efeito pepita (φ_1) . [5].

ii) **Contribuição** (φ_2) : é denominada variância de dispersão e representa as diferenças espaciais entre os valores de uma variável tomada em dois pontos separados por distâncias cada vez maiores. [5]

iii) **Alcance** $(a = g(\varphi_3))$: é a distância dentro da qual as amostras apresentam dependência espacial, ou seja, o alcance a marca a distância a partir da qual os dados devem ser analisados usando a Estatística Clássica, e não mais a Geoestatística. O alcance é essa função do parâmetro φ_3 ; E g representa uma função. [5]

iv) **Patamar** $(C = \varphi_1 + \varphi_2)$: é o valor máximo do semivariograma correspondente ao seu alcance, assíntota horizontal do modelo linear em questão. [5]

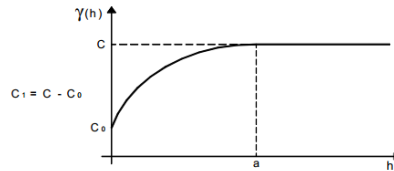
Considerando os parâmetros acima temos os modelos:

a) Modelo Esférico

Este modelo apresenta crescimento rápido na origem e atinge o patamar a $2/3$ do alcance. Segundo [6], este modelo é válido em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e tem como expressão a Equação (2):

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{\varphi_3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\varphi_3} \right)^3 \right], & 0 < h \leq \varphi_3 \\ \varphi_1 + \varphi_2, & h > \varphi_3 \end{cases} \quad (2)$$

Figura 1: Representação Gráfica do Modelo Esférico.

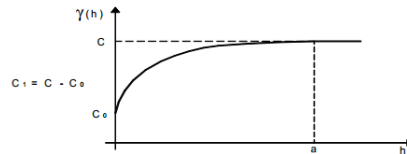


b) Modelo Exponencial

Este modelo apresenta comportamento aproximadamente linear na origem e atinge o patamar assintoticamente com alcance prático definido como a distância na qual o valor do modelo é 95% de φ_2 , sendo o alcance prático dado por $a = 3\varphi_3$. Este modelo é válido em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ [6], e tem como expressão a Equação (3):

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{\varphi_3}\right) \right], & 0 < h \leq \varphi_3 \\ \varphi_1 + \varphi_2, & h > \varphi_3 \end{cases} \quad (3)$$

Figura 2: Representação Gráfica do Modelo Exponencial.

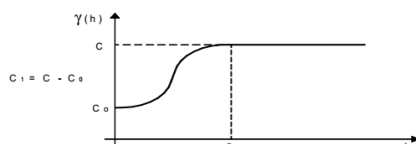


c) Modelo Gaussiano

O Modelo gaussiano apresenta comportamento parabólico na origem e é utilizado para modelar um fenômeno extremamente contínuo. Também atinge o patamar apenas assintoticamente e o alcance prático é dado por $a = \sqrt{3}\varphi_3$. Este modelo é válido em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ [6] e tem como expressão a Equação (4):

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \left\{ 1 - \exp\left[-\left(\frac{h}{\varphi_3}\right)^2\right] \right\}, & 0 < h \leq \varphi_3 \\ \varphi_1 + \varphi_2, & h > \varphi_3 \end{cases} \quad (4)$$

Figura 3: Representação Gráfica do Modelo Gaussiano.



Segundo [3], a validação cruzada é um método que permite comparar valores amostrados e estimados para que o melhor modelo de estimação seja escolhido.

Esse método seleciona o modelo que melhor descreve a dependência espacial das variáveis em função das distâncias, e consiste em supor que um dado não tenha sido observado e então retira-se ele da amostra e obtém-se uma nova estimativa com base nos dados restantes. Fazemos isso com todos os pontos da amostra e assim, para todos eles existirá o valor real e o valor estimado, e portanto conseguiremos o erro de estimação e poderemos optar pelo melhor modelo semivariográfico [7].

Este procedimento de "deixar um de fora" é repetido para todas as amostras disponíveis.

3 Materiais e Métodos

A amostra de dados que analisaremos se refere produtividade da soja obtida no ano agrícola 2004/2005, em uma área de Latossolo Vermelho Distroférico (EMBRAPA, 2009) com 57 ha, localizada no município de Cascavel - PR, com coordenadas geográficas de 24,95° sul de latitude e 53,57° oeste de longitude, com altitude média de 650 m. O clima da região apresenta-se como temperado mesotérmico e úmido, tipo climático Cfa (Köppen) e a temperatura anual média de 21 °C. O levantamento topográfico e a verificação do posicionamento dos locais de amostragem foram realizados por meio de receptores GPS, pelo método estático com correção diferencial pós-processada. A grade amostral regular espacialmente georreferenciada utilizada nessa pesquisa foi denotada pelo valor em metros da distância entre os pontos amostrais, isto é, 75 × 75 m, onde obteve-se o número de amostras de 66 para a referida grade amostral.

A produtividade da soja foi obtida em cada ponto georreferenciado. Essas informações foram utilizadas para realização de toda análise estatística e posterior confrontação dos resultados. A variedade da soja COODETEC 216 (CD 216) foi semeada na área. O processo de análise utilizará o *software* R.

4 Resultados e Discussões

A amostra caracterizada se refere a produção da soja em toneladas por hectare que permite avaliar especificamente as áreas de terra para que se possa aplicar as técnicas agrícolas preditas para aquele local.

A análise exploratória de dados é apresentada na tabela a baixo de acordo com as estatísticas descritivas.

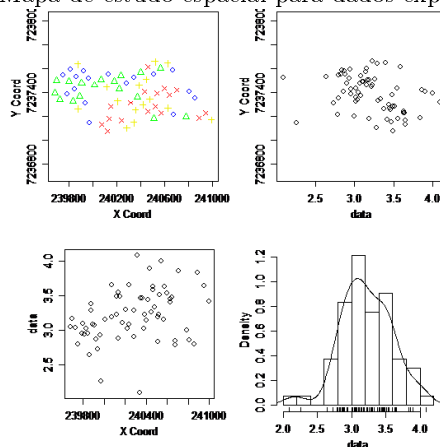
Tabela 1: Estatísticas descritivas amostra experimental

Estatísticas	Amostra Experimental
n	66
Média	3,217
Mediana	3,190
Q1	2,963
Q3	3,478
Mínimo	2,090
Máximo	4,090
Desvio Padrão	0,376
CV%	11,708

n: número de elementos amostrais; Q1: primeiro quartil; Q3: terceiro quartil; CV: coeficiente de variação.

Para compreendermos a distribuição espacial de nossos dados, homogeneidade, dispersão, índices de normalidade e outras características do conjunto apresentaremos o gráfico abaixo:

Figura 4: Mapa de estudo espacial para dados experimentais.



O primeiro gráfico nos mostra a distribuição dos dados espacialmente de acordo com a proximidade, vemos que eles estão distribuídos de forma aleatória e não é possível verificar nenhum sinal de anisotropia, ou seja, a amostra aparenta ser isotrópica.

O segundo e terceiro gráfico são capazes de nos mostrar se há alguma tendência nos dados quando plotados nas direções dos eixos cartesianos, ou seja, é possível verificar que a hipótese de isotropia observada no primeiro gráfico é fortalecida.

Por fim o quarto gráfico trata-se de um histograma que permite visualizar um pequeno indício de um histograma leptocúrtico com poucos dados acima da curva de probabilidade.

A validação cruzada é desenvolvida na tabela abaixo onde foi realizado o ajuste dos modelos pelo método da máxima verossimilhança:

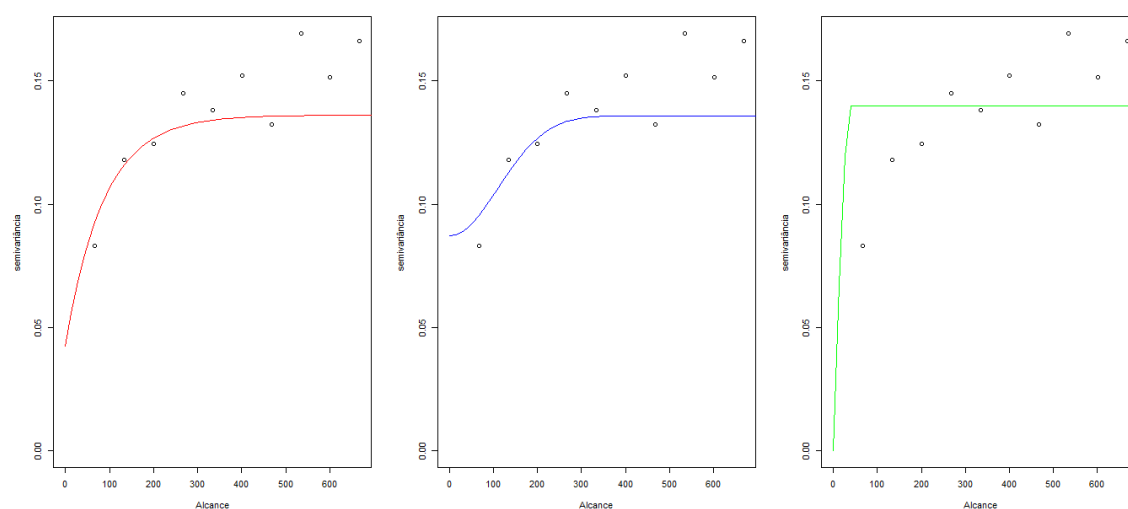
Tabela 2: Validação cruzada dados experimentais

Modelo	φ_1	φ_2	$(g(\varphi_3))$	EM	ER	S_{EM}	S_{ER}	EA	ML
Exponencial	0.0424	0.0937	261.7293	-0.0017	-0.0024	0.3447	1.0173	16.5131	-24,04
Esférico	0.0	0.1398	40	3,366e-17	8,709e-17	0,3824	1,0171	19,7944	-28,71
Gaussiano	0.0871	0.0488	266.1338	-0.0018	0.0026	0.34379	1,0153	16.0445	-23,90

φ_1 : efeito pepita; φ_2 : contribuição; $(g(\varphi_3))$: alcance; EM : erro médio; ER : erro reduzido; S_{EM} : desvio padrão do erro médio; S_{ER} : desvio padrão do erro reduzido e EA : erro absoluto.

Analisando e comparando os valores dos parâmetros obtidos (erro médio, erro reduzido, desvio padrão dos erros médios, desvio padrão dos erros reduzidos, erro absoluto e a máxima verossimilhança) é possível perceber que o método da validação cruzada determina que o modelo gaussiano é o que melhor representa o conjunto de dados experimentais, o que pode ser confirmado visualmente na figura 5 abaixo, onde o modelo gaussiano melhor descreve a dependência espacial.

Figura 5: Modelos exponencial, gaussiano e esférico ajustados respectivamente ao semivariograma da amostra experimental



5 Conclusões

É possível com o método de validação cruzada descrever o comportamento de um conjunto de dados, de modo que possamos inferir com determinada confiança sobre o comportamento dos dados. Em geoestatística se faz importante prezar pelos bons ajustes para que não tenhamos problemas futuros, uma vez que os estudos e as conclusões aqui obtidas se fazem úteis para a agricultura e serão aplicadas em algum momento na área de terra.

Com este trabalho conseguimos determinar que na área de terra em estudo nossos pontos apresentam comportamento gaussiano e fica para um próximo trabalho a sequência após determinado o melhor modelo.

Referências

- [1] VIEIRA, S. A. Geseostatística Aplicada a Agricultura de Precisão. **GIS Brasil**, v.98, 2000.
- [2] ANDRIOTTI, J. L. S. Introdução a Geostatística. **Acta Geologica Leopoldensia**, v.11, 1989.
- [3] ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. **An introduction to applied geoestatistics**. Ames, USA: Oxford university press, 1989. 561 p
- [4] MATHERON, G. Principles of geoestatistics. **Economic geology**, Society of Economic Geologists, v. 58, n.8, p.1246-1266, 1963
- [5] ASSUMPÇÃO, R. A. Influência local em um modelo espacial linear da produtividade da soja utilizando distribuição t-student naimara v. do prado, miguel a. uribe-opazo2 manuel galea 3. SciELO Brasil, 2010.
- [6] CRESSIE, N. Geoestatistics **The American Statistician**. Taylor Francis Group, v.43, n.4, p.197-202, 1989
- [7] SANTANA, R. A. Avaliação de técnicas geoestatísticas no inventário de povoamento de tectona grandis If. Universidade Federal de Viçosa, 2011.

ENTRELAÇAMENTO ENTRE OS CONTEÚDOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL E O PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Simone Ribeiro da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
simone.ribeiro96@hotmail.com

Thayara Karine Galdino Felipe
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
thayara12345@gmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Este trabalho procura apresentar os entrelaçamentos possíveis entre a Análise Combinatória, especificamente os princípios multiplicativo e aditivo da contagem e, a Lógica Proposicional, de modo que, ao verificar tais relações, esperamos que elas possam beneficiar o ensino destes princípios de forma a tornar mais fácil a compreensão dos mesmos pelos alunos.

A escolha deste tema se deu pelo fato de que os alunos do ensino médio sentem muitas dificuldades em relação aos conteúdos de Análise Combinatória, não conseguindo desenvolver um bom raciocínio matemático frente às diversas situações que são expostas na vida escolar.

Dessa forma, será feita inicialmente uma abordagem do conteúdo de lógica proposicional, o qual pode ser utilizado para explicar os princípios fundamentais da Análise Combinatória. Em seguida, abordaremos ainda a importância da Análise Combinatória na formação do aluno e por fim, apresentamos algumas discussões sobre o assunto.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Segundo Martins (2012, p. 11-13) pode-se dizer que o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) seja o primeiro a abordar a lógica nos termos atuais. Os estudos da lógica não tiveram grandes avanços durante o período da Idade Média, entretanto, com Leibniz (1646-1716), temos obras suas que deram início a uma nova era na história da lógica. George Boole (1815- 1864) publica seu livro *Análise Matemática da lógica* (1847). Algum tempo

depois, Gottlob Frege (1848-1925) destaca-se na área da lógica sendo considerado o fundador da Lógica Matemática ou Simbólica, sendo quem se aprofundou nos conceitos logicistas. Também obtiveram destaque no estudo da lógica após Frege, os filósofos: Bertrand Russell (1872-1970); Alfred N. Whitehead (1861-1947); Kurt Gödel (1906-1978); David Hilbert (1862-1943); Alfred Tarski (1902-1983); Rudolf Carnap (1891-1970); Gerhard Gentzen (1909-1945) e Stanisław Jaśkowski (1906-1965).

A lógica como área de conhecimento tem como objeto de estudo o discurso, considerando a coerência deste sem necessitar de algumas informações adicionais sobre o mesmo. Neste sentido, por meio do estudo da lógica, pode-se concluir se um discurso é ou não uma verdade lógica, sem se preocupar em considerar do que se trata o discurso, os objetos ou os sujeitos que o constituem, ou ainda, as peculiaridades desses. Para tanto, utiliza-se de linguagens artificiais, ou linguagens formais, que possibilitam este tipo de análise. Assim sendo, pode-se dizer que “a lógica se ocupa das verdades formais” (MARTINS, 2012, p. 2).

Em relação à lógica matemática, esta estuda algumas sentenças as quais nem sempre estão voltadas à matemática. Este estudo pode ainda ser chamado de Lógica Sentencial ou Proposicional e para estudar uma proposição é necessário, de início, entender o seu conceito, ou definição, assim chama-se proposição “todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo” (ALENCAR FILHO, 2002, p. 11). Desse modo, uma proposição pode ser entendida (tratada) como sendo uma afirmação, ou uma sentença declarativa.

Para a identificação de uma proposição, são considerados três princípios fundamentais: o princípio da identidade, o princípio da não-contradição e o princípio do terceiro excluído. Estes princípios, ou axiomas, garantem respectivamente que, uma proposição é igual a si mesma, ou seja, se ela é verdade, então ela é verdade, e se ela é falsa, então ela é falsa; e que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; e que a proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existe uma terceira possibilidade. Nesta perspectiva, chamamos de valor lógico, ou valor verdade, o julgamento de falsidade (F) ou de verdadeiro (V) que uma proposição assume.

No estudo das proposições é comum deparar-se com proposições simples e com proposições compostas, em que as proposições simples são aquelas que não possuem outra proposição integrada a ela, e são representadas por letras latinas minúsculas; e proposição composta é caracterizada como sendo a proposição formada por duas ou mais proposições simples, expressas por letras latinas maiúsculas. No que se refere a esta última

há a presença de conectivos lógicos (e, ou, não, se ... então, ... se e somente se..., que são os mais frequentes) que conectam as proposições simples, formando a proposição composta. Além disso, esses conectivos são importantes também para determinar o valor lógico desse tipo de proposição.

Diante disso, ressalta-se um aspecto muito importante em relação aos conectivos e a proposição composta, pois o valor lógico desta está relacionado unicamente com a junção do valor lógico das proposições simples que a compõe (ALENCAR FILHO, 2002, p. 12).

Os conectivos lógicos (e, ou, não, se... então,... se e somente se...) ditos anteriormente, são chamados respectivamente de conjunção, disjunção, negação, condicional e bicondicional e tendo como apoio os pensamentos de Gerônimo e Franco (2008, p. 18, 19, 20) abordar-se-á como entender o valor lógico dos conectivos “e” e “ou”, os quais serão enfocados no ensino dos princípios aditivos e multiplicativos da Análise Combinatória.

Assim, no que se refere ao conectivo conjunção (simbolicamente, expresso por $\wedge$), este conecta duas proposições simples “p” e “q” com a palavra “e”, nesse sentido a conjunção da proposição p com a proposição q ($p \wedge q$), que é uma nova proposição, assume um valor lógico verdadeiro somente quando ambas forem verdadeiras.

O conectivo disjunção (simbolicamente expresso por $\vee$) combina duas proposições simples “p” e “q” com a palavra “ou”, assim a disjunção da proposição p com a proposição q, assume um valor lógico verdadeiro quando uma das duas proposições for verdadeira.

Tendo conhecimento sobre esses conectivos, é possível determinar se uma proposição é falsa ou verdadeira, o que possibilita o entendimento de diversas situações matemáticas, nas quais estes conectivos estão expostos, como é o caso das atividades ou problemas que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo da Análise Combinatória que são ensinados no Ensino Médio.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é vista como uma importante ferramenta nas diversas áreas do conhecimento científico por apresentar muitas aplicações. E nesse sentido, é importante que a aprendizagem deste conteúdo ocorra de maneira significativa para o aluno, a fim de que ele possa se desenvolver intelectualmente. Segundo Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997, p. 182) o desenvolvimento da capacidade combinatória é fundamental para a

formação do pensamento formal do aluno, que é necessário para o tratamento de dados e informações à compreensão de problemas de combinatória.

Segundo Dornellas (2004, p. 20-21), podemos descrever a Análise Combinatória como sendo “o campo da matemática voltado a estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos”. Assim, a Análise Combinatória se constitui como parte fundamental da matemática, tendo em vista que necessita de um raciocínio lógico sobre situações elementares, utilizando tanto de seus métodos próprios quanto de técnicas de contagem, sendo que, para obter tais técnicas seja notadamente o objetivo principal da Análise Combinatória, conforme expõe Paiva (2009, p. 155).

Em relação a abordagem deste conteúdo no ensino médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam sua importância na formação do aluno e também o cuidado que se deve ter ao ensiná-lo a eles, dessa maneira segundo este documento:

as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio [...] (BRASIL, 1998, p. 257).

Atualmente, ensinar Análise Combinatória consiste em um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de matemática do ensino médio, pois estes, muitas vezes, passam a ideia de que um problema de Análise Combinatória condiz com determinadas formas de agrupamento, e tendo identificado a qual o problema se refere, aplica-se a fórmula correspondente. Porém, problemas de Análise Combinatória exigem, para a sua resolução, um raciocínio matemático bem desenvolvido, pois, cada um desses problemas que envolvem a combinatória consiste em um desafio para os alunos, visto que exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 6).

Dessa forma, para que o conteúdo de Análise Combinatória seja entendido pelos alunos e possa sustentar o desenvolvimento do aluno no cálculo de probabilidades, se faz necessário que os princípios da contagem sejam bem compreendidos, e nesse sentido a comunicação matemática deve servir de estratégia para facilitar a aprendizagem do aluno.

A Análise Combinatória, segundo Paiva (2009), é alicerçada no Princípio Fundamental da Contagem (PFC) também chamado de princípio multiplicativo da contagem. Este princípio consiste em uma técnica para a resolução de problemas que envolvem situações de contagem; sua principal ferramenta é a árvore de possibilidades que permite sistematizar o problema para chegar a uma solução.

Na figura seguinte, temos a resolução de um problema de Análise Combinatória por meio do diagrama da árvore de possibilidades. O problema consiste em determinar as diferentes maneiras que uma pessoa pode se vestir usando uma bermuda e uma camiseta, sendo que ela possui 2 bermudas, preta e cinza, e 4 camisetas, branca, verde, amarela e roxa (GIOVANNI; BONJORNO, 2005, p. 145). É um problema que envolve o princípio multiplicativo, o qual será abordado mais adiante.

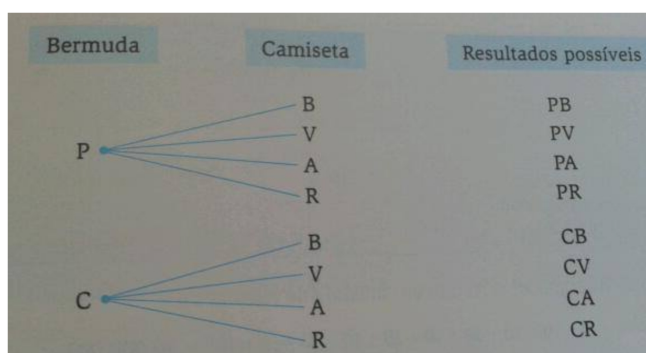


Figura 1 – Esquema empregando a árvore de possibilidades

Fonte: Giovanni e Bonjorno, 2005, p. 145.

O PFC, segundo Duro (2012, p. 28), “é o elemento fundamental do pensamento combinatório, pois é a partir dele que todas as construções cognitivas posteriores (permutações, arranjos e combinações) se constituirão para o sujeito”.

O princípio multiplicativo da contagem é abordado em alguns livros didáticos da seguinte maneira: “se um experimento E pode apresentar n resultados distintos e um experimento F pode apresentar k resultados distintos, então, o número de resultados distintos que o experimento composto de E e F pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto $n.k$ ” (PAIVA, 2009, p. 156). O mesmo autor traz ainda uma extensão do princípio multiplicativo, o qual demonstra que esse princípio vale para mais de dois experimentos.

Martins de Leonardo (2013, p. 249) aborda o princípio multiplicativo de um modo diferente considerando a ideia de ações sucessivas. Segundo ele, “considere que um

acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras de ocorrência do acontecimento é $m.n$ ”.

Outro princípio abordado para iniciar o estudo de combinatória é o princípio aditivo, que é enunciado com base em um resultado da teoria dos conjuntos. Este princípio é encontrado comumente escrito de forma a se entender que seja realizada a soma de dois conjuntos disjuntos. No livro didático de autoria de Paiva (2009, p. 159), este princípio é explicado sob forma do seguinte teorema “Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ”, o qual considera a interseção entre os conjuntos, seja ela vazia ou não, para encontrar a solução de problemas que envolvem o princípio aditivo de Análise Combinatória.

DISCUSSÕES

A lógica proposicional está presente na ideia de cada princípio.

“Será que devo multiplicar ou somar?” Esta é uma frase que muitos alunos dizem quando estão diante de problemas de contagem. Isso porque, os problemas de contagem não são sempre fáceis de resolver, porque exigem uma boa interpretação, um bom raciocínio, e assim tomar a decisão de multiplicar ou somar pode ser bem difícil.

Diante de um exemplo como esse “Uma loja de roupas masculinas vende quatro modelos diferentes de calças *jeans*. Cada calça pode ter uma das cores: preto, marrom ou azul. Quantas opções terá um consumidor interessado em comprar uma calça *jeans* nessa loja?” Como o aluno deveria interpretar esse enunciado, sem que seja necessário recorrer precisamente a fórmulas já estabelecidas, que na maioria das vezes confundem o pensamento do aluno, devido a inicialmente ele não ter entendido o que cada uma infere?

Com o apoio da lógica proposicional, em particular dos conectivos “ou” e “e”, pode-se explicar este exercício da seguinte maneira:

Como se sabe pelo enunciado do exemplo que o consumidor pode escolher entre as possibilidades somente uma calça dentre os quatro modelos (CI, CII, CIII, CIV) e uma das três cores (P, M, A), ou seja, sem utilizar o diagrama de árvore, podemos incitar o aluno a pensar que o consumidor pode escolher entre essas possibilidades: CI e P, CI e M, CI e A, CII e P, CII e M, CII e A, CIII e P, CIII e M, CIII e A, CIV e P, CIV e M, CIV e A, mas, podemos ainda utilizar neste exemplo o conectivo “ou” para conectar cada proposição conjuntiva, sugerindo a ideia de soma entre cada possibilidade, o que totaliza 12 possibilidades. Dessa maneira, como foi utilizado o conectivo “e”, tem-se a ideia de

conjunção entre duas “coisas diferentes”, formando outra “coisa nova”, formamos uma proposição composta, e ainda tem-se a ideia de escolhas sucessivas. Pode-se então mostrar ao aluno que quando a situação, para ser resolvida, depende de que a esquematizemos desta maneira, utilizar-se-á do princípio multiplicativo. Depois disso, é interessante apresentar o princípio multiplicativo, definido anteriormente, para que desta forma este possa ficar mais claro ao aluno.

Para explicar como usar a lógica proposicional no ensino do princípio aditivo da contagem, será utilizado também o exemplo a seguir:

Sabendo que uma cidade B tem três saídas ao Oeste e duas ao Leste, apenas. De quantas maneiras é possível sair desta cidade?

Neste exemplo, pelo enunciado podemos entender que para sair desta cidade pode-se utilizar as três saídas ao oeste (OI, OII, OIII) ou as duas saídas ao leste (LI, LII), ou seja, teríamos as seguintes possibilidades: OI ou OII ou OIII ou LI ou LII, totalizando 5 maneiras de sair desta cidade. Assim, quando a situação depende da utilização do conectivo “ou”, somente, para ser resolvida, entende-se que estamos diante de um problema de contagem que utiliza o princípio aditivo para a sua resolução. Visto que, o “ou” com base no que traz a lógica proposicional assume a ideia de que, de acordo com o exemplo, é a saída x ou a saída y, e como realmente se optará por uma saída, independente de qual saída se tomará, sendo que a que for escolhida tem valor verdadeiro, e a que não foi excluída tem valor falso, a proposição ainda continua sendo verdadeira. Tendo em vista isso, pode-se apresentar o princípio aditivo de contagem conforme o enunciado anteriormente visto a compreensão do aluno quanto o emprego do conectivo “ou” para a resolução do exemplo.

CONCLUSÃO

Diante do exposto, é possível evidenciar o quanto a lógica pode ser relevante no aprendizado de conteúdos matemáticos e o quanto ela pode oferecer. Inclusive em relação ao ensino dos princípios aditivo e multiplicativo da contagem, que são fundamentais para a aprendizagem dos conteúdos posteriores como arranjo, permutações e combinações.

Assim, utilizar a lógica proposicional para explicar os princípios aditivos e multiplicativos pode ser um facilitador na compreensão dos mesmos pelos alunos, e, portanto, interrogações como “será que devo somar ou multiplicar?” não sejam mais tão comuns entre os alunos, pois estes terão compreendido o que cada princípio traz e então saberão distinguir diante de situações matemáticas, quais princípios utilizar de maneira correta.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação a lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics**, v. 32, p. 181-199, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

DORNELLAS, Augusto César Barbosa. Resolução de problemas em Análise Combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio. In: Encontro Nacional de Educação matemática, VIII, 2004. Recife-PE. **Anais**. Recife-PE, 2004. Disponível em: <<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC46033050444.pdf>> . Acesso em: 24 abr. 2015.

DURO, Mariana Lima. **Análise Combinatória e construção de possibilidades: O raciocínio formal no ensino médio**. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/49729/000836304.pdf>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

GERÔNIMO, João Roberto; FRANCO, Valdeni Soliani. **Fundamentos de matemática: uma introdução à lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções**. 2º ed. Maringá: Eduem, 2008.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNIO, José Roberto. **Matemática completa**. 2º ed. São Paulo: FTD, 2005.

MARTINS DE LEONARDO, Fabio. **Conexões com a matemática**. 2º ed. São Paulo: Editora Moderna, 2013.

MARTINS, Márcia da Silva. **Lógica: Uma abordagem introdutória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2012.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1º ed. São Paulo: Moderna, 2009.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. In: Encontro Nacional de Educação matemática, VIII, 2004. Recife-PE. **Anais**. Recife-PE, 2004. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

UMA PROPOSTA DE ENSINO: HALLOWEEN E A MATEMÁTICA

Renata Vanessa Souza Gonçalves Pereira
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo
 renatinhatematica@hotmail.com

Leticia Langaro
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Toledo
 lety.lnl@hotmail.com

Renato Francisco Merli
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
 renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

As datas comemorativas são mencionadas e muitas vezes comemoradas em diversas instituições que possuem Ensino Fundamental Anos Iniciais, mas nos Anos Finais do Ensino Fundamental essa prática tem se distanciado, sendo apenas mencionadas em algumas disciplinas como: Língua Portuguesa, Inglês e Arte. Os professores de matemática por sua vez deixam passar despercebidos, por achar que é algo distinto dos conteúdos a serem ensinados em sala de aula.

Neste trabalho apresentaremos uma atividade interdisciplinar de Investigação Matemática, cuja data comemorativa nos remete ao tema do *Halloween*, ou também conhecido como Dia das Bruxas. Onde segundo o site Brasil Escola essa comemoração surgiu na atual Irlanda, sendo comemorada no dia 31 de outubro, que, no Brasil, também se comemora o dia dos santos.

Primeiramente iremos expor os principais conceitos de Investigação Matemática, como a definição e a forma de se trabalhar em sala de aula. Em seguida, falaremos um pouco mais sobre o dia do *Halloween*, e para finalizar colocaremos a proposta da atividade que pode ser aplicada tanto em uma sala de aula regular, quanto em uma Sala de Apoio, em turmas do 7º ano do Ensino Fundamental II.

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM ATIVIDADES

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13), “investigar é procurar conhecer o que não se sabe”, por meio de pesquisa e descoberta. A investigação, nesse sentido, pode abranger diversos caminhos, como por exemplo, pesquisas desenvolvidas na internet, nos

livros e em revistas. Em última análise, a todo o momento investigamos sem nem mesmo nos darmos conta disso.

Quando se fala especificamente em Investigação Matemática temos uma investigação matemática em sala de aula na qual os alunos através de um material, generalizam para um problema dado pelo professor, utilizando conceitos previamente estabelecidos pelo professor ou por ele. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13) expõem que a “investigação matemática consiste em descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”.

Nesse contexto, cabe ressaltar que é de suma importância que um professor de matemática ou de qualquer outra área do ensino, utilize em suas aulas a investigação e também a interdisciplinaridade¹, pois faz com que os alunos se envolvam e tenham vontade de participar, interagindo, investigando por si mesmos, sem a intervenção direta e corriqueira do professor. É com esse tipo de atividades (investigativas) que o conhecimento se concretiza. Segundo Braumann (1945, p. 104 *apud* PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 19), “aprender matemática não é simplesmente compreender a matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigações de natureza matemática”.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20),

a investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado.

Com isso podemos perceber que para se realizar a investigação matemática, devemos seguir alguns passos, estes que irão facilitar a aplicação e o entendimento dos alunos. É necessário que o aluno tenha conhecimento do que está sendo abordado ou aplicado pelo professor, para que seja realizada uma melhor exploração do que se pede afim de que os alunos possam investigar. Após a exploração eles farão uso do que foi compreendido, das hipóteses levantadas “testando” e validando.

¹ Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNs) a interdisciplinaridade vai além da justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evita a diluição das mesmas de modo a se perder em generalidades.

A interdisciplinaridade é uma temática, sobre a forma de ensino em sala de aula, é uma forma de compreender mais facilmente as diferentes áreas do conhecimento e com isso estar sempre em constante investigação do saber. Traz consigo novos conhecimentos através de sua prática, segundo Tomaz e David (2008, p. 27) “a interdisciplinaridade é analisada na ação dos sujeitos e quando participam, individualmente ou coletivamente, em sistemas interativos”.

Para melhor compreensão de como se trabalhar com uma atividade investigativa, apresentamos na seção seguinte, um exemplo de tema que pode ser utilizado como estopim desencadeador de uma discussão para o ensino de Matemática. Cujas atividades propostas trabalharão a interdisciplinaridade, com o Tema *Halloween* e o cálculo da área do caixão do Drácula.

HALLOWEEN

Segundo o site InfoEscika o Halloween, ou Dia das Bruxas, como é conhecido no Brasil, é uma forte tradição cultural nos Estados Unidos, mas surgiu entre os Celtas (na região onde hoje fica a Irlanda) a cerca de 2500 anos.

Segundo o site Brasil Escola, acredita-se que na passagem dessa noite as almas saem de seus túmulos e partem pelas ruas amedrontando todos aqueles que estão por perto. Já no site Info Escola, a jornalista Thais Pacievitch afirma que:

o *Halloween* foi introduzido nos Estados Unidos por imigrantes irlandeses, em 1840. Os vínculos com a tradição celta, e mesmo com a religiosidade incutida pela Igreja foram se perdendo com o passar dos anos. Atualmente, o Halloween é mais uma tradição de cunho comercial. No dia 31 de outubro as crianças saem para as ruas fantasiadas, batendo na porta das casas, e dizendo a frase tradicional: “travessuras ou gostosuras”, para ganhar doces. Entre os adultos, é comum a decoração das casas e a troca de presentes.

Ainda segundo o site Brasil Escola o dia das Bruxas se infiltrou no Brasil de uma:

forma tímida, pois o Brasil, país que celebra as coisas boas da vida, não se vê em meio a festividade aos mortos. Apesar de sua pequena influência, pode ser vista em escolas, clubes, casas noturnas e shoppings de várias cidades, mas como dito anteriormente, não adquire força expressiva, já que nem o folclore local é efetivamente comemorado

PROPOSTA DE UMA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Propomos uma atividade investigativa interdisciplinar direcionada ao 7º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais, podendo ser aplicada na sala de aula regular ou na sala de apoio². A atividade é voltada para o dia do *Halloween*, então sugerimos que o professor

² O Programa da Sala de Apoio à Aprendizagem tem como objetivo atender às defasagens de aprendizagem apresentadas pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, no que se refere aos conteúdos básicos das disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática. Disponível em: < <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=28>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

divulgue e combine com seus alunos antes para que todos venham a caráter, a fim de promover uma atividade dinâmica e despertar a curiosidade dos alunos para esta atividade.

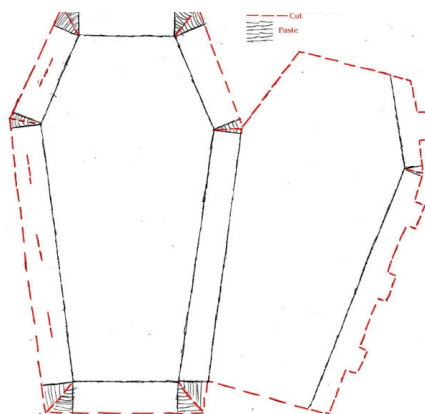
Para proporcionar um ambiente mais dinâmico e que todos possam participar, aconselhamos que o professor organize as cadeiras em um formato circular, assim o professor terá uma visão panorâmica de seus alunos.

A interdisciplinaridade ocorrerá entre as disciplinas de Arte e Matemática, optamos pela disciplina de Arte, pois o professor da disciplina poderá auxiliar no momento da construção do caixão do Drácula, apresentando algumas técnicas de dobraduras, recortes e colagens para que a atividade seja desenvolvida com êxito. Para que a interdisciplinaridade aconteça os professores devem criar o ambiente juntos, a proposta deve ser elaborada na hora-atividade dos professores que irão aplicar. Em todo momento os professores irão auxiliar os seus alunos no desenvolvimento das atividades. Será uma troca de experiência para ambos.

A aula será introduzida pelos professores de Arte e Matemática, que contará de maneira teatral como se originou o dia do *Halloween*, e o porquê se comemora até hoje. Neste momento os professores poderão explorar as suas criatividade, fazendo o uso da expressão facial e corporal, se possível com um fundo musical de suspense. Propomos que os professores façam um breve ensaio, de como farão essa “peça teatral”, para que ambos possam participar deste momento, não ficando encarregado somente um professor para realizar essa introdução. Pois a interdisciplinaridade deve ocorrer de maneira conjunta.

Após a leitura do texto, os professores juntamente com os alunos confeccionarão o caixão do Drácula. Para sua construção, os seguintes materiais serão necessários: molde impresso (Figura 1) para cada aluno, tesoura, régua (para a atividade de conclusão), cola e EVAs (preto ou branco). Trata-se de uma construção simples para ser realizada pelos próprios alunos.

Figura 1 – Caixão do Drácula



Fonte: Blog de Artesanato³

Os professores orientarão os alunos para que realizem a atividade até o término da aula, pois a mesma será usada para a próxima atividade. Com as dobraduras prontas, os professores entregarão os EVAs brancos ou pretos para que os alunos confeccionem a área do caixão, somente a parte exterior. É importante que nesse momento o professor chame a atenção para a definição da palavra área, “Denomina-se área a medida da superfície de uma figura” (TOLEDO; TOLEDO; 1997) caso os alunos não se recordem do que se trata. O professor poderá explicar que se refere à cobertura do caixão que estão confeccionando.

Os professores dividirão a turma em grupos de 3 ou 4 alunos, e pedirá que eles calculem a área total do caixão. Como se trata de uma atividade de Investigação Matemática, nesse momento o professor irá apenas orientar. É importante que os alunos investiguem, estudem, levantem hipóteses de como irão solucionar esse problema apresentado. Possíveis dúvidas podem surgir, como: “mas não existe fórmula para essa figura do caixão?”, “como irei calcular?”, e outras. O professor levantará sugestões do tipo “será que nesta figura eu consigo encontrar um quadrado ou triângulo?” de modo que levem os alunos a se lembrarem de como foram deduzidas as fórmulas do triângulo, do quadrado, do retângulo e trapézio. Possivelmente alguns alunos irão desenhar vários triângulos, quadrados, e outras figuras a fim de encontrar a área através da soma destes. Vale ressaltar que o professor não deve fornecer respostas prontas em uma atividade de investigação, ele apenas orientará os alunos.

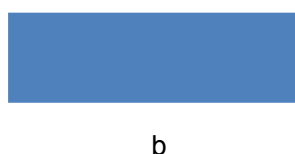
Caso os alunos sintam dificuldades em conseguir encontrar o quanto de papel EVA irão utilizar para confeccionar o caixão, e não relembrem das deduções das fórmulas das figuras geométricas mais usadas como: retângulo, quadrado, triângulo, paralelogramo e trapézio; o professor poderá então abordar o conteúdo de áreas.

³ BLOG DE ARTESANATO. Disponível em: <<http://www.hak.com.br/artesanato/como-fazer-um-dracula-porta-doces-para-halloween>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

Selecionamos o livro didático do Sistema de Ensino Poliedro, sendo desenvolvido pelos autores JOAQUIM. C. V.; SGAMBATTI. M. J; DIAS. R. F. A (2011, p. 218):

Área de um retângulo

A área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de seus dois lados consecutivos. Podemos chamar um lado de base e outro de altura.



h Área do retângulo= base x altura = $b \times h$

Área do Quadrado

Como todo quadrado é um retângulo, a sua área é calculada da mesma forma que um retângulo, só que agora as medidas dos lados são as mesmas.

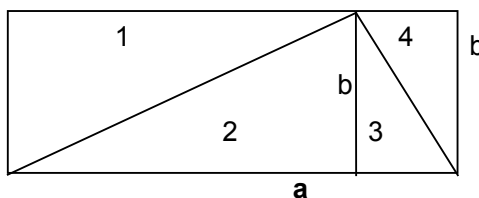
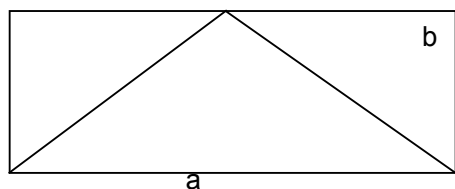


Área do quadrado= altura x altura = $a \times a$

Área de um Triângulo

A área de um triângulo qualquer pode ser entendida como a metade da área de um retângulo.

Figura 2 – Retângulos



Fonte: Dos autores, 2015

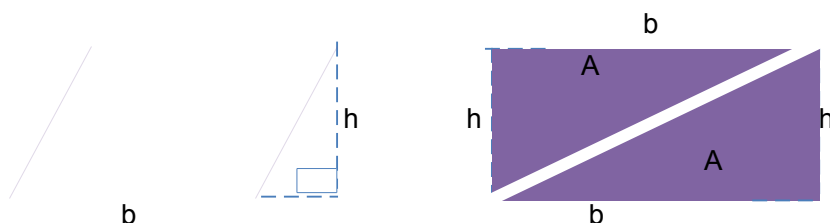
Os triângulos 1 e 2 da Figura 2 apresentados no segundo retângulo têm a mesma superfície que o triângulo 3 e 4. A soma das superfícies dos quatro triângulos resulta na área

do retângulo, e a soma de apenas duas superfícies (de áreas diferentes resulta na área do triângulo).

$$\text{Área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Área do Paralelogramo

Podemos entender um paralelogramo como sendo formado por dois triângulos de mesma área. Acompanhe a sequência:



b é a medida da base de uma das bases do paralelogramo.

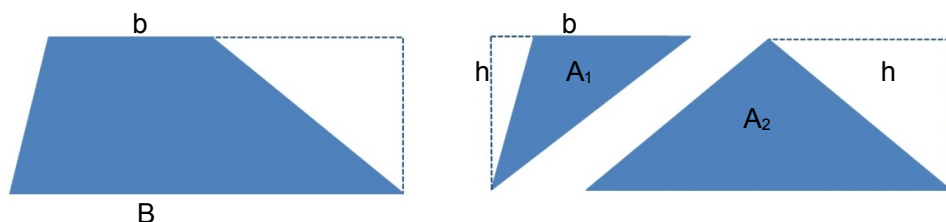
h é altura relativa à base de medida **b**.

A é a medida da área de cada um dos dois triângulos que formam o paralelogramo.

Assim, podemos escrever: área do paralelogramo = $2 \times A = 2 \times \frac{(b \times h)}{2} = b \times h$, então temos que a área do paralelogramo é igual $b \times h$.

Área do Trapézio

Podemos entender um trapézio como sendo formado por dois triângulos. Acompanhe a sequência:



b é medida da base menor do trapézio.

B é a medida da base maior do trapézio.

h é a altura relativa às bases.

A₁ e **A₂** são as medidas das áreas dos dois triângulos que formam o trapézio.

Assim, podemos escrever:

$$\text{Área do trapézio} = A_1 + A_2 = \frac{(b \times h)}{2} + \frac{(B \times h)}{2} = \frac{bh + Bh}{2} = \frac{(b+B)h}{2}$$

Depois da conclusão da atividade, é realizado um momento de discussão a respeito de como solucionaram o problema proposto. Possivelmente teremos valores diferentes quanto à área do caixão devido às diferentes construções, mas as diferenças não poderão ser muito diferentes. Caso isso ocorra, o professor poderá averiguar as possíveis causas dessa diferença, como por exemplo, se algum aluno utilizou o arredondamento no momento dos cálculos, ou qual método/fórmula utilizou para encontrar a área.

Essa discussão visa, sobretudo, reforçar a ideia de que existe uma infinidade de possibilidades para calcularmos a área de um objeto.

CONCLUSÃO

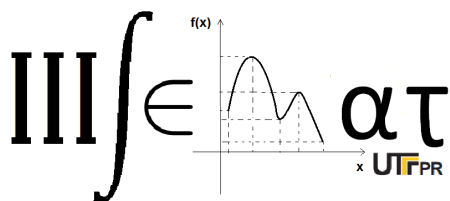
Como já explicitado na introdução, as datas comemorativas são muito utilizadas no âmbito escolar dos anos iniciais do Ensino Fundamental, contudo, nos anos finais, esse enfoque tem se perdido. Portanto, com a intenção de fortalecer esse tipo de atividade para os Anos Finais do Ensino Fundamental, procuramos apresentar uma possível atividade interdisciplinar de Investigação Matemática relacionada ao *Halloween*.

Essa atividade investigativa poderá estabelecer relações com outras disciplinas tais como: Arte e Matemática. Além disso, permitiu trabalhar com o conteúdo de áreas de figuras de três e quatro lados, ou seja, com área de triângulos e quadriláteros.

Assim, esperamos que essa proposta de atividade sirva para os demais colegas a utilizarem ou ainda, que seja um incentivo para o preparo de outras atividades investigativas e interdisciplinares que possam promover a discussão em torno de outras datas comemorativas e importantes, como por exemplo, Dia dos Pais, Dia do Trabalhador, Dia do Índio, entre outras.

REFERÊNCIAS

- CABRAL, Gabriela. **Halloween no Brasil**. Brasil Escola. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/halloween/halloween-no-brasil.htm>>. Acesso em: 25 abr. 2015.
- JOAQUIM. C. V., SGAMBATTI. M. J., DIAS. R. F. A. **Sistema de Ensino Poliedro Ensino Fundamental II - livro 2**, 2011, 218p.



III Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Toledo, 04 a 8 de maio de 2015

PACIEVITCH, Thais. **Halloween**. Info Escola. Disponível em: <
<http://www.infoescola.com/datas-comemorativas/halloween/>>. Acesso em: 25 abr. 2015.

PONTE, J. P.; BROCARD, J. ; OLIVEIRA, H; **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

TOLEDO, M; TOLEDO, M. **Didática de Matemática Como Dois e Dois**. São Paulo: Editora FTD, 1997. 274p.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. **Interdisciplinaridade e Aprendizagem da Matemática em Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008.

ANÁLISE DE UMA QUESTÃO DO ENEM À LUZ DOS PCNs, DAS DCEs E DA MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

Rosane Spielmann
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
 ro_spielmann@hotmail.com

Claudia Borgmann
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
 claudia.borg@hotmail.com

Renato Francisco Merli
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – câmpus Toledo
 renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como finalidade fazer a análise de uma questão do ENEM à luz dos três principais norteadores curriculares do Brasil e do estado do Paraná: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (DCEs) e a Matriz de Referências do ENEM.

Nosso propósito é verificar se a questão escolhida contempla os três norteadores curriculares. A ideia inicial do trabalho partiu das aulas da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática na Educação Básica de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal. Em uma de nossas aulas tivemos como atividade comparar o 3º e 4º ciclos¹ das DCEs com os PCNs e, em outra ocasião, fazer uma análise das competências e habilidades da Matriz de Referências do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A justificativa que nos levou a falar sobre este tema é a importância que estes documentos têm para o ENEM, já que são eles que norteiam o ensino de matemática no Brasil e no Paraná.

ASPECTOS RELACIONADOS AOS BLOCOS E CONTEÚDOS ESTRUTURANTES

As DCEs e os PCNs sugerem quais conteúdos devem ser abordados em sala de aula. Nos PCNs os conteúdos são agrupados por blocos, de forma que reúnem

¹ O 3º e 4º ciclos das DCEs e dos PCNs são referentes aos anos finais do ensino fundamental (6º, 7º, 8º e 9º ano).

“[...] os diversos conteúdos em função dos principais eixos de cada tema”, de modo a “garantir o equilíbrio e a coerência interna entre os conteúdos, apresentando-os dentro de um contexto que permita ao professor perceber as possíveis articulações e interrelações” (BRASIL, 1997, p. 39). Assim, os blocos norteiam quais assuntos abordar, propiciando aos professores elencar os conhecimentos necessários aos alunos, de maneira que estes sejam cidadãos plenamente reconhecidos e conscientes de seu papel em nossa sociedade. Diante disso, serão descritos cada bloco e suas especificidades.

No bloco que trata sobre Números e Operações, o aluno deve perceber a existência de diversos tipos de números bem como de seus diferentes significados, à medida que se depara com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas (BRASIL, 1998, p. 50). O bloco Espaço e Forma, explora situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas de posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistema de coordenadas (BRASIL, 1998, p. 51). As Grandezas e Medidas tratam das diferentes grandezas² (comprimento, massa, tempo, etc.) incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de outras (velocidade, energia elétrica, etc.). Além disso, trata da ideia de proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 51). E no último bloco, Tratamento da Informação, é estudado noções de estatística, probabilidade e problemas de contagem. Sendo que em noções de estatística é esperado que o aluno venha coletar e organizar dados, utilizando tabelas e gráficos, resolvendo cálculos que envolvam média, mediana e moda. Já em relação a probabilidade o aluno deve compreender que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza arbitrária e podem identificar possíveis resultados destes acontecimentos acerca de um deles. E em problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamento (BRASIL, 1998, p. 52).

²De acordo com o dicionário Aurélio a definição de grandeza seria: (ê)sf. **1.** Qualidade de grande. **2.** Podemos então, considerar como grandeza o que é suscetível de medida e quantidade aquilo que é efetivamente medido e expresso por números” (PEREZ, Marlene. GRANDEZAS E MEDIDAS: representações sociais de professores do ensino fundamental. Tese do Doutorado em Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008, p. 50)

Já nas DCEs os conteúdos são organizados e chamados de Conteúdos Estruturantes, os quais buscam identificar e organizar os campos de estudos das disciplinas escolares que são consideradas fundamentais para a sua compreensão. Quando tratamos de Conteúdos Estruturantes, estamos entendendo que estes:

[...] são os conhecimentos de grande amplitude, conceitos, teoria ou práticas, que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a compreensão de seu objeto de estudo/ensino. Esses conteúdos são selecionados a partir de uma análise histórica da ciência de referência (quando for o caso) e da disciplina escolar, sendo trazidos para a escola para serem socializados, apropriados pelos alunos, por meio das metodologias críticas do ensino aprendizagem (PARANÁ, 2008, p. 25).

No conteúdo estruturante que trata sobre Números e Álgebra é necessário que o aluno seja capaz de compreender:

- sistema de numeração decimal e o conceito de notação científica;
- os conceitos da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números pertencentes aos conjuntos dos naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas propriedades;
- o conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e as suas operações.
- [...] o conceito de incógnita;
- e realizar a escrita de uma situação problema na linguagem matemática;
- [...] reconhecer e resolver equações numéricas e algébricas, inequações, sistemas de equações;
- [...] diferenciar e realizar operações com monômios, binômios, trinômios e polinômios; equações quadradas, biquadradas e irracionais (PARANÁ, 2008, p. 51).

Quando se tratar de Grandezas e Medidas, são propostos os seguintes assuntos: “sistema monetário; medidas de comprimento; medidas de massa; medidas de tempo; medidas derivadas: áreas e volumes; medidas de ângulos, medidas de temperatura; medidas de velocidade; trigonometria: relações métricas no triângulo retângulo e relações trigonométricas nos triângulos” (PARANÁ, 2008, p. 53). No momento que o professor trabalha com as Geometrias, ele os desdobra em “geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de

geometrias não euclidianas” (PARANÁ, 2008, p. 55). Já o conteúdo estruturante Tratamento de Informação engloba os seguintes conteúdos: “noções de probabilidade, estatística, matemática financeira e noções de análise combinatória” (PARANÁ, 2008, p. 59).

O ENEM PENSADO POR MEIO DAS DCEs E DOS PCNs

Apesar de termos abordado apenas o 3º e 4º ciclos, que correspondem ao Ensino Fundamental – anos finais (6º ao 9º ano), podemos inferir que existe uma relação com o ENEM, isto porque, analisando os PCNs e as DCEs do Ensino Fundamental e Médio verificamos que os blocos e conteúdos estruturantes são basicamente iguais, pois em ambos há os conteúdos Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria e Tratamento de Informação, a única diferença é que no Ensino Médio há as Funções.

Vale ressaltar que é indispensável utilizar as abordagens relacionadas no ENEM já no Ensino Fundamental, pois os professores costumam trabalhar as competências do Exame apenas no Ensino Médio, porém elas já devem ser inseridas na sala de aula muito antes disso, para que quando os alunos estiverem no Ensino Médio já tenham um conhecimento mais amplo do que compreender de cada bloco. Isso se deve ao fato de que as competências foram elaboradas para subsidiar as aulas dos professores na melhoria de novas abordagens e metodologias que possibilitem alcançar tais habilidades. Além disso, fornecem um significado ao conhecimento escolar quando contextualizado e propiciam a interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender.

Dessa forma, nota-se a importância das competências no aprendizado, assim sendo, a palavra competência estaria ligada a capacidade do estudante de compreender fenômenos naturais, enfrentar situações-problemas, construir argumentações consistentes e elaborar propostas que atentem para as questões sociais. Assim, cada competência deve corresponder a um conjunto de habilidades que seriam a demonstração prática dessas competências.

Na Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias temos sete competências, cada uma possuindo suas habilidades específicas. Essas competências procuram:

- Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais;
- utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela;
- construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano;
- modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas;
- interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação;
- compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística (INEP, 2012, p. 5-7).

Para clarear e objetivar a relação dos documentos citados com o ENEM, iremos analisar uma das competências envolvidas na Matriz de Referência. Com essa finalidade escolhemos a Competência 3, seguida de suas habilidades (H):

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas (INEP, 2012, p. 5).

A terceira competência visa à compreensão da relação (ou do estabelecimento dessas) entre grandezas e medidas e trabalha com conceitos

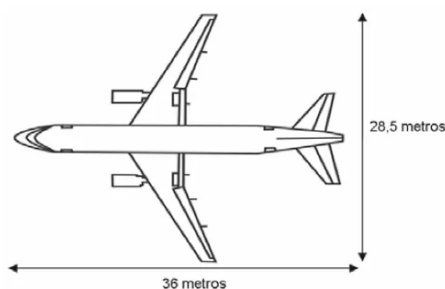
ligados a escalas. Entre as mais conhecidas estão aquelas que foram definidas pelo Sistema Internacional de Medidas (SI), como o "metro", e outras aceitas por esse sistema, como o "segundo", o "minuto" e a "hora". Então nessa competência, através de cinco habilidades, é possível intervir, estabelecer e padronizar determinadas grandezas e medidas. O exame, por exemplo, pode apresentar uma situação problema em que os dados aparecem em metros e pedir ao aluno para transformá-los em decímetros. Nesses casos, o Enem deve explicar a diferença de concepção entre cada escala e propor um problema em que o aluno precisará calcular o resultado. Cada uma das questões do ENEM poderá avaliar uma ou mais habilidades e irá frisar na avaliação a competência ou habilidade do aluno na compreensão dessas medidas.

ANÁLISE DE UMA QUESTÃO

A questão em análise será a de número 158 do ENEM de 2009, como segue.

(ENEM, 2009) A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.

Figura 1 - Avião



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

- 2,9 cm x 3,4 cm
- 3,9 cm x 4,4 cm
- 20 cm x 25 cm
- 21 cm x 26 cm
- 192 cm x 242 cm

A escala mostra a razão entre a medida do desenho e a realidade, sendo de 1:150 neste caso. Equivalendo 1 medida no desenho a 150 na realidade. Portanto o desenho é uma redução em 150 vezes do tamanho real. Como o comprimento real da aeronave é de 36 metros (3600 centímetros), o comprimento do desenho será de $3600 : 150 = 24$ cm. Já a largura real é de 28,5 metros (2850 centímetros), portanto a largura do desenho será de $2850 : 150 = 19$ cm. Como a margem em relação às bordas da folha é de 1 cm, a largura e o comprimento devem ter, no mínimo, 2 centímetros a mais que os valores do desenho encontrados (devido às margens superior e inferior em um caso e às margens à direita e à esquerda no outro caso). Assim, as mínimas dimensões da folha são de 21 cm x 26 cm.

Nesta questão, aparece fortemente o conteúdo estruturante Grandezas e Medidas, com enfoque para medidas de comprimento e escalas. Como vimos anteriormente este assunto é tratado nas DCEs e nos PCNs, além é claro, de fazer da Matriz de Referência do ENEM. Também podemos inferir que na questão é necessário conhecimentos que também são ensinados no Ensino Fundamental, reforçando a importância do professor utilizar questões do ENEM em suas aulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Ensino Fundamental é um dos alicerces da educação e não há nada mais precioso nesta fase de ensino que estimular a descoberta que favorece a autonomia do aluno, buscando facilitar a vida cotidiana. Para isso, nós professores em formação, precisamos focar nossos estudos no desenvolvimento do raciocínio do aluno, ajudando na sua concentração e mostrando o prazer dos desafios matemáticos. Dessa forma, o ENEM, com sua peculiaridade de tratar de questões que favorecem a descoberta foram nossa mola propulsora na discussão do presente trabalho.

A partir de nossa investigação, percebemos que na questão analisada emergiram os conteúdos sugeridos nas DCEs e nos PCNs, o que fortalece a ideia de se trabalhar com questões do ENEM, pois ao mesmo tempo em que o conteúdo é trabalhado de forma investigativa também estamos preparando nossos alunos

para uma prova tão importante em suas vidas. Portanto, constamos a necessidade dos professores seguirem (não enquanto ordem, mas enquanto sugestões) os conteúdos citados por cada documento, pois eles estão estritamente relacionados com a Matriz de Referência do ENEM, em que as questões propostas no exame são relacionadas com o cotidiano dos alunos, tornando-os um ser autônomo e capaz de tomar suas próprias decisões.

REFERÊNCIAS

AURELIO, O mini dicionário da língua portuguesa. 1ª edição. 9ª impressão – Rio de Janeiro, 1977.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 14 abr. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro081.pdf>>. Acesso em: 14 abr. 2015.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 2003.

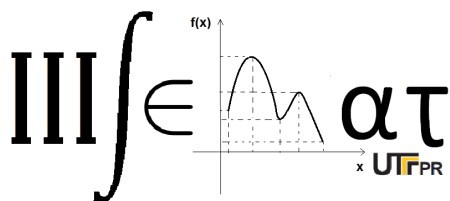
FLEMMING, D. M.; LUZ, E.F.; MELLO, A.C.C. **Tendências em educação matemática**. Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

FONSECA, Simone da Silva. Uma Análise Sobre As Tendências Da Educação Matemática Nos Parâmetros Curriculares Nacionais Da Matemática No Ensino Fundamental (3º E 4º Ciclos). **Anais do VI Fórum de Identidades e Alteridades e II Congresso Nacional Educação e Diversidade**. Itabaiana – Sergipe: 2013. Disponível em: <http://200.17.141.110/forumidentidades/VIforum/textos/Texto_VI_Forum_60.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2015.

INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **ENEM: Conteúdo das Provas**. Brasília: 2011. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/enem/conteudo-das-provas>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

MENDES, Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EDUFPA, 2008.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná: 2008.



III Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Toledo, 04 a 8 de maio de 2015

PASSOS, Marinez Meneghello; OLIVEIRA, Bruno Kerber; SALVI, Rosana Figueiredo. As Questões de “Matemática e suas Tecnologias” do “Novo ENEM”: um olhar com base na Análise de Conteúdo. **Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo, v.13, n.2, pp.313-335, 2011. Disponível em: <
<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/6113/4983f>>. Acesso em: 02 abr. 2015.

DIFICULDADE E DEFICIÊNCIA: QUAL A DIFERENÇA NO CONTEXTO ESCOLAR?

Pablo Chang
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 pablo-sdw@hotmail.com

Edineia dos Santos Brizola Brum
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 edineiabrum@alunos.utfpr.edu.br

Renato Francisco Merli
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 renatomerli@yahoo.com.br

Clovis Batista de Souza
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná
 clovisb@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Vivemos hoje na rede pública de ensino do Paraná, onde ocorre uma prática de algo almejado há muito tempo: a inclusão de alunos com necessidades educacionais especiais em salas de aula regular. E dentro desse contexto, surgem inúmeros desafios pedagógicos: é preciso repensar antigas práticas, entendendo a riqueza de possibilidades que advém do pensamento de uma escola para todos; valorizar as diferenças enquanto colaboradoras do processo de aprendizagem; aprender sobre especificidades metodológicas potenciais no desenvolvimento de cada sujeito; e reorganizar a gestão do processo educativo como um todo. Sendo, assim, visível a complexidade por detrás do sucesso ou insucesso das práticas inclusivas na escola (MANTOAN, 2013).

A Constituição Federal de 1988 propõe avanços significativos para a educação escolar de pessoas com deficiência, que garante o direito à igualdade (art. 5º) e trata, no artigo 205, do direito de todos à educação, sobre o pleno preparo da pessoa para a cidadania e sua qualificação para o trabalho. Além disso, no Artigo 206 (inciso I), a Constituição elege como um dos princípios “a igualdade de condições de acesso e permanência na escola”. Em seguida, no Artigo 208 (inciso V) acrescenta que o “dever do Estado com a educação será efetivado mediante a garantia de acesso aos níveis mais elevados do ensino (...), segundo a capacidade de cada um”.

Dentro dessa prática, está a integração, em que considera as deficiências como problemas das pessoas, visando a manutenção das estruturas institucionais. Por outro lado, há também a prática da inclusão, em que considera as deficiências como problema social, e promove a transformação da sociedade e das instituições para acolher essas pessoas (LOURENÇO, 2010). Acontece que, na prática, há falta de equipes multidisciplinares para tratar da inclusão como especialidade.

Assim, atualmente, percebe-se que, do ponto de vista educacional especial, a escola ainda se vive a transição de um modelo de integração para o modelo inclusivo. Através disso, há uma necessidade relevante do educador compreender claramente, antes de qualquer prática, sobre Deficiência e Dificuldade, que são termos protagonistas em discursos pedagógicos na perspectiva inclusiva.

No entanto, muitas das vezes se verifica a utilização de ambos como sinônimos um do outro. Seriam mesmo? Não haveria distinção entre os conceitos? Para responder a essas questões é que se propõe o atual trabalho. Discute-se a diferença que se pode fazer entre os termos no espaço escolar. Busca-se, dessa forma, colaborar com o professor em formação constante, que se prepara para a nova realidade. Não só na esfera da educação inclusiva, mas em todas as esferas, seja educacional, saúde, segurança, etc.

DEFICIÊNCIA

Segundo o dicionário Aurélio, o termo deficiência, do Latim *deficientia*, refere-se à falta, falha, carência, imperfeição e/ou defeito (FERREIRA, 2014). A deficiência, de acordo com a Convenção Sobre os Direitos da Pessoa com Deficiência, pode ser entendida como “impedimento de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial, o qual, em interação com diversas barreiras, pode obstruir a participação plena e efetiva do sujeito na sociedade em igual condição com os demais” (BRASIL, 2009).

Outra definição, apresentada por Carvalho (2012), afirma que a deficiência representa a exteriorização de um estado patológico, advindo de algum distúrbio orgânico. O que ocasiona a anormalidade de estrutura, de função psicológica, fisiológica ou anatômica. Podendo citar como exemplos de deficiência uma anomalia, defeito ou perda de um membro ou qualquer outra estrutura do corpo, inclusive das funções mentais. Assim, a deficiência pode ser temporária ou permanente, dependendo do seu grau de intensidade.

Nas orientações propostas por Mantoan (2003), “entende-se as deficiências como “fixadas” no indivíduo, como se fossem marcas indelévels, as quais só nos cabe aceitá-las, passivamente, pois pensa-se que nada poderá evoluir (...)”. Considera-se, portanto, das

suas especificações estáticas, como os níveis de comprometimento, as categorias educacionais, os quocientes de inteligência e entre outras.

A deficiência é compreendida, durante o último dispositivo de ordem mundial, a Convenção Interamericana para Eliminação de Todas as Formas de Discriminação (1999), como “restrição física, mental ou sensorial, de natureza permanente ou transitória, que limita a capacidade de exercer uma ou mais atividades essenciais da vida diária causada ou agravada pelo ambiente econômico ou social”.

DIFICULDADE DE APRENDIZAGEM

No dicionário Aurélio, pode-se encontrar a definição de dificuldade, do Latim *difficultate*, como sendo o “caráter ou qualidade do que é difícil; aquilo que é difícil; obstáculo, estorvo, impedimento; complexidade, complicação; oposição, objeção; relutância, repugnância, situação crítica, apuro”.

Segundo Felipe (2013), o termo dificuldade está mais diretamente relacionado ao indivíduo que não responde ao desenvolvimento que se espera dele quanto ao seu potencial intelectual. Assim, o sujeito tende a apresentar desempenhos abaixo (ou superiores no caso de altas habilidades) do esperado por causa dessa circunstância específica. A dificuldade somente pode ser diagnosticada cujo déficit de aprendizagem não se deva a problemas neurológicos.

De acordo com Garcia (1998, p. 08), a dificuldade de aprendizagem “refere-se a um retardamento, transtorno ou desenvolvimento lento em um ou mais processos de fala, leitura, aritmética ou outras áreas escolares (...)”. Como causa, o autor enfatiza sobre uma possível disfunção cerebral e/ou alteração emocional. Porém, “não é um resultado de retardamento mental, de privação ou fatores culturais e instrucionais”. Numa mesma perspectiva, “a dificuldade de aprendizagem é encontrada em crianças com atrasos no desenvolvimento psicomotor, perceptivo, linguístico, conectivo e psicológico” (SEBER, 1997).

Assim, como também, Freire (1996, p. 31, 32) conceitua a dificuldade de aprendizagem como “um termo geral que se refere a um grupo heterogêneo de transtornos que se manifestam por dificuldades significativas na aquisição e uso da escrita, fala, leitura, raciocínio ou habilidades matemáticas”.

RECONHECENDO A DIFERENÇA

É frequente, no contexto escolar, confundir os termos Deficiência e Dificuldade de Aprendizagem. Assim como afirma Silva (2003):

A criança com dificuldade de aprendizagem vem sendo confundida com a que é portadora de deficiência mental, uma vez que não compreende e não consegue acompanhar a turma, ou seja, não apresenta o desempenho escolar esperado pelo professor diante dos conteúdos programáticos.

Pensando nesse aspecto, Fonseca (1995, p. 30) também compartilha a mesma afirmação, em que a criança com dificuldade não é deficiente. Pois a criança com dificuldade de aprendizagem possui “um perfil motor adequado, inteligência média, uma adequada visão e audição, em conjunto com ajustamento sócio-emocional”.

Uma forma prática do professor verificar a diferença entre os dois conceitos, é pensando nas classificações propostas para cada um. As especificidades de cada ideia - deficiências e dificuldades - não permite uma única classificação simultaneamente. Os termos são abordados de forma separada justamente por tratarem de assuntos diferentes.

Quando se trata de deficiências, encontramos as especificações: deficiência mental/intelectual, deficiência auditiva, surdez, deficiência física, deficiência visual, deficiência múltipla, transtornos globais do desenvolvimento, condutas típicas e altas habilidades/superdotação. Assim, são possíveis deficiências de diferentes naturezas - psicológica, física ou sensorial (MOHR, 2012).

As dificuldades de aprendizagem, por sua vez, podem ser específicas, ou gerais. E ainda temporárias ou permanentes. Classificando-se, segundo Ribeiro (2012), em: dislexia (dificuldade na aprendizagem da leitura), disgrafia (dificuldade na escrita), discalculia (dificuldade para cálculos e números), disortografia (dificuldade de transcrever corretamente a linguagem oral), dislalia (dificuldade na fala), e o Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDH).

CONCLUSÕES

A partir das definições descritas, é possível verificar a distinção entre os termos Deficiência e Dificuldade. O professor precisa estar atento ao trabalho inclusivo, buscando formas para que ambos os alunos (com deficiências e com dificuldades) estejam de fato incluídos na sala de aula. E entendendo a diferença entre os conceitos, o educador tende a não tratar todos os estudantes como necessitando das mesmas adaptações curriculares/metodológicas. Além disso, enfatiza-se a importância dessa distinção, para que

ele, o educador, possa pensar em métodos de ensino diferenciados, e também, nas formas de aprendizagem diferenciadas.

Os educandos com dificuldades, por sua vez, exigirão do professor o pensamento mais específico acerca das metodologias e práticas pedagógicas mais apropriadas às suas especificidades. Muitas vezes, o fracasso do aluno na verdade é apenas o fracasso do ensino oferecido a ele, ou seja, “a dificuldade de aprendizagem do aluno pode ser influenciada pelo meio em que a aprendizagem ocorre e não puramente por dificuldades cognitivas do aluno” (FELIPE, 2013).

Para os alunos com deficiência, estes necessitarão, na grande maioria dos casos, de adaptações que vão além do planejamento do professor. Envolvendo, adaptação física ou de equipe de apoio (intérpretes, professores auxiliares, etc). Para os defensores como Mantoan (2003) e Forest (1985), é indispensável que as escolas adotem práticas de ensino adequadas às diferenças dos alunos. Oferecendo alternativas e recursos de ensino e equipamentos especializados que atendam a todas as necessidades educacionais dos educandos.

Uma causa possível que leva o professor a confundir os dois termos é, por muitas vezes, de o aluno com deficiência também ser passivo de alguma dificuldade de aprendizagem. Levando a acreditar que da mesma forma que se trabalha a dificuldade do aluno comum, trabalha-se a dificuldade do aluno com deficiência. O que é inconveniente, uma vez que os alunos, dadas suas dificuldade e/ou deficiências carecem de métodos de ensino dependendo da sua condição específica.

Ademais, os termos remetem a ideias distintas, ambas presentes no contexto da educação inclusiva. É importante que o profissional da educação compreenda essa diferença, considerando a relação entre os conceitos e, além disso, realize discussões críticas frente ao assunto. Não são sinônimos, mas de certa forma, estão em relação estreita e, contudo, estão explicitamente próximos entre si na realidade do ambiente escolar.

REFERÊNCIAS

- BRASIL, Decreto 6.949, de 25 de Agosto de 2009 - **Convenção sobre os direitos da pessoa com deficiência**. Brasília, 2009.
- CARVALHO, R. E. **Escola Inclusiva: A Reorganização do Trabalho Pedagógico**. Porto Alegre: Mediação, 2012.
- FELIPE, S. M.; BENEVENUTTI, Z.S. **Dificuldade de Aprendizagem**. *Maiêutica - Curso de Pedagogia*. v.1, n.1. 2013. Disponível em: <<https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/PED/article/view/584>>. Acesso em: 24 abr. 2015.

- FERREIRA, A. B. H. **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa / Aurélio Buarque de Holanda Ferreira.** - 3.ed. - Curitiba: Positivo, 2014.
- MANTOAN, M. T. E. **O desafio das diferenças nas escolas.** / Maria Teresa Eglér Mantoan (Organizadora). - 5.ed. - Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.
- MOHR, A.M. et. al. **Pensando a Inclusão.** / Allan Martins Mohr; et. al. (Organizadores). - 1.ed. Curitiba: Ed. UTFPR, 2012.
- RIBEIRO, Pereira Damaris. **Intervenção psicopedagógica nas dificuldades de aprendizagem.** Dourados News, 2012. Disponível em: <<http://www.douradosnews.com.br/especiais/opiniaointervencao-psicopedagogica-nas-dificuldades-de-aprendizagem-por-damaris-pereira-ribeiro>>. Acesso em: 02 maio 2015.
- JIMÉNEZ, R. B. **Necessidades educativas especiais.** Lisboa: Dinalivro, 1997.
- MANTOAN, M. T. E. **Inclusão Escolar: O que é? Por que? Como fazer?** São Paulo: Moderna, 2003.
- GUATEMALA. Assembleia Geral, **Convenção interamericana para a eliminação de todas as formas de discriminação contra as pessoas portadoras de deficiência.** 29º período ordinário de sessões, tema 34 da agenda. Cidade da Guatemala, 1999.
- BRASIL. Congresso Nacional. **Constituição: República Federativa do Brasil.** Brasília: Centro Gráfico, 1988.
- BRASIL. Congresso Nacional. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei nº 9.394).** Brasília: Centro Gráfico, 1996.
- BRASIL. **Congresso Nacional. Lei nº 7.853/89.** Brasil: Centro Gráfico, 1989.
- FOREST, M. **Full inclusion is possible.** In: Education/ Intégration. A collection of readings on the integration of children with mental handicaps into the regular school system. Downsview/Ontário, Institut Alain Roehner, p. 15-47, 1985.
- LOURENÇI, É. **Conceitos e Práticas Para Refletir na Educação Inclusiva.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.
- SILVA, J. D. **Dificuldade de Aprendizagem.** Rio de Janeiro: Universidade Candido Mendes; Projeto “A Vez do Mestre”, 2003.
- GARCIA, J. N. **Manual de Dificuldades de Aprendizagem.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
- SEBER, M. G. **Piaget, o Diálogo com a Criança e o Desenvolvimento do Raciocínio.** São Paulo: Scipione, 1997.
- FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 25ª Ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.o, v.12, n.2, 2010.
- FONSECA, V. **Educação Especial.** 2º ed. Porto Alegre: Artmed, 1995.

PROPOSTA DE ANÁLISE MULTIVARIADA PARA O SISTEMA DE DETECÇÃO DE FALHAS EM BLOCOS DE CONCRETO DA BARRAGEM DE ITAIPU

Orlando C. da Silva 1
 Unioeste
 orlandocs_santos@hotmail.com

Itamar Pena Nieradka 2
 Unioeste
 itmarpn@gmail.com

Jesika Maganin
 Unioeste
 jesikamaganin@hotmail.com

Rafael Augusto Machado Escobar
 Unioeste
 machadoescobarr@gmail.com

Cleyton Sobroza do Amaral
 Uniguaçu
 csaem7@gmail.com

Carine Michele Pereira
 carinemichele56@hotmail.com
 Cesufoz

RESUMO 1

O Centro de Estudos Avançados em Segurança de Barragens (CEASB) é um convenio entre Itaipu Binacional, por meio da Universidade Corporativa Itaipu e o Parque Tecnológico de Itaipu (PTI), que atua no desenvolvimento de soluções estratégicas em segurança de barragens, por meio de pesquisas aplicadas, realizadas pelas universidades parceiras e pelo meio técnico da Itaipu. O Sistema de Detecção de Falhas é um projeto em andamento no CEASB, que visa determinar os modos de falhas possíveis de serem monitorados através dos conceitos da análise fatorial. Este artigo tem como objetivo demonstrar as atividades desenvolvidas até o momento neste projeto, bem como a divulgação e disseminação do conhecimento.

■ ■ ■

INTRODUÇÃO 2

A integração entre o CEASB, Itaipu e o Parque Tecnológico de Itaipu (PTI) permite a formação de competências essenciais para o desenvolvimento das pesquisas e inovações tecnológica, atuando nas áreas de modelagem 3D, modelagem e simulação, robótica, instrumentação, geotécnica, limnologia, base de dados e sistema de cadastro de barragens. O projeto em andamento atua na área de instrumentação, visando o desenvolvimento de tecnologia em segurança de barragens.

Existem várias razões para a construção de barragens, seja para abastecimento de água, irrigação, produção de energia elétrica, controle de cheias ou alimentação de outros reservatórios. O que existe em comum entre todas as barragens são os possíveis problemas relacionados com rupturas, rachaduras, infiltração entre outros. Segundo [1], o histórico de rupturas de barragens revelou que um longo período de operação normal das obras não é garantia de condições futuras de segurança, uma vez que tem havido casos de rupturas bruscas após 10 e 20 anos de operação normal.

Um sistema de monitoração com base em dados de instrumentos confiáveis auxilia na prevenção de possíveis acidentes e incidentes. Os dispositivos de instrumentação são usados de forma a auxiliar nas inspeções visuais utilizadas para avaliar a segurança das barragens. Os dados obtidos dos instrumentos podem revelar uma condição crítica possível ou permitir avaliar se uma determinada condição requer medidas corretivas ou não.

Legislações de vários países, como por exemplo, Japão e França, impõe instalações de instrumentos como componente essencial de um projeto de instrumentação de barragens.

No Brasil em 20 de setembro de 2010 entra em vigor [2] que estabelece a Política Nacional de Segurança de Barragens destinadas à acumulação de água para quaisquer usos, à disposição final ou temporária de rejeitos e à acumulação de resíduos industriais, e cria o Sistema Nacional de Informações sobre Segurança de Barragens (PNSB). No art. 2º item III dessa lei, a segurança de barragens é definida como sendo a providencia de condições que vise a manter a sua integridade estrutural e operacional e a preservação da vida, da saúde, da propriedade e do meio ambiente.

Em seguida veio [3], que estabelece diretrizes para implantação da política nacional de segurança de barragens, aplicação de seus instrumentos e atuação do sistema nacional de informação sobre segurança de barragens, em atendimento ao artigo 20 da lei N°12.334 mencionada anteriormente.

O objetivo deste trabalho, conforme as normas que visam à segurança de barragens, é de apresentar um resumo da proposta de aplicação, em bloco chave da barragem de Itaipu, que é um método capaz de determinar os modos de falhas possíveis de serem monitorados apresentado em [4]. ~~Nos próximos capítulos é apresentado um resumo desse método.~~

INSTRUMENTAÇÃO 3

A instrumentação refere-se ao conjunto de dispositivos instalados nas estruturas e em suas fundações, objetivando monitorar seu desempenho através de medições de parâmetros, cujos resultados, devidamente analisados e interpretados, servirão para avaliar suas condições de segurança [5].

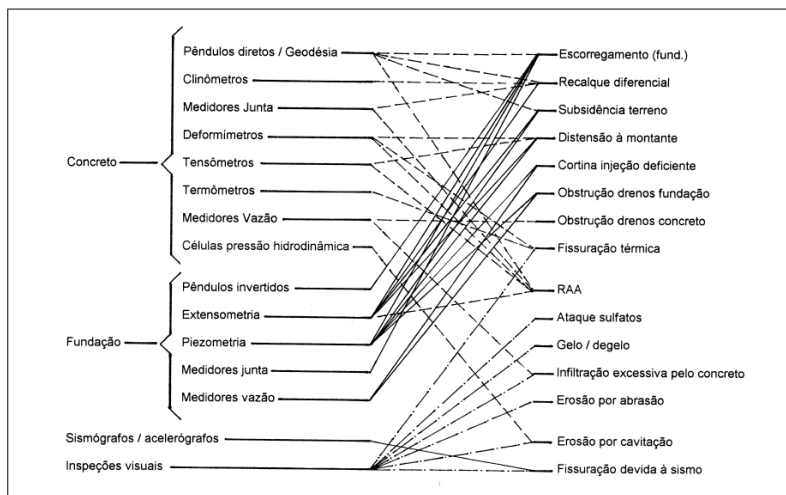
O sistema de instrumentação faz-se através de um plano de instrumentação que consiste em um projeto de instrumentação obtido, primeiramente, através dos resultados do estudo detalhado das características geológico-geotécnicas da região e do entorno onde estará locada a barragem, através do qual são definidas seções e blocos "chaves" a serem observados e instrumentados [6].

Blocos chaves são seções representativas do comportamento típico de um determinado trecho da barragem, levando-se em consideração basicamente o tipo de fundação e as características geométricas da estrutura, que recebem uma instrumentação mais completa [5].

Uma correlação entre os tipos de instrumentos usualmente empregados na auscultação de barragens, conjuntamente com as inspeções visuais e os principais tipos de deterioração é apresentada em [5].

Figura 1 – Instrumentação de Barragens de Concreto

■ —



Fonte: Eletrobrás - 2003

Segundo [7] leituras dos instrumentos de uma barragem devem ser realizadas por equipes de bom nível técnico e treinadas para tal, visto que a precisão dos dados obtidos estará diretamente condicionada à qualidade e cuidado dos leituristas. Estes deverão receber treinamento apropriado, e serem periodicamente motivados através de palestras e conferências; além disso, é importante que as medições sejam realizadas sempre pelos mesmos leituristas, para manter-se os erros sistemáticos sob controle e, também, para que os mesmos atuem como os primeiros inspetores visuais, informando imediatamente aos seus superiores quaisquer observações encontradas que possam ser indícios de comportamento anômalo das estruturas.

Existe hoje com a melhoria das técnicas de mineração de dados, uma preocupação na forma que os dados são coletados e armazenados, com o objetivo de garantir a qualidade desses dados para proporcionar uma melhor interpretação da informação.

TRATAMENTO DOS DADOS 4

Um plano de instrumentação, sem a correspondente análise periódica e interpretação sistemática dos resultados, é inútil, ou mesmo nocivo, na medida em que pode causar uma falsa impressão de segurança em relação ao empreendimento [5].

A Análise Fatorial é uma técnica estatística que busca, através da avaliação de um conjunto de variáveis, a identificação de dimensões de variabilidade comuns existentes em

um conjunto de fenômenos, o intuito é evidenciar estruturas existentes, mas que não são observáveis diretamente. Cada uma dessas dimensões de variabilidade comum recebe o nome de Fator.

Encontra-se na literatura aplicações em várias áreas para a análise fatorial, com em [8] utiliza-se da análise fatorial para a identificação do constructo essencial dos dados. Em [9] concorda que se utilize a análise fatorial nas seguintes circunstâncias: Identificação das dimensões latentes ou fatores que expliquem as correlações entre um conjunto de variáveis, identificar um conjunto novo, menor, de variáveis não correlacionadas para substituir o conjunto de variáveis correlacionadas, Identificação, em um conjunto maior, de um conjunto menor de variáveis que se destacam para uso em uma análise multivariada subsequente.

Uma descrição completa do método para realizar uma análise fatorial dos dados é encontrada em [10] e [11].

DETERMINAÇÃO DOS MODOS DE FALHA 5

Segundo [12] e [13] a determinação de todos os modos de falha em um sistema estrutural é inviável. Por esse motivo, serão apenas dedicados esforços em conseguir determinar os modos de falha que a análise fatorial realizada permitir.

Como análise fatorial agrupa os instrumentos altamente correlacionados a um mesmo fator, a ideia é utilizar as associações dos instrumentos com as anomalias apresentadas em [5], [14], [15] e o conhecimento prático dos profissionais da barragem, para relacionar os fatores com as anomalias.

Se mais de um fator for necessário para monitorar certa anomalia entramos no caso de modos de falha de sistemas, onde a ocorrência de mais de um evento é necessário para ocasionar uma falha. Segundo [16] modos de falha de sistema podem ser em série, paralelos ou mistos.

Como não serão utilizadas as grandezas físicas, se deve verificar o comportamento anormal da estrutura através das leituras dos instrumentos. De acordo com as literaturas citadas e do que foi repassado por profissionais que atuam há muitos anos na barragem, para que certas anomalias ocorram, é necessário que exista uma combinação de leituras fora do seu comportamento normal simultaneamente. Assim, deve-se determinar em quais fatores esses instrumentos estarão agrupados.

Como os escores fatoriais dependem dos fatores obtidos na análise fatorial e, conseqüentemente, dependem dos instrumentos agrupados neles, quando houver alguma mudança brusca nas leituras desses instrumentos correlacionados com uma determinada anomalia, o resultado do escore fatorial também deverá sofrer alteração. Portanto, para realizar esse monitoramento busca-se determinar as regiões críticas desses escores fatoriais para a qual deverá indicar quais as anomalias ocorreram.

Para determinar as regiões críticas são utilizados os intervalos de projeto dos instrumentos instalados no bloco e os intervalos de 95% de confiança da média dos últimos dois anos. Um intervalo que representa uma mudança de comportamento é definido como:

$$MC = (\min\{l_i, L_i\}, \max\{l_i, L_i\}) \cup (\min\{l_s, L_s\}, \max\{l_s, L_s\})$$

MERGEFORMAT_

em que l_i , l_s são os limites inferiores e superiores, respectivamente, do intervalo de confiança de 95% da média e L_i e L_s são os limites inferiores e superiores, respectivamente, do intervalo de projeto do início da construção.

Usando um programa gerador de números aleatórios, é possível gerar vetores de simulação das anomalias, que são possíveis de monitorar a partir do que foi apresentado pela análise fatorial. Por exemplo, se três instrumentos estão relacionados com certa anomalia, basta gerar leituras para esses instrumentos em seus respectivos intervalos MC , e para os demais instrumentos gerar leituras dentro dos intervalos de confiança de 95% da média IC, fazendo isso, temos a geração de um vetor que simula essa anomalia.

É importante destacar, que essa geração por mais que seja aleatória deve seguir o seguinte princípio, se existem 3 instrumentos altamente relacionados com essa anomalia, então antes é necessário verificar qual é o instrumento com maior influência no fator, essa informação é revelada pela análise fatorial. Além disso, a análise fatorial também revela qual é a correlação entre todos os instrumentos nesse estudo.

Assim, reordenamos os instrumentos, de forma que todos relacionados com a anomalia fiquem nos primeiros lugares, e, o primeiro instrumento deve ser o que possui maior influência no fator. Dessa forma, quando for gerado o primeiro número aleatório para o

primeiro instrumento, é verificado em qual dos conjuntos do intervalo MC ele pertence, visto que o intervalo MC é formado pela união de dois conjuntos.

No caso de ser gerado um número do intervalo esquerdo do conjunto MC, quando for gerado o próximo número aleatório para o próximo instrumento, deve ser verificado qual é a correlação do segundo instrumento com o primeiro. Se a correlação for positiva, este número aleatório deve estar do mesmo lado esquerdo do intervalo *MC* do segundo instrumento, caso contrário, ou seja, se a correlação for negativa, o número aleatório deve estar do lado direito do intervalo *MC* do segundo instrumento.

Este princípio deve ser seguido para todos os instrumentos, mesmo aqueles que não têm relação com a anomalia, contudo, neste caso, deve ser verificado o lado esquerdo e/ou direito do intervalo de confiança da média para tais instrumentos.

A descrição completa desse algoritmo bem como as regiões críticas determinadas são apresentadas em [4].

CONCLUSÃO 6

O procedimento descrito nesse trabalho fornece uma alternativa para determinação de modos de falha em um bloco chave de uma barragem de concreto altamente instrumentado que pode servir como uma ferramenta para o monitoramento e auxiliar na tomada de decisão.

Esse processo será realizado no bloco chave A - 15 da barragem de Itaipu pelos membros do projeto Sistema de Detecção de Falhas, que está em andamento. Pretende-se no final do projeto determinar quais são os tipos de falhas possíveis de determinar nesse bloco, e, apresentar as regiões críticas de cada modo de falha.

Futuramente esse projeto será expandido para todos os blocos chaves da barragem, possibilitando a criação de um sistema de monitoramento para todos os setores da barragem.

REFERÊNCIAS 7

■ —

- [1] PEDROSO, B; PILATTI, L. A.; GUTIERREZ, G. L. (2010) - "Cálculo dos escores e estatística descritiva do WHOQOL-bref através do Microsoft Excel ", 6 f. Revista Brasileira de Qualidade de Vida.
- [2] Brasil. Lei nº12.334, de 20 de setembro de 2010.
- [3] Brasil. Resolução nº144 de 10 de julho de 2012.
- [4] SILVA, O. C.; MARQUES, J. M. (2015) - "Estudo da Variabilidade dos Instrumentos Instalados em Blocos Chave da Barragem de ITAIPU para Determinação de Modos de Falha" , 15 f. Em: XXX SNGB – Seminário Nacional de Grandes Barragens , Maio, 10-12. Comitê Brasileiro de Grandes Barragens – CBGB.
- [5] ICOLD (2003) - "Critérios de Projeto Civil de Usinas Hidrelétricas", Centrais Elétricas Brasileiras S.A. - ELETROBRÁS.
- [6] MATOS, S. F (2002) - "Avaliação de Instrumentos para Auscultação de Barragem de Concreto", 106-f (01-106). Metrado em Construção Civil. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- [7] Comitê Brasileiro de Grandes Barragens – CBDB (1996) – "Auscultação e Instrumentação de Barragens no Brasil" – II Simpósio Sobre Instrumentação de Barragens. Belo Horizonte, MG, de 19 a 21/08/96. Vol. I.
- [8] AAKER, D. A (2012) - "Administração Estratégica de Mercado". Porto Alegre. Bookman.
- [9] MALHOTRA, N. K (2001) - "Pesquisa de Marketing: uma orientação aplicada". Porto Alegre. Bookman.
- [10] JOHNSON, R. A. WICHERN, D.W. (1998) - "Applied Multivariate Statistical Analysis". Fourth Edition. New Jersey: Prentice Hall.

- [11] CORRAR, L. J. PAULO, E. FILHO, J. M. (2009) - "Análise Multivariada para os Cursos de Administração, Ciências Contábeis e Economia", 539-f (73-129). São Paulo: Atlas.

- [12] MOSES, F (1982) - "System Reliability Developments in Structural Engineering". 10-f (3 - 13). *Struct Safety*. V. N°1.

- [13] RANGANATHAN, R (1987) - "Generation of Dominant Modes and Reliability Analysis of Frames". 11-f (217 - 228). *Structural Safety*. V. 4, N° 3.

- [14] GUSMÃO FILHO, J. (2006) – "Desempenho de Obras Geotécnicas", 264 f (01-528) Recife, Editora Universitária da UFPE.

- [15] SILVEIRA, JOÃO FRANCISCO ALVES (2006) – "Instrumentação e Segurança de Barragens de Terra e Enrocamento". 208-f (001-416). Editora Oficina de Textos, São Paulo.

- [16] FABER, M. H. (2006) - "Risk in Safety Civil, Surveying and Environmental Engineering", 11-f (171–182). *Risk in Safety*.

MODELAGEM MATEMÁTICA: APROVEITAMENTO DA ÁGUA DE CHUVA

Paulo A. Fantinel
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
 fanti_paulo@hotmail.com

Fernanda Venites Buzinaro
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
 fernandavbuzinaro@gmail.com

Renato Francisco Merli
 Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo
 renatomerli@utfpr.edu.br

INTRODUÇÃO

Neste trabalho será apresentada uma proposta de ensino a fim de trabalhar os conteúdos de volume e área, por meio de uma situação-problema envolvendo a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Ambiental como uma aplicação sobre o Aproveitamento de Água de Chuva. O intuito é de sensibilizar, mobilizar e conscientizar o que acontece com nossos recursos naturais, percebendo os benefícios do reuso da água da chuva tanto do ponto de vista da economia quanto do impacto ambiental.

Desta forma utilizaremos a Modelagem Matemática como estratégia pedagógica. Deste modo o trabalho se dará em três partes, na primeira será abordada a Modelagem Matemática, nos aspectos de: o que é, por que usar e como usar. Na segunda, apresentaremos a atividade e, na terceira parte será realizada uma possível resolução com alguns encaminhamentos.

A MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao falar sobre Modelagem Matemática algumas colocações surgem: o que é, por que usar e como usar a Modelagem. Segundo Barbosa (2001, p. 6) “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”.

A atividade de Modelagem Matemática parte do processo de uma situação problema inicial até uma situação final. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12) essa atividade pode ser descrita “em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada [...] e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final”.

De acordo com os autores citados anteriormente, o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática propicia aos alunos a percepção do uso da situação problema

fora do cotidiano escolar. Assim, os mesmos autores dedicam-se a três aspectos importantes de como fazer Modelagem Matemática em sala de aula, são eles: o espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ ou nas aulas de Matemática; a atuação do professor nas aulas com Modelagem Matemática; a familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática.

O uso da modelagem em sala de aula como alternativa pedagógica se faz partindo de uma situação problema não essencialmente matemática, necessitando de um entrosamento entre definição, investigação e resolução. A familiarização do aluno com a modelagem matemática pode ser caracterizada em diferentes momentos, conforme o Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Momentos de familiarização do aluno com a Modelagem Matemática

Primeiro Momento	Inicialmente expondo o problema aos alunos e alguns dados que serão necessários, na análise, a investigação e a dedução de um modelo matemático acompanhadas pelo professor.
Segundo Momento	Após, em um outro momento o professor impõe aos alunos uma situação problema, que em grupos deverão complementar a coleta de dados.
Terceiro Momento	Por fim, os alunos em grupos serão responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, de modo que estes realizem todos os procedimentos por conta própria.

Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.26).

Desta forma, essa canalização da introdução de atividades de Modelagem Matemática em salas de aulas com alunos ainda não familiarizados com esse tipo de atividade consiste na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a habilidade de fazer modelagem, de forma gradativamente.

Assim a Modelagem Matemática pode ser utilizada como meio didático para abordar além da matemática outros temas que também são importantes para os alunos, deste modo escolhemos abordar o tema de meio ambiente juntamente com a matemática, assim nosso tema trabalha com a captação da água da chuva e com os conteúdos de área e volume por parte da matemática.

ATIVIDADE: CAPTAÇÃO DA ÁGUA DA CHUVA

Segundo Cézar e Sezar (2011/2012, p7) “Os oceanos cobrem mais de 70% da superfície do planeta”. Essa água tem um ciclo natural, que começa com sua evaporação, formando as nuvens que depois irão retornar para a terra através das chuvas. Sendo por volta de 97% da água de nosso planeta é salgada, restando apenas 3% de água doce. Sendo que 2% estão nas geleiras e calotas polares e apenas 1% correspondente a água dos rios, lagos e lençóis freáticos.

Com a poluição cada vez maior do ar, da terra, das nascentes, dos lagos, dos rios e dos oceanos, essas águas acabam ficando contaminadas, exigindo uma enorme preocupação em sua preservação, pois sem a água natural, a vida como a conhecemos, se extinguirá.

Nós, enquanto consumidores, podemos economizar evitando que mais águas sejam retiradas da natureza para nosso consumo. Vejamos algumas dicas simples para diminuir esse consumo:

Quadro 2 – Formas simples para economizar água potável

Fechar a torneira enquanto escovar os dentes, fazer a barba, ensaboar a louça, etc.;
Não usar mangueira para lavar pisos, calçadas, automóveis, etc.;
Trocar as válvulas hidro assistidas de descargas por caixas acopladas ao vaso sanitário com limitador(es) de volume(s) por descarga;
Diminuir o tempo no banho, e ajustar o fluxo da água;
Procurar usar a máquina de lavar roupas apenas quando tiver uma quantidade de roupas (sujas) suficiente para usar o volume máximo da máquina;
Se tiver que lavar mais de uma leva de roupas, e se a máquina permitir, antes da máquina jogar fora a água do enxágue, dê uma pausa, tire a roupa limpa, coloque a segunda leva de roupas sujas e reinicie o trabalho da máquina. Depois quando a máquina for centrifugar, dê uma pausa e junte as roupas da primeira leva para centrifugar tudo junto. Assim você economiza um tanque de água;
Reuso da água originada do enxágue da máquina de lavar roupas para lavar o chão do quintal;
Reduzir a vazão de água do seu chuveiro ou ducha (Um chuveiro normal gasta em média 3,5 litros por minuto);
Reduzir ou eliminar o consumo de carne (segundo o conceito de água virtual que leva em consideração toda a água usada para fabricar um produto industrial ou um alimento, uma dieta básica com carne consome cerca de 4.000 litros de água virtual por dia, enquanto a dieta vegetariana requer em torno de 1.500 litros).

Fonte: Adaptado, do site: Sempre Sustentável.

Outra forma de economizar é fazer o Aproveitamento de Água da Chuva (Figura 1), e para isso podemos construir e instalar um sistema usando a tecnologia da Mini cisterna, que foi criada e desenvolvida baseada na norma ABNT NBR 15.527:2007 "Água de chuva - Aproveitamento de coberturas em áreas urbanas para fins não potáveis". O esquema básico pode ser visto na Figura 1.

Figura 1 – Esquema de Captação da Água da Chuva



Fonte: Sempre Sustentável

Esse esquema tem por objetivo mobilizar e conscientizar os alunos sobre o que acontece com os nossos recursos naturais, percebendo os benefícios do reuso da água da chuva (economia e impacto ambiental). Conforme o Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Os Principais objetivos do Aproveitamento da Água da Chuva

Incentivar a população a fazer o aproveitamento correto da água de chuva;
Fazer com que toda casa urbana tenha pelo menos um sistema simples de Aproveitamento da Água de Chuva;
Minimizar o escoamento do alto volume de água nas redes pluviais durante as chuvas fortes;
Usar a água para irrigações nos jardins e lavagens de pisos externos. Assim, essa água vai infiltrar na terra e ir para o lençol freático, preservando o seu ciclo natural;
Usar a água para lavagens de pisos, carros, máquinas e nas descargas no vaso sanitário.

Fonte: Adaptado, do site: Sempre Sustentável

Dadas as informações anteriores e com o intuito trabalhar com os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, pode-se sugerir a seguinte proposta de problema: Como podemos calcular quantos litros de água podem ser recolhidos e reutilizados em casa? Veremos algumas possíveis soluções a seguir.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

A aula se daria da seguinte forma, primeiramente seria (feito,proposto...) um possível encaminhamento, onde os alunos deveriam construir um pluviômetro com a intenção que os mesmos utilizariam para coletar os dados, mas tal atividade deve ocorrer num período chuvoso para que possa ocorrer a coleta. Caso isso não aconteça outra possibilidade seria que o professor forneceria uma tabela pronta.

Porém para este trabalho, optamos por utilizar uma tabela pronta, conforme a Figura 2:

Figura 2 – Calendário anual de chuvas

Calendário anual das chuvas www.sempresustentavel.com.br					
Janeiro	fevereiro	março	abril	maio	Junho
483,1 mm	393,5 mm	176 mm	136 mm	63 mm	20 mm
julho	agosto	setembro	outubro	novembro	dezembro
77,5 mm	0 mm	79,4 mm	84 mm	102,5 mm	202 mm
Obs.: os dados são referente ao ano de 2010 na cidade de São Paulo – SP bairro do Ipiranga Precipitação Total = 1817 mm = 1817 litros p/m ² – Período de estiagem = 51 dias					

Fonte: Sempre Sustentável

Então, para uma possível solução devemos primeiro calcular a área de uma superfície, desta forma é preciso saber como calcular a área de alguns formatos geométricos básicos. Segundo Iezzi, Dolce e Machado (2005, p. 253) “medir uma superfície significa compará-la com outra, tomada como unidade, e estabelecer quantas vezes a unidade cabe na superfície dada”.

Assim, sabendo que a área do telhado da nossa casa ao medirmos, conforme ilustra a Figura 3 a seguir, temos que sua área é de 75m².

Figura 3 – Telhado da CASA



Fonte: Novidade Diária

Deste modo, retomando a modelagem, temos algumas hipóteses (H1, H2, H3):

H1: a superfície é um retângulo.

De acordo, com Iezzi, Dolce e Machado (2005, p. 256) temos que a “área de um retângulo é igual ao produto do comprimento pela largura: área do retângulo = Comprimento x Largura”.

H2: a superfície é um triângulo.

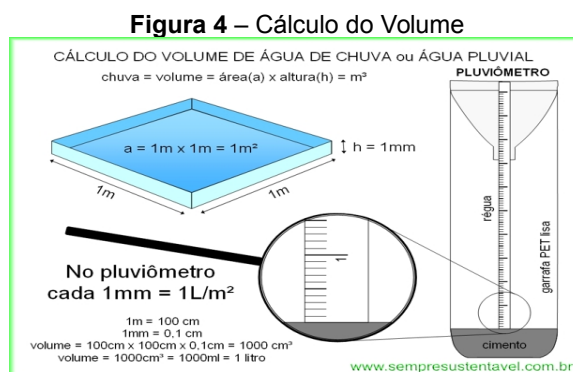
A área de um triângulo é dada pela fórmula (Área = (Base x Altura) / 2).

H3: a superfície é um círculo.

Sabe-se que a área do círculo é calculada pela fórmula (Área = $\pi \times r^2$).

Segundo Iezzi, Dolce e Machado (2005, p. 266) quando estamos interessados em “medir a quantidade de espaço ocupado por um sólido, escolhemos uma unidade e verificamos quantas vezes ele cabe no sólido. A quantidade encontrada é chamada volume do sólido”.

Desta forma, analisando a Figura 4 a seguir observamos que o cálculo do volume de água de chuva ou água pluvial é dada pela seguinte fórmula (Chuva = Volume = Área(a) x Altura(h) = m³).



Fonte: Sempre Sustentável

Com a informação que no pluviômetro cada 1 mm = 1 L/m² e a área de captação de água da chuva, temos uma simplificação (S1):

S1: A inclinação do telhado influencia na superfície de captação. No entanto, para fins didáticos, será desconsiderada.

Deste modo, caso o professor optaria em trabalhar com a primeira possibilidade, onde o aluno deverá calcular a área do telhado de sua casa para a realização da atividade. Mas como isto pode ser perigoso para o aluno sem a ajuda e auxílio de um adulto, pelo fato da altura da casa ser muito grande, se preocupamos com a integridade física do aluno, assim sugerimos que o mesmo pode fazer o uso do astrolábio¹.

¹ O astrolábio é instrumento que os antigos astrônomos usavam para medir o ângulo dos corpos celestes acima do horizonte. Consiste em um disco de metal suspenso por uma moldura, de sorte que o disco permaneça vertical. O mesmo pode ser fabricado em casa. Para maiores informações sobre a construção do astrolábio acesse: <http://criatividadeeciencia.blogspot.com.br/2011/04/aula->

Assim, podemos calcular o quanto de água da chuva o telhado foi capaz de coletar. Com isso, chegamos a fórmula: $f(a)=a.m$ (sendo a a área do telhado e m a quantia de mm de chuva). Encontrada a fórmula e com ajuda do calendário (Figura 2) podemos calcular quantos litros de água podem ser recolhidos e reutilizados em casa.

Um exemplo, de acordo com a Figura 2, é a marcação do pluviômetro que registrou no mês de fevereiro 393,5mm. Sabemos ainda que área do telhado da nossa casa representada na figura 3 é 75m². Multiplicando a área do telhado por 393,5mm teremos o volume de água captado durante esse mês.

Então, ao aplicarmos os valores na fórmula $f(a)=a.m$, teremos $f(75)=75 \times 393,5$ (onde 75 m² é a área do telhado da casa e 393,5 mm de água da chuva), que é igual a 29.625,5 litros de água que podem ser recolhidos e reaproveitados no mês.

Com tudo, para todos os efeitos esta atividade tem como propósito conscientizar e mobilizar os alunos quanto à economia de água, sendo um dos motivos o fato da crise que estamos passando em São Paulo com a falta de água. Entretanto, caso ao contrário não teria a necessidade de realizar a atividade.

CONCLUSÃO

A fim de realizar uma proposta de trabalho para os alunos dos anos iniciais do ensino fundamental o trabalho foi fundamentado na modelagem matemática. Com o intuito de introduzir aos alunos o contato com a modelagem e ainda abordar a importância de nossos recursos naturais.

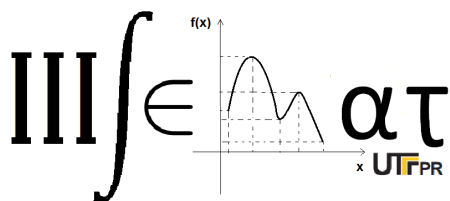
Com a captação da água além dos alunos aprenderem os conteúdos matemáticos e perceberem onde podem ser utilizados estes também percebem a importância da água e uma maneira de preservação dos mananciais.

Está presente neste os conceitos básicos de modelagem e a partir deste foi realizado o desenvolvimento da atividade de captação da água da chuva, com esta atividade podemos abordar os conteúdos de medidas de área e volume.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle de, SILVA, Karina Pessoa da e VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ANASTACIO M. Q. A., REALIDADE: Uma Aproximação Através da Modelagem Matemática; **Revista de Modelagem na Educação Matemática 2010**, Vol. 1, No. 1, 2-9; Universidade



III Semana da Matemática da UTFPR – Toledo

A matemática e seus caminhos: vencendo limites

Toledo, 04 a 8 de maio de 2015

Aberta do Brasil, UAB-UFJF; Disponível em: <<http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/index>>. Acesso em: 23 de abr. 2015.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. Rio Janeiro: ANPED, 2001.

CÁTALOGO, ABNT. **Segurança, Qualidade, Padrão e Confiança**. Disponível em: <<http://www.abntcatalogo.com.br/norma.aspx?ID=325>>. Acesso em: 23 de abr. 2015.

CÉZAR e SEZAR. **Expoente pré-vestibular Biologia**. Grupo Cultural: 2011/2012.

DECORAÇÃO. **Novidade Diária**. Disponível em: <<http://decoracao.novidadediaria.com.br/wp-content/gallery/telhado-colonial-duas-aguas/telhado-colonial-duas-aguas-12.jpg>>. Acesso em: 26 de abr. 2015.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo e MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**. São Paulo – 5° ed. 2005.

PIRES, T. **Programa de Educação Ambiental – PEA Cisterna**. Junho/2013. Disponível em: <http://licenciamento.ibama.gov.br/Hidreletricas/Teles%20Pires/RELAT%C3%93RIOS%20SEMESTRAIS/4%C2%BA%20Rel%20Semestral/P%2042/Anexo%2078_ppt%20Cisterna%20escolar_Alta%20Floresta.pdf>. Acesso em: 23 de abr. 2015.

SEMPRE SUSTENTÁVEL. **Aproveitamento de Água de Chuva de baixo custo para residências urbanas**. Disponível em: < <http://www.sempresustentavel.com.br/hidrica/aguadechuva/agua-de-chuva.htm> >. Acesso em 23 de abr. 2015.